

MINESEC		Année scolaire 2023 - 2024
COLLEGE PRIVE MONGO	Département de Mathématiques	TC Durée : 4 heures
BETI	Evaluation de la Quatrième Séquence	Coefficient : 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 pts

Exercice 1 : 4 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 4cm. On désigne par B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.

- 1) Déterminer le module et un argument de z_1 . 0,5pt
- 2) Soit M_2 le point d'affixe z_2 image de M_1 par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a) Déterminer z_2 , puis le module et un argument de z_2 . 1pt
 - b) Montrer que le point M_2 appartient à la droite d'équation $y = x$. 0,25 pt
- 3) Soit M_3 le point d'affixe z_3 image de M_2 par l'homothétie de centre 0 et de rapport $2 + \sqrt{3}$.
 - a) Montrer que $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$. 0,5pt
 - b) Montrer que les points M_1 et M_3 appartiennent au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. 0,5pt
- 4) On désigne par r la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h par l'homothétie de centre 0 et de rapport $2 + \sqrt{3}$. On pose $s = h \circ r$ la composée de r par h .
 - a) Donner la nature et les éléments caractéristiques s . 0,5pt
 - b) Déterminer l'écriture complexe de s . 0,5pt
- 5) construire à l règle et au compas les points $M_1; M_2$ et M_3 en utilisant les questions précédentes. 0,75pt

Exercice 2 : 5 pts

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x}$ et (Cf) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) , unité graphique 1cm sur les axes.

Partie A/ Etude d'une fonction auxiliaire. 2,5pts

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. 0,5pt
- 2) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. 0,5pt
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,30 < \alpha < 1,35$. 0,5pt
- 4) Etudier le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$. 0,5pt
- 5) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ puis en déduire la primitive G de la fonction g qui prend la valeur $\frac{1}{3}$ en 1. 0,5pt

Partie B / Etude de la fonction f : 2,75pts

- 1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5pt
- 2) a) Exprimer la dérivée $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ puis en déduire le sens de variation de f . 0,75pt
- b) Dresser le tableau de variation de f . 0,25pt
- 3) Soit (D) la droite d'équation $y = x$
 - a) Déterminer les coordonnées du point B intersection de (D) et (Cf) . 0,5pt
 - b) Préciser la position relative de (Cf) par rapport à (D). 0,5pt
 - c) Montrer que la droite (D) est asymptote à (Cf) en $+\infty$. 0,5pt
 - d) Construire (Cf) . 0,5pt

Exercice 3 : 3 pts

Une urne contient 2 boules blanches numérotées 1 et 2 ; 3 boules rouges numérotées 1 ; 2 et 3 toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

A : « les deux boules sont de même couleur »

0,5pt
0,5pt

B : « les deux boules portent le même numéro »

C : « On a tiré exactement une boule blanche et exactement une boule portant un numéro impair »

2- Un joueur tire simultanément deux boules au hasard de cette urne. Il reçoit 500 FCFA par boule blanche tirée, 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le 2 et perd 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le numéro 1. La boule rouge numéro 3 ne rapporte rien. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

0,75pt

a) Donner la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Ce jeu vous semble-t-il avantageux pour le joueur ? Justifier votre réponse.

0,5pt

Exercice 4 4pts

I) On considère l'équation (E) : $5x - y = -3$

1) Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation (E).

0,75pt

2) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

0,5pt

b) En déduire que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

0,5pt

On pose $u_n = x_n + a$ et $v_n = y_n + b$ où a et b sont des nombres réels.

c) Trouver les valeurs de a et b pour que les suites (u_n) et (v_n) soient géométriques.

0,5pt

d) En déduire x_n et y_n en fonction de n puis étudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) .

0,5pt

II) 1) Linéariser $\cos^5 x$.

0,75pt

2) En déduire une primitive de $\cos^5 x$.

0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES: 04,5 Pts

ESSO et YOPA sont deux grands commerçants d'une ville A. La Figure 1 ci-dessous est la carte du réseau routier d'une ville du Cameroun sur laquelle on a précisé la consommation en carburant entre deux quartiers. ESSO n'a plus assez d'argent sur lui et son tableau de bord indique qu'il y' encore 21 litres d'essence dans le réservoir de son véhicule. Cependant, il doit impérativement livrer une marchandise dans la ville F avant la fin de la journée.

YOPA quant-à lui a des livraisons à faire dans 8 supermarchés (partant du supermarché S au supermarché E) d'une autre ville X dont les liaisons possibles sont données par la Figure 2 ci-dessous. Les poids sur les arêtes représentent la durée moyenne en heures de parcours dudit trajet. Ne disposant que de 13 heures pour faire ces livraisons dans cette ville avant de passer à la prochaine, YOPA cherche à connaître le trajet qu'il devra emprunter pour terminer ces huit livraisons à temps.

A la fin de sa livraison, YOPA a regroupé dans le tableau ci-dessous la production moyenne en tonne y de son jardin en fonction du nombre d'année pendant 10 ans. Par des calculs, il désire estimer la production de son jardin la quinzième année ; si le couple x, y formé de l'année x et de sa production y est solution de la droite de régression de y en x obtenue à partir de la méthode des moindres carrés.

année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
production (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,4	10,5	11,5	13

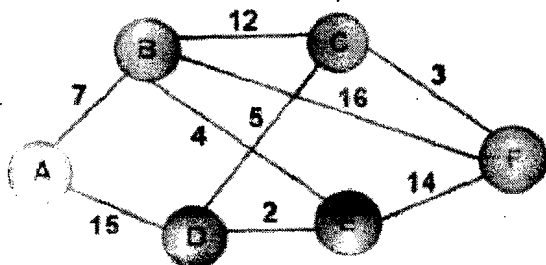


Figure 1.

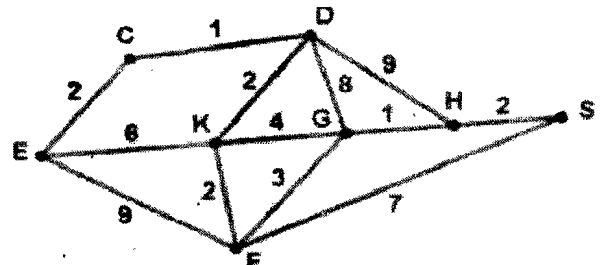


Figure 2.

Tâches :

1- ESSO pourra-t-il arriver dans la ville F avec cette quantité de carburant ?

1,5 pt

2- Quel itinéraire doit prendre YOPA pour terminer sa livraison à temps ?

1,5 pt

3- Aider YOPA à déterminer sa production la quinzième année.

1,5 pt