

B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28		Année scolaire 2023-2024
e-mail : collegevogt@yahoo.fr		2024
CONTRÔLE EPREUVE DE MATHÉMATIQUES		Du 21-10-2023
		Classe : PC
		Durée : 2H45

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

EXERCICE 1 : (04,50 POINTS)

A- Soient x et y deux nombre réels différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

1. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système (S) :
$$\begin{cases} x + y = \frac{4\pi}{3} \\ \cos(x) + \sin(y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que : $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$. 0,75pt

b) En déduire les solutions de (S). 0,75pt

2. Résoudre dans $]0; 2\pi[$, l'inéquation (I) : $\frac{1-\cos(x)}{0,5+\sin(x)} \leq 0$. 1pt

B- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit m un entier naturel, et (C_m) l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que

$$x^2 + y^2 - (m+2)x - (m+6)y + 4m + 10 = 0.$$

1. Déterminer la condition sur m pour que (C_m) soit un cercle. 0,75pt

2. Démontrer que, quel que soit le réel m , (C_m) passe par un point fixe I , dont on déterminera les coordonnées. 0,5pt

3. Quel est l'ensemble décrit par les centres de ces cercles lorsque m décrit $\mathbb{R}$? 0,75pt

EXERCICE 2 : (05,50 POINTS)

A- Soit a un nombre réel différent de $\frac{k\pi}{2}$ avec k un entier.

1. Démontrer que : $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sin(a)}{1+\cos(a)} = \frac{1-\cos(a)}{\sin(a)}$. 1pt

2. En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$. 1pt

B- Soit x un nombre réel différent de $\frac{k\pi}{2}$ avec k un entier.

1. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. 1pt

2. En déduire que $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$. 0,5pt

3. Montrer que : $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$. 0,5pt

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue z : $\frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = 1$. 0,75pt

5. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. 0,75pt

EXERCICE 3 : (05,50 POINTS)

A- Soit a et b deux nombre réel.

1. Démontrer que pour tous réels a et b , on a $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$. 0,5pt

2. En déduire que $2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\frac{6\pi}{7}$. 0,75pt

3. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$. 0,5pt

B- Soit α une mesure en radian d'un angle tel que $\cos(\alpha) = b$, et $|b| < 1$.

1. Montrer que l'équation $\cos(nx) = \cos(\alpha)$, où n est un entier naturel à $2n$ solution dans l'intervalle $[-\pi; \pi[$. 0,5pt

2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation du troisième degré en x , $4x^3 - 3x - b = 0$, où $|b| < 1$, dont l'une des solution est : $x = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

a) Montrer que : $4x^3 - 3x - b = \left(x - \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)\left(4x^2 + 4\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)x + 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\right)$. 0,5pt

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 4\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)x + 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3 = 0$. 1,25pt

c) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$ sont les deux autres racines. 1,5pt

EVALUATION DES COMPETENCES : (04,50 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé bien défini d'unité le décimètre. On suppose que $\pi = 3$.

Monsieur Abdoulaye est un riche homme d'affaire dans la région septentrionale. Pour les travaux d'aménagement de son domicile, il souhaite construire sa maison sur une surface rectangulaire. Les côtés de ce rectangle sont les points images des solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ de l'équation trigonométrique $2\cos^2 x - 1 = 0$.

Il souhaite de même que sa cour soit faite sur une parcelle délimitée par, le centre du cercle (C) de système d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 39 = 0$, les points de tangences à (C) issue du point $A(-5; 2)$ dont les équations des droites sont : $x + 3y - 1 = 0$ et $-x + 3y - 11 = 0$ et le point A .

Monsieur Abdoulaye, a reçu de son meilleur client la commande des boîtes cylindriques. Ces différentes boîtes seront toutes identiques, d'aire totale 600 centimètre carré et de hauteur 15 centimètres. Monsieur Abdoulaye souhaite avoir une idée du volume d'une boîte, pour lancer la production.

1. Déterminer le volume d'une boîte. 1,5pt

2. Déterminer l'aire de la surface rectangulaire qui servira à la construction. 1,5pt

3. Déterminer l'aire de la surface qui servira de cour. 1,5pt