MINESEC — **ANNÉE SCOLAIRE 2023-2024**

LYCÉE CLASSIQUE DE NGONG — T^{le} **C**

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES — **DURÉE : 10H**

Examinateur : *Mr*. KAKA DAIROU — ***Coef* : 7**

FICHE DETRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES 2023-2024

EXERCICE 1

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$; b) $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

c) $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

d) $z = (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$; e) $z = 1 + e^{i\frac{3\pi}{8}}$

f) $z = 1 - e^{i\frac{3\pi}{8}}$

On considère les nombres complexes ci-après :

$Z_1=\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $Z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1.a)Ecrire le produit Z_1Z_2 sous forme algébrique.

b)Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes Z_1 , Z_2 et Z_1Z_2 .

c)En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2)On pose $Z_3=1-\frac{1}{\sqrt{2}}Z_1$.

EXERCICE 2 5,5pts

1- On considère le nombre complexe $\mathcal{W} = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) Montrer $|\mathcal{W}| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ puis Vérifier que $\mathcal{W} = 2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ 0.75pt

b) En linéarisant $\cos^2(\theta)$ *avec* $\theta \in IR$, *montrte que* $2\cos^2(\theta)\ 1+\cos(2\theta)$ 0,5pt

c) Montrer $\mathcal{W} = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$ est la forme trigonométrique de $\mathcal{W}$ 0.25pt

d) puis montrer que $\mathcal{W}^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$ 1pt

2- Déterminer la racine cubique du nombre complexe **8** sou la forme algébrique 0,75pt

3- Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v},)$ on donne **les points K , D et F** d'affixe respectif $Z_k = -1 - i\sqrt{3},\ Z_D = -1 + i\sqrt{3},\ Z_F = 2$

a) Montrer que $\frac{Z_F - Z_D}{Z_F - Z_k} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ puis déduire la nature du triangle KDF 0,75pt

EXERCICE 3 3.5pts

Soit la suite géométrique $\mathcal{V}_n$ *de premier terme* $\mathcal{V}_0 = 4$ *et de raison* $q = \frac{1}{2}$ **et** $\mathcal{U}_n$ **une suite** arithmétique *de premier terme* $\mathcal{U}_0 = \frac{\pi}{4}$ *et de raison* $r = \frac{\pi}{2}$. pour tout nombre complexe Z_n *de module* $\mathcal{V}_n$ *et dargument* $\mathcal{U}_n$

1- Exprime $\mathcal{V}_n$ *et* $\mathcal{U}_n$ en fonction de **n** puis déduire Z_n. 1pt

2- Montrer Z_n *est une suite* géométrique ***de raison*** $\frac{1}{2}i$ ***et*** *de premier terme* $Z_0 = 2\sqrt{2}(1+i)$. 1pt

3- Pour tout **n,** on pose $\mathcal{H}_n = Z_0 \times Z_1 \times Z_2 \times \dots\dots Z_n$ exprimer argument de $\mathcal{H}_n$ *en fonction de* $\boldsymbol{n}$. 0,5pt

EXERCICE 1 2pts

4- On considère le nombre complexe $\mathcal{U} = 1 + i(2-\sqrt{3})$

a. Montrer que $\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ **et** que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$. 0,5pt

5- On considère les deux suites $(\mathcal{X}_n)_{n\in IN}$ et $(\mathcal{Y}_n)_{n\in IN}$ $x_0 = 1; y_0 = 0$ $\forall n \in IN$ $\begin{cases} \mathcal{X}_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ \mathcal{Y}_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\mathcal{X}_n + i\mathcal{Y}_n = \mathcal{U}^n$ 1pt

b) Déduire que $\mathcal{X}_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$ **et** $\mathcal{Y}_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$ 0,5pt

EXERCICE 3 6pts

I. Soit les matrices **A et B** définies par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 5 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

1- Déterminer la matrice **R** comme reste de la division euclidienne de **AXB** par **10** ($A \times B \equiv R[10]$) **1pt**

II. Pour tout $n \in IN^*$ *on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(31)^k$

1- Déterminer les valeurs de **n** pour que $S_n \equiv 0[12]$ **1pt**

2- **a)** Démontrer que $\forall n \in IN^*, 30S_n = 31^n - 1$. **0,5pt**

b- Déduire que S_{2021} *et* 31 *sont etrangers* ($S_{2021} \wedge 31 = 1$). **0,5pt**

c-Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, *on a*: $31x \equiv 1[S_{2021}] \Leftrightarrow x \equiv 31^{2020}[S_{2021}]$ **0,5pt**

3- On suppose que si $p \geq 7; S_p \equiv 1[p]$

a- Montrer que $S_{45} \equiv 4[43]$ **et que** $S_{45} \equiv 3[47]$. **0,5pt**

b- **Résoudre**$\mathbb{Z}^2$ dans l'équation diophantienne $47x - 43y = 1$. **1pt**

c- Déterminer le reste de la division Euclidienne de S_{45} *par* 2021. **0,5pt**

4- Résoudre le système de congruence $\begin{cases} x - 4 \equiv 0[43] \\ x - 3 \equiv 0[47] \end{cases}$ **1pt**

EXERCICE 4 4pts

1- Soit f la fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = sin^2 x$

a- Etudier la monotonie de f sur IR 0,5pt

b- Démontrer que f admet une réciproque noté f^{-1} 0,5pt

c- Déterminer sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable et montrer que $(f^{-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ 1pt

2- Soit $(\mathcal{U}_n)$ *et* $(\mathcal{V}_n)$ deux suites définie par : $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}$; $\mathcal{U}_n \in [0;1]$ $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{2\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}^2{}_n}$; $\mathcal{V}_n = \frac{1-\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n}$

a- **Montrer que** $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_n^2$ 0,5pt

b- Montrer par récurrence que $\mathcal{V}_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$ et que $0 \leq 1 - \mathcal{U}_{n+1} \leq \frac{4}{3}(1 - \mathcal{U}_n)$ 1pt

c- Montrer que $0 \leq 1 - \mathcal{U}_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^n$ **et que** $\forall n \in IN$ $1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}\mathcal{U}_n}{n}$ 0,5pt

EXERCICE 5

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(3;0;1)$ $B(0,-1;2)$ $C(1;-1;0)$ *et* $D(1;1;-2)$

1- **a-** Montrer que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ne sont pas colineaires* **0,5pt**

b- Déduire la nature du triangle **ABC** puis calculer sa surface. **0,5pt**

2- **a-** Vérifier que $\vec{n}(2;-5;1)$ est un vecteur normal au plan. **0,5pt**

b- Déduire une équation cartésienne du plan **ABC.** **0,5pt**

3-a-Determiner la distance du point **D** au plan **ABC.** **0,5pt**

b- Déterminer le Volume du tétraèdre **ABCD** **0,5pt**

EXERCICE 6

I. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

On donne les points A(3, 2, - 1) et H(1, - 1, 3) .

1. Calculer la longueur AH ***0,25pt***

2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH)

3. On donne les points B(-6, 1, 1) ; C(4, - 3, 3) et D(- 1, - 5, - 1).

a. Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P) ***0,5pt***

b. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$. ***0,25pt***

c. Calculer l'aire du triangle BCD. ***0,5pt***

d. Calculer le volume du tétraèdre ABCD. ***0,5pt***

4. a. Calculer l'aire du triangle ABC. ***0,5pt***

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC). ***0,5pt***

EXERCICE 6

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arrête 1.

1-a) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

c) Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ est nul.

d) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2- Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

Déduire de 1.a) que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment $[AG]$.

3- Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

a) Ecrire une équation du plan (BDE).

b) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite (Δ) avec le plan (BDE).

d) Calculer $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BE}$.

e) En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre $HBDE$.

Rappel : Volume du tétraèdre : $\frac{1}{3}b\times h$, *où b est la surface de base et h la hauteur.*

EXERCICE 7

4) La fonction h est définie sur $I=[1;2]$ par $h(x)=\frac{3x+2}{x+2}$.

a) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall x\in I,\ |h'(x)|\leq\frac{4}{9}$. **0,5pt**

5) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}.$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq U_n\leq 2$. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}\geq U_n$. **0,5pt**

c) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite (U_n)? **0,25pt**

d) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |U_{n+1}-2|\leq\frac{4}{9}|U_n-2|$. **0,5pt**

e) En déduire que $|U_n-2|\leq(\frac{4}{9})^n$. **0,5pt**

f) Déterminer la limite de la suite (U_n). **0,25pt**

EXERCICE 8

I- 1. a) Démontrer la forme algébrique du nombre complexe: $(3+7i)^2$.

b) En déduire les racines carrées du nombre complexe : $U=-40+42i$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: (E): $z^2+(3-7i)z-21i=0$.

2. On pose $P(z)=z^3+(1-9i)z^2-(20+13i)z+(-42+42i)$.

a) Déterminer les nombres complexes a, b, et c tels que: $P(z)=(z-2-2i)(az^2$+bz+c).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $P(z)=0$.

II- Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Unité: 1cm

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives: $z_A=-3$; $z_B=2+2i$; $z_C=7i$; $z_D=-5+5i$

1. Placer les points A, B, C et D.

2. a) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe : $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera l'affixe du centre.

EXERCICE 9

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par:

$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

1. a) Ecrire sous forme algébrique $(1-i)^2$ puis en déduire les solutions dans C de l'équation $z^2 = -2i$.

b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait

$P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $l'équation\ (E)$: $P(z) = 0$.

3) Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives: $z_A = 1 - i, z_B = -1 + i, z_C = 1 + 3i, z_D = 3 + i$.

a) Faire une figure

b) On pose $Z = \frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$. Ecrire Z sous forme algébrique.

c) Interpréter géométriquemment le moduleet un argument de Z.

d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD?

EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1. soit le nombre $z_0 = 1 + i$.

a) Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par :

$z^3 - (7+1)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i) = 0$

b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2) On considère les points A, B et c du plan, d'affixe respectives $1 + i$; $3 + 1$; $3 + i$; $3 - i$.

a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Placer les points A, B et C dans le repère et complète la figure à fur et à mesure.

d) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.

3. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation

$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$

a) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ).

b) Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à (Δ).

c. Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

4. Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF ? Justifier votre reponse.

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal (o;$\vec{u}$;$\vec{v}$) d'unité graphique 2cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit $Z = \frac{z-2i}{z-2}$ avec $z = x + iy$.

1) Déterminer le domaine d'existence de Z.
2) On pose : $z = 4 + 2i$.
   - a- Calculer Z et donner sa forme algébrique.
   - b- Donner la forme exponentielle de Z puis en déduire la forme algébrique de Z^{2020}.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\frac{z-2i}{z-2} = 1 - i$.
4) On note $X = \mathbb{R}(Z)$, la partie réelle de Z.
   - a- Démontrer que : $X = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-21}{(x-2)^2+y^2}$.
   - b- Soit I le point d'affixe : 1+i et M(z). Quelle est l'interprétation géométrique de $|z - 1 - i|$?
   - c- Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel que Z soit imaginaire pur.
5) On note Y = Im(Z), la partie imaginaire de Z.
   - a- Exprimer Y en fonction de x et y.
   - b- En déduire l'ensemble (D) des points M(z) tel que Z soit réel.
   - c- Représenter (C) et (D) dans le repère.

EXERCICE 12

θ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation (E) d'inconnue z :(E) $z^2-2z+1+\tan^2\theta=0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [0.75pt]
   On considère deux nombres complexes $z_1=1+i\tan\theta$ et $z_2=1-i\tan\theta$.
2. (a) Ecrire z_2 en fonction de z_1. [0,25pt]
   (b) Déterminer z_1+z_2 et exprimer $z_1^2+z_2^2$ et z_1z_2 en fonction de θ. [0,75pt]
   (c) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $z_1^2+z_2^2=0$? [0.25pt]
   (d) Calculer le module de z_1 en fonction de $\tan\theta$ puis en fonction de $\cos\theta$. [0.75pt]
   (e) Montrer qu'un argument de z_1 est θ. [0.5pt]
   (f) En déduire qu'un argument de z_2 est $-\theta$. [0.25pt]
3. On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
   (a) Déterminer un argument α de $\frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
   (b) Donner une interprétaion géométrique de :arg $\frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
   (c) Quelle est la nature du triangle OAB ? [0,5pt]
   (d) Pour quelle(s) valeur(s)de θ ,OAB est un triangle équilateral ? [0.5pt]
4. On suppose que $\theta=\frac{-\pi}{4}$.
   (a) Montrer que : $z_1=1-i$ et $z_2=1+i$ [0.25pt]
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-1+i|=2$. [0.5pt]
   (c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z $(z\neq 1+i)$ tel que : $\frac{z-1+i}{z-1-i}$ soit un nombre réel. [0.75pt]

EXERCICE 12

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé$(O;u,v)$.

I- Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $z=x+iy$ tel que : $|\bar{z}-2+i|=|4-3i|$ 1pt

II- On désigne par f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z=x+iy$ associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que :
$z'=(-1+\sqrt{3}\,i)z-2\sqrt{3}-4i$

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f 1.5pt
2. Donner une l'expression analytique de f 1pt
3. Quelle est l'image par f d'un point A d'affixe 1-2i ? 0.5pt

EXERCICE 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O,I,J)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2-8\sqrt{3}Z+64=0$
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=4\sqrt{3}-4i$ et $b=4\sqrt{3}+4i$
   a. Ecrire a et b sous forme exponentielle
   b. Déduire de la forme exponentielle de $\frac{a}{b}$ la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de D.
4. Soit le point du plan tel que G est barycentre de $\{(O,-1);(D,1);(B,1)\}$
   a. Determiner l'affixe de G.
   b. Placer les points A , B , C , D et G.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
5. Soit h l'homothétie du plan de centre A qui transforme B en C
   a. Déterminer le rapport de l'homothétie h.
   b. Démontrer que le triangle AGC est l'image du triangle OAB par h.
   c. Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 14

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - 8 = 0$. **0,75pt**
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique $2cm$. A, B et C sont les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.
   (a) Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique. Placer les points A, B et C. **0,75pt**
   (b) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Quelle est la nature du triangle ABC ? **0,5pt**
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. **0,5pt**
   (d) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points M d'affixe z vérifiant :
   $2\left(z + \bar{z}\right) + z\bar{z} = 0$. Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. **1pt**
3. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.
   Caractériser géométriquement f, puis déterminer l'image de la droite (AC) par f. **1pt**

EXERCICE 15

I- le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé$(O; \vec{u}; \vec{v})$. A, B et C sont des points du plan complexes d'affixes respectives :
$Z_A = 1$; $Z_B = -3$ et $Z_C = 2 - \sqrt{3}i$, On désigne par S une similitude directe du plan.

1. Calculer le rapport $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ et en déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right)$ 1pt
2. Calculer le rapport $\frac{AB}{AC}$ 0.25pt
3. Donner l'écriture complexe de la similitude S sachant que $S(A) = A$ et $S(C) = B$ 0.5pt
4. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et r la rotation de centre A et d'angle de rotation $\frac{\pi}{3}$
   a) Donner l'écriture complexe de h 0.5pt
   b) Donner l'écriture complexe de r 0.5pt
   c) Donner l'écriture complexe de roh ; que peut-on conclure ? 0.75pt

EXERCICE 16

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{1}{z}$ (1pt)
   b) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Démontrer que 0 est le centre de gravité du triangle ABC. (0.5pt)
   c) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre O, qui transforme le A en B (0.5pt)
2. θ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, (E_θ) désigne l'équation

$$2(1 - \cos 2\theta)z^2 - 2\sin 2\theta\, z + 1 = 0$$

a) Résoudre (E_θ) dans $\mathbb{C}$ (on distinguera les $\cos\theta = 0$ et $\theta \neq 0$). (0,5pt)
b) Dans le cas où $\theta \neq 0$ déterminer le module des solutions z_1 et z_2 de (E_θ). $z_1$étant la solution ayant une partie imaginaire positive. (0,5pt)
c) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on désigne par Pet Q les points d'affixes z_1 et z_2, pour quelle valeur de θ.
   Le triangle $0PQ$ est-il rectangle ou équilatéral ? (0.25pt)

EXERCICE 17

1. On considère dans C le polynôme $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$ où $a, b \in \mathbb{R}$
   (a) Démontrer que si z_0 est une solution de (E), $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont également des solutions de (E). 0,75 pt
   (b) Déterminer a et b sachant que $1 + i$ est une solution de (E). 0,75 pt
   (c) En déduire trois autres racines de l'équation $P(z) = 0$ 0.5 pt
   (d) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$ 0.5 pt
2. (a) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solutions de l'équations $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. (0,75pt)

(b) Vérifier que la complexe $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième du complexe $8(1-i\sqrt{3})$. **(0,25pt)**

(c) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$. **(0.5pt)**

(d) Déduire des questions 2. et 4. les valeurs exactes de $\sin\frac{17\pi}{12}$ et $\cos\frac{17\pi}{12}$. **(0,5pt)**

EXERCICE 18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1. a) Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation (E). **0,5pt**
   b) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on a :
   $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2+az+b)$. **0,75pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . **1pt**
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$.
   a) Placer ces points dans le repère . **0,75pt**
   b) Le point Ω est le point d'affixe 2. Le point D est l'image de A par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Calculer l'affixe de D. **0,5pt**
   c) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**
3. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h \circ r$. **1pt**
   b) Déterminer une écriture complexe de $h \circ r$. **0,5pt**

EXERCICE 19

Le plan complexe est muni d'un repère $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $f: z \mapsto f(z) = \frac{z+i}{z+1}$ $avec\ z \neq -1$ et A le point d'affixe -1.

1. Déterminer le module et un argument de $f(i)$. 1pt
2. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel $[f(i)]^n$ est un réel. 0.75pt
3. On pose $z = x + iy; x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}$.
   a) montrer que : $\mathcal{R}e[f(z)] = \frac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\Im m[f(z)] = \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2}$. 1pt
   b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z ($z \neq -1$) pour lesquels $f(z)$ est un nombre complexe imaginaire pur ou nul. 1pt
4. Soit s la transformation du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-4 \end{cases}$. et (C) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + x + y = 0$
   a) Donner la nature et l'élément caractéristique de s. 0.5pt
   b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') image de (C) par s. 0.75pt

EXERCICE 20

On considère la fonction polynôme P à variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$.

1. **(a)** Démontrer que $2+i$ est une racine de P. **0,25pt**
   (b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$. **1pt**
2. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+i$, $z_B = -1-2i$ et $z_C = -4+i$.

(a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC. **0,75pt**

(b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$. **0,25pt**

(c) En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$. **0,25pt**

(d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. **0,25pt**

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

(a) Montrer que l'écriture complexe de r est $z' = iz - 3 - i$. **0,5pt**

(b) Préciser les éléments géométriques de r. **0,25pt**

4. Soit h la transformation du plan $\mathscr{P}$ d'écriture complexe $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles h est une homothétie de rapport 2. **0,5pt**

(b) On suppose dans cette question que $\alpha = 1 - i$ et on pose $S = r \circ h$.

Déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments géométriques de S. **1pt**

EXERCICE 21

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 6iz^2 + (-13 + 6i)z - 18 - 12i = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle et une solution imaginaire pure que l'on précisera. **1pt**

2) Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$. **0,75pt**

II. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -2$; $b = -3i$; $c = 2 - 6i$ et $d = 2 - 6i$.

1. a) Placer ces points dans le repère. **0,5pt**

b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés. **0,5pt**

c) Calculer $\frac{d-c}{d-b}$ et en déduire que les points B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**

2. Soit S la similitude de centre D qui transforme C en B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S. **0,75pt**

b) Donner l'écriture complexe de S. **0,5pt**

c) Déterminer l'affixe b' du point B' image de B par S. **0,5pt**

EXERCICE 22

On considère l'application f de l'espace dans lui même qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ tel que : $x' = \frac{1}{15}(13x + 5y - z + 7)$, $y' = \frac{1}{6}(2x + y + z - 7)$ et $z' = \frac{1}{30}(-2x + 5y + 29z + 7)$.

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par f. **0,5 pt**

2. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par f.

a. Montrer que la droite (MM') a une direction fixe que l'on précisera. **0,5 pt**

b. Montrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à l'ensemble (Δ). **0,5pt**

3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,5pt**

4. Soit (P) le plan d'équation : $x + y + 3z + 4 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) est perpendiculaire au plan (ABC). **0,25 pt**

b. En déduire la nature et l'élément caractéristiques de l'application $g = S_{(P)} \circ f$. **0,75pt**

c. Déterminer l'expresssion analytique de l'application g. **0,75pt**

EXERCICE 23

I- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2 - 2z.\cos(\alpha) + 1 = 0$ où α est un paramètre réel (z est l'inconnue). (0,25pt)

2) Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation (E_n): $z^{2n} - 2z^n\cos(\alpha) + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5pt)

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos(\alpha) + 1$

1) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)z + 1\right]$ (0,50pt)

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ (0,25pt)

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$ (0,5pt)

3) pour tout $\alpha \in]0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$. (0,50pt)

III- Posons $V_n(\alpha) = 2^{n-1}H_n(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a- Calculer $\lim_{\alpha\to 0} V_n(\alpha)$, $a_n = \lim_{\alpha\to 0} H_n(\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ (**NB** : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{b^n} = 0$ si $b > 1$) (0,75pt)

b- Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. (0,25pt)

c- En déduire, en revenant à la définition, que $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right) = 0$. (0,5pt)

EXERCICE 23

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$$P(z) = z^3 - (6 + 4i)z^2 + (8 + 14i)z - 12i$$

1) a) Vérifier que 2 est une racine de $P(z)$
   b) Déterminer trois complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$
   c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 + 3i$
   a) Placer les points A, B et C dans le repère
   b) Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et en déduire la nature exacte du triangle ABC
   c) Montrer que la similitude S de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 a pour écriture complexe $z' = 2iz + 3 - i$
   d) Montrer que C est l'image de A par S
   e) Déterminer et construire l'image par S du cercle de centre A et de rayon $r = 1{,}5\ cm$
3) On considère la transformation R d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 - \sqrt{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$$

   a) Déterminer l'écriture complexe de R
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de R
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z - 2 - 2i| = 4$

EXERCICE 24

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{u};\vec{v})$. On donne les ponts A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+2i, z_B = 3+2i$ et $Z_c = 1+6i$. f et g des transformations qui ont pour ecriture respective $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $z' = 3z - 2i$

1- Déterminer l'affixe du point E antecedant du point A par g [0,5pt]

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f [0,75pt]

3- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g [0,5pt]

4- h est la composée des transformations du plan g et f $(h = gof)$

a- Déterminer l'écriture complexe de la transformation h [0,5pt]

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h [0,75pt]

5- (D) est la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$ et (D') son image la transformation g

a- Déterminer l'expression analytique de g [0,5pt]

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') [0,75pt]

6- Soit s la similitude directe qui transforme C en B et qui a pour point invariant A. donner l'écriture complexe de s [0,75pt]

EXERCICE 25

I) On pose $Z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$.

1) Donner l'écriture algébrique de Z^2, puis celle de Z^4, et en déduire un module et un argument de Z^4. 1 pt

2) a) Déterminer alors le module et l'argument principal de Z. 0,5 pt

b) Prouver que $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. 0,5 pt

II) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)z - 33 + 30i = 0$.

1) Vérifier que -3 est une solution de (E), puis résoudre l'équation (E). 1,25 pt

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -3$, $z_B = -1+4i$ et $z_C = 2+3i$.

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle. 0,5 pt

b) Déterminer z_G l'affixe de G, barycentre des points pondérés (A ;-1), (B; 1) et (C; 1). 0,25 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixes z tels que $|z+1-4i|^2 - |z+3|^2 + |\bar{z}-2+3i|^2 = -28$. 1 pt

EXERCICE 25

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne A, B et C d'affixes respectives $a = i\sqrt{3}$, $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$ et $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Donner la nature exacte du triangle ABC
2. Déterminer un module et un argument de chacun des complexes suivants $z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0,\pi[$ et $z_2 = -2(\cos 3 + i\sin 3)$
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $z - 2 + 3i = i(2\bar{z} - 3i) + 5i$
4. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $\begin{cases} a+b = -4+i \\ ab = 1+13i \end{cases}$
5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2iz - 4 + 2i| = 6$
6. On pose $u = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$. Calculer u^2 puis déduire le module et un argument de u. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$ puis donner le module et un argument de chacune des solutions.
9. On pose $z' = \frac{z+2i}{z-2}$ déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $z' \in i\mathbb{R}$

EXERCICE 26

Le plan complexe $\mathbf{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On définit l'application $\mathbf{f}$ de $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{P}$ qui à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M'(x',y')$ d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$. On donne $(\mathcal{C})$: $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

1. Déterminer l'écriture complexe de $\mathbf{f}$. **0,75 pt**
2. Soit $\mathbf{g}$ la transformation ayant pour écriture complexe : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1-i)$.
   (a) Déterminer la nature de $\mathbf{g}$. **0,25 pt**
   (b) Déduire les éléments caractéristiques de $\mathbf{g}$. **0,75 pt**
   (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$. **0,5 pt**
   (d) déterminer une équation et la nature de l'ensemble des points $M(x,y)$ d'affixe z tels que : $| z - 2\sqrt{2} | = | z - 2 + 2\sqrt{2}i |$. **0,75 pt**
3. Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{C})$ par $\mathbf{f}$. **0,75 pt**

EXERCICE 27

Soit f l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M(z)}$ où $\mathrm{z = x + iy}$ associe le point $\mathrm{M(z')}$, $\mathrm{z' = x' + iy'}$ tel que $\begin{cases} \mathrm{x' = x + y - 2} \\ \mathrm{y' = -x + y + 1} \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées du point invariant Ω par f
2. Déterminer l'écriture complexe de f
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
4. Déterminer une équation de l'image par f de la droite d'équation $\mathrm{x - 2y + 2 = 0}$
5. Déterminer l'image du cercle de centre $\mathrm{I(0,1)}$ et de rayon $\mathrm{r = 2}$

EXERCICE 27

On considère la fonction ℓ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $\ell(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$.

1) Montrer que pour tout réel t, on a : $2\cos t - 1 = -4\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right]$. **0,75 pt**

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[$, $\frac{\ell(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{4\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})}{(x - \frac{\pi}{3})^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sin[\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})]}{x - \frac{\pi}{3}}}$. **0,75 pt**

b) Etudier la dérivabilité de ℓ en $\frac{\pi}{3}$. **0,5 pt**

3) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[$, on a : $\ell'(x) = -\frac{2\sin(x)}{3[\ell(x)]^2} = -\frac{\sqrt{3 - [\ell(x)]^6 - 2[\ell(x)]^3}}{3[\ell(x)]^2}$. **0,75 pt**

4) Montrer que ℓ admet une bijection réciproque qu'on notera μ. **0,5 pt**

5) a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité J de μ. **0,5 pt**

b) Vérifier que $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \in$ J, puis déterminer $\mu'(\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1})$. **0,75 pt**

c) Expliciter $\mu'(x)$ pour $x \in$ J. **0,5 pt**

Soit g la fonction définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = 1 + cosx$.

1- Etudier les variations de g sur I et dresser son tableau de variation.
2- Justifier que g réalise une bijection de I vers $]1; 2[$.
3- Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $]1; 2[$.
4- Déterminer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
5- a) Montrer que $g'(x) = -\sqrt{2g(x) - (g(x))^2}$.
   b) En déduire que pour tout $x \in]1; 2[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

EXERCICE 28

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \ , n \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$
2. Soit I l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$ t la fonction f définie sur I par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
   Montrer que f admet un unique point fixe dans I noté l. 0,5 pt
3. Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$ 1 pt
4. a. En appliquant l'inégalité des accroissement finis,
   montrer que pour tout entier n, on a $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - l|$ 2 pts

   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - l|$ 1,5 pts

   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 0,5 pt

EXERCICE 29

Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la fonction f et construire $\mathscr{C}$.
2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ possède une fonction réciproque g^{-1}, dont on construira la courbe dans le même repère que $\mathscr{C}$.
3. Soit $y = g^{-1}(x)$. Montrer que $\sin y = \dfrac{1}{x}$ et que $\cos y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
4. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a :
   $(g^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

EXERCICE 30

Soit (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $U_0 \in [-1;+\infty[$
et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{3x+4}$ définie sur $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ et sa courbe (C_f)

1. Etudier les variations de f. déterminer l'abscisse α du point d'intersection de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$
2. Etudier les variations de la suite (U_n) pour $U_0 \in [-1;\alpha[$ puis, pour $U_0 \in [\alpha;+\infty[$
3. a. Pour $U_0 \in [-1;\alpha[$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant U_n \leqslant \alpha$

   b. Pour $U_0 \in [\alpha;+\infty[$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_n \leqslant \alpha$

   c. En déduire le comportement de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$
4. Montrer que pour $n \geqslant 1$ on a $|4 - U_{n+1}| = \dfrac{|12 - 3U_n|}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}$.

   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $|4 - U_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|4 - U_n|$
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $|4 - U_n| \leqslant \dfrac{|4 - U_0|}{2^n}$
6. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $|4 - U_n| \leqslant 10^{-5}$

$(U_n)_n$ est une suite de nombres réels définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2 .
2. Montrer (en utilisant la récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 3$.
3. Montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante .
4. En déduire que $(U_n)_n$ converge .

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} \leq \frac{3 - U_n}{3}$.

6. Déduire que $0 \leq 3 - U_{n+1} \leq (\frac{1}{3})^n$.

7. En déduire la limite de la suite $(U_n)_n$.

EXERCICE 30

Soit f la fonction numérique définie sur $D =]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur D. **0,25pt**
2) Dresser le tableau de variation de f. **0,25pt**
3) Etudier le comportement de f à l'infini. **0,25pt**
4) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$[1\,;2]$. **0,25pt**
5)
a) Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle D vers un intervalle J à déterminer. **0,25pt**
b) Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **0,25pt**
6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ **0,25pt**
7) On appelle g la fonction définie sur D par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
a) Montrer que si x est élément de $[1\,;2]$, alors $g(x)$ appartient aussi à $[1\,;2]$ **0,25pt**
b) calculer la dérivée g' de g et montrer que, pour tout $x \in [1;2]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ **0,25pt**

c) En déduire que, pour tout $x \in [1;2]$: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ **0,25pt**
d) On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

- Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ **0,25pt**
- En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$. **0,25pt**

Soit f la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{sin2x}}{sinx}$.

1-a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. **0, 5 *pt***
b) Étudier la dérivabilité de $f$en $\frac{\pi}{2}$. f est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$? **0, 5 *pt***
c) Étudier les variations de f. **0, 5 *pt***
2- Montrer que f est une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à déterminer. **0, 5 *pt***
3- Soit g la bijection réciproque de f.
a) Préciser les domaines de continuité et de dérivabilité de g. **0, 5 *pt***
b) Montrer que pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$. **0, 5 *pt***
4- Soit $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.
a) Montrer que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$. **0, 5 *pt***
b) Montrer que pour $x > 0$, $\varphi'(x) = 0$. Que vaut alors $\varphi(1)$? **0, 5 *pt***
c) Calculer $\varphi(x)$ pour $x > 0$. **0, 5 *pt***
N.B : On rappelle que : $\sin(a - b) = sina \times cosb - cosa \times sinb$ et $\lim_{X\to0}\frac{sinX}{X} = 1$

PARTIE B. ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES 1: (4,5pts)

L'évolution de chiffre d'affaire de l'entreprise de Mr Maxwell en fonction de numéro de l'années est regroupée dans le tableau ci-dessous

année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
N° de l'année (xi)	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire (yi)	2,4	3,8	4,1	5	5,2	5,6

KAKA l'ami de M. MAXWELL possède un terrain qu'il veut absolument clôturer pour sécuriser doit acheter du fil barbelé pour la clôture de ces terrains.5metre de fil barbelé coute 8**000FCFA** et ***1unite*** est égale **5m.**

- ***Le terrain*** , est formée l'ensemble des points **M(x ;y)** du plan complexe vérifiant le relation:$z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + |z - \bar{z}| - 11 = 0$ avec $z = x + iy$.

Dans la boutique de M. MAXWELL, le petit BALAWE constante qu'il y a un carton ayant la forme d'un parallélépipède rectangle donc les dimensions mentionner sur le carton sont les suivantes :140cm, 112cm et 84 cm. très curieux de savoir le contenu de ce carton, BALAWE demande au boutiquier qu'est-ce qu'Il y a dans ce carton ? répondit le boutiquier *« ce carton est emplie de cube identiques dont l'arrêtes mesure un plus grand nombre entier de centimètre »*

Tâches :

1- *Déterminer le budget nécessaire pour la clôture de ce terrain* 1,25pt
2- *Quelle sera le chiffre d'affaire de l'entreprise de M. MAXWELL en 2025* 1,5pt
3- *Aidez SOUFYA à trouver le nombre de cube qui se trouve dans ce carton* 1,25pt

ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES 2

L'unité étant de 10 m ; la cour de la maison de Pierre vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_1)$ des points M(z) du plan tel que $z^3 = 8$. Pierre décide de mettre du gazon sur toute sa cour. 10 m^2 de gazon coûte 15 000 francs. Celle de Jacques vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_2)$ des points M(z) du plan tel que $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |2 - 2i|$. Il décide de verser du gravier sur sa cour et un camion de gravier peut recouvrir 314 m^2. Jacques achète le camion de gravier à 70 000 francs. Christophe quant à lui veut entourer sa concession avec du fil barbelé en faisant trois tours autour de sa concession. Sa concession vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_3)$ des points M(z) du plan tel que $[z^2 + (1 + 6i)z - 10 + 6i][z^2 + (1 - 6i)z - 10 - 6i] = 0$. Cinq mètres de fil barbelé coûtent 6000 francs.

1. Combien Christophe dépensera-t-il ? **3 pts**
2. Combien Jacques dépensera-t-il ? **3 pts**
3. Combien Pierre dépensera-t-il ? **3 pts**

ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES 3

Situation : M. SALLA possède trois terrains non encore exploités qu'il voudrait absolument sécuriser car il y a des personnes mal intentionnées qui utilisent ces espaces à des mauvaises fins. Il décide donc d'acheter du fil barbelé pour cloturer entièrement chacun de ces trois terrains, le rouleau de 5 mètres de ce fil lui est vendu à 3500 FCFA. Il devra en plus remettre 3000 FCFA pour les piquets et la main d'œuvre pour chacun des terrains.

Terrain 1 : A la forme d'un triangle rectangle ABC en A tels que $Z_A = 2 + 2i$ et Z_B et Z_C sont solutions de l'équation $Z^2 - (3 + 3i)Z + 5i = 0$ avec $Re(Z_B) < Re(Z_C)$.

Terrain 2 : Est de forme rectangulaire et ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution Z de l'équation $(1 + 4i)Z + (3 - 4i)\bar{Z} = 4 - 8i$ où $\bar{Z}$ désigne le conjugué du complexe Z.

Terrain 3 : Est formé de l'ensemble des points $M(x; y)$ d'affixe Z tels que le complexe $\frac{Z}{Z+2i}$ soit imaginaire pur.

Taches :

1) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 1**.
2) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 2**.
3) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 3**.

M. MAXWELL possède un champ triangulaire dont le sommet A a pour affixe 1 + 5iet les deux autres sommets sont les solutions de l'équation *complexe* $Z^2 - (2 + 4\sqrt{2} + 2i)Z + 4\sqrt{2} + i(2 + 4\sqrt{2}) = 0$. Il souhaite sécuriser son terrain par un fil barbelé qui coute 225f cfa le mètre et dispose de 42000f cfa. Sa fille AICHA élève en classe de TleD lui dit qu'elle pense que l'angle de sommet A mesure 60°. Son ami M.SOUFYANE lui propose 1000000f cfa pour l'achat de son terrain; M. MAXWELL lui dit qu'il peut vendre son terrain à 5000f cfa le mètre.

Taches 1. L'argent de M M. MAXWELL sera-t-il suffisant pour couvrir tout son terrain du fil barbelé? **1,5pt**
Taches 2. Sa fille a-t-elle raison ? **1,5pt**
Taches 3. M.SOUFYANE peut-il acheter tout le terrain de M. MAXWELL

ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES : 4

M. MAXWELL veut créer une entreprise dans le secteur de cacao culture. Dans le but d'avoir certaines informations sur le fonctionnement de l'entreprise, il fait appele a un financier. après analyse, l'expert stipule que « le cout moyen de production des déchets varie en fonction de nombre de tonne de production des déchets et est modéliser par la fonction $C(x) = \sqrt{x^2 + 12x - 5} - x$. Celui-ci est croissant et atteindra plu tard une valeur limitée.

KAKA le frère de MAXWELL quant lui il possède deux terrains qu'il veut absolument clôturer pour sécuriser doit acheter du fil barbelé pour la clôture de ces terrains.5metre de fil barbelé coute 8000FCFA et ***1unite*** est égale 5m.

- ***Le premier Le terrain*** , est formée l'ensemble des points **M(x ;y)** du plan complexe vérifiant l'équation (E_{11}): $z\overline{z} + 2(z + \overline{z}) + |z - \overline{z}| - 11 = 0$ **avec** $z = x + iy$.
- ***Le deuxième Le terrain*** , est un rectangle dont les dimension sont les parties réelle et imaginaire de la solution de l'équation(E_{22}): $z(1 + 4i) + (3 - 4i)\overline{z} - 4 + 8i = 0$ **avec** $z = x + iy$.

Tâches :

1- *Quel es le seuil de cout de production de déchets lorsque le tonne de production prend une valeur très grand* *1pt*
2- *Déterminer le budget nécessaire pour la clôture du premier terrain.* *1,25pt*
3- *Déterminer le budget nécessaire pour la clôture deuxième terrain.* *1,25pt*

« SPECIALITEEE »

EXERECICE 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les points $A(-2\,;-1\,;2)$; $B(6\,;-5\,;3)$; $C(-1\,;3\,;10)$ et le vecteur $\vec{u}\,(-4,-7,4)$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis interpréter géométriquement ces résultats [0.75pt]
b) Calculer les distances AB et AC. En déduire la nature exacte du triangle ABC [0.75pt]
2) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires [0.5pt]
3) Montrer que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$. [0.5pt]
4) Soit D(1 ; 1 ; 1) un point de l'espace.
a) Les points A, B, C, D sont – ils coplanaires ? [0.5pt]
b) Calculer le volume V, en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC. [0.5pt]

EXERECICE 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$. On donne les points $A(1\,;0\,;1)$, $B(2\,;2\,;4)$, $C(1\,;-1\,;0)$ et $D(2\,;1\,;-1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan (P) dont on déterminera une équation. **1pt**
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires. **0,5pt**
3. Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume du tétraèdre ABCD. **1pt**
4. Déterminer les réels a, b et c tels que le point O soit le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B, b) et (C, c). **0,75pt**
5. Soit (Ψ) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $4MA^2 - MB^2 - 2MC^2 = -16$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Ψ). **0,75pt**
   b) Démontrer que l'intersection de (Ψ) et (P) est un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. **0,5pt**

EXERECICE 2

On considère dans l'espace un cube $OABCDEFG$. On oriente l'espace par le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. Soit a un réel strictement positif et h l'homothétie de centre O et de rapport a. on note $M = h(A)$ et $L = h(C)$

1- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$. En déduire l'aire du triangle DLM [0,75pt]

2- Soit I le milieu de $[ML]$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque a varie [0,5pt]

3- Soit K l'image de F par l'homothétie de centre B et de rapport a . montrer que (OK) est perpendiculaire au plan (DML) [0,5pt]

4- Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (DML)

a- Démontrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$

b- Montrer que $\overrightarrow{OH} = \frac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$ [0,5pt]

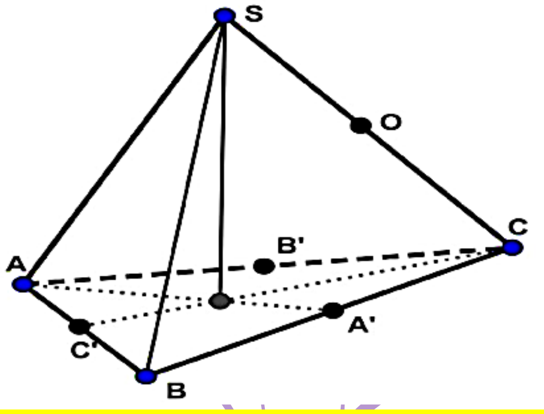
c- Montrer que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$ [0,5pt]

5- Déterminer le volume du tétraèdre $DLMK$ en fonction de a [0,75pt]

EXERECICE 3

$SABC$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). Get H sont des points tels que $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ et O le milieu du segment $[SC]$. $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et que AS= 4

1. Déterminer les coordonnées des points G, H et O dans $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **1pt**
2. Déterminer une équation du plan (GOH) **0,5pt**
3. Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$ **0,75pt**



EXERECICE 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'unité 1cm sur les axes.

1) On considère les points $A(0;1;-2)$; $B(-2;1;0)$; $C(-1;0;-2)$ et $D(2;-1;1)$.

   a- Justifier que les points A; B et C forment un plan (ABC) dont on déterminera une équation cartésienne. **0,25pt+0,5pt=0,75pt**

   b- Montrer que les points A ; B ; C et D ne sont pas coplanaires. **0,25pt**

   c- Calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0,5pt**

EXERECICE 5

Soit ABCDE une pyramide régulière telle que : ABCD est un carré ; la droite **(AE)** est perpendiculaire au plan **ABC et AB=AD=1m.**La pyramide est séparée en deux compartiments par le plan (P) passant par le milieu I du segment **[ED]** et les points **A , C** et a droite **(Δ)** d'équations cartésiennes : $\boldsymbol{x-1=y=z+\frac{5}{6}}$.

1) Détermine dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$,)*les coordonnées des points* ***D*** ; **C et I.**

2) Justifie que le plan (P) a pour équation $\boldsymbol{x-y+z}=0$.

3) Déduis-en les coordonnées du point **S** intersection de (P) et de **(Δ).**

©Kaka dairou dairoukaka@gmail.com

4) Calcule l'aire de la surface de séparation.

5.a) Calcule le volume du compartiment en forme du tétraèdre **ACDI.**

b) Déduis-en le volume du second compartiment

compétence

Monsieur POUGA est un agriculteur qui possède une plantation de cacao. Il a relevé que sa production (en Kg), après chaque saison de récolte depuis 2014 (année de rang 1), forme une série statistique à deux variables comme l'indique le tableau ci-contre :

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production y_i $(en\ Kg)$	94	219	751	2252	4573	6714	8157

Il voudrait avoir une estimation « aux moindres carrées » (*termes employés par son banquier qui suit sa production pour renforcer en prêt l'équipement de son exploitation*) de sa production en 2021 en supposant que la tendance des récoltes reste la même au cours du temps. Pour cela il fait appel à son fils de la classe de terminale afin de l'aider. Dans sa démarche, son fils constate que le nuage de points associé à cette série ne laisse pas entrevoir un ajustement linéaire et après plusieurs calculs, il décide donc de poser $y_i' = \sqrt{y_i}$ et constate que le nuage de points de la nouvelle série $(x_i; y_i')$ laisse entrevoir un ajustement linéaire.

Bien avant, **en 2012,** monsieur POUGA avait récolté son cacao et avait entreposé sa récolte dans une réserve ayant la forme d'un cube ABCDEFG de côte 1 dam, muni d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et avait constaté que le cacao occupait un volume ayant la forme d'un tétraèdre ABIG où I est le milieu du segment $[EF]$. Le prix d'un sac de cacao de 100 L coûtait 120 00 $FCFA$ à cette époque.

Pour le suivi des recettes de sa ferme, monsieur POUGA ai fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette $R(x)$ (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de x centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur $[1; 5]$ par $R(x) = 17x$ (en millions). Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au cout $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le bénéfice de son client principal pour x centaines de kilogrammes de cacao vendus est $B(x) = R(x) - C(x)$ défini sur $[1; 5]$. Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un x_0 dans $[1; 5]$ tel que le bénéfice soit égale à 80 millions de francs CFA.

Tâche 1 : Déterminer lorsque des x_0 existent, leur(s) encadrement(s) au dixième près. $\mathbf{1,5}pts$

Tâche 2 : Déterminer, à l'unité près, une estimation de sa production en 2021. $\mathbf{1,5}pts$

Tâche 3 : Déterminer le prix de vente de la production de cacao de M. POUGA en 2012. $\mathbf{1,5}pts$

EXERECICE 6

l'espace est muni du repère orthonormé $((O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ Soit $\mathcal{P}$ l'application de l'espace dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} 3x' = 2x + y - z - 3 \\ 3y' = x + 2y + z + 3 \\ 3z' = -x + y + 2z - 3 \end{cases}$

1.a)Déterminer l'image **A'** par $\mathcal{P}$ du point $A(1 ; 2 ; 3)$.

b) Déterminer l'ensemble des antécédents de **A'** par $\mathcal{P}$

2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par $\mathcal{P}$ est un plan (P).

3) Soit M un point de l'espace et M' son image par $\mathcal{P}$.

a)Démontrer que M'∈(P).

b) Démontrer que si M∉(P), la droite (MM')est orthogonale à (P).

4) En déduire la nature de (P) puis définir une projection vectorielle associée à $\mathcal{P}$

EXERECICE 7

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $A(2\,;0\,;-1), B(1,-1,0), C(-1,0,1)$ et $D(0,1,-1)$.

1) Donner l'expression analytique de l'homothétie h_0 de centre A et de rapport $k = 3$.

2) Donner l'expression analytique des homothéties $h_1\left(B\,;\frac{1}{2}\right)$, $h_2(C\,;2)$ et $h_3(D\,;-4)$.

3) Déterminer l'expression analytique de $h_1 \circ h_3$ et préciser ses éléments caractéristiques.

4) Déterminer l'expression analytique de $h_2 \circ h_1$ et donner ses éléments caractéristiques.

5) Soit **h** l'homothétie de centre $G(0\,;1\,;-1)$ et de **rapport** $k = -4$ et la translation t de vecteur $\vec{u}(-2\,;1\,;1)$

a)Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ t$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ h$

EXERECICE 7

Soit **(P)** le plan d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$ et g l'application de l'espace dans luimême

d'expression analytique : $\begin{cases} 3x' = -x - y - 2z + 6 \\ 3y' = -2x - y + 2z - 6 \\ 3z' = -2x + 2y - z + 12 \end{cases}$

Déterminer l'expression analytique de la réflexion **S** de plan **(P)** puis définir une projection vectorielle associée à **S.**

2) Démontrer que **g** est un **demi-tour** dont on précisera l'axe puis définir une projection vectorielle associée à g.

3) Démontrer que l'application f définie par : $\begin{cases} 3x' = -x + 2y - 2z + 2 \\ 3y' = 2x + 2y + z - 1 \\ 3z' = -2x + y + 2z + 1 \end{cases}$ est une réflexion dont on précisera le plan.

4) Déterminer l'expression analytique du demi-tour Δ d'axe (Δ) de système d'équations cartésiennes :
$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$*

1) EXERECICE 8

On considère dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $I(3\,;0\,;0)$, $J(0,3,0)$, $K(0,0,3)$ et le point **G,** centre de gravité du triangle **IJK.**

1) Déterminer les coordonnées de **G** et démontrer que **(OG)** est orthogonale au plan **(IJK).**

2) Déterminer les coordonnées de l'image de **O** par la réflexion $S_{(IJK)}$.

3) Déterminer les coordonnées des images de **O, I, J et K** par le demi-tour $S_{(OG)}$.

4) Soit **(P)** le plan d'équation $2x - y + z = 3$ et **H(3 ; 2 ;2)** un point de l'espace.

a)Déterminer les coordonnées des images respectives **O' et H'** des points **O et H** par la réflexion de plan **(P).**

Démontrer que les droites **(OH)** et **(O'H)** sont sécantes en un point de **(P)** dont on précisera les coordonnées.

5.a)Déterminer les images **O' et A'** des points **O et A(2 ;2 ;-1)** par le demi-tour d'axe **(D)** dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 + t \\ \quad 2 - t \qquad (t \in \mathrm{IR}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (O'A')

c) EXERECICE 8

L'expression analytique d'une application de l'espace est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$

1- **Justifier que f est une application affine**
2- Déterminer l'ensemble **(P)** des points invariants par f.
3- Justifier que pour tout point M de l'espace, si $f(M) = M'$ alors $M \in (P)$ et si $M \notin (P)$, alors $\overrightarrow{MM'} \perp (P)$
4- Déduire la nature de f

5- Vérifier que $f o f = f$

d) EXERECICE 9

L'expression analytique d'une application de l'espace est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x+4y-2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x-2y+z-6) \\ z' = \frac{1}{3}(-3x-6y+3z-6) \end{cases}$

1- Déterminer l'ensemble **(D)** des points invariants par f.

2- Justifier que pour tout point $M \notin (D)$, d'image **M' par f**,

a- **Le** point **I** milieu $[MM'] \in (D)$

b- $\overrightarrow{MM'}$ *a une direction fixe et* $\perp (D)$

3- Déduire la nature de et les éléments caractéristique **de** f

4- Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(P)\ x+2y-3z+1$

5- EXERECICE 10

L'expression analytique d'une application f de l'espace est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-2x-3y+6z-3) \\ y' = \frac{1}{7}(-3x+6y+2z-1) \\ z' = \frac{1}{7}(6x+2y+3z+2) \end{cases}$

1- Déterminer l'ensemble **(P)** des points invariants par f.

2- Justifier que pour tout point $M \notin (P)$, d'image **M' par f**,

a- **Le** point **I** milieu $[MM'] \in (P)$

b- $\overrightarrow{MM'}$ *a une direction fixe et* $\perp (P)$

3- Déduire la nature de et les éléments caractéristique **de** f

EXERECICE 10

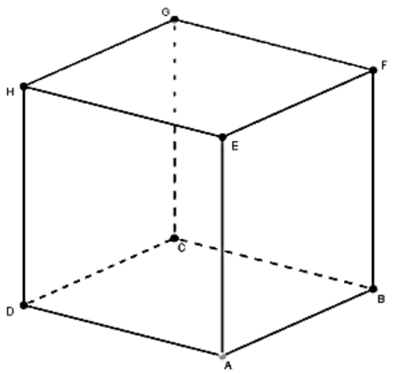
1- Justifier que les plans $(P)\ : x-2y+z-3=0$ $\quad (P'): 2x+y-3z-1=0$ **sont sécantes**

2- **Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe** $(D): \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ : x-2y+z-3=0 \end{cases}$

EXERECICE 10

II - On considère les plans $(P): x-2y-z+1=0$ et $(P'): x+y-z=0$.

1. Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P). **(2 pts)**
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{(P)} \circ S_{(P')}$. **(1 pt)**
3. En déduire l'expression analytique de $S_{(P)} \circ S_{(P')}$. **(2 pts)**
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées $S_{(ADE)} \circ S_{(HGF)}$ *et* $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$. **(1 pt)**



ACTIVITE D'INTEGRATION

L'entrepreneur MAXWELL est un grand producteur de maïs. Son frère KAKA très matheux l'aide souvent dans la construction du grenier de stockage de sa production agricole et lui fournit de temps à autre quelques informations sur cette production. En 2016, le grenier qu'ils devraient construire a la forme d'un cube

ABCDEFGH dans l'espace muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$d'unité graphique 4m. Ce grenier est divisé en deux compartiments : le premier est le tétraèdre ABCF qui contient des produits devant empêcher les insectes destructeurs du maïs. Le second compartiment représentant le reste du grenier devrait contenir la quantité de maïs produite cette année-là. Pour faire peur aux rats et souris pouvant détruire le maïs stocké, DAIROU envisage de placer en chacun des points L, J et K des gongs automatiques de telle sorte que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\ et\ \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$ et Enfin au point défini par :$O = bar\{(A;2),(B;1),(C;3)\}$, DAIROU projette d'y placer un gris-gris qui devrait mettre en déroute tout voleur mettant pied dans ce champs de maïs. Impressionné par tout cela, SOUFYANE qui passe en Terminale scientifique et qui venait de commencer son stage dans cette entreprise décide d'étudier les relations mathématiques qui en découlent.

Tu es invité(e) à te joindre à **SOUFYANE** pour consolider tes acquis en répondant aux questions suivantes :

Taches

1- Démontrer que la droite (EB) est orthogonale au plan (DGF)
2- Prouver que les droites **(AJ), (BK) et (CL)** sont concourantes au point O.
3- Justifier que les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{AH}}, \boldsymbol{\overrightarrow{EB}}\ \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ sont coplanaires puis donner une représentation paramétrique du plan (AHC).Et en déduire une équation cartésienne du plan (AHC).
4- Donner un repère du plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ image du plan (AHC) translation du vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{EB}}$
5- Démontrer que l'intersection du plan $(\boldsymbol{\mathcal{Q}})\ \boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{\mathcal{R}})$ d'équation cartésienne respective :$\boldsymbol{-x+y+z=0}$ **et**$\boldsymbol{x+y-z=0}$ **se** réduit a un singleton $\boldsymbol{A(0,0,0,)}$
6- Donner une équation cartésienne du plan $\boldsymbol{\mathcal{P}' d'mage\ de\ \mathcal{P}}$ **par homotethie de centre** $\boldsymbol{\Omega(1;2)}$ **et de rapport** $\boldsymbol{k} = \sqrt{\boldsymbol{2}}$
7- Déterminer une équation cartésienne $(\mathscr{H})$ image d'espace par la réflexion de plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$
8- Sachant que la masse volumique est $\boldsymbol{\rho = 0,63894375 kg/m^3}$
   Déterminer en kilogrammes, la quantité de maïs que peut contenir le grenier à construire.

« *Quant vous demandez ou est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendants l'examen* »