



La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

Étalée sur trois (03) pages, l'épreuve est notée sur 60 points

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (45 points)

Exercice 1 : Notion de groupe (08 points)

On définit sur $E =]-1; 1[$ la loi de composition $x \perp y = \frac{x+y}{1+xy}$.

1. Quand dit-on que (E, \perp) est un magma ? 0,5pt
2. Montrer alors que (E, \perp) est un magma. 1pt
3. Montrer que (E, \perp) est un groupe abélien. 2pt
4. Calculer $2 \perp 0$, $(-\frac{1}{2}) \perp 0$, $0 \perp (-3)$ et $x \perp x \perp x$. 2pt
5. Résoudre dans les équations : $(-2) \perp a = 0$, $b \perp 0 = 2$ et $x \perp x = x$. 2,5pt

Exercice 2 : Produit scalaire (07 points)

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$; $b = CA$ et $c = AB$. On appelle p son demi-périmètre et S son aire.

On se propose de calculer S en fonction de a, b et c .

1. Démontrer que $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et en déduire l'expression de $\sin^2 \hat{A}$. 1pt
2. Démontrer la formule de Héron Alexandrie : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 2pt
3. On appelle r le rayon du cercle inscrit dans ABC.
 - a) Démontrer que $S = pr$. 1pt
 - b) En déduire que $r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. 1pt
4. On appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
 - a) Démontrer que $R = \frac{abc}{\sqrt{2p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. 1pt
 - b) Démontrer que $R = a \times \sqrt{\frac{bc}{2(a+b-c)(a-b+c)}}$. 1pt

Exercice 3 : Statistiques et fonctions (14 points)

I. Les notes de mathématiques d'une classe de 2^{de} C sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

| Notes | $[0 ; 3[$ | $[3 ; 6[$ | $[6 ; 9[$ | $[9 ; 12[$ | $[12 ; 15[$ | $[15 ; 18[$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|
| Effectifs | 6 | 8 | 10 | 3 | 1 | 2 |

1. Déterminer : La population étudiée, la variable statistique, le caractère étudié, le mode. 2pt

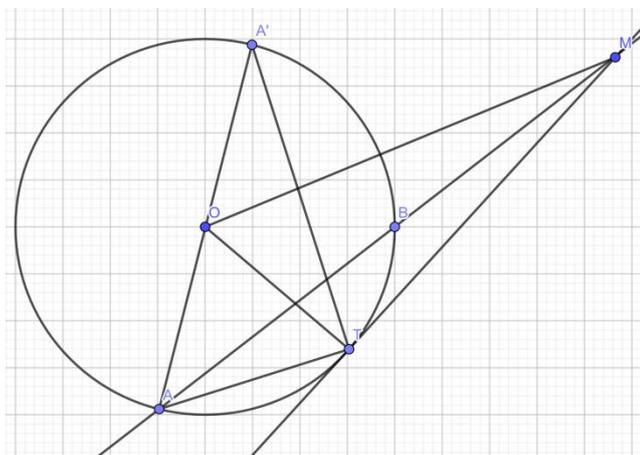
2. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique et déduire la valeur de la médiane. 2pt
3. Calculer la variance et en déduire l'écart-type. 2pt
4. Construire le diagramme de Camembert de cette série statistique. 1pt

II. On considère un rectangle ABCD de dimensions $AB = l$ et $BC = L$ ($L \geq l$). On construit extérieurement à ce rectangle, le carré BEPC de côté L . **ABCD est dit rectangle harmonieux (ou rectangle d'or) lorsque ses dimensions sont proportionnelles à celles du AEPD, c'est-à-dire lorsque $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$.**

1. On pose $x = \frac{L}{l}$. Vérifier que le rectangle ABCD est harmonieux si $x = 1 + \frac{1}{x}$. 2pt
2. On veut déterminer le nombre réel positif x_0 solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$.
 - a) Construire dans le même repère la courbe des fonctions $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. 2pt
 - b) En déduire un encadrement de x_0 par deux nombres décimaux d'ordre 1. 1pt
 - c) Vérifier par le calcul, le résultat obtenu à la question 2.b). 2pt

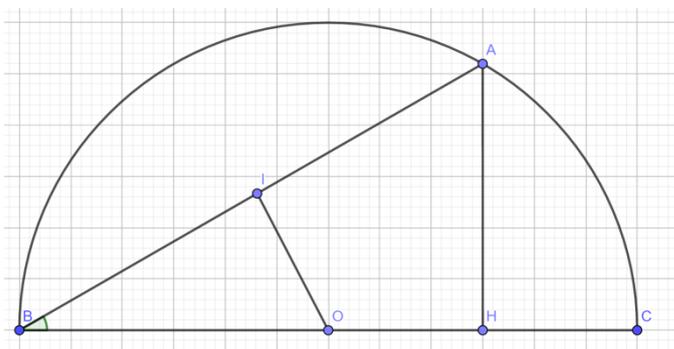
Exercice 4 : Droites et cercles du plan, trigonométrie (16 points)

I. Soit un cercle (C) de centre O, de rayon r et M un point extérieur à ce cercle. Une droite (D) passant par M coupe (C) en deux points A et B. (T) est une tangente à (C) passant par M et on note T le point de contact. A' le point diamétralement opposé à A. **On se propose de démontrer que le nombre réel $MA \times MB$ est indépendant de (D). Ce nombre est appelé puissance d'un point M par rapport au cercle (C).**



1. Démontrer que $MT^2 = MO^2 - r^2$. 2pt
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$. 2pt
3. En déduire que $MA \times MB = MO^2 - r^2$ et conclure. 2pt

II. Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre $BC = 2$, A un point de ce demi-cercle tel que \widehat{COA} soit aigu. H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I celui de O sur (AB) comme l'indique la figure ci-contre. Soit α la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$



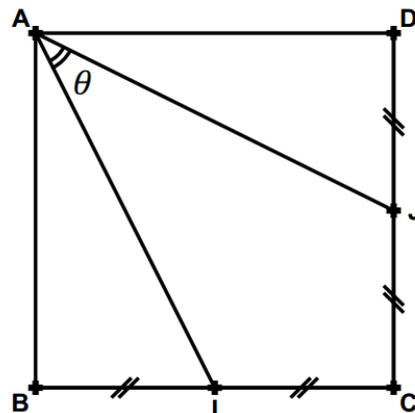
1. Démontrer que I est le milieu du segment [AB] et que $OH = \cos 2\alpha$. 2pt
2. Exprimer AB en fonction de $\cos \alpha$. 2pt
3. Démontrer que $BH = 2\cos^2 \alpha$ et $OH = 2\cos^2 \alpha - 1$. 2pt
4. En déduire que $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$. 2pt
5. Calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$; $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$. 2pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (15 points)

Les habitants d'un village sont concentrés autour d'une chefferie de façon circulaire. Ce village est traversé par une ligne rectiligne sur laquelle est installée deux postes de police de Gendarmerie aux différents entrés du village notées A et B. Un logiciel a permis de trouver que les limites circulaires de ce village ont pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$. Et la droite qui traverse le village a

pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$

Monsieur Weller habitant de ce village décide de céder son terrain de forme carré à ses trois enfants. Pour éviter le conflit entre les jumeaux, il décide que la parcelle de l'aîné, élève en classe de 2^{nde} C soit entre celles des jumeaux. La figure ci-contre illustre ce partage. L'aîné curieux voudrait connaître la mesure de l'angle θ à 10^{-2} .



Les notes de mathématiques que l'aîné a obtenues au cours de 60 contrôles continu sont consignées dans tel tableau ci-dessous.

| | | | | | | |
|----------------------------|---|---|----|---|----|----|
| Notes | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 14 |
| Nombre de contrôles | 8 | x | 15 | 7 | 3 | y |

On suppose que la moyenne de ces notes est de 8. Sa petite sœur Patterson dit que son âge est la valeur de l'écart-type de cette série statistique arrondi au chiffre supérieur d'entier.

Tâches :

1. Déterminer la distance AB qui sépare les deux postes de gendarmerie. **4,5pt**
2. Aider l'aîné à trouver la valeur de l'angle θ à 10^{-2} . **4,5pt**
3. Quel est l'âge de Patterson. **4,5pt**

Présentation : 1,5pt

Bonne chance !

« Maintenant, je ne perds plus le temps, j'avance » Maître Gims