COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-2024
Département de Mathématiques	CONTRÔLE	Situation 1

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe : P^{ère}C & C* **Durée : 2 heures 45'** **coefficient : 7**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 POINTS

EXERCICE 1 : (04 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On désigne par (P) la parabole d'équation $y = x^2$. A, B et C sont trois points distincts du plan d'abscisses respectives a, b, c. On se propose d'étudier la question de l'alignement possible des points A, B et C.

1) Montrer que si les points A et B sont sur (P), alors une équation cartésienne de la droite (AB) est $y = (a+b)x - ab$. **0.75pt**

2) On admet que C $\in (P)$. Montrer que C$\in$(AB) si et seulement si $(c-b)(c-a) = 0$. **0.5pt**

3) En déduire des questions précédentes que si A, B, C sont trois points alignés de la parabole (P), alors au moins deux de ces trois points sont confondus. **0.25pt**

4) Soit m un nombre réel. On pose $a + b = m + 1$ et $ab = m$. On nomme (D_m) la droite d'équation $y = (m+1)x - m$. On considère les points M_1 et M_2, points d'intersections de (P) avec la droite (D_m). x_1 et x_2 sont les abscisses respectives des points M_1 et M_2.

- **a-** Montrer que les nombres réels x_1 et x_2 sont des racines du polynôme défini par $f_m(x) = x^2 - (m+1)x + m$. (C_m) est la courbe représentative de f_m dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **0.5pt**
- **b-** Déterminer m pour que (C_m) passe par le point $D(-1; 2)$. **0.5pt**
- **c-** Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.
- **d-** Soit I_m le milieu du segment $[M_1M_2]$. Montrer que l'ensemble décrit par les points I_m lorsque m varie est une parabole dont on précisera l'équation. **0.5pt + 1pt**

EXERCICE 2 : (05 points)

I. On donne (I): $\sqrt{2x^2 - 8} > x + 5$ et (S): $\begin{cases} x + y + xy = 0 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I). **1pt**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S). **1.5pt**

II. Pour tout nombre réel m, on considère les systèmes d'équations linéaires dont x, y, z sont les inconnues. (S_m): $\begin{cases} mx + (m+1)y + z = 12 \\ (m-1)x - my + z = 3 \\ x + my + z = 7 \end{cases}$ et (Q_m): $\begin{cases} x + (2m+1)y = 9 \\ (m-1)x + y = 5 \end{cases}$

1) Pour $m = 2$, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_m) en utilisant la méthode du pivot de GAUSS. **1pt**

2) Soient x_o, y_o, z_o trois nombres réels. Montrer que pour tout nombre réel m, (x_o, y_o, z_o) solution de (S_m) si et seulement si (x_o, y_o) solution de (Q_m) et $z_o = 12 - mx_o - (m+1)y_o$. **0.25pt**

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (Q_m) suivant les valeurs de m. **0.75pt**

4) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_m) suivant les valeurs de m. **0.5pt**

EXERCICE 3 : (06 points)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points A$(2; 4)$, B$(-1; -2)$, C$(5; -2)$ et D$(-7; 1)$. (C) est le cercle d'équation cartésienne $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 175 = 0$ et (C') le cercle dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Déterminer la distance du point C à la droite (AB), puis en déduire l'aire du triangle ABC. **0.75pt**

2) Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ appartenant à une bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Le point **M_1 de coordonnées** $(x_1; y_1)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) et le point **M_2 de** coordonnées $(x_2; y_2)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC).

a- Montrer que $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ y_1 = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}$ et que $\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = -2 \end{cases}$. **0.5pt + 0.25pt**

b- En déduire de la question précédente les équations normales des bissectrices de l'angle $\widehat{ABC}$

Sont $\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}x - \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}y - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = 0$ et $\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}x - \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}y + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = 0$. **1pt**

3) Utiliser une autre approche pour déterminer les équations normales des bissectrices de $\widehat{ABC}$. **0.5pt**

4) Montrer que l'intérieur du triangle ABC est solution du système $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ y + 2 > 0 \\ 2x + y - 8 < 0 \end{cases}$, puis préciser parmi les deux équations des bissectrices de l'angle $\widehat{ABC}$ celle qui est intérieure au triangle ABC. **0.5pt**

5) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C'). **0.5pt**

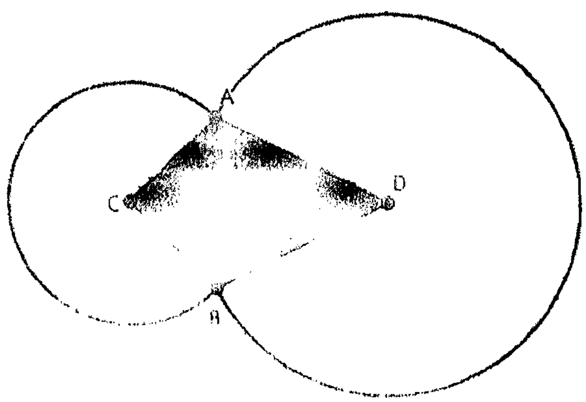
6) **a-** Déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle (C). **0.5pt**

b-Déterminer les équations des tangentes au cercle (C) et qui passent par le point D. **0.75pt**

c-Etudier la position relative des cercles (C) et (C'). **0.75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **05 POINTS**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ d'unité le décamètre. Un paysan a acheté un terrain dans une localité. Après la levée topographique, le géomètre lui remet un plan tel que représenté par le schéma ci-contre. Son terrain est représenté par le quadrilatère ACBD tels que le point C est le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 18 = 0$ et le point D le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$. Le paysan aimerait avoir une idée de la superficie de son terrain. Durant la levée topographique, le géomètre avait besoin des pointes de 10 millimètres, de 12 millimètres et de 16 millimètres, Une fois rendu au marché, il avait acheté au total 12 pointes pour un montant de 640 FCFA. Une pointe de 10 millimètres, de 12 millimètres et de 16 millimètres coûte respectivement 25 FCFA, 60 FCFA et 80 FCFA. La mairie de cette localité a bénéficié d'un budget d'investissement public. Pour cela, une route rectiligne parallèle à la droite (CD) doit être crée de tel sorte que le bord rectiligne de la route et le plus proche du terrain soit tangent au cercle de centre D. Pour que le paysan ne soit pas inquiété par ce projet, la distance du point C à le bord rectiligne de la route doit être supérieure à 60 mètres. Ce projet inquiète le paysan.



TÂCHES.

1) Déterminer l'aire du terrain du paysan. **1,5pt**

2) Déterminer le nombre de pointes de chaque type. **1,5pt**

3) Le paysan a raison d'être inquiet ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt