| COLLÈGE François-Xavier VOGT<br>B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28<br>E-mail : mail:collegevogt@yahoo.fr | | Année scolaire 2023-2024 |
|---|---|---|
| DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES | CONTRÔLE | Situation 5<br>Samedi 23 Mars 2024 |
| CLASSE : Terminale TI | EPREUVE DE MATHEMATIQUES<br>Durée 3h45 | Coefficient 4 |


## PARTIE A/ EVALUATION DES RESSOURCES 15,50 POINTS

**EXERCICE 1 (3,75 POINTS):**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ On donne trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+2i, z_B = 2-i \ et \ z_C = -1+2i.$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z qui vérifie :
   $|z-2+i| = |z\ +1-2i|$, puis vérifier que le point A appartient à (D). **0,75pt**
2) Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$. **0,75pt**
3) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,25pt**
4) On considère la similitude direct S de centre B qui transforme le point A en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S. **0,50pt**
   b) Donner l'écriture complexe de la similitude S. **0,50pt**
   c) (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les caractéristiques de (C') image de (C) par S et construire (C) et (C') sur la même figure. **1,00pt**

**EXERCICE 2 (1,75 POINTS):**

On considère deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par $U_0 = 1$ et $V_0 = 0$ et pour tout entier naturel $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + V_n \\ V_{n+1} = V_n - U_n \end{cases}$. On pose $Z_n = U_n + iV_n$ avec $i^2 = -1$.

1) Montrer que la suite $(Z_n)$ est géométrique de raison $1-i$. **0,50pt**
2) Exprimer $Z_n$ en fonction de $n$, puis donner sa forme trigonométrique. **0,75pt**
3) Exprimer $U_n$ et $V_n$ en fonction de $n$. **0,50pt**

**EXERCICE 3 (5 POINTS) :**

**A/** Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : cinq vertes, trois jaunes et deux rouges. On tire au hasard et simultanément trois boules de cette urne.

1) On considère les évènements : A « Les 3 boules tirées sont vertes », B « Les 3 boules tirées sont de la même couleur » et C « Les 3 boules tirées sont de couleurs deux à deux distinctes. » Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C. **1,25pt**
2) Pascal décide de jouer à un jeu décrit comme suit : Il mise la somme de 1000 FCFA et tire simultanément trois boules de cette urne. S'il obtient trois boules vertes, on lui remet 2500 FCFA. S'il obtient deux boules vertes, on lui remet 1000 FCFA. Dans tout autre cas, il ne reçoit rien. Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage des trois boules associe son gain algébrique.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. **0,75pt**
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$. Ce jeu est-il favorable pour pascal ? Justifier **0,75pt**

**B/** Le tableau suivant donne pour 6 années consécutives, les montants $X$ des frais de publicité d'une entreprise et $Y$ de son chiffre d'affaires, exprimés en millions de francs CFA. On donne $\bar{x} = 5{,}5$, $\bar{y} = 124$ et $V(y) = 186{,}67$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'années xi | 5,8 | 4 | 6,4 | 4,6 | 5,2 | 7 |
| Prix yi en milliers de FCFA | 128 | 102 | 138 | 116 | 118 | 142 |

1) Représenter le nuage de points associé à cette série. **0,50pt**
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Le résultat permet-il d'envisager un ajustement linéaire ? justifier. **1,00pt**
3) Déterminer une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ en utilisant la méthode des moindres carrés. **0,75pt**
4) En déduire une estimation du chiffre d'affaire pour 9 millions de frais de publicité. **0,25pt**

**EXERCICE 3 (5 POINTS) :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

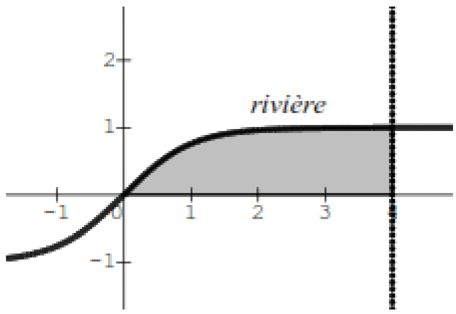
1) On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$; on note $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un
   a) Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$. **0,50pt**
   b) Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$ . **0,50pt**
   c) Donner le sens des variations de $f$ et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
   d) Tracer la courbe $(C_f)$. **0,50pt**
2) Pour tout entier non nul $n$, on pose $U_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ $J_n = \int_0^2 x^n e^{-x}\, dx$.
   a) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante. **0,50pt**
   b) À l'aide d'une intégration par parties, monter que $J_1 = 1 - 3e^{-2}$. **0,50pt**
   c) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ ; on $J_n = nJ_{n-1} - \frac{2^n}{e^2}$, puis calculer $J_2$ et $J_3$ **1,00pt**
   d) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $cm^2$ du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(C_f)$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. Calculer $\mathcal{A}$. **0,50pt**

**PARTIE B/ EVALUATION DES COMPETENCES 4,5 POINTS**

**SITUATION :** Après l'obtention de son baccalauréat T.I, le jeune ALLAN a créé avec l'un de ses amis topographe une start-up spécialisée dans la formation des jeunes au codage informatique, la programmation et la levée topographique. Le protocole de confidentialité qu'il a mis sur pieds pour le codage stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25. Le procédé de codage est le suivant

**Étape 1 :** À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre $k$ correspondant dans le tableau.
**Étape 2 :** On calcule le reste de la division euclidienne de $6k + 5$ par 26 et on le note $r$.
**Étape 3 :** Au nombre $r$, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |




Monsieur ATAZANG est propriétaire d'une grande plantation rectangulaire située au bord d'une rivière. Il sollicite les services de cette start-up pour la levée topographique. D'après les données topographiques, ce terrain rectangulaire est représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité 1 hm. La longueur L et la largeur l sont tels que $l = |b - c|$ et $5l + aL = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes solutions de l'équation : $z^3 + 8z^2 + 24z + 32 = 0$. Avec a un nombre réel.

En saison pluvieuse, une partie de cette plantation est généralement envahie par les eaux de la rivière. Ainsi la partie cultivable subie une modification. Elle est représentée par la partie grisée de la figure ci-contre, délimité dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité 1hm par les axes du repère, la droite d'équation $x = 4$ et la courbe $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, représentant la trajectoire de la rivière

**Tâches :**

1. Déterminer en $m^2$ la superficie de la plantation de monsieur ATAZANG en saison sèche. **1,50pt**
2. Déterminer en $m^2$ la superficie de la plantation de monsieur ATAZANG en saison pluvieuse. **1,50pt**
3. Coder le mot VOGT. **1,50pt**