COLLEGE F.X. VOGT		**Année scolaire 2023-2024**
Département de Mathématiques	**CONTROLE**	**Date : Samedi 13 janvier 2024**
Classe : TD-TTI	**EPREUVE DEMATHEMATIQUES**	**Coef : 4 ; Durée : 3h30**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 Points)

Exercice 1 :(3 points)

I) Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)= \frac{x^2+2}{(x^3+6x+3)^3}$; b) $g(x)= (3x-1)(\frac{3}{2}x^2 - x + 4)^5$; c) $h(x) = -4x^3 - \frac{3}{x^7} + 5$;

d) $t(x)=cosxsin^4x$ e) $n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **(1,5 pt)**

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les nombres a, b et c tel que, $f(x)= ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$. **(0,75 pt)**
2. Déterminer la primitive F de f sur $]-1;\ +\infty[$ qui prend la valeur -1 en 0. **(0,75 pt)**

Exercice 2 :(3,25 points) Soient les fonctions f et g définies par $g(x)=2x^3+3x^2-2$ et $f(x)=\frac{x^3+2}{x+1}$.

1- Etudier les variations de la fonction g. **(0,75 pt)**

2- a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur]0 ;1[. **(0,5 pt)**

b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 pt)**

3- Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f. **(0,75 pt)**

4- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-3\alpha^2+6}{2(\alpha+1)}$. **(0,75 pt)**

Exercice 3 :(4,5 points) Soit f la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter graphiquement ce résultat. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que f est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et que pour tout $x > 1, f'(x) = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$. **(0,75 pt)**
   c) Dresser le tableau de variation de f. **(0,75 pt)**
   d) Construire la courbe de f. **(0,75 pt)**
2. Soit g la restriction de f sur $[1; 2]$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[1; 2]$ vers un intervalle J à déterminer. **(0,5 pt)**
   b) On note g^{-1} la fonction réciproque de g, dresser le tableau de variation de g^{-1}. **(0,25 pt)**
   c) Construire $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$. **(0,5 pt)**
   d) Etudier la dérivabilité de la fonction g^{-1}. **(0,5 pt)**

Exercice 4 :(4,25 points) Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$, par : $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

1. Etudier les variations de f. **(0,5 pt)**
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle I à préciser. **(0,5 pt)**
3. Montrer que $f(x)=x$ admet dans $[0;+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]1;\frac{3}{2}[$. **(0,75 pt)**
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\in[1;\frac{3}{2}]$. **(0,5 pt)**
5. Soit x un élément de $\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Montrer que $|f'(x)|\leq\frac{3}{4}$. **(0,5 pt)**
6. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{3}{4}|U_n-\alpha|$. **(0,75 pt)**
7. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$. **(0,5 pt)**
8. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. **(0,25 pt)**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (05 points).

M. ELONO possède une plantation de café, de forme rectangulaire dont les dimensions en décamètres sont : la longueur $x+1$ et la largeur $\frac{1}{x-2}$. Il désire sécuriser cette plantation avec du fil barbelé en faisant quatre (04) tours et en laissant une porte de vingt (20) mètres sur une des longueurs pour pouvoir entrer et sortir de la plantation. Le mètre de fil est vendu à 400 FCFA. Après avoir sécuriser sa plantation, M. ELONO fait appel à un ingénieur agronome pour mener une étude. La production de café en 2023 est de 300 tonnes et la relation entre la production $P(n)$ d'une année et celle $P(n+1)$ de l'année suivante est $\frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)}=24\ \%$.

M.ELONO est invité à la base aérienne de Garoua. Cette base aérienne possède deux pistes circulaires d'atterrissage. La première piste est matérialisée par le cercle (C_1) de centre L, d'affixe $z_L=\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $10\sqrt{2}$ Km. La deuxième piste quant à elle est matérialisée par le cercle (C_2) image du cercle (C_1) par la similitude directe S, d'écriture complexe $z'=(-1+i)z+2i$. M. ELONO décide de se déplacer du point L vers le centre du cercle (C_2).

1. A partir de quelle année, la production sera-t-elle supérieure au quadruple de la production initiale ? **(1,5 pt)**
2. Déterminer la dépense faite par M. ELONO sachant que le périmètre de la plantation est minimal. **(1,5 pt)**
3. Déterminer la distance parcourue par M. ELONO. **(1,5 pt)**

Présentation : 0,5 pt