B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28
e-mail : collegevogt@yahoo.fr

Année scolaire 2023-2(

Département de Mathématiques	MINI SESSION-Novembre 2023	Situation 2

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TC-TCE **Durée : 4H** **coefficient : 7**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 poi

EXERCICE 1 : (06 points)

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$. **0,75p**
2) Soit n un entier naturel. On désigne par a, b et c trois entiers naturels impairs. On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.
   a) Montrer que si n est impair, alors $n^2 \equiv 1[8]$. **0,5p**
   b) Montrer que si n est pair, alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$. **0,5p**
   c) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait. **0,5p**
   d) Montrer que $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$. **0,5p**
   e) En déduire que $2(ab+bc+ca)$ et $ab+bc+ca$ ne sont pas des carrés parfaits. **1p**
3) Un entier naturel n est tel que : 4 divise n ; n admet 14 diviseurs positifs ; n s'écrit sous la forme $n = 3\,7p +$ avec p premier.
   a) Montrer que n possède au plus deux diviseurs premiers. **0,25p**
   b) Déterminer les nombres n inferieurs ou égaux à 1000. **1p**
4) Soit p un entier relatif. On considère l'équation (E_p): $3x + 4y = p$, où $(x; y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(-p; p)$ est une solution particulière de (E_p). **0,25p**
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_p) en fonction de p. **0,75p**

EXERCICE 2 : (06 points)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 :

Soit a, b et c trois nombres complexes non nuls et de même module.

1) On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$ et $t = \frac{b+c}{b-c}$. Montrer que w et t sont imaginaires pur. **0,75p**
2) Dans cette question, on suppose que $a + b + c = 0$. On pose $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{b}{c}$.
   a) Montrer que $|p| = |q| = 1$ et $p + q = -1$. **0,75p**
   b) En déduire les valeurs exactes de p et q sous forme algébrique. **1pt**
3) Soit z et m deux nombres complexes.
   a) Démontrer que $1 + |z|^2 + 2Re(z) \geq 0$. **0,25p**
   b) En déduire que $|z - m|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |m|^2)$. **0,5p**

Partie 2 :

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (2-3i)z^2 + (-7-i)z - 8 + 2i$.

1) Montrer que -1 est une racine de P. **0,25p**
2) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$. **0,75p**
3) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $24 - 14i$. **0,75p**
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1p**

EXERCICE 3 : (03 points)

Soit φ un reel de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et z le nombre complexe defini par $z = \frac{1}{2}\left(\sin\varphi + i(1 - \cos\varphi)\right)$.