Fascicule de Mathématique Niveau système

Premières scientifiques

Proposé par Mr Mayouma Adbéel Professeur certifié de lycée

Tél : 06 877 94 96. 06 9986898. 05 5991301.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0.$$

$$(x-7)(x-5)(x+4)(x+6)=608.$$

$$\sqrt[4]{(19-x)(x-2)}+\sqrt{19-x}+\sqrt{x-2}=7$$

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{y-4}+\sqrt{z-6}+\sqrt{t-8}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(x+y+z+t)$$

Premier trimestre

Chapitre1 : Equations, inéquations et systèmes

Exercice1

Exprimer les expressions en fonction de S et P.

1) $A=\frac{x'}{x''+1}+\frac{x''}{x'+1}$
2) $B=|x'-x''|$
3) $C=\sqrt{x'}+\sqrt{x''}$
4) $D=x''\sqrt{x'}+x'\sqrt{x''}$
5) $E=\frac{x'+x''}{x'^2+x''^2}$

6) $F = \frac{(x'+x'')^2}{|x'-x''|}$; $x' \neq x''$
7) $G = (x'^2)^2 + (x''^2)^2$
8) $H = \left|x'|x''| - x''|x'|\right|$
9) $I = \sqrt{|x' - x''|}$
10) $J = x'^3 + x''^3$
11) $K = \frac{x'}{x''^2} + \frac{x''}{x'^2}$; $x' \neq 0$; $x'' \neq 0$.

Exercice2

1) Déterminer le nombre réel β pour que le polynôme défini par $p(x) = 2x^2 - \beta x + 3\beta - 6$ soit divisible par $x - 2$.
2) Soit p le polynôme défini par : $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Déterminer une condition portant sur les nombres réels a, b et c pour que :
   a) p ait deux racines opposées ;
   b) p ait deux racines inverses l'un et l'autre ;
   c) p ait une racines nulle ;
   d) p ait une racine égale à -2.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $x^2 - |2x + 3| > 0$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$ où a et b sont deux nombres réels.
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$,les équations suivantes :
   a) $ax^2 - (2 + a^2)x + 2a = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
   b) $a^2x^2 - 2x + \frac{1}{a^2} = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

Exercice3

a et b désignent deux nombres réels et n un nombre entier naturel tel que $n \geq 1$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $x^2 - 1$ divise le polynôme $ax^{n+1} + bx^n + 1$.
2) Calculer alors le quotient de $ax^{n+1} + bx^n + 1$ par $x^2 - 1$.

Exercice4

Les polynômes d'Hermite sont les polynômes, notés H_k définis par :

$H_0(x) = 1$; $H_1(x) = \frac{1}{1}(x - 0)$; $H_2(x) = \frac{1}{2\times1}(x - 0)(x - 1)$;

$H_3(x) = \frac{1}{3\times2\times1}(x - 0)(x - 1)(x - 2)$ et pour tout nombre entier naturel non nul : $H_k(x) = \frac{1}{k\times(k-1)\times\ldots\times2\times1}(x - 0)(x - 1)\ldots[(x - (k - 1)]$

1) Déterminer le degré du polynôme H_k.
2) Déterminer, pour tout nombre entier naturel k, la valeur de $H_k(k)$.
3) Déterminer les racines de H_k.

Exercice5

Deux villes A et B sont distantes de $150\ km$ par la route.

Un automobiliste part de A et le trajet aller-retour entre A et B en $5h30\ min$. Sa vitesse moyenne à l'aller est supérieur de $10km/h$ à sa vitesse moyenne v au retour.

1) Exprimer en fonction de v la durée du trajet aller, puis la durée du trajet retour.
2) En déduire une équation dont v est solution.
3) Expliquer pourquoi résoudre cette équation revient à résoudre l'équation :
   $\frac{11}{2}v^2 - 245v - 1500 = 0$.
4) En déduire les vitesses moyennes à aller et au retour.

Exercice6

On considère un polynôme P défini par : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1) Quelles conditions doivent satisfaire les réels a, b, c et d
   a) $x_0 = -1$ soit solution de $P(x)$.
   b) $x_0 = 1$ soit solution de $P(x)$.
2) On suppose que : $P(x) = x^3 - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{6}$
   a) Sans calculer $P(1)$, montrer que $P(1) = 0$.
   b) Déterminer les réels $\propto, \beta$ et γ tel que : $P(x) = (x - 1)(\propto x^2 + \beta x + \gamma)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

Exercice7

Un artisan commercialiste des produits au prix de $1250F\ CFA$ l'unité.

x désigne la production journalière de l'artisan et on suppose qu'il vend tout ce qu'il fabrique.

Le coût de production est la fonction C définie par :

$C(x) = 2x^2 + 500x + 50000$.

1) Exprimer en fonction de x la recette journalière $R(x)$.
2) Exprimer en fonction de x le bénéfice journalier $B(x)$.

3) Calculer $B(x)$ pour $x = 50$, $x = 100$ et $x = 300$. Interpréter ces résultats.
4) Quelle quantité doit produire doit produire l'artisan pour réaliser un bénéfice.

Exercice8

$n = \overline{abc}$ désigne un nombre réel à trois chiffres.

On alors $n = 100a + 10b + c$.

Déterminer le nombre n sachant que :

- La somme des ses chiffres est égale à 10;
- $\overline{cba} = \overline{abc} + 297$;
- $n = \overline{bca} - 117$.

Exercice9

Le livre de mathématiques de première S a une forme de parallélépipède rectangle.

a, b et c désignent ses trois dimensions en cm.

Sachant que son volume est égal à $990\ cm^3$, la somme des aires des faces est égale à $882\ cm^2$ et la somme des longueurs de ses arêtes est égale à $160\ cm$, trouver ses dimensions.

Exercice10

n et m sont deux nombres entiers naturels non nuls.

P_n et Q_m désignent les polynômes définis par :

$\begin{cases} P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q_n(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \end{cases}$; avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$

1) Le cas $n \neq m$.
   a) On suppose que $n > m$. Montrer que $deg(P_n + Q_m) = n$.
   b) Que vaut $deg(P_n + Q_m)$ si $n < m$.
   c) Déterminer $deg(P_n \times Q_m)$.
2) Le cas $n = m$.
   a) On suppose que $a_n + b_n \neq 0$, Montrer que $deg(P_n + Q_m) = n$.
   d) Que vaut $deg(P_n + Q_m)$ si $a_n + b_n = 0$.

Exercice11

P_n désigne un polynôme de degré n ; $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et n un nombre entier naturel non nul.

On suppose connue une racine de P, notée $\propto$ non nulle.

L'objectif est de déterminer les coefficients du polynôme de degré $n-1$, noté Q_{n-1} tel que : $P_n(x) = (x-\propto)Q_{n-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ avec $b_{n-1} \neq 0$.

1) Montrer que $b_{n-1} = a_n$ et $b_0 = -\frac{b_0}{\propto}$ puisque pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ et $b_k = a_{k+1} + \propto \times\, b_{k+1}$.
2) Reproduire et compléter le tableau de Hörner.

Coeff	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	…	x^2	x^1	x
P_n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		…	a_2		a_0
Q_n		a_n			…			

Exercice12

Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre donné p et une longueur donnée x.

1) Déterminer l'aire de la feuille en fonction de x et de p.
2) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la feuille est maximale.

Exercice13

f désigne un polynôme de degré trois : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$.

1) Déterminer les réels p, q et r tels que $f(x) = a(x^3 + px^2 + qx + r)$.
2) Vérifier que si x est racine de f si et seulement si x est racine de $Q_1(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.
3) On suppose que $Q_1(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ admet trois racines notées $\propto$, β et γ.
   a) Développer $Q_2(x) = (x-\propto)(x-\beta)(x-\gamma)$.
   b) En déduire que si $Q_1(x) = Q_2(x)$, alors :
   $p = -(\propto + \beta + \gamma)$; $r = -\propto\beta\gamma$; $q = \propto\beta + \propto\gamma + \beta\gamma$.
   c) Déduire des questions précédentes que :
   $\propto + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$; $\propto\beta\gamma = -\frac{d}{a}$; $\propto\beta + \propto\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$
4) f désigne un polynôme défini par $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
   a) Calculer $f(-1)$, que peut-on en déduire de -1 pour f.

b) On pose $\propto = -1$, déterminer les deux autres racines β et γ de f en utilisant les relations coefficients-racines établis à la question 3).

Exercice14

Une boîte de conserve a une forme cylindrique.

Son aire totale est égale à $600\ cm^2$ et elle mesure $15\ cm$ de hauteur.

1) Démontrer que le rayon R de la base vérifie l'équation : $R^2 + 15R - 100 = 0$.
2) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.
3) En déduire le volume V de la boîte. Dans tous les calculs, on prendra $\pi = 3$.

Exercice15

x et y désignent deux nombres réels, s'ils existent, dont la somme et le produit son égaux à un même nombre réel m.

1) Donner un exemple de deux nombres entiers x et y solution de ce problème.
2) Ecrire l'équation (E) du second degré dont x et y sont solution.
3) Discuter suivant les valeurs de m l'existence des solutions et les calculer en fonction de m.

Exercice16

Un avion de ligne fait un aller retour entre deux villes A et B, distantes de $630\ km$, en $1h\ 36$ minutes. Un vent violent souffle constamment dans le sens de A et B à une vitesse de $100\ km/h$.

On veut déterminer la vitesse V supposée constante à laquelle volerait l'avion sans le vent.

1) Ecrire deux égalités concernant les temps de trajet aller et retour en fonction de V.
2) En déduire que la vitesse V est solution de l'équation (E): $1,6V^2 - 1260V - 16000 = 0$.
3) Résoudre (E) et conclure.

Exercice17

Un récipient cylindrique a un rayon intérieur de $10\ cm$ et une hauteur intérieure de $25\ cm$.

1) On place une boule de rayon $6cm$ au fond et on la recouvre exactement d'eau, la boule est suffisamment dense et reste au fond.
   a) Exprimer en fonction de π, le volume d'eau nécessaire.
   b) On change la boule par une autre boule de rayon différent R. A nouveau, l'eau recouvre exactement la boule. Exprimer en fonction de π, et R le volume d'eau.
2) Déduire des questions précédentes que R est solution de l'équation $(E): R^3 - 150R + 684 = 0$.
3) Vérifier que 6 est solution de (E).
4) Achever la résolution de (E) et conclure.

Exercice18

(E) désigne l'inéquation : $mx^2 + 3x - 4 \geq 0$ où m est un nombre réel non nul.

1) Donner dans chaque cas une valeur de m pour laquelle l'ensemble des solutions de (E) est :
   a) Vide.
   b) Un intervalle.
   c) Une réunion d'intervalles.
2) Peut-on trouver deux nombres réels tels que leur somme et leur produit soient égaux à un même nombre réel k ?
3) Discuter suivant la valeur de k.

Exercice19

Un réservoir de récupération d'eau a une contenance de 1400 litres. Il est alimenté par deux tuyaux d'écoulement.

Le premier débite 15 litres par minutes.

En ouvrant seulement le deuxième tuyau, le remplissage du réservoir prend 30 minutes de plus qu'avec les deux tuyaux. Calculer le débit du deuxième tuyau d'écoulement.

Exercice20

Une ficelle de longueur $20\ cm$ est fixée à ces extrémités à deux clous A et B distants de $13\ cm$.

1) Démontrer qu'il n'est pas possible de tendre la ficelle en utilisant un troisième clou C de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle.
2) Quelle longueur minimale de ficelle est nécessaire pour que le problème ait une solution ?

Exercice21 Un problème chinois

A l'extérieur de la ville carrée, vingt pas après la sortie Nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze pas vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

On veut trouver les dimensions de cette ville.

1) Conjecturer la réponse au problème poser.
2) x désigne la longueur du côté du carré exprimée en nombre de pas.
   a) Démontrer que le problème se ramène à la résolution de l'équation (E) du second degré : $x^2 + 34x - 71000 = 0$.
   b) Résoudre (E) et donner la solution de ce problème.

Exercice22

1) Déterminer les nombres réels λ tels que le polynôme $x^3 - 7x + \lambda$ admette pour racines un nombre et son double.
2) Démontrer qu'il existe un polynôme de degré trois s'annulant en 0, tel que pour tout réel x : $p(x+1) - p(x) = x^2$.
3) Montrer que : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = p(n+1) - p(1)$.
4) En déduire que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice23

On considère le polynôme : $x^3 + 4x^2 - 5x + 8$. Il à trois racines a, b, c. Sans calculer ces racines, déterminer :

$a + b + c$; abc; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Exercice24

On considère le polynôme : $x^3 + 10x + 5$. Il à trois racines a, b, c. Sans calculer ces racines, déterminer :

$a + b + c$; abc; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Exercice25

On considère le polynôme : $20x^3 - 5x^2 - 3x + 2$. Il à trois racines a, b, c. Sans calculer ces racines, déterminer :

$a + b + c$; abc; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; $(a+b+c)^2$; $a^2 + b^2 + c^2$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Exercice26

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2+y^2-3xy=-1 \\ 2(x+y)-xy=4 \end{cases}$

2) En déduire la solution du système : $\begin{cases} x^4+y^4-3x^2y^2=-1 \\ 2(x^2+y^2)-x^2y^2=4 \end{cases}$

Exercice27

1) Déterminer le polynôme $P(x)$ du troisième degré tel que :
   $P(0)=6$
   Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$ est 8.
   Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ est 0.
   Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ est -4.
2) Dans la suite, on considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$
   a) Calculer $P(-2)$.
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$, puis déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice28

Soit P le polynôme défini par $P(x)=x^2-3mx+2(m^2-6)$.

1) Déterminer m pour que 2 racine de P.
2) Calculer l'autre racine.
3) On pose $T(x)=x^2-(2p+q)x+3p-2q$. Déterminer p et q pour que -2 et 3 soient racines de T.
4) Une équation du second degré a pour racine x' et x'' telle que :
   $\begin{cases} x'+x''-2x'x''=0 \\ mx'x''-x'-x''=2m+1 \end{cases}$ m est un paramètre réel.
   a) Former cette équation.
   b) Préciser le choix de m pour qu'elle admette des racines réelle.
   c) Préciser la valeur de m pour qu'elle admette deux racines positives.
   d) Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x' et x''. Puis en déduire les racines doubles de l'équation.

Exercice29

1) Soit P le polynôme défini par $P(x)=(m-2)x^2+2(m-2)x-2$.
   Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de racines.
2) Un triangle rectangle a pour périmètre $30m$ et pour aire $30\,m^2$.
   Quelles sont ces dimensions ?
3) Déterminer m pour que les racines de l'équation :
   $3mx^2-4(m-1)x+m-2=0$ soient toutes deux inférieurs à 3

Exercice30

1) Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 + 2(m-1)x + m - 3$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre et le signes des racines de ce polynôme.
2) L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à $360m^2$. Si on augmente sa longueur et sa largeur de $6m$, l'aire est alors égale à $630m^2$. Quelle sont les dimensions de ce jardin ?

Exercice31

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 - 2(2m-3)x + m^2 - 3m + 3$.

1) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a deux racines distinctes.
2) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a une racine double et calculer, dans chacun des cas, cette racine.
3) Déterminer m de façon que l'équation : $(2m+1)x^2 + 3x + 4m + 5 = 0$ ait deux racines dont une et une seule soit comprise entre -2 et 1.

Exercice32

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$.

1) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines $\propto$ et β telles que :
   a) $\propto^2 + \beta^2 = 29$
   b) $|\propto - \beta| = 1$. Dans chacun des cas, calculer $\propto$ et β.
2) Un livre a la forme d'un pavé droit ayant pour volume $900\ cm^3$, pour aire totale $1072\ cm^2$ et pour longueur totale des arêtes $180\ cm$. Soit P le polynôme défini par : $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, où a, b, c désignent les dimensions de ce pavé.

a) Exprimer $P(x)$ en fonction de x.
b) Calculer $P(2)$.
c) En déduire que $P(x) = (x-2)(x^2 - 43x + 450)$.
d) Déterminer alors les dimensions de ce livre.

Exercice33

1) On considère l'équation d'inconnue x :
   $x^2 + m(m+3)x + m^3 = 0$.

2) Déterminer le nombre réel m pour que cette équation ait deux solutions $\propto$ et β telles que : $\propto^2 = \beta$.
3) Comparer 1 et 3 aux racines de l'équation : $(m-2)x^2 - 4mx + 1 = 0$.
4) Déterminer m pour que l'équation : $(3m-1)x^2 - (m-1)x + m = 0$ ait deux racines encadrant le nombre 2.

Exercice34

On considère l'équation d'inconnue x :
$x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$.
Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles cette équation a :
1) Quatre solutions distinctes ;
2) Deus solutions distinctes ;
3) Trois solutions distinctes.

Exercice35

Soit l'équation (E_m): $3(m+3)x^2 - 2(3m+5)x + 3m - 3 = 0$, Où m est un paramètre réel.

1) Pour quelle valeur de m, cette équation est-elle du premier degré ?
2) On suppose que $m \neq -3$ et x' et x'' les racines de (E_m).
   a) Montrer que le discriminant Δ associé à (E_m) est $\Delta = 4(12m + 52)$.
   b) En déduire le signe du discriminant Δ.
3) Déterminer la somme S et le produit P des racines x' et x'' en fonction de m.
4) Etudier le signe de S et P.
5) Sachant que :
   * pour $m = -\frac{13}{3}$, $x' = x'' = 2$.
   * Pour $m = -\frac{5}{3}$, $x' = -\sqrt{2}$ et $x'' = \sqrt{2}$
   * Pour $m = 1$, $x' = 0$ et $x'' = \frac{4}{3}$

En déduire :

a) Le tableau récapitulatif.
b) Les valeurs de m pour les quelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
6) Déterminer une relation indépendante de m entre les racines x' et x''.
7) Déterminer la valeur de m pour que l'on ait $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = -2$.

Exercice36

On donne S et P respectivement la somme et le produit des racines d'une équation du second degré (E_m) d'inconnue x définie par : $m = \frac{3-S}{S-1} = \frac{3-P}{P+1}$

1) Exprimer S et P en fonction de m
2) Former cette équation
3) Déterminer m pour que (E_m) soit une équation du premier degré
4) On suppose que $m \neq -1$
   a) Calculer le discriminant du trinôme associé à cette équation , puis étudier son signe
   b) Etudier le signe de S et P
   c) Dresser le tableau récapitulatif
5) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admette :
   a) Deux solutions de signes contraires
   b) Deux solutions distinctes positives
   c) Une solution double.

Exercice37

(E_m) désigne une équation du second degré telle que : $P = \frac{10m-14}{m-2}$ et $m = \frac{2S-2}{S+2}$ pour $m \neq 2$.

1) Montrer que $S = \frac{-2m-2}{m-2}$
2) Démontrer que (E_m): $(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2(5m-7) = 0$.
3) Vérifier que $\Delta_m = -36(m-1)(m-3)$
4) En déduire le signe de Δ_m
5) Etudier les signes de S et P
6) Dresser le tableau récapitulatif
7) Trouver une relation indépendante entre le racines x' et x''
8) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admette :
   a) Deux solutions de signes contraires
   b) Deux solutions distinctes positives
   c) Une solution double.

Exercice38

1) Classer $\beta = 2$ par rapport aux racines de l'équation :
   (E_m): $(m-2)x^2 - 2(m+1) + m + 3 = 0$.
2) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation : $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$
3) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, l'inéquation : $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 < 0$

Exercice39

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- **La somme de ces chiffres est égale à** 17;
- **Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de** 360;
- **Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de** 198.

Exercice40

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **chacune des équations suivantes :**

1) $\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x^2-1}=0.$
2) $\sqrt{4-x^2}=x-1.$
3) $\sqrt{x^2-9}+x=9.$
4) $\sqrt{x^2-9}+x=-9.$
5) $\sqrt{x^3+3x^2-x+1}=x-3.$
6) $\sqrt{x^3+3x^2-x+1}=3-x.$
7) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}.$
8) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{5+2x}=4.$
9) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x}.$
10) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1.$
11) $\sqrt{-2x^2+3x+5}=x^2-9$
12) $\sqrt{x^2+2x-3}>x-1$

Exercice41

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **chacune des inéquations suivantes :**

1) $\sqrt{2x+3}>\sqrt{x-1}$
2) $\sqrt{3-2x}>\sqrt{x}$
3) $\sqrt{2(x^2-2x+2}<\sqrt{x^2+1}$
4) $\sqrt{3x^2+2x-1}<\sqrt{2x^2+x+1}$
5) $\sqrt{x^2+6x+6}\geq|2x+1|$
6) $\sqrt{3(x^2-1)}>2x-1$
7) $\sqrt{5x-4}\geq\sqrt{x}+2$
8) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<\sqrt{x+2}$
9) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}>\sqrt{4x+5}$

10) $\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x}\leq\sqrt{9x-2}$

11) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}>1.$

12) $\sqrt{3(x^2-1)}\leq 2x-1$

13) $5-x\leq\sqrt{x+1}$

14) $\sqrt{x+3}\leq\sqrt{5x+4}-\sqrt{2-x}$

Exercice42

1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ z-2x=\sqrt{2} \end{cases}$

2) Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

La somme de ces chiffres est égale à 17 ;

Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360;

Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

Exercice43

1) Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ x\times y=20 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-y^2=-2 \\ x\times y=-\sqrt{3} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+4y^2=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x\times y=40 \\ x^2+y^2=116 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x^2+y^2=28 \\ x\times y=4 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$

; h) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$; i) $\begin{cases} 2\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(5+y+\sqrt{5}) \\ -\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{10}}{y} \end{cases}$; j) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=0 \\ xy=-2 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{1072}{27} \\ x^2-xy+y^2=\frac{67}{9} \end{cases}$; l) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x^6y^6=64 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z=29 \\ x^2+y^2+z^2=289 \\ xy=72 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=2m \\ x+y-z^2=2 \\ x^2+y^2+z^2=2+\frac{3}{2}m^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ -x+4y+2z=0 \end{cases}$

Exercice44

1) Soit P le polynôme défini par : $P(x)=x^2-(2p+q)x+3p-2q$.

Déterminer p et q pour que -2 et 3 soient racines de P.

2) Déterminer le nombre réel a pour que 2 soit racine du polynôme $Q(x) = 2x^2 - ax + 3a - 6$.
3) Factoriser alors Q et en déduire son autre racine.
4) $ABCD$ est un rectangle tel que : $\frac{AB}{BC} = \frac{AB+BC}{AB} = k$. Calculer k.
5) Déterminer le polynôme du second degré P tel que $P(0) = -3$ et dont les racines sont -2 et $\frac{3}{2}$.

Exercice45

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 - 3mx + 2(m^2 - 6)$.

5) Déterminer m pour que 2 racine de P.
6) Calculer l'autre racine.
7) Les racines x' et x'' d'une équation du second degré vérifient les relation suivantes : $\begin{cases} 2(x' + x'') + x' \times x'' = \frac{12m+7}{m+1} \\ x' + x'' = \frac{(4m+3)}{4m+1} x' \times x'' \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$
   a) Former l'équation du second degré en fonction de m.
   b) Pour quelle valeur de m, l'équation est-elle du premier degré ? résoudre l'équation correspondante.
   c) Pour quelle valeur de m, l'équation est-elle du second degré ? résoudre l'équation correspondante.
   d) Pour quelle valeur de m, l'équation vérifie : $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 1$

Exercice46

Soit l'équation (E) : $(m-3)x^2 + 2(m+3)\,x + 2m + 1 = 0$, où m est un paramètre réel. On donne les racines :

$x' = \frac{-(m+3)-\sqrt{-m^2+11m+12}}{m-3}$ et $x'' = \frac{-(m+3)+\sqrt{-m^2+11m+12}}{m-3}$ avec $m \in [-1;\ 12]$ et $m \neq 3$.

1) Calculer $x' \times x"$ et $x' + x"$.
2) En déduire que x' et $x"$ sont solutions de l'équation (E).
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $-X^2 + 11X + 12 = 0$.
4) Etudier l'existence et le signe des racines de l'équation (E).
5) Donner une relation indépendante de m entre les racines de (E)
6) Trouver la solution de la racine double de cette relation indépendante.
7) Déterminer la valeur de m qui vérifie la relation :

   $5x'x" - 2(x' + x") - 1 = 0$.

Exercice47

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x-5}$; b) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2x-1}$;

c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{x+24}$;

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y-4} + \sqrt{z-6} + \sqrt{t-8} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(x+y+z+t)$;

e) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y-4} + \sqrt{z-6} = \frac{1}{4}(x+y+z)$.

Exercice48

On considère l'équation d'inconnue (E): $x^2 - 3x + 6 = 5\sqrt{x^2-3x+2}$.

1) Montrer qu'en posant $y = \sqrt{x^2-3x+2}$, l'équation (E) devient (E') : $y^2 - 5y + 4 = 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E').
3) En déduire la solution de l'équation (E).

Exercice49

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations irrationnelles suivantes et système d'inéquation suivant :

   a) $\begin{cases} (x-1)^2 > (4x+2)^2 - 1 \\ -2 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases}$; b) $\sqrt{4x+3} < 2x+1$;

   c) $|x+2| < 2x+1$; d) $\sqrt{4x+3} \geq 2x+1$;

   e) $\sqrt{x+3} \leq \sqrt{5x+4} - \sqrt{2-x}$; f) $\sqrt{4-x} > -x$; g) $|3-2x| \geq |x-6|$;

   h) $|3-2x| \geq x-6$.
2) On considère l'équation (E) d'inconnue x :

   $(E): (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0; m \in \mathbb{R}$.

   a) Etudier le signe et l'existence des racines de (E) lorsqu'elles existent.

   b) Déterminer une relation indépendante de m entre les racines de (E) en utilisant deux méthodes précises.

   c) Pour $m = 2$; sans résoudre l'équation (E), calculer les valeurs numériques de :

   $A = x'x'' + \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$; $B = [(x' - x'')^2]^2$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} (x+y)^2 - 3x - 3y - 3xy = -2 \\ 2x + 2y - xy = 5 \end{cases}$

   d'inconnues x et y .

Exercice50

1) On donne l'équation $3x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Déterminer m pour que l'une des racines soit le triple de l'autre.

2) Soit l'équation suivante $(m+3)x^2-3mx+2m=0$. Peut-on choisir m de façon que l'équation admette deux racines x' et x'' telles que : $2x'-x''=0$.
3) Déterminer suivant les valeurs du paramètre m la position du réel $\propto=2$, par rapport aux racines de l'équation :
$(m-2)x^2-2(m+1)x+2m-6=0$.

Exercice51

1) Résoudre le système suivant $\forall x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}; z\in\mathbb{R}$:
$\begin{cases} x+y+z=2m \\ x-y-z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2+\frac{3}{2}m^2 \end{cases}$ $m\in\mathbb{R}$ et discuter pour
$\Delta>0$; $\Delta<0$ et $\Delta=0$.
2) Existe-t-il un triangle T rectangle dont z représente la longueur de l'hypoténuse ? justifier votre réponse.

Exercice52

f et g sont deux polynômes définies pour tout x non nul par :

$f(x)=x^6-5x^5+4x^4-3x^3+4x^2-5x+1$ et

$g(x)=(x+\frac{1}{x})^3-5\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+7$.

a) Montrer que : $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^3}$
b) Montrer que les équations $f(x)=0$ et $g(x)=0$ sont équivalentes et déterminer leurs solutions communes.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2+x^4}\times g(x)=xf(x)$ et $xg(x)\geq f(x)$.

Exercice53

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $\sqrt{2x^2-3x+1}=-7$
2) $\sqrt{x+9}=3-x$
3) $\sqrt{x^2+x-2}=1-x$
4) $\sqrt{x+6}=x$
5) $-\sqrt{x^2-5}+x=1$
6) $-\sqrt{x-3}+1=x-8$
7) $(x+1)^2-|x+1|-6=0$
8) $\sqrt{(x+1)(3-x)}=3x-1$
9) $\sqrt{x^2-4}=2x+5$
10) $\sqrt{3x^2-11x+21}=2x-3$

11) $\sqrt{x-3} = 2x$.

Exercice54

On donne l'équation (1) telle que : $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

1) Le nombre 0 est-il solution de cette équation ? Déduisez-en que résoudre cette équation revient à résoudre l'équation :
   $6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \quad (2)$.
2) On pose : $X = x + \frac{1}{x}$
   a) Exprimer $x^2 + \frac{1}{x^2}$ en fonction de X^2
   b) Vérifier que l'équation (2) s'écrit alors : $6X^2 + 5X - 50 = 0 \ (3)$
   c) Résolvez l'équation : $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$
   d) Résolvez l'équation : $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$
3) Déduisez les solutions de l'équation (1).

Exercice55

On donne l'équation (E) telle que : $(E): (1+t^2)X^2 - (2t+1-t^2)X + \frac{2t-2t^3}{1+t^2}$, où t est un paramètre réel .

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que :
   $(t^2+2t-1)(at^2+bt+c) = t^4 + 4t^3 + 2t^2 - 4t + 1$
   b) On pose $a = 1; b = 2$ et $c = -1$, résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :
   $t^4 + 4t^3 + 2t^2 - 4t + 1 = 0$.

2) Discuter suivant les valeurs de t, l'existence et les signes des racines de (E)

3) Déterminer X' et X'' en fonction de t.

Exercice56

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$
2) $\sqrt{2x^2 + 2} \leq 3 - x$
3) $\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3}$
4) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 2 \geq 0$
5) $x + \sqrt{x-1} \geq 3$
6) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3$
7) $x + \sqrt{2x - x^2} \leq 0$
8) $|3 - 2x| \geq |x - 6|$
9) $\sqrt{2x^2 + x + 1} < \sqrt{x+3}$

10) $\sqrt{x+2} > x$

11) $\sqrt{x+6} < x$

12) $\sqrt{x^2+x-2} = 1-x$

13) $\frac{1}{x^2-x} = -\frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^3-x}$

14) $\frac{1+x}{x-1} - \frac{x}{x^2+x} > 2$

Exercice57

On considère la fonction polynôme f définie par : $f(x) = (x+1)^3 - x^3$.

On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et $P = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

1) Calculer S en fonction de n.
2) Vérifier que $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$.
3) Démontrer que :
   a) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = (n+1)^3 - 1$.
   b) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = 3P + 3S + n$.
4) En déduire que $P + S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
5) Démontrer que : $P = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice58

1) Développer $p(a) = (a-2)(-a^2 - 2a - 5)$ où $a \in \mathbb{R}$.
2) On considère le système suivant $(S) : \begin{cases} x - ay + z = -1 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y - az = 1 \end{cases}$; $a \in \mathbb{R}$.
   a) Déterminer le réel a pour que le déterminant du système du système soit égal à -12.
   b) On pose $a = 2$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S).

Exercice59

(S) désigne le système suivant : $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ -2x + y - 2z = -3 \end{cases}$

1) Ecrire le système (S') aux deux inconnues x et y équivalent à (S).
2) Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre (S')
3) En déduire que (S) à une infinité de solutions que l'on précisera.

Exercice60

Au marché, trois clients achètent les mêmes variétés de fruits.

- **La première achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes elle paie $620\,F$;**
- **La deuxième achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papaye ; elle paie $530\,F$.**
- **La troisième achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes. Combien doit-elle payer ?**

Exercice61

1) **Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système (S) en fonctions des réels a, b et c défini par :** $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$
2) **En déduire les solutions de ce système pour $a = b = c = 1$**

Exercice 62

Le carreau est un carré de $10\,cm$ de côté. On a coloré une bande de $x\,cm$ de largeur autour. Ainsi qu'un carré au centre de côté $x\,cm$.

Pour quelles valeurs de x l'aire de la partie colorée est-elle inférieure à l'aire de la partie blanche ?

Exercice 63

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x-7}{x-2}$ de courbe représentative (C_f), $A(3, 3)$ est un point fixé du plan, M est un point de (C_f) d'abscisse x et M' son symétrique par rapport à A.

1) **Exprimer les coordonnées de M' en fonction de x.**
2) **Démontrer que $M' \in (C_f) \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 11 = 0$.**
3) **Résoudre l'équation ci-dessus.**
4) **Calculer les coordonnées de M et M' coorrespondantes.**

Exercice 64

Un bassin peut être repli à l'aide de trois robinets R_1, R_2 et R_3. Les durées de remplissage en minutes dépendant des robinets utilisés sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Robinets utilisés	Temps de remplissage

R_1 et R_2	$20\,min$
R_2 et R_3	$15\,min$
R_1 et R_3	$12\,min$

1) Ecrire un système de trois équations dont les inconnues sont les débits respectifs des trois robinets.
2) Résoudre ce système.
3) Calculer les temps de remplissage du bassin par chacun des robinets utilisé seul.
4) Calculer le temps de remplissage du bassin par les trois robinets ensemble. On remarquera que le débit est égal au volume divisé par le temps.

Chapitre1 : Barycentre et lignes de niveau

Exercice1

ABC est un triangle quelconque, G est le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1) Utiliser la relation de Chasles pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Faire la figure et placer le point I milieu du segment $[BC]$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Que peut-on en déduire pour les points A, G et I ?

Exercice2

$ABCD$ est un rectangle. Les points P et R sont tels que : $\overrightarrow{AP}=\frac{11}{7}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CR}=\frac{x}{3}\overrightarrow{CD}$.

1) On suppose que $x=2$.
   a) Les points B, P et R sont-ils alignés ?
   b) Déterminer le nombre réel x pour que les points B, P et R soient alignés.

Exercice3

Dans un plan rapporté au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.On considère les points B et C définis par :

$\overrightarrow{OB}=\vec{\imath}+5\vec{\jmath}$ et

$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. On pose ailleurs :

G_1 le barycentre de $(O;1)$ et $(B;3)$;

G_2 le barycentre de $(O;1)$ et $(C;-2)$;

G_3 le barycentre de $(B;1-x)$ et $(C;x); x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les coordonnées des barycentres G_1; G_2 et G_3.
2) Déterminer le réel x tel que G_1; G_2 et G_3 soient alignés.

<u>Exercice4</u>

Soit $[AB]$ un segment de droite.

On appelle I le barycentre du système $(A,3);(B,1)$, J celui du système $(A,3);(B,-1)$ et K le milieu de $[IJ]$.

1) Faire une figure.
2) Exprimez $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Exprimez $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4) Vérifiez que K est le barycentre du système $(A,9);(B,-1)$.

<u>Exercice5</u>

ABC est un triangle. Les points I,J et K sont tels que :

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CA}$, l'unité étant le centimètre.

1) Construire les points I,K et J. On prendra $BC = 4$, $AB = 8$; $AC = 6$.
2) Déterminer les réels $\propto$, β et γ dans les cas suivants :
   a) $I = bar\{(B,\beta);(C,\gamma)\}$
   b) $J = bar\{(C,\gamma);(A,\propto)\}$
   c) $K = bar\{(A,\propto);(B,\beta)\}$
3) Soit G le barycentre du système $\{(A,5);(B,3);(C,1)\}$
   a) Montrer que $G = bar\{(A,5),(I,4)\}$, puis construire le point G.
   b) En déduire que les points A, G et I sont alignés.
   c) Montrer que les droites $(BJ),(CK)$ et (AI) sont concourantes en G.

<u>Exercice6:</u>

1) On considère les points $A;B$ et C tels que $\overrightarrow{AC} = -4\,\overrightarrow{AB}$. Déterminer $\propto$ et β dans chacun des cas suivants :
   a) A est barycentre des points pondérés$(B;\propto);(C;\beta)$.
   b) B est le barycentre des points pondérés $(C;\propto);(A;\beta)$.
   c) C est le barycentre des points pondérés $(B;\propto);(A;\beta)$.

2) E, F, G, H désignent quatre nombres du plan tels que : $2\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{EH}$.
Déterminer trois nombres réels x, y et z tels que E soit le barycentre des points pondérés $(G, x), (F, y)$ et (H, z).

Exercice7:

Soit $A; B$ et C trois points non alignés et G le barycentre $(A; 1); (B; 4)$.
L'homothétie de centre C et de rapport $\frac{3}{2}$ transformant A en A', B en B' et G en G'. Démontrer que G' est le barycentre du système $(A'; 1); (B'; 4)$.

Exercice8:

Soit ABC un triangle.

1) Construire le barycentre des points $(A; 1); (B; 2); (C; -1)$.
2) Montrer que la droite (AC) est parallèle à la droite (GB).

Exercice9:

On considère un triangle ABC et le point D défini par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$.
Trouver les coefficients $\propto$ et β tels que :

a) A barycentre de $(D\,;\propto)\,;(B\,;\,\beta)$ et $(C\,;\,\partial)$.
b) B barycentrede$(A\,;\propto)$; $(D\,;\,\beta)$; et $(C\,;\,\partial)$.

Exercice10

Une marchande utilise une balance légèrement faussée.
Par honnête, elle pèse deux fois ses légumes :
Une fois dans le plateau de droite de masse $M_1 > 0$.
Une fois dans le plateau de gauche de masse $M_2 > 0$.
Elle facture alors la moyenne des M_1 et M_2.

1) Montrer que $M = \sqrt{M_1 M_2}$.
2) Comparer $\sqrt{M_1 M_2} = \frac{M_1 + M_2}{2}$.
3) Le choix de la marchandise est-il équitable ?

Exercice11

ABC désigne un triangle.

I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

1) Faire la figure.
2) On note G le barycentre des points pondérés $(A, 2); (B, 1)$ et $(C, 3)$.
Montrer que :
a) $G = bar\{(I, 3), (C, 3)\}$
b) $G = bar\{(A, 2), (J, 4)\}$

c) $G = bar\{(B,1),(K,5)\}$

3) Construire le point G.

4) En déduire que les droites $(AJ),(BK)$ et (CI) sont concourantes.

Exercice12

ABC désigne un triangle.

Le point P est le symétrique du point B par rapport au point C.

R est le milieu du segment $[AB]$ et Q le point tel que $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1) Faire la figure.

2) Montrer que $Q = bar\{(A,a),(C,b)\}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

3) Montrer que : $2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$ et $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$

4) En déduire que $Q = bar\{(P,1),(R,2)\}$

5) En déduire que les points R, Q et P sont alignés.

Exercice13

ABC désigne un triangle.

M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

1) Faire la figure.

2) Vérifier que le quadrilatère $MNCB$ est un trapèze.

3) Déterminer le centre d'inertie G de la plaque $MNCB$.

4) Déterminer l'isobarycentre I des points M, N, C, B.

5) Les points I et G sont-ils confondus ?

Exercice14

ABC désigne un triangle dont chaque angle est un angle aigu.
$A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$.
H est l'orthocentre du triangle ABC.

1) Faire la figure.

2) Montrer que : $A' = bar\{(B, \tan\widehat{ABC}),(C, \tan\widehat{ACB})\}$.

3) Montrer que : $B' = bar\{(A, \tan \widehat{BAC}), (C, \tan \widehat{ACB})\}$.
4) Montrer que : $C' = bar\{(A, \tan \widehat{BAC}), (B, \tan \widehat{ABC})\}$.
5) Justifier l'existence du barycentre K des points pondérés : $(A, \tan \widehat{BAC}), (B, \tan \widehat{ABC})$ et $(C, \tan \widehat{ACB})$.
6) Montrer que $K \in (A'A), K \in (B'B), K \in (C'C)$.
7) En déduire que :$H = bar\{\ (A, \tan \widehat{BAC}), (B, \tan \widehat{ABC}), (C, \tan \widehat{ACB})\}$.

Exercice15

ABC désigne un triangle.

On pose :

$a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ \alpha = a\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}\ , \beta = b\cos\widehat{A}\cos\widehat{C}\ , \gamma = c\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}$.

On admettra que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

1) Soit H le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Déduire de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
3) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice16

ABC désigne un triangle, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1) Faire la figure.
2) a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
   b. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3) Démontrer que O est le barycentre de $(G, 3)$ et $(H, -1)$.
4) On reprend dans cette question les données et les résultats établis dans l'exercice précédent.
   a. Vérifier que : $\beta + \gamma = a\cos\widehat{A}$.

b. Déduire que $0 = bar\{(A,\ a\ \cos\widehat{A}), (B, b\cos\widehat{B}), (C,\ c\cos\widehat{C}\ )\}$

Exercice17

$[AB]$ désigne un segment de longueur $10\ cm$.

On note (C_m) l'ensemble des points M du plan tels que :

$\|m^2\overrightarrow{MA} + (2m-3)\overrightarrow{MB}\| = AB$ où m désigne un nombre réel.

1) Pour quelles valeurs de m le barycentre G_m des points pondérés $(A,\ m^2)$ et $(B,\ 2m-3)$ existe-t-il ?
2) Pour un tel m, montrer que : $M \in (C_m) \Leftrightarrow |m^2 + (2m-3)|MG_m = AB$.
3) En déduire la nature de l'ensemble (C_m).
4) Construire (C_2) et (C_3).

Exercice18

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6\ cm$ et f l'application numérique définie dans le plan par : $f(M) = MA^2 + MB^2$.

1) Déterminer les lignes de niveau $50,\ 36,\ 26,\ 20$ de f.
2) Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k de f :
   a) Est-elle réduite à un point ?
   b) Passe-t-elle par A ?
   c) Passe-t-elle par le symétrique de B par rapport à A?
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$.

Exercice19

Soit A et B deux points distincts du plan.

1) Pour $k \in \mathbb{R}$, on note (C_k) la ligne de niveau : $aMA^2 + bMB^2 = k$ avec $a + b \neq 0$.
   a) Justifier l'existence de $G = bar\{(A,\ a), (B,\ b)\}$.
   b) Montrer que $M \in (C_k) \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}$
   c) En déduire la nature de l'ensemble (C_k).
2) Pour $k' \in \mathbb{R}$, on note $(C_{k'})$ la ligne de niveau : $MA^2 + MB^2 = k'$.
   G désigne le milieu du segment $[AB]$ et H est le point de la droite (AB) tel que : $2\,\overline{GH} \times \overline{AB} = k'$.
a) Montrer que, pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM}$.
b) Montrer que, $M \in k' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{k'}{2\overline{AB}}$
c) En déduire la nature de l'ensemble $(C_{k'})$.

Exercice20

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7cm, AC = 5cm$ et $BC = 4cm$.

1) Construire le triangle ABC.
2) Soit I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $AI = \sqrt{33}$.
3) Soit M un point du plan, pour quelle valeur de m, le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M ?
4) Déterminer alors le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
5) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $(\Gamma): -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$
6) Soit $D = bar\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$
   a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
   b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que :$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$

Exercice21

A, B, C, D, E désignent cinq points distincts du plan.

L'objectif est de déterminer l'ensemble (C) des points M tels que :

$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}) = 12$.

1) On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), (x_E, y_E)$ les coordonnées respectives de A, B, C, D, E.
   On note (x, y) celles du point M.
   a) Etablir une équation satisfaite par x et y.
   b) Montrer que (C) est un cercle dont on précisera les coordonnées et le rayon en fonction des paramètres.
2) Justifier l'existence de :
   a) $G_1 = bar\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ et $G_2 = bar\{(D,1),(E,2)\}$.
   b) En déduire que $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 2$.
   c) On note H le milieu du segment $[G_1G_2]$. Montrer que H est le centre du cercle (C).

Exercice22

k désigne un nombre réel.

On note (C_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

I désigne le milieu du segment $[AB]$.

1) Montrer que $M \in (C) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} + k$
2) En déduire (C_k) selon les valeurs de k.

Exercice23

A et B désignent deux points distincts du plan.

L'objectif est de déterminer l'ensemble (C_k) des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$, k est un nombre réel.

1) Le cas $k < 0$. Déterminer l'ensemble (C_k).
2) Le cas $k = 0$. Déterminer l'ensemble (C_0).
3) Le cas $k = 1$. Déterminer l'ensemble (C_1).
4) Le cas $k > 0$ et $k \neq 1$.
   a) Montrer que pour tout point du plan, $M \in (C_k) \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$.
   b) Justifier l'existence du point $G = bar\{(A, 1), (B, -k^2)\}$.
   c) Montrer que $M \in (C_k) \Leftrightarrow (1 - k^2)MG^2 = k^2GB^2 - GA^2$.
   d) En déduire la nature de l'ensemble (C_k).
5) Dans le cas où $AB = 4\ cm$, déterminer chacun des ensembles suivants :
   a) $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$.
   b) (C_3).

Exercice24

ABC désigne un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$ et λ un réel.

1) Faire la figure.
2) Soit (Γ_1) l'ensemble des points M du plan tel que :
   $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$.
   a) Démontre que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2MG_1{}^2 + 2G_1A^2 + G_1B^2 - G_1C^2$ où G_1 est un point à déterminer.
   b) En déduire suivant les valeurs de λ la nature de l'ensemble (Γ_1).
3) a. Démontre que : $2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) + AB^2 - 3AC^2$
   b. En déduire que $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG_1{}'} = \frac{\lambda+6}{4}$ où $G_1{}' = bar\{(B, 1), (C, -3)\}$
   c. Pour $\lambda = -6$, détermine (Γ_1).
   d. Pour $\lambda = 2$, démontre que $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \overline{AG_1{}'} = 2$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite $(AG_1{}')$.
4) Calcule $AG_1{}'$ puis vérifie que $AH = \frac{4}{21}\sqrt{21}$.

5) En déduire que (Γ_1) est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AG_1{}'}$.

Exercice25

Dans un terrain de football, le poteau est un rectangle de longueur AB où $AB = 20m$ et $AC = 23,8m$ tel que $\widehat{C} = \frac{\pi}{11}$.

Un joueur de football doit tirer un coup-franc en plaçant le ballon au point C.

Sachant que le gardien est placé au milieu de son but.

1) Faire une figure.
2) Quelle est la largeur d'un but de football ? Arrondir au dm.
3) A quelle distance se trouve-t-il du ballon ? Arrondir au dm.
4) Pour un deuxième coup-franc, on a : $BC = 25m$ et $mes\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}rad$.
   Calculer AC. Arrondir au dm.

Exercice26

ABC désigne un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Les points M, N, P sont définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA}$ où $x \in [0; 1]$.

1) Construire la figure pour $x = \frac{1}{4}$
2) Que représente les points M, N, P lorsque $x = \frac{1}{2}$
3) Démontrer que l'air du triangle AMP est égale :
   $\mathcal{A}_{AMP} = \frac{1}{2}x(1-x)bc\sin\widehat{A}$.
4) Exprimer de trois façons différentes l'aire du triangle ABC.
5) En déduire que les triangles AMP, BMN et CPN ont même aire.
6) Exprimer l'aire du triangle MNP en fonction de x et de l'aire du triangle ABC.
7) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de MNP est égale au quart de l'aire de ABC.
8) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de MNP est maximale.

Exercice27

ABC est un triangle équilatéral de côté $3\,cm$, B' est le milieu de $[AC]$ et D le point défini par la relation : $4\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1) Démontrer que D est le barycentre du système : $(A,3);(B,-2);(C,3)$.
2) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.
4) Calculer DA^2 et DB^2.
5) Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$. Puis vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).
6) Construire (E).

Exercice28

Soit A et B deux points tels que $AB = 6\,cm$. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MB = 2MA$.

1) Montrer qu'il existe deux points R et S de la droite (AB) vérifiant la relation $MB = 2MA$.
2) Exprimer R et S comme barycentre des points A et B.
3) Montrer que pour tout point M du plan on a : $(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) = 0$.
4) Réduire puis déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}$.

Exercice29

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I. On prendra $AB = 4\,cm$, $AD = 2\,cm$.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que D est le barycentre des points A, B et C que l'on précisera.
3) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
4) Déterminer et construire l'ensemble (η) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$. On pourra calculer BD^2, DA^2 et DC^2.

Deuxième trimestre

Chapitre2 : Généralité sur les fonctions

Exercice1 :

Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{3 - |2 - x|}$; 2) $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}}$;

3) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+1+\sqrt{x^2+x-2}}$; 4) $k(x) = \frac{2+\sqrt{x-3}}{x-4}$;

5) $m(x)\frac{2x}{\sqrt{|2x^2-4x+3|}}$; 6) $n(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}}{\sqrt{\frac{6+x}{x-5}}}$;

7) $o(x) = \sqrt[8]{\frac{x-4}{x-9}}$; 8) $p(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-|x|}}$; 9) $w(x) = \sqrt[8]{\frac{x^4-13x^2+36}{2x^4-7x^2+3}}$;

10) $v(x) = \frac{\sqrt{x-1-\sqrt{x^2+x-2}}}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $t(x) = \frac{2x^2+3}{-6+\sqrt{x^2+5x+6}}$. 12) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-E(x)}}$ où E désigne la fonction partie entière.

Exercice2

1) f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x-1| + 2|3-x|$. Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle $[1;3]$.
2) f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer celles qui sont égales à f.
   a) $g(x) = \frac{|6x-12|}{6}$
   b) $h(x) = \frac{(x-2)^2}{|x-2|}$
   c) $k(x) = \left|\frac{x^2+x-6}{x+3}\right|$
   d) $l(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$
3) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 1$.
a) Déterminer $f([-5;5])$.
b) Déterminer $f^{-1}([0;4])$.
4) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$.
   a) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer $f \circ f(x)$.
5) Répondre les même questions précédentes avec $f(x) = -3x + 4$.

Exercice3

a et b désignent deux nombres réels.

f et g sont les fonctions $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = ax + b$.

1) Pour tout nombre réel x, calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.
2) Déterminer le couple $(a; b)$ de nombre réels tel que :
   $g \circ f(x) = f \circ g(x)$.
3) f et g désignent les fonctions d'expressions : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = 3x^2 - 1$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de A de f; puis l'image de A par f. On note B cette image.
b) Déterminer l'image B de par f.
c) Déterminer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

Exercice4

f, g et h sont les fonctions d'expressions :

$f(x) = -2x + 1$; $g(x) = 1 + 4x^2$; $h(x) = \frac{1}{x+2}$

1) Calculer $h \circ g(x)$; puis l'ensemble de définition de $h \circ g$.
2) Calculer $h \circ f(x)$; puis l'ensemble de définition de $h \circ f$.
3) Calculer $h \circ g \circ f(x)$; puis l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$.

Exercice5

1) f désigne une fonction strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$.
a) Déterminer $B = f([a; b])$.
b) Démontrer que f est une bijection de $[a; b]$ sur B.
2) Reprendre les questions précédentes avec une fonction f strictement croissante sur $[a; b]$.
3) u désigne l'application de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ telle que : $u(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 \, ; n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \, ; n \text{ est impair} \end{cases}$

   L'application u est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4) On note $E = \{0; 1\}$. A tout couple $(a; b)$ d'éléments de E, on associe le nombre $a + b - ab$.
   a) Vérifier qu'on établit ainsi une application de $E \times E$ dans E.
   b) Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice6

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + c$ avec c un nombre fixé.

6) **Déterminer $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ et enfin $g \circ f \circ g(x)$.**
7) **h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2|x-5|$.**
   a) **Déterminer $h([0;\, +\infty[)$.**
   b) **Déterminer $h^{-1}([0;4])$.**
8) **f désigne une fonction définie définie par $f(x) = ax + b + \frac{1}{x-1}$ où a et b sont deux nombres réels.**
   a) **Déterminer son ensemble de définition.**
   b) **Déterminer a et b pour que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$.**
9) **g désigne une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $g(x) = \frac{x}{2-\sin\frac{1}{x}}$**
   a) **Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{3} \leq g(x) \leq x$.**
   b) **Montrer que pour tout $x < 0$, $x \leq g(x) \leq \frac{x}{3}$.**
   c) **En déduire les limites de g en 0; en $+\infty$ puis en $-\infty$.**

Exercice7

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{3}{x-2} - 5$

1) **Déterminer l'image de $[2;7]$ par f.**
2) **Déterminer l'image réciproque de $[0;1]$ par f.**
3) **On désigne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3$.**
   a) **Déterminer l'image réciproque de $[4;12]$ par g.**
   b) **Déterminer l'image de $[-1;2]$ par g.**

Exercice8

1) **p désigne la fonction définie sur $[4;\, +\infty[$ par $p(x) = \sqrt{x-4} + 3$.
   Comment tracer rapidement, dans un repère la courbe représentative de la fonction p à partir de la courbe d'une fonction usuelle ?**
2) **f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes (C_g) et (C_h) sont obtenues respectivement par translation de (C_f) par le vecteur $\vec{u}(-1;\, -2)$ et par symétrie orthogonale d'axe (OJ).**
3) **Exprimer $g(x)$ et $h(x)$ en utilisant f.**

Exercice9

A, B, C et I désignent quatre points du plan et S_I est la symétrie centrale de centre I.

1) **Représenter l'image de $[AB]$ par I.**
2) **Représenter l'image réciproque de (AC) par I.**
3) **Représenter $S_I{}^{-1}([BC])$ et $S_I((BC))$.**

4) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$.
   a) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer $f \circ f(x)$.
5) Reprendre les question précédentes avec $f(x) = -3x + 4$.

Exercice10

A et B désignent deux points du plans.

1) On note $S_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB). Déterminer $S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$
2) On note $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$
3) On note S_A la symétrie centrale de centre A. Déterminer $S_A \circ S_A$

Exercice11

g est une fonction d'expression $g(x) = 3x^2 + 1$. Déterminer un ensemble de départ A et un ensemble d'arrivée B pour que g soit :

1) Une injection de A sur B, mais pas une surjection.
2) Une surjection de A sur B, mais pas une injection.
3) Une bijection de A sur B.
4) f désigne une application d'un ensemble A dans lui-même telle que : $f \circ f = f$. Démontrer que si f est bijective, alors $f = Id_A$

Exercice12

f et g désignent les fonctions définies par les expressions : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ et $g(x) = x - \sqrt{3x}$

1) Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
2) Déterminer l'ensemble de définition ; puis l'expression des fonctions :
   a) $f + g$;
   b) $f \times g$;
   c) $3f + \sqrt{3}g$
3) Déterminer l'ensemble de définition ; puis l'expression des fonctions $\frac{f}{g}$ lorsque :
   a) $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$;
   b) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ et $g(x) = \sqrt{2x - 1}$

Exercice13

1) A désigne un ensemble. Montrer que si f est une application de A vers A telle que : $f \circ f = Id_A$ alors f est bijective ; en déduire f^{-1}.

Une telle fonction f est appelée involutive.

2) g désigne la fonction de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$ définie par : $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   a) Démontrer que g est une involution.
   b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe (C_g) représentative de la fonction g.
   c) Justifier que (C_g) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3) Reprendre la question 2) avec la fonction définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R} - \{1\}$ par $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

<u>Exercice14</u>

f et g désignent les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ , si } x \leq 2 \\ f(x) = -2x, \text{si } x > 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x) = x^2 + 2x \text{ , si } x \leq 0 \\ g(x) = 2x, \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer les expressions des fonctions suivantes :
   a) $f + g$;
   b) $f \times g$;
   c) $-2f + 3g$;
   d) $f \circ g$.
2) Compléter le tableau ci-dessous dans chacun des cas.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$				
$g(x)$				
$(f+g)(x)$				

<u>Exercice15</u>

f et g désignent les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 3x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2) Peut-on déduire $\lim_{x \to +\infty} (f \times g)(x)$?
3) Justifier que, pour tout $\in [0; +\infty[$, $(f \times g)(x) = \frac{3x\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$
4) En déduire $\lim_{x \to +\infty} (f \times g)(x)$.

<u>Exercice16</u>

a) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{3x^2-13x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{(2-x)(x-1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2-\sqrt{x}}{x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x+9}-3\sqrt{x+4}}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}}{2x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ $(a<0; b>0)$; 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5+\sqrt{x^2+2}}{3x-2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x+3}-2}{3\sqrt{x}-x-2}$.

b) Dans chacun des cas suivants, Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; $g(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; $h(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$; $t(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; $p(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; $k(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

Exercice16

1) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\sin x}{x}$.
2) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x+\sin x, & x\geq 0 \\ 1-\cos x, & x<0 \end{cases}$
   a) Calculer $f(0)$
   b) La fonction f est-elle continue en 0 ? sur $\mathbb{R}$?

Exercice17

1) g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
2) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2;-3\}$ par $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+3)}$
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)$ et $\lim\limits_{x\to -3}(x-2)$
   b) Déterminer la limite de $(x-2)$ quand x tend vers 2 à gauche puis à droite.
   c) Déterminer la limite de $(x+3)$ quand x tend vers -3 à gauche puis à droite.
   d) Dresser le tableau de signes de f.
   e) En déduire les limites, à gauche et à droite de $f(x)$ quand x tend vers 2; puis vers -3.

Exercice18

1) Calculer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{(x-3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{|x-1|}$; $\lim\limits_{x\to 0}x\cos x$; $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}}$
2) f désigne la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{5}{x-1}$
   a) Résoudre l'inéquation $f(x)\geq 100$.

b) A désigne un nombre réel strictement positif. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq A$.

c) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 avec $x > 1$.

Exercice19

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - x$ et $g(x) = \frac{2}{x^2}$

Déterminer les limites suivantes lorsque ce ne sont pas des fores indéterminées.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x)$; $\lim\limits_{x\to 0}(f\times g)(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\times g)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)$

Exercice20

1) h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x-\cos x}{2+\cos x}$
   a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $h(x) \geq \frac{x-1}{3}$
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}$
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2) f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x^2+1}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice21

P désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

1) Justifier que pour tout $x \neq 0$. $P(x) = a_n x^n[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}]$
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}]$
3) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.
4) De la même manière montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$.
5) Q désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ avec $b_m \neq 0$.
   a) Justifier que pour tout $x \neq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\cdots+\frac{a_0}{a_n a^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m x}+\cdots+\frac{b_0}{b_m a^m}}$
   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$
   c) De la même manière, montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Exercice22

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\left|\frac{5\cos x+3x}{2x^2+1}\right| \leq \frac{5+3|x|}{2x^2+1}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5+3|x|}{2x^2+1}$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5+3|x|}{2x^2+1}$

3) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\cos x+3x}{2x^2+1}$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5\cos x+3x}{2x^2+1}$ en utilisant un résultat de comparaison

Exercice23

1) f désigne la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x-1}$ où a et b sont deux nombres réels. Déterminer a et b pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

2) g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b + \frac{cx^2}{x^2+2}$ où a, b et c sont trois nombres réels. Déterminer a, b et c pour que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et $g(0) = -1$.

Exercice24

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par : $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$

1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| \leq x^2$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.
3) Peut-on prolonger f en 0 par continuité ? Si oui, donner ce prolongement.

Exercice25

f désigne la fonction polynôme définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et g désigne la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ en tout x tel que : $f(x) \neq 0$.

Déterminer en discutant suivant le signe de a, les limites de $f(x)$ et $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

Exercice26

f et g désignent les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 3x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2) Peut-on déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$?
3) Justifier que pour tout x de $[0;+\infty[$, $(f\times g)(x) = \frac{3x\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$

5) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+1}{\sqrt{x}+1}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2}{x^2} + 3x^2 - 1$

Exercice27

f désigne la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{-2; 5\}$.
2) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2; 5\}$: $f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5}$ où a, b et c désignent trois nombres réels à préciser.
3) Déterminer $\lim_{x \to -2} f(x)$ et $\lim_{x \to 5} f(x)$.
4) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Exercice28

1) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\frac{-1}{1+2\sqrt{x}} \leq \frac{1+2\sin(4x)}{1+2\sqrt{x}} \leq \frac{3}{1+2\sqrt{x}}$
2) En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+2\sin(4x)}{1+2\sqrt{x}}$
3) f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = 3x\cos(\frac{5}{x^2})$ et $g(x) = \cos x$.

a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$, $|f(x)| \leq 3|x|$.
b) En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$.
c) Calculer $g(2k\pi)$ et $g(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ pour $k \in \mathbb{Z}$
d) Peut-on déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$?

Exercice29

Un point M se déplace sur une droite (D) munie d'un repère $(0, \vec{\imath})$. Sa position, en mètre en fonction du temps t exprimé en secondes est définie par son abscisse $x(t) = t^2 + t + 1$.

La vitesse instantanée du point M à l'instant t_0 est : $\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$.

1) Déterminer la vitesse instantanée du point mobile :
   a) à l'instant 2 ;
   b) à l'instant 5.
2) Déterminer l'instant en lequel la vitesse instantanée est :
   a) $13\ m.s^{-1}$;
   b) $1,05\ m.s^{-1}$.

Exercice30

a et b désignent deux nombres réels, f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 5x - 1\,, \ si\ x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + bx\,, si\ 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = a\sqrt{1 + x^2} + x - 1\,, si\ x < 0 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice31

(C_1) désigne un cercle de centre O_1 et de rayon $6\ cm$.

Il est tangent à un cercle (C_2) de centre O_2 et de rayon r tel que $0 < r < 6$.

Les tangentes communes aux deux cercles (C_1) et (C_2) sont sécantes en S.

1) Faire la figure.
2) Montrer que : $O_1S = \frac{6r+36}{6-r}$
3) En déduire la limite de O_1S lorsque r tend vers 6.
4) Représenter cette situation par un schéma.
5) Calculer la limite de O_1S lorsque r tend vers 0.
6) Représenter cette situation par un schéma.

Exercice32

x désigne un nombre réel appartenant à $]0; \frac{\pi}{2}[$

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 0)$,

$M(\cos x\,,\ \sin x)$, $P(\cos x\,, 0)$ et $T(1;\ \tan x)$. On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle OAM, $\mathcal{A}_2$ l'aire du secteur de disque délimité par l'arc de cercle $\widehat{AM}$ et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle OAT.

1) Faire la figure.
2) En comparant ces trois aires, montrer que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
3) En déduire que : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.
4) Déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures
5) Calculer les limites suivantes en utilisant les questions précédentes :
   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{2x}$
   b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin 5x}$
   c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{x}$
   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{\sin 4x}$

Exercice33

Dans le cercle trigonométrique, on désigne un repère $(0, I, J)$.

M est un point situé sur le quart du cercle compris entre I et J exclus.

La tangente en M coupe la droite (OI) en P.

La tangente en I coupe la droite (MP) en N.

Le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite (OI).

On pose $x = mes(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}})$, $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

1) Faire la figure.
2) Exprimer l'aire $S_1(x)$ du triangle HMP en fonction de x.
3) Exprimer l'aire $S_2(x)$ du triangle NIP en fonction de x.
4) Calculer, puis interpréter les limites suivantes :
    a) $\lim\limits_{x \to 0^+} S_1(x)$
    b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} S_1(x)$
5) Montrer que, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = (1 + \cos x)^2$
6) En déduire les limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$. Interpréter les résultats obtenus.

<u>Chapitre 2</u> : Produit scalaire et Géométrie dans l'espace

<u>Exercice1</u>

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On donne les points $A(-5; 1; 2)$, $B(2; 0; 3)$, $C(6; 2; 1)$.

1) Placer ces points dans ce repère.
2) Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
3) Déterminer les coordonnées du point $G = bary\{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\}$.
4) Que remarque-t-on ? Justifier.

<u>Exercice2</u>

On donne les points $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 2; -1)$, $C(-1; 1; 0)$.

1) Placer ces points dans ce repère.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
3) Le triangle ABC est-il rectangle ? justifier.

4) Calculer les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
5) Déterminer une équation du plan (ABC).
6) Calculer la distance du point $O(0,0,0)$ au plan (ABC).

Exercice3

1) Dans un repère de l'espace, on donne : $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-5)$ et $C(-11;-40;121)$.

Ces trois points sont-ils alignés ?

2) On considère les vecteurs $\vec{u}(-2;3;-1)$, $\vec{v}(1;-1;-2)$ et $\vec{w}(4;-2;-18)$.
   a) Existe-t-il un nombre réel β tel que : $\vec{w} = 2\vec{u} + \beta\vec{v}$. Que peut-on dire du triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?
   b) En déduire que le point $M(5;-1;-14)$ appartient au plan qui passe par $A(1;1;4)$ et qui admet le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ comme vecteurs directeurs.

Exercice4

Dans un repère de l'espace, on donne : $A(-1;1;2)$, $B(1;0;1)$ et $C(1;2;7)$.

1) Démontrer que: $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.
2) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ?

Exercice5

Dans un repère de l'espace, on donne : $A(2;3;0)$,
$B(1;3;5)$, $C(0;1;-2)$, $D(2;0;1)$ et $E(-2;-2;9)$.

1) Placer ces points dans le repère de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.
3) Peut-on trouver deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$?
4) Que peut-on dire de la droite (DE) ?

Exercice6

$ABCD$ désigne un tétraèdre.

Les points I et K sont les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.

Les points J et L sont tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1) Utiliser un repère de l'espace approprié pour déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
2) Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

Exercice7

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 4$.

Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ et d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DO}$.

Exercice8

On donne deux vecteurs $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(1;\ -2)$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

1) Calculer le produit scalaire $\vec{u} \times \vec{v}$.
2) On donne $\vec{u} \times \vec{v} = 5$ et $\vec{u}(\sqrt{3};1)$ et $\vec{v}(3;\ 4)$. Calculer l'angle θ en radian.

Exercice9

ABC est un triangle tel que $BC = 5cm$; $\widehat{B}$=50^o et $\widehat{C}$=75^o. Calculer AB et AC et donner l'arrondi au dixième.

Exercice10

Dans un triangle ABC, on donne : $b = \sqrt{2}cm$; $a = \sqrt{3}cm$ et $\widehat{C} = 60^o$, a, b et c désignent les longueurs des côtés $[BC]$; $[CA]$ et $[AB]$.

1) Calculer, puis les sinus des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{A}$.
2) Calculer la surface au triangle ABC.
3) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice11

On considère un carré $ABCD$ de côté a et on désigne par I le milieu du côté $[BC]$ tel que l'angle $\widehat{IAC}$=θ.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AC} = a^2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \cos\theta$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}a^2$ ou $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement sur $\overrightarrow{AB}$.
4) En déduire le $\cos\theta$ puis la valeur approchée de θ.
5) Compare θ et $\beta \approx 18,43^0$.

Exercice12 Formule de Héron

ABC est un triangle quelconque. On pose $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$ et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC, R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et o où $p = \frac{a+b+c}{2}$ désigne périmètre du triangle ABC.

1) Exprimer $\cos \widehat{C}$ en fonction de a, b et c.
2) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction a, b , c et $\cos \widehat{C}$
3) Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})}$
4) En utilisant les identités remarquables démontrer que :
   $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Formule de Héron)
5) On pose : $BC = 3,6\ cm$, $CA = 4\ cm$ et $AB = 6,6\ cm$.
   a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$, arrondie au dixième du triangle ABC.
   b) En déduire le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice13

Une unité de longueur étant choisie, on considère dans le plan de deux points A et B tels que $AB = 4$. On note I le milieu de $[AB]$. Soit g la fonction qui, à tout point M du plan, associe le nombre réel $g(M) = MA^2 - MB^2$. On note H le projeté orthogonal de M sur (AB).

1) Montrer que, pour tout point M, $g(M) = 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{IH}$.
2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $g(M) = 8$.
3) Plus généralement, soit k un nombre réel. On désigne(E_k) l'ensemble des points M du plan tels que $g(M) = k$. Démontrer que (E_k) est une droite perpendiculaire à (AB).
4) Déterminer k dans chacun des cas suivants :
   a) (E_k) est la médiatrice (AB).
   b) (E_k) passe par A.
   c) (E_k) passe par B.

Exercice14

1) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = \frac{17}{2}AB^2$.
2) On considère les points $A(-1;3)$ et $B(2;0)$.
   Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   $MA^2 - MB^2 = 2$.
3) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 2$

Exercice15

Soit A et B deux points $AB = 2$ et $(M) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$.

1) Construire la ligne la ligne de niveau L de f pour les valeurs de k suivantes : $-6;\ -4;\ -2;\ 0; 2\ ; 4$.
2) Trouver l'ensemble des points M tels que :
   a) $f(M) > 2$.
   b) $f(M) < 0$.
   c) $-6 \leq f(M) < 4$.
   d) $f(M) \geq -4$.

<u>Exercice16</u>

On considère deux points A et B tels que $AB = 4$ et f une application de (P)dans $\mathbb{R}$ qui a tout point M associe le réel $MA^2 + MB^2$. Construire L_5 ; L_8 et L_{12}

<u>Exercice17</u>

L'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit $(x, y, z) \in (\xi)$,

on note (P) l'ensemble des points M de de E tels que : $\begin{cases} x = -1 + 3t + 2s \\ y = 5 + t - s \\ z = 2 + 4t + 3s \end{cases}$; où

$t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$.

1) Donner les coordonnées de trois points A, B et C de (P).
2) Justifier que le système précédent détermine un plan de l'espace.
3) Déterminer l'équation du plan (ABC).
4) Déterminer les coordonnées du point I, l'intersection du plan (P) et de la droite (D) d'équation :
   $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-6}{5}$.
5) Soit $M'(x', y', z') \in (\xi)$. Exprimer les coordonnées x', y' et z' du point M', projeté orthogonal du point $M(x, y, z)$ sur le plan (P).

<u>Exercice18:</u> Formule de Brahmagupta

$ABCD$ désigne un quadrilatère inscriptible de centre O dans un cercle.

On note : $a = DA,\ b = AB,\ c = BC,\ d = DC$ et $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

$\mathcal{A}$ est l'aire du quadrilatère.

1) Faire une figure
2) Justifier que $\sin\widehat{A} = \sin\widehat{C}$
3) En déduire que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\widehat{A}$
4) Justifier que : $a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A} = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{C}$
5) En déduire que : $2(ab + cd)\cos\widehat{A} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$
6) Démontrer que : $16\,\mathcal{A} = 4(ab + cd)^2 - 4(ab + cd)\ \cos^2\widehat{A}$

7) Démontrer à l'aide des identités remarquables que : $\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (Formule de Brahmagupta)

8) On pose : $AB = 6\ cm, BC = 5\ cm\ , CD = 8\ cm, DA = 9\ cm$ et que $\widehat{COB} = 60^\circ$.

a) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$, arrondie au dixième du triangle ABC.

b) En déduire la longueur AC arrondie au dixième.

Exercice19

Abdou possède un terrain ayant la forme d'un quadrilatère $ABCD$ tels que : $AB = 222,9\ m,\ BC = 112,6\ m,\ CD = 175\ m\ ,\ DA = 173,7\ m$ et $DB = 249,7\ m$.

1) Faire une figure. On prendra $[AB]$ horizontal
2) Déterminer l'aire, arrondie au dm^2
3) Abdou souhaite mesurer la longueur de la diagonale $[AC]$, mais sa maison empêche de prendre cette mesure. Calculer AC, arrondie au dm.

Exercice20

ABC désigne un triangle, A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, H est l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que :
   a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$
   b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{OA'}$
3) En déduire que le vecteur $3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CB}$
4) Démontrer que $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \vec{O}$. En déduire que les points O, G et H sont alignés.
5) Qu'appelle-t-on la droite passant par les points O, G et H ?
6) Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$

Exercice21

Deux scientifiques Adbéel et Ballack observent une Gazelle et une Lionne qui s'est écartée du troupeau de tel sorte que $ABGL$ soit un quadrilatère tels que :

La distance qui séparait Adbéel et Ballack est de $80\ m$, $\widehat{GAB} = 34^\circ$,

$\widehat{LAG} = 46^\circ$, $\widehat{ABL} = 40^\circ$, $\widehat{LBG} = 35^\circ$ et que les droites (AG) et (BL) se coupent en O.

1) Faire la figure. On prendra $[AB]$ horizontal.
2) Calculer la distance arrondie au m qui séparait la Lionne et la Gazelle.
3) Calculer la distance arrondie au m qui séparait la Lionne et le scientifique le plus proche.

Exercice22

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points de coordonnées :

$O(0\,;\,0), B(b\,;\,0), C(0\,;\,c), D(b\,;\,-b), E(0\,;-b), F(-c\,;\,c)$ et $G(-c\,;0)$.

De plus $\overrightarrow{OB} = b\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OC} = c\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OE} = -b\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OG} = -c\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GF}$ sachant que $c > b$ et que les droites (DC) et (BF) se coupent en H.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que les droites (CD) et (BF) ont pour équation :
   a) $(CD) : y = -\frac{b+c}{b}x + c$;
   b) $(BF) : y = -\frac{c}{b+c}x + \frac{bc}{b+c}$.
3) Démontrer que les coordonnées du point H sont : $H(\frac{-bc^2}{bc-(b+c)^2}\,;\,\frac{b^2c}{bc-(b+c)^2})$
4) Démontrer que (OH) est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.
5) Vérifier qu'une équation de (OH) est : $y = \frac{b}{c}x$.

Chapitre 3 : Equation du cercle

Exercice 1 :

Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ la droite (D_m) d'équation :

$y - x - m = 0$.

1) Déterminer le centre et le rayon de (C).
2) Ecrire l'équation du second degré ayant pour racines les abscisses des points communs à (C)et (D_m) lorsqu'ils existent. Discuter suivant les valeurs de m.
3) Donner les équations des tangentes à (C) de pente 1.
4) Lorsque (D_m) est sécante à (C), déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) et (D_m).
5) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[A\,,B]$.

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté au repère $(o,\vec{i},\vec{j})$. Unité $1\,cm$. On considère les points $A(1,0)$; $B(0,1)$; $C(3,0)$.

1) Placer les points A, B et C et calculer les longueurs AB, ACet BC.
2) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C). Puis en déduire son centre et son rayon.
   b) Déterminer les équations de tangentes (D_1), (D_2) à (C) en B et C.
   c) Tracer (C), (D_1) et (D_2).

<u>Exercice 3 :</u>

Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A(x_0, \ y_0)$ un point de (C).

1) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) en A.
2) Démontrer que cette équation peut se mettre sous la forme : $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.
3) Soit (C) le cercle d'équation :$x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ et A le point de coordonnées $(1,3)$. Vérifier que le point A appartient à (C).
4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) en A.

<u>Exercice 4 :</u>

On considère les points $A(4,7)$; $B(-12,-5)$; $C(13,-5)$.

1) Déterminer une équation des droites (AB), (AC) et (BC).
2) Déterminer une équation des bissectrices intérieures du triangle ABC.
3) Vérifier que ces trois droites sont concourantes et en déduire une équation du cercle inscrit dans le triangle ABC.

<u>Exercice 5 :</u>

Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ et P le point de coordonnées $(0;5)$. On se propose de déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle (C)passant par le point P.

<u>Partie A</u> : Soit$M_0(x_0, \ y_0)$ un point de (C).

1) Ecrire l'équation de la tangente à (C) en M_0.
2) Déterminer x_0 et y_0 pour que cette tangente passe par P.
3) En déduire une équation des tangentes à (C) passant par le point P.

<u>Partie B :</u>

1) Ecrire une équation cartésienne de la droite (Δ_m) passant par P et de coefficient directeur $m, (m \in \mathbb{R})$.
2) Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de point communs à cette droite et au cercle (C).
3) En déduire une équation des tangentes à (C) passant par le point p.

Exercice 6 :

Dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité $1\,cm$. On considère les points $A(0,5); B(0,-2);\ E(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

1) Démontrer que le projeté orthogonal du point A sur la droite $(\Delta): x - y - 2 = 0$ est le point H de coordonnées $H(\frac{7}{2}\ ;\ \frac{3}{2})$.

2) Calculer les coordonnées du point B' symétrique de B par rapport à H.

3) Montrer que l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant la relation

$\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MB'} = 0$. Est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon puis construire (C).

4) Calculer la puissance du point E par rapport au cercle (C).

5) Déterminer une équation de la tangente (T) au cercle (C) en B puis calculer la distance d du point 0 origine du repère à la droite (C).

Exercice 7 :

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble de représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = 3 + 5\cos\propto \\ y = 2 + 5\sin\propto \end{cases}$; $\propto \in \mathbb{R}$ 2) $\begin{cases} x = 2 - 5\sin\propto \\ y = 5\cos\propto \end{cases}$; $\propto \in \mathbb{R}$ on pourra poser $\theta = \propto + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 :

On donne les deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = 3x$ et $y = -3x$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ tels que :

$d(M,D) + d(M,D') = 4.$

Exercice 9 :

m est un nombre réel. On considère la droite (Δ_m) d'équation :

$x - my + \sqrt{1+m^2} = 0$. Démontrer que (Δ_m) est tangente à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Exercice 10 :

Soit (C) et (C') les cercles d'équations respectives :

$x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$ et $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13 = 0.$

1) Démontrer que (C) et (C') sont sécants en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.
2) Pour tout nombre réel , on désigne par (E_k) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation :
   $x^2 + y^2 + x - 4y + 1 + k(x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13) = 0.$

   Démontrer que :

   a) Si $= -1$,(E_k) est la droite (AB).
   b) Si $k \neq -1$, (E_k) est un cercle passant par A et B.
   c) On suppose que : $k \neq -1$.
   d) Déterminer en fonction de k les coordonnées du centre du cercle (E_k).
   e) Quel est l'ensemble des centres des cercles (E_k) quand k varie dans $\mathbb{R} - \{-1\}$?
   f) Démontrer que tout cercle passant par A et B admet une équation cartésienne de la forme :
      $\propto (x^2 + y^2 + x - 4y + 1) + \beta(x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13) = 0$, où $\propto$ et β des nombres réels.
   g) En déduire une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 11 :

Déterminer les droites contenant le point A et tangentes à (C) lorsque :

a) $A(2\,;3)$ et $(C) : x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.

b) $A(0;0)$ et (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$

Exercice 12 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit (C) et (C') les cercles d'équations respectives :

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ et $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0.$

1) Déterminer les centres Ω et Ω' et les rayons R et R' de ces cercles (C) et (C').

2) Soit $k = \frac{R'}{R}$, déterminer les coordonnées du centre I de l'homothétie de rapport k qui envoie centres Ω surΩ'.
3) Soit $M_0(x_0\,;y_0)$ un point de (C) . Quelle est l'équation de la tangente (T_{M_0}) en M_0 au cercle (C).
4) Déterminer le point A de (C) d'ordonnée positive et tel que la tangente à (C) en A passe par I.
5) Montrer que la droite (AI) est aussi tangent à (C').

Exercice 13

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-4;\ 1)$, $B(1;\ -1)$ et $C(1;\ -2)$.

1) Faire la figure.
2) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (BC).
3) I désigne le milieu du segment $[AC]$.
a) Déterminer une équation de la médiane issue de B du triangle ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B du triangle ABC.
c) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice14 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ et $C(2;\ \sqrt{3})$.

1) Faire la figure.
2) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
4) En déduire une équation cartésienne d'un cercle (C) tangent à (AB) et à (AC) et dont le centre a comme abscisse 5.
5) Déterminer les coordonnés des points de tangente de (C) avec les droites (AB) et (AC).

Exercice15 :

1) Déterminer une équation normal de la droite (d) d'équation cartésienne $3x - 4y + 1 = 0$.
2) Déterminer une équation normal de la droite (d) d'équation cartésienne $x + 6y - 2 = 0$.

3) **Déterminer une équation normal de la droite passant par $A(0;3)$ et $B(6;\ -2)$.**
4) **Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(5;1)$ et de rayon 2.**
5) **Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(-2;1)$ et passant par $A(3;0)$.**
6) **Déterminer une représentation paramétrique du cercle d'équation :** $3x^2+3y^2-6x+6y-42=0$.
7) **désigne la droite d'équation $x-4y-1=0$. Déterminer les deux vecteurs normaux de (d) dont la norme est égale à 3.**

Exercice16 :

(C) désigne un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R, $R>0$.

t est un nombre réel fixé et A le point de (C) de coordonnées $(x\,;y)$ avec
$$\begin{cases} x=a+R\cos(t) \\ y=b+R\sin(t) \end{cases}$$

1) **Montrer que $\vec{U}(\cos(t)\,;\ \sin(t))$ est un vecteur directeur de la droite (ΩA).**
2) **(T) désigne la tangente au cercle au point A. Déterminer une équation cartésienne de (T).**

Exercice17 :

On donne le point $A(2;1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne :

$2x-y+3=0$.

1) **Calculer la distance du point A à la droite (D).**
2) **Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (D).**

Exercice18 :

1) **Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.**

On donne les points $A(4;-3)$ et $B(5;\ 4)$.

(C) désigne le cercle de centre A et passant par l'origine.

a) **Faire la figure.**
b) **Déterminer le rayon de (C) et une équation cartésienne de (C).**
c) **Calculer la distance AB.**

2) **(C') désigne le cercle de diamètre $[AB]$.**

a) Construire (C').
b) Déterminer une équation cartésienne de (C').
c) Déterminer les coordonnées de deux points d'intersection I et J de (C) et (C').
d) Sans calcul, démontrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ et $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$.
3) Déterminer une équation cartésienne des deux tangentes à (C) issue du point B.

Exercice19 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(C) désigne le cercle d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$.

(C') est le cercle de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5 + \sqrt{8}\cos\propto \\ y = 4 + \sqrt{8}\sin\propto \end{cases}$ $\propto \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les caractéristiques des cercles (C) et (C') : centres respectifs Ω et Ω' et es rayons respectifs R et R'.
2) Construire (C) et (C') dans ce repère.
3) En déduire que les (C) et (C') sont tangents.
4) Déterminer l'équation de (Δ) tangente commune à (C) et (C') .
5) A désigne le point d'abscisse 10 appartenant à (Δ). La seconde tangente à (C') issuede A coupe (C') en J vérifiant $IA = JA$.
a) A l'aide d'une équation cartésienne de (C') et de la condition $IA^2 = JA^2$ Démontrer que les coordonnées du point J est $J(\frac{411}{53}; \frac{246}{53})$.
b) Déterminer l'équation de la seconde tangente à (C') issue de A.

Exercice20 :

(C) et (C') désignent les cercles d'équations cartésiennes :

$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ et $x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35 = 0$.

1) Déterminer les caractéristiques des cercles (C) et (C'): centres Ω et Ω' et des rayons respectifs R et R'.
2) Construire (C) et (C') dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3) Démontrer que (C) et (C') sont sécants en deux points I et J dont on déterminera les coordonnées.
4) k désigne un nombre réel et (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $(\Omega M^2 - R^2) + k(\Omega' M^2 - R'^2) = 0$.
a) Vérifier que les points I et J appartiennent à (E_k) quelque soit la valeur du nombre réel k.
b) Montrer que le point $M(x; y)$ appartient à (E_k) si te seulement si :

$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 + k(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0.$

c) Montrer que si $= -1$,(E_k) est la droite (IJ).

d) Montrer que si $k \neq -1$, (E_k) admet une équation cartésienne de la forme : $x^2 + y^2 + \propto x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\propto$, β et γ trois nombres réels dépendant de k.

e) Déduire de la question 4a) que (E_k) est un cercle passant par I et J.

5) On suppose que : $k \neq -1$.

a) Déterminer en fonction de k les coordonnées du centre Ω_k du cercle (E_k).

b) Vérifier que Ω_k appartient à la droite (Δ) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 8 - 10t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c) M est un point de (Δ) distinct de $A(8;-1)$. Montrer qu'il existe $k \neq -1$ tel que $M = \Omega_k$.

d) Identifier l'ensemble des centres Ω_k pour k que décrivant $\mathbb{R} - \{-1\}$ en fonction des données géométriques du problème.

6) L'objectif de cette question est de prouver que tout cercle passant par I et J admet une équation de la forme :

$\lambda(x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5) + \mu(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0$, où λ et μ sont deux nombres réels tels que $(\lambda; \mu) \neq (0;0)$.

a) (Γ) désigne un cercle passant par I et J de centre ω et de rayon r. En utilisant la caractérisation $\omega I = \omega J = r$, montrer que $\omega \in (\Omega\Omega')$.

b) Si $\omega = \Omega'$, identifier le cercle (Γ) et en déduire les valeurs de λ et μ cherchées.

c) Si $\omega \neq \Omega'$, achever la démonstration en utilisant les résultats du 5c).

<u>Exercice21 :</u>

Mack rappelle que dans une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$ admettant deux racines réelles x_1 et x_2 alors : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

(H) désigne l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

On donne : $M_1\left(x_1, \frac{1}{y_1}\right)$; $M_2\left(x_2, \frac{1}{y_2}\right)$ et $M_3\left(x_3, \frac{1}{y_3}\right)$ trois points distincts de (H).

1) (H_3) désigne la hauteur issue de M_3 dans le triangle $M_1M_2M_3$. Détermine une équation cartésienne de (H_3).

2) On se servant du rappelle de Mack montre que (H) et (H_3) ont deux points d'intersection I et M_3.

3) Détermine les coordonnées du point d'intersection I.
4) Vérifie que I est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

Exercice22 :

1) On donne les points $A(1;2)$, $B(-1;5)$ et $C(2;-3)$. Calculer l'aire du triangle ABC.
2) On considère les points $A'(-2;-2)$ et $B'(1;0)$. Déterminer et tracer le lieu des points M du plan tels que : $\left|det(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'M})\right| = 0$.
3) On considère le point $A(2;1)$ et la droite (D) d'équation : $2x - y - 2 = 0$.
   a) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre A, tangent à la droite (D).
   b) Calculer les coordonnées du point de contact entre (C) et (D).

Exercice23 :

1) Déterminer les valeurs du nombre réel m telles que le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - \frac{5}{2} = 0$ soit tangent à la droite (D) d'équation $x - y + m = 0$.
   c) Pour chacune des valeurs obtenues, calculer les coordonnées du point de contact entre (C) et (D).
2) Soit (Δ) la droite d'équation $3x + y + 2 = 0$ et A le point de (Δ) d'abscisse -1. Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par l'origine et tangente à la droite (Δ).
3) Soit (C) le cercle de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon 3
a) Déterminer les points de ce cercle où la tangente admet pour vecteur normal $\vec{v}(\sqrt{3};1)$.
b) Ecrire une équation de chacune de ces tangentes.
4) Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives : $3x - 4y + 6 = 0$ et $-6x + 8y + 9 = 0$.
   a) Démontrer que ces deux droites sont parallèles.
   b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle tangent à ces deux droites et dont le centre a une coordonnée nulle.

Exercice24 :

1) Soit (C) le cercle de centre $\Omega(4;0)$ et de rayon 2.
   m un nombre réel, (D_m) la droite passant par O et de pente m.

a) Déterminer une représentation paramétrique de (C).
b) Démontrer qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles (D_m) est tangente à (C).

2) On considère les points $A(0;4)$, $B(-3;0)$ et $C(3;0)$. Déterminer une représentation paramétrique du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice25

On considère les points $A(0;3)$, $B(-4;0)$ et $C(0;-2)$.

1) Déterminer les points I et J de l'axe des abscisses, équidistants des droites (AB) et (AC).
2) Ecrire une équation cartésienne du cercle de diamètre $[IJ]$ et vérifier que ce cercle passe par A.
3) Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

Exercice26:

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$, (C') le cercle de centre $O'(0;2)$ et de rayon 1.

1) Démontrer que les deux cercles sont sécants en deux points, dont on déterminera les coordonnées.
2) Démontrer qu'en ces deux points, les tangentes à (C) et (C') sont perpendiculaires.
3) Déterminer une équation normale, de chacun des tangentes communes à (C) et (C').

Exercice27:

Soit M un point du plan et (C) un cercle de centre Ω et de rayon r.

On appelle puissance de M par rapport à (C) le nombre réel $\wp(M)$ défini par $\wp(M) = M\Omega^2 - r^2$.

1) Déterminer, en fonction du signe de $\wp(M)$, la position de M par rapport à (C).
2) On suppose que (C) admet pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Démontrer que, si M a pour coordonnées $(x_0;\ y_0)$, on a : $\wp(M) = {x_0}^2 + {y_0}^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$.
3) On considère les points $A(0;7), B(3;1)$ et le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 12 = 0$.

a) Démontrer que A est intérieur et B extérieur à (C).
b) Une droite passant par M coupe (C) en deux points A et B.
   Démontrer que : $\wp(M) = \overline{MA} \times \overline{MB}$.
c) En déduire que $EFGH$, quadrilatère tel que les droites (EF) et (GH) se coupent en un point P, est inscriptible si et seulement si : $\overline{PE} \times \overline{PF} = \overline{PG} \times \overline{PH}$.

Exercice28

(C) désigne le cercle de centre O et de rayon 1. On désigne le point $A(a, 0)$ avec $a > 0$.

1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J des tangentes issues du point A avec le cercle (C).
2) Déterminer les équations des tangentes à (C) issues de A.

Exercice28

$(d_1), (d_2)$ et (d_3) désignent les trios droites d'équations respectives :
$(d_1): x + y - 5 = 0$; $(d_2) : 2x - y - 2 = 0$ et $(d_3) : x - 2y - 4 = 0$.

1) Calculer les coordonnées des points d'intersection suivants :
   $A \in (d_1) \cap (d_3)$; $B \in (d_1) \cap (d_2)$ et $C \in (d_2) \cap (d_3)$
2) Calculer la distance BC
3) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur (D) issue du sommet C du triangle ABC.
4) Calculer les coordonnées de E, point d'intersection de (D) et de l'axe des abscisses.
5) Déterminer les coordonnées du point F, projeté orthogonal de E sur la droite (d_2)
6) Calculer la distance de F à (d_1).

Exercice29

On donne les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 0)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(1; -2)$
2) Déterminer les coordonnées du point D de (d_1) d'abscisse égale à 2.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d_2) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{n'}(1; 1)$.
4) Déterminer les coordonnées du point C de (d_2) d'abscisse égale à 1.

5) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites (AC) et (BD).
6) P désigne un point de (d_1) et Q un point de (d_2). Déterminer les coordonnées de P et Q tels que I est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice30

(D) désignent la droite d'équation : $2x - y = 0$ et (D') désigne la droite passant par $A(-1; 1)$ et $B(-3; 0)$.

1) Déterminer le point d'intersection I de (D) et (D')
2) $M(x, y)$ désigne un point quelconque du plan. Donner l'expression donnant la distance d_1 de M à (D), et l'expression donnant la distance d_2 de M à (D').
3) Montrer que les points M vérifiant $d_1 = d_2$ définissent deux droites (Δ) et (Δ'), dont on déterminera les équations.

Exercice31

(D) et (D') désignent deux droites sécantes d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

1) A quelle condition sur les coefficients a, b, a' et b' les droites (D) et (D') sont-elles sécantes ?
2) $M(x, y)$ désigne un point quelconque du plan.
   a) Exprimer $d(M, (D))$ et $d(M, (D'))$ à l'aide des coefficients a, b, c, a', b' et c'.
   b) (Δ) et (Δ') désignent les deux bissectrices des droites (D) et (D')

En utilisant l'égalité $d(M, (D)) = d(M, (D'))$,déterminer une équation cartésienne de chacune des bissectrices.

   c) Montrer que (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.
3) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs unitaires directeurs respectivement de (D) et (D'), montrer que $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur directeur de l'une des bissectrices et que $\vec{u} - \vec{v}$ est un vecteur directeur de l'autre bissectrice.

Exercice32

On donne les points $A(4, 7)$, $B(-12, -5)$ et $C(13, -5)$.

1) Faire une figure.
2) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB), (AC) et (BC).
3) $M(x, y)$ désigne un point quelconque du plan.

a) Montrer que : $d(M,(AB)) = d(M,(AC)) \Leftrightarrow 7x - y - 21 = 0\ (1)$ ou $x + 7y - 53 = 0\ (2)$. On obtient ainsi les équations des bissectrices des droites (AB) et (AC).
b) En utilisant la figure, identifier l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.
c) De la même façon déterminer les équations des bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
d) Vérifier que les trois bissectrices intérieures sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
e) Comment appelle-t-on le point I pour le triangle ABC ?

4) On sait alors que : $d(I,(AB)) = d(I,(AC)) = d(I,(BC))$. Calculer cette valeur commune.

Exercice33

(D) désigne la droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et A est le point d'abscisse -1.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) passant par l'origine et tangent à (D) en A.

1) On note Ω le centre de (C). Déterminer une équation cartésienne de la droite $(A\Omega)$.
2) Si $[AA']$ est un diamètre de (C), que peut-on dire du triangle AOA' ?
3) En déduire les coordonnées de A'.
4) Conclure.

Exercice34

(D) désigne la droite d'équation : $4x - 3y + 2 = 0$ et (D') la droite d'équation $4x - 3y - 23 = 0$.

1) Quelle est la position relative de (D) et (D').
2) Quelle particularité ont les centres des cercles tangents simultanément à (D) et (D') ? Faire une figure.
3) $M(x,\ y)$ désigne un point du plan. Montrer que $d(M,(D)) = d(M,(D'))$ si et seulement si, M appartient à une droite (Δ) déterminée par une équation cartésienne.

Exercice35

(C) désigne le cercle de centre $\Omega(3,-2)$ et de rayon 4.

1) Déterminer les points A et A' de (C) où la tangente au cercle admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$.
2) Donner une équation normale des tangentes à (C) aux points A et A'.
3) Déterminer les points B et B' de (C) où la tangente au cercle admet pour vecteur normal $\vec{n}(1,\ \sqrt{3})$.
4) Donner une équation cartésienne des tangentes à (C) aux points B et B'.

<u>Exercice36</u>

(D_1) et (D_2) désignent respectivement la droite d'équation $-x + 5y - 4 = 0$ et la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = -8 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1) Quelles sont las positions relatives de (D_1) et (D_2) ?
2) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) tangent à (D_1) et (D_2) et dont le centre à une ordonnée nulle.
3) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') tangent à (D_1) et (D_2) et dont le centre à une abscisse égale à 2.

<u>Exercice37</u>

Dans le rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OB}, \vec{j})$. On donne les points :

$M_1(0;\ 16,7), M_2(40;\ 30), N_1(0;\ -5,6)$ et $N_2(40;\ -10)$.

On note A le point d'intersections des droites (M_1M_2) et (N_1N_2).

1) Faire la figure.
2) Placer les point B d'ordonnée nulle tels que A, O et B sont alignés et les droites (OB) et (M_1N_1) sont perpendiculaires.
3) On souhait mesurer la largeur d'une rivière dont les bords sont supposés rectiligne et parallèles. On repère un arbre situé sur la berge opposée de la rivière par le point A.
   a) Déterminer une équation cartésienne des droites (M_1M_2) et (N_1N_2).
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites (AM_1) et (AM_2) .
   c) En déduire la largeur du rivière.
4) Démontrer que les points A, M_1 et M_2 respectivement A, N_1 et N_2 sont alignés.
5) On donne $\vec{i} = \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB}$. Déterminées les coordonnées du point B.

<u>Exercice38</u>

(P) désigne la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$

Pour tout nombre réel a non nul, M_a désigne le point de (P) d'abscisse $x = a$ et (T_a) la tangente à (P) au point M_a .

Sachant que (T_a) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $f'(a) = a$ et $f'(b) = b$

1) Montrer qu'il existe un unique nombre réel b tel que (T_a) et (T_b) soient perpendiculaires.
2) On note I_a le point d'intersection de (T_a) et (T_b). Montrer que l'abscisse de I_a est égale à $\frac{a+b}{2}$
3) Déterminer les coordonnées du point I_a
4) Déterminer le lieu géométrique des points I_a obtenus lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$

Exercice39

m désigne un nombre réel et (D_m) les droites d'équations :

$(m - 1)x + (2 + m)y + 3m - 6 = 0.$

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites (D_0) et (D_1).
2) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
3) Montrer que les droites (D_m) passent toutes par un oint fixe F dont on déterminera les coordonnées.
4) Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une droite (D_m) passant par le point :
- $A(-5; 0)$
- $B(1; 4)$
- $C(2; -7)$
5) On considère un point $M(x_M; y_M)$ du plan et on veut savoir s'il existe toujours une droite (D_m) passant par M. En supposant que M vérifier l'équation cartésienne de (D_m), exprimer m en fonction de x_M et y_M lorsque c'est possible.
6) D'après le calcul précédent, montrer que les points M par lesquels ne passe aucune droite (D_m) sont situés sur une droite (Δ) dont on déterminera une équation cartésienne.
7) Donner un vecteur directeur de (D_m)
8) En déduire les valeurs de m pour lesquelles la droite (D_m) est parallèles à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées, à la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice40

Deux géomètre de la première C comme Mack et Ndala veulent montrer que la médiane (IA'') est aussi la hauteur issue de I du triangle IBB'.

Pour cela ils disent que si (C) désigne le cercle de centre $O(0,0)$ et passant par $A(-3\,,5)$ et $I(-2,-3)$ un point intérieur au cercle où la droite (IA) coupe (C) en un second point B et la perpendiculaire à (IA) en I coupe (C) en A' et B'.

1) Faire la figure.
2) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et $(A'B')$.
3) Montrer que si $M(x,\ y)$ est un point d'intersection de (C) et de (AB), alors x est solution d'une équation du second degré vérifiant : $65x^2 + 304x + 327 = 0$ puis déduire que -3 est solution de cette équation et déterminer l'autre racine.
4) En déduire les coordonnées de B.
5) Démontrer que les coordonnées des points A' et B' sont de la forme : $A'(\frac{a}{b} - \frac{c\sqrt{\beta}}{b};\ -\frac{d}{b} - \frac{\sqrt{\beta}}{b})$ et $B'(\frac{a}{b} + \frac{c\sqrt{\beta}}{b};\ -\frac{d}{b} + \frac{\sqrt{\beta}}{b})$ où a, b, c, d sont des nombres réels tous non nuls à déterminer et β un entier naturel non nul.
6) On considère la médiane $(A''I)$ du côté $[AA']$ du triangle AIA'. Montrer que la médiane $(A''I)$ est aussi la hauteur issue de I du triangle IBB'. On pourra utiliser le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux.

Chapitre4 : la sphère

Exercice1

L'espace est muni d'un repère orthogonal.

1) Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y - z - \frac{5}{2} = 0$ est une équation d'une sphère (S) dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Prouver que le point $A(1; -\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ appartient à (S).

3) Déterminer une équation du plan tangent en A à la sphère (S).

Exercice2

Soient les points $A(-2; -4; 3)$ et $B(1; -3; 5)$.

Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice3

Soit un triangle rectangle isocèle tel que $AB = AC = a$. Calculer $\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\|$.

Exercice4

Soient les vecteurs $\vec{u}(1\,;-2\,;4), \vec{v}(-3\,;2\,;0)$ **et** $\vec{w}(2\,;-3\,;5)$.

1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}\wedge\vec{v}$ **et** $\vec{u}\wedge\vec{w}$ **sont colinéaires.**

2) En déduire que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **sont coplanaires.**

Exercice4

Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ **est un repère orthonormé de l'espace et** (P) **le plan :**

$x+y-z+2=0$ **et le point** $I(0\,;-1\,;1)$.

1) a. Vérifier que le point I **appartient au plan** (P).

b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (D) **perpendiculaire à** (P) **en** I.

c. Soit $\Omega(1;0;0)$ **vérifier que le point** I **appartient à la droite** (D).

2) Soit (C) **le cercle de centre** I **et de rayon** 1 **et** (S) **la sphère de centre** Ω **et qui coupe le plan** (P) **suivant** (C).

a. Montrer que la sphère est de rayon 2.

b. Déterminer une équation de la sphère (S).

3) Soit m **un réel et** (S_m) **l'ensemble des points** $M(x,y,z)$ **tels que :**

$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$.

a. Montrer que pour tout réel m; (S_m) **est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre** I_m **et le rayon.**

b. Montrer que lorsque m **varie dans** $\mathbb{R}$, I_m **décrit la droite** (D).

Exercice5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. **Soient les points** $A(2;0;0), B(1;1;0)$ **et** $C(3;2;6)$.

1) Placer ces points dans ce repère.

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Déterminer une équation du plan (P) **passant par les points** A, B **et** C.

4) Soit la droite (Δ) **passant par le point** $F(2,4,4)$ **et de vecteur directeur** $\vec{u}(2,2,-1)$.

a. Montrer que (Δ) est perpendiculaire à (P) puis donner une représentation paramétrique de (Δ) .

b. En déduire les coordonnées du point Hprojeté orthogonal de F sur le plan (P).

c. Calculer le volume du tétraèdre $FABC$.

d. Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre F et tangente au plan (P).

5) Soit h, l'homothétie de centre A et de rapport -3. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S') image de (S) par h, puis montrer que (P) et (S') sont tangents.

<u>Exercice6</u>

Dans l'espace muni repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.On considère les points $A(0;6;0)$, $B(0;0;8)$ et $C(4;0;8)$.

1) Placer ces points dans ce repère.

2) Démontrer :

a. les triangles ABC et $0AC$ sont rectangle respectivement en B et en 0.

b. La droite (BC) est perpendiculaire au plan $(0AB)$

3) Déterminer le volume en cm^3 du tétraèdre$0ABC$.

4) Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

<u>Exercice7</u>

Dans l'espace muni repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.On considère les points $A(1;2;-1)$ et $B(2;1;1)$.

1) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (Q) passant par Aest perpendiculaire à (AB) est: $x-y+2z+3=0$.

2) Soit (P_m) les plans d'équation cartésienne $x+y+m-3=0$ où m est un réel.

a. Montrer que (AB) est parallèle à (P_m).

b. Pour quelle valeur de m, la droite (AB)est une incluse dans (P_m)?

3) Soit (S) l'ensemble des points des points $M(x,y,y)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0.$

a. Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon r.

b. Etudier suivant les valeurs de m, les positions relatives du plan (P_m) et de la sphère (S).

c. Montrer que (P_1) coupe (S) suivant un cercle dont on précisera les coordonnées du centre H et le rayon r.

Exercice8 :

(S) et (S') désignent deux sphères d'équations cartésiennes respectives :

$x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z=7$ et $x^2+y^2+z^2-8x-6y+2z=-13$

1) Déterminer les caractéristiques des sphères (S) et (S') : centres respectifs Ω et Ω' et es rayons respectifs R et R'.
2) Justifier que les sphères (S) et (S') sont sécantes.
3) M désigne un point de l'intersection entre (S) et (S') .
   a) Démontrer que M appartient a un plan médiateur de $[\Omega\ \Omega']$
   b) Démontrer que M appartient a un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon r.
   c) Démontrer que $\overrightarrow{\Omega M}\times\overrightarrow{\Omega\Omega'}=\frac{5}{2}$
4) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[\Omega\ \Omega']$.
5) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Omega\Omega')$.

Exercice9 :

On donne $A(3,-5,1)$ et $B(1,-3,7)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A.

Exercice10 :

On donne $A(6,0,0)$; $B(0,6,0)$ et $C(0,0,4)$.

1) Représenter ces points dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.
2) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points pondérées $(O,1)$, $(A,2)$, $(B,3)$, puis placer le point G dans ce repère.
3) (S) désigne l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que :

$(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$

a) Déterminer une équation cartésienne de (S).

b) Préciser ses éléments caractéristiques.

4) Décrire l'intersection de (S) et du plan d'équation $x = 0$. Représenter cet ensemble.

5) (Γ) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :
$MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24.$

   a) Démontrer que $G \in (\Gamma)$.

   b) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \vec{U} = 0$ où $\vec{U}(2, -3, 0)$.

   c) En déduire l'ensemble (Γ).

Exercice11

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1) Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y - z - \frac{5}{2} = 0$ est une équation d'une sphère (S) dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Montrer que le point $A\left(1, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ appartient à (S).

3) Déterminer une équation du plan tangent en $A\left(1, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ à la sphère (S).

4) Soit (S') l'ensemble des points des points $M(x, y, y)$ de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.

   a. Montrer que (S') est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon r.

   b. Etudier suivant les valeurs de m, les positions relatives du plan (P_m): $x + y + m - 3 = 0$ et de la sphère (S').

Troisième trimestre

Chapitre3 : Suites numériques

Exercice1 :

1) On donne une suite arithmétique telle que :$r = -5$ et $u_{20} = 3$.
Calculer u_{13} et u_{31} .

2) Considérerons toujours la même suite telle que u_{17}=20 et u_{39}=62.
Déterminer r .

Exercice2 :

Une suite géométrique est telle que : $u_8 = 64; q = 2$. Calculer u_4 .

Exercice3 :

1) Démontrer que $\frac{a^2+b^2}{2}$; $\frac{(a+b)^2}{4}$ et ab sont en progression arithmétique.
2) x; a; et y sont en progression arithmétique et $x; b$ et y sont en progression géométrique. Déterminer x et y (on suppose que $a > b$)
3) Faire l'application pour $a = 20$ et $b = 12$.
4) Déterminer 4 nombres $a; b; c$ et d en progression géométrique sachant que la somme des deux premier est égal à 12 et la somme des deux derniers est égal à 108

Exercice4 :

Trois réels u_1 ; u_2 ; u_3 sont en progression arithmétique. Trois autres réels v_1 ; v_2 ; v_3 sont en progression géométrique. En additionnant de même rang en obtient respectivement 4 ; 10 ; 18. Déterminer ces 6 réels, sachant que la somme de terme arithmétique est 12.

Exercice5 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1-2a}{a}(u_n+5);\ a \neq 2 \end{cases}$.

1) Déterminer le réel a pour que la suite (u_n) soit une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Dans la suite de l'exercice , on pose $a = \frac{1}{3}$ et $r = 5$.
   a) Exprimer le terme général u_n en fonction de n, puis étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   b) Calculer la somme $s = u_3 + u_4 + \ldots + u_{60}$ et $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Exercice6 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \end{cases}$

1) Calculer u_1 ; u_2; u_3 et u_4.
2) On pose $v_n = u_n - \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Déterminer le réel β pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3) Dans la suite on pose : $\beta = \frac{1}{3}$

a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c) Calculer $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$ et $s'_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$.

Exercice7 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{0=1} \\ u_{n+1=\frac{1}{3}u_n+n-1} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2) a) Calculer v_0, puis exprimer v_n en fonction de n.

   b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n=\frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}}$.

3) On pose $w_{n=}\frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}$ et $t_{n=}\frac{6n-15}{4}$.

   Donner la nature des suites w_n et t_n, en précisant la raison et le premier terme .

Exercice8 :

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3' \end{cases}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2) Démontrer que :

   a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -5(\frac{1}{2})^n$

3) Démontrer que :

   a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$.

   b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n + 6 = (u_0 + 6)(\frac{1}{2})^n$.

Exercice9 :

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1' \end{cases}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
2) Etudier la nature de la suite (u_n).
3) (v_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - \frac{3}{2}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

5) On pose : $S_n = v_0+v_1+...+v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) En déduire $s'_n = u_0+u_1+...+u_n$ en fonction de n.

Exercice10 :

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 5 \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
2) Dire si la suite (u_n) est arithmétique.
3) (v_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison.
4) On pose : $S_n = v_0+v_1+...+v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) En déduire u_{n+1} en fonction de n.
   c) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice11 :

Achille veut rattraper une tortue qui est $100m$ devant lui en courant 10 fois plus vite que n'avance la tortue.

Lorsqu'Achille a parcouru $100m$, la tortue en a parcouru 10 ; lorsqu'Achille a parcouru ces $10m$, la tortue en a parcouru $1, \ldots$.

Achille arrivera-t-il à rattraper la tortue ? si oui, quelle distance aura-t-il alors parcouru ?.

Exercice12 :

1) (v_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 3\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + 2$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $-1 \leq v_n \leq 5$.
2) Démontrer que toute suite croissante est minorée.
3) Démontrer que toute suite décroissante est majorée.
4) (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq 3$.
5) (u_n) désigne une suite arithmétique telle que $u_4 = 2$ et $u_9 = 10$.
a) Calculer la raison de la suite (u_n).
b) Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.
6) (u_n) désigne une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$ sachant que $u_n = 12$. Déterminer n.

7) (u_n) désigne une suite géométrique telle que $u_4 = 6$ et $u_6 = 12$ avec $u_5 < 0$
   a) Calculer la raison de la suite (u_n).
   b) Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.
8) (u_n) désigne une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$ sachant que $u_n = 256$. Déterminer n.

Exercice13 :

1) Calculer les somme suivantes :
   a) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$;
   b) $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$;
   c) $S_3 = 14 + 9 + 4 - 1 - 6 - \cdots - 66$;
   d) $S_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$;
   e) $S_5 = 1 - 3 + 9 - 27 + (-3)^4 + \cdots + (-3)^{10}$;
   f) $S_6 = 3^5 + 3^6 + 3^7 + \cdots + 3^{20}$;
   g) $S_7 = 1 + 10 + 20 + 30 + \cdots + 10n$;
   h) $S_8 = 1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots + 10^n$;
   i) $S_9 = 1 - 10 + 100 - 1000 + \cdots + (-1)^n 10^n$.
2) x, y et z désignent dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leurs carrés est 59.

Exercice14 :

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

On admet que, pour tout $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \neq -3$.

On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).
4) Vérifier que $u_n \neq -3$ pour tout $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice15 :

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2^n \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
2) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour $n \geq 0$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Exprimer S_n en fonction de n.
b) En déduire u_{n+1} puis u_n en fonction de n.
c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

<u>Exercice16 :</u>

q désigne un nombre réel avec $q \neq 1$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donné.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$ et $t_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
3) Exprimer u_1, u_2 et u_n en fonction de u_0 et de q.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = u_0 t_n$.
5) (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$. Exprimer $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

<u>Exercice17 :</u>

(u_n) désigne une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1} \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
2) Que peut-on conjecturer sur la suite (v_n) ? Démontrer cette conjecture.
3) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4) Déterminer 100 nombres entiers impairs consécutifs tels que leur somme soit égale à 17600.

<u>Exercice18 :</u>

(u_n) et (v_n) désignent deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ v_0 = 2 \\ u_n = \frac{2u_n+v_n}{3} \\ v_n = \frac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer les cinq premiers termes de chaque suite et les représenter sur la droite réelle.
2) Quelles conjectures peut-on faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?
3) On pose $S_n = u_n + v_n$ et $D_n = u_n - v_n$ pour tout $n \geq 0$.
   a) Etudier le sens de variation des suites S_n et D_n ; puis montrer que (S_n) est une suite constante et que (D_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer u_n et v_n en fonction de S_n et D_n puis en fonction de n.
4) Démontrer les conjectures émises à la question 2).
5) $\propto$ désigne un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = (\cos \propto)^n$. Exprimer u_n en fonction de n lorsque :

a) $\propto \equiv 0[2\pi]$;

b) $\propto \equiv \pi[2\pi]$;

c) $\propto \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

<u>Exercice19</u> : les points sur une spirale

On construit une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}$ tel que : O et A_0 sont donnés, $OA_0 = 16$; On prendra OA_0 horizontale.

Pour tout nombre entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}.

1) Construire A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.
2) (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = OA_n$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique

c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).

3) Pour tout nombre entier naturel n non nul, on pose :
   $S_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Calculer la limite de la suite (S_n).

4) (a_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = aire(OA_nA_{n+1})$.

a) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

b) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer a_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (a_n).

d) Exprimer en fonction de n, la somme a'_n des n premiers termes de cette suite et calculer la limite de la suite (a'_n).

Exercice20 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \frac{3^0+3^1+\cdots+3^{n+1}}{3^n}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2) Donner une expression de u_n en fonction de n et calculer à 10^{-4} prés, les valeurs de u_5, u_{10} et u_{25}
3) Démontrer que cette suite a une limite et calculer cette limite.

Exercice21 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de u_{n-1}.
3) En déduire le sens de variation de cette suite.

Exercice22 :

x, y et z sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante.

Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.

Exercice23 :

Dans un village d'Afrique, vit un très vieil homme au nom de Ballack, au milieu de ses enfants, petits-enfants, arrière-petits-enfants et arrière-arrière-petits-enfants.

Chacun d'eux a le même nombre n d'enfants (sauf les arrière-arrière-petits-enfants qui n'ont pas encore procrée) et tous sont en vie.

1) Calculer en fonction de n, le nombre de membres de cette famille.
2) On suppose que la famille comprend 2801 personnes. Combien le patriarche a-t-il eu d'enfants ?

Exercice24 :

Le loyer mensuel d'une maison est de 50.000 F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%.

1) Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
2) Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?
3) Calculer le total des loyers payées pendant les 10 premières années.

Exercice25 :

Emmanuel désire vendre sa maison qui comporte deux étages de 16 marches chacun. L'acheteur devra payer 10 F pour la 1^{re} marche, 20 F pour la 2^{re} marche, 40 F pour la 3^{re} marche, ainsi de suite, en doublant chaque fois jusqu'à la dernière marche.

Quel est le prix de vente de cette maison ?

Chapitre4 : Etude d'une fonction

Exercice1

1) On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5} ; si\ x \in \mathbb{R} - \{5\} \\ f(5) = m ; si\ x = 5 \end{cases}$ Déterminer la valeur de m pour que f soit continue pour $x = 5$.
2) Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :
$f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{7}$; $g(x) = x^5$; $h(x) = x^3 + x^2 - 24x + 1$; $k(x) = \frac{3x}{1-x}$
$t(x) = \sqrt{x}(x^2 - x)$; $p(x) = (2x-1)^5$; $o(x) = \frac{x^2}{x+2}$; $m(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Exercice2

On considère la fonction $f(x) = x^3 + px + 2$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Démontrer que $\Omega(0;2)$ est un centre de symétrie de (C).
2) Déterminer p sachant que la droite (OI) est tangente à (C).
3) Etudier puis construire (C).

Exercice3

On considère la fonction $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$.

1) Déterminer a et b pour que la représentation graphique (C) de f passe par le point $A(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}-1)$ et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2) Démontrer que $\Omega(0;-1)$ est un centre de symétrie de (C).
3) Etudier f et tracer (C).

Exercice4

Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé.

On considère les paraboles $(\mathcal{P}_a)$ d'équations : $y = \frac{1}{2}x^2 + 2ax - 2a(1-a)$, $(a \in \mathbb{R})$.

1) Démonter que, pour tout nombre réel a, $(\mathcal{P}_a)$ est l'image de $(\mathcal{P}_0)$ par la translation de vecteur $-2a(\overrightarrow{O\imath} + \overrightarrow{O\jmath})$.
2) Construire les paraboles $(\mathcal{P}_0)$, $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
3) Déterminer la courbe décrite par les sommets S_a des paraboles $(\mathcal{P}_a)$.
4) Déterminer une droite (Δ) tangente à toutes les paraboles $(\mathcal{P}_a)$.

Exercice5

On considère la fonction $f_a(x) = ax^3 - 3x + 1$, $a \in \mathbb{R}$ et on désigne par (C_a) sa courbe représentative de f_a.

1) Etudier et représenter graphiquement f_a, pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = 0$.
2) Démontrer que les courbes (C_a) passent toutes par un même point Ω, dont on déterminera les coordonnées.
3) Démontrer que Ω est centre de symétrie de toutes les courbes (C_a).
4) Etudier, suivant les valeurs de a, les variations de f_a.

Exercice6:

On souhait démontrer que parmi tous les rectangles d'aire $100\,cm^2$, c'est le carré dont le périmètre est minimal.

1) Exprimer le périmètre p en fonction de la longueur x du rectangle.
2) Etudier les variations de p. Conclure.

Exercice7:

m désigne un nombre réel strictement positif.

f est la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = mx + 1 - \frac{2x}{x+1}$.

1) $m = 1$.

a) Etudier les variations de f.

b) En déduire que f admet un minimum global en un point à préciser.

2) Faire varier m et constater la présence d'un minimum quelle que soit la valeur de m.

3) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de m.

4) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle f admet un minimum global atteint en 1 ?

Exercice8:

f désigne la fonction d'expression $f(x) = \frac{-4x-4}{x^2+2x+5}$

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Etudier les minimum et maximum globaux de f.
5) En déduire que pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice9:

m désigne un nombre réel strictement positif.

f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \frac{2x^2+mx-7}{x+3}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de m.
2) Déterminer la valeur de m pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse -1 est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$.
3) Déterminer la valeur de m pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x$.

Exercice10:

m désigne un nombre réel.

f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+mx+1}{x+1}$

Dans un repère orthonormé, (D_1) la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ et (D_2) la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Pour quelle valeur de m, (D_1) et (D_2) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice11:

Un bus fait aller-retour entre deux villes.

A l'aller, il roule à une vitesse moyenne de $50\,km/h$ et au retour, à une vitesse moyenne x exprimée en km/h.

1) Démontrer que la vitesse moyenne v de l'aller-route vérifie : $v(x) = \frac{100x}{x+50}$.
2) Etudier les variations de v sur $[0;90]$ et dresser son tableau de variation.
3) La vitesse de l'aller-retour peut-elle atteindre $75\,km/h$?
4) Quelle est la vitesse moyenne maximale pour aller-retour ?
5) Quelle est alors la vitesse moyenne maximale du retour ?

Exercice12:

Deux villages A et B sont situés sur une côte rectiligne, à $BA = 4\,km$ l'un de l'autre tel que le triangle BDC soit un triangle rectangle en B et de sens direct avec $BC = 1\,km$ tel que les points B, D et A soient alignés de même sens, on prendra BD horizonlal.

Un pêcheur est en mer, sur sa pirogue, au point C situé à $1\,km$ au largeur de B; il veut se rendre en A le plus rapidement possible.

Il se déplace en mer à une vitesse de $4\,km\,/\,h$ et sur terre à une vitesse de $8\,km\,/\,h$.

On se propose de déterminer le point D du segment $[AB]$ où le pêcheur doit débarquer.

x désigne la distance, exprimée en km, entre B et D.

1) Faire une figure. En tenant compte des données de l'énoncée.
2) Déterminer, en fonction de x, le temps t, en heures, mis par le pêcheur pour effectuer le trajet $C - D - A$.
3) Etudier les variations de la fonction ainsi obtenue.
4) En déduire la position du point D et le temps du parcours $C - D - A$.

Exercice13:

f est la fonction définie et dérivable sur $]-\infty;2[$ par $f(x)=\frac{-x-1}{x-2}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On se propose de chercher s'il existe une tangente à (C_f) passant par l'origine du repère.

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse m, $m\in\mathbb{R}, m<2$.
3) Déterminer alors les valeurs de m pour lesquelles la tangente passe par l'origine du repère.
4) Donner les équations des tangentes correspondantes.

<u>Exercice14:</u>

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+3$.

1) Déterminer l'approximation affine g au voisinage de 20 de f.
2) Démontrer que l'erreur commise e vérifie :
   $e(x)=|f(x)-g(x)|=4(x-20)^2$.
3) Calculer $f(20,001)$, $g(20,001)$ et $e(20,001)$.
4) Calculer $f(20,000001), g(20,000001)$ et $e(20,000001)$.
5) Quelle est l'erreur commise par la calculatrice ?

<u>Exercice15:</u>

f désigne une fonction définie sur $[-4;6]$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{5}{3}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Déterminer le minimum et le maximum de f, ainsi que les abscisses en lesquelles ils sont atteintes.
4) Tracer la courbe (C) dans un repère et placer les points m et M qui correspondent aux extremums de f.
5) Calculer les coordonnées du milieu I de $[mM]$.
6) Placer I dans le repère précédent. Justifier que I est le centre de symétrie de (C).

<u>Exercice16:</u>

Une entreprise fabriquant $n$articles, par mois où $n \in \mathbb{N}$.

Les charges se répartissent en charges fixes d'un montant de 750000F par mois et en charges variables d'un montant de 1200F par article et par mois.

1) Exprimer en fonction de n le prix de revient r d'un article.
2) Etudier la fonction $f(x) = 1200 + \frac{750000}{x}$
3) Le repère du plan étant orthogonal, tracer sa courbe représentative sur $[500; 1500]$.
4) Construire sur le même graphique, la droite d'équation $y = 2000$.
5) Chaque article est vendu 2000F. Déterminer le nombre minimum d'articles à produire pour que l'entreprise soit rentable.
6) Retrouve graphiquement ce résultat.

Exercice17:

f désigne une fonction d'expression $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ avec a, b, c des nombres réels

On note (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer a, b, c pour que : (C) admette pour asymptotes les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2$; la tangente à (C) au point d'abscisse 5 soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Représenter (C), ses asymptotes et la tangente dans un repère.

Exercice18:

g désigne une fonction d'expression $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des nombres réels

On note (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer a, b, c pour que : $A(2; 10) \in (C)$; la dérivée de g s'annule en 2 et la tangente à (C) au point d'abscisse 3 passe par le point $B(0; 2)$.
2) Montrer que le point A est centre de symétrie de (C).
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Représenter (C) et la tangente au point d'abscisse 3 dans un repère.

Exercice19:

f désigne une fonction dont l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$, (C) sa courbe représentative et (C') la courbe représentative de sa fonction dérivée dans un repère orthonormé.

1) Démontrer que si le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (C) alors la droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de (C').
2) Démontrer que si la droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de (C), alors le point $\Omega a;b)$ est un centre de symétrie de (C')

Exercice20:

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^4+2x^2+x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1.
2) Démontrer que (T) est également tangente à (C_f) en un autre point dont on donnera l'abscisse.
3) m désigne un nombre réel.
   a) Déterminer $f'(x)$ et démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

   $f'(x)-f'(m)=-4(x-m)(x^2+mx+m^2-1)$.

   b) Justifier que si la tangente à (C_f) au point d'abscisse m est également tangente à (C_f) en un autre point, alors l'équation $x^2+mx+m^2-1=0$ doit avoir au moins une solution.
   c) En déduire un encadrement du nombre réel m.

Exercice21:

f désigne une fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1) Utiliser la définition du nombre dérivé pour démontrer que $f'(0)=\frac{1}{2}$.
2) En déduire une approximation affine de f au voisinage de 0.
3) Dans la mécanique classique, l'énergie cinétique d'un corps de masse m en mouvement avec une vitesse v est donnée par l'égalité : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$. Dans la mécanique relativiste d'Einstein, cette même énergie cinétique d'un corps se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière, est donnée par la formule : $E_c=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)mc^2$ où c est la vitesse de la lumière.

On pose $x = \frac{v^2}{c^2}$.

Démontrer que l'énergie cinétique classique est une bonne approximation de l'énergie cinétique relativiste pour des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière.

Exercice22:

La sorcière d'agnesi une mathématicienne italienne à qui l'on doit cette courbe.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Placer les points $O(0;0)$ et $A(0;4)$.
2) Construire le cercle de diamètre $[OA]$.
3) La demi-droite d'origine O coupe le cercle (C) en B et la perpendiculaire à (OA) en A en un point C.
4) Construire la droite perpendiculaire à (AC) passant par C et la droite parallèle à (AC) passant par B.
   Ces deux droites se coupent en un point D.
5) On suppose que B a pour abscisse le nombre m.
   a) Démontrer que l'ordonnée de B est égale à : $2 + \sqrt{4 - m^2}$ ou $2 - \sqrt{4 - m^2}$.
   b) On suppose que $y_B = 2 + \sqrt{4 - m^2}$ pour la suite, déterminer une équation de la droite (OB).
   c) En déduire les coordonnées du point C.
   d) Démontrer que les coordonnées du point D sont :
      $D(\frac{4m}{2+\sqrt{4-m^2}}; 2 + \sqrt{4 - m^2})$.
6) On admet que la courbe obtenue est la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{64}{x^2+16}$.
   a) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
   b) En déduire que f admet un maximum global.
   c) Tracer la courbe de cette fonction et constater la coïncidence avec la tracer du point D.

Exercice23

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ et $g(x) = 2\cos(\pi x - \frac{\pi}{5})$.

Exercice24

a, b et c sont trois nombres réels, f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2}$

1) Déterminer son ensemble de définition noté E_f.
2) Sachant que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Calculer le réel a.
3) Sachant que $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$. Calculer les réels b et c.
4) Dans la suite on pose $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.
   a) Calculer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
   b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5) Etudier les branches infinies de la fonction f.
6) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) de f. Unité graphique $1\ cm$

Exercice25

On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 6;\ si\ \ x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-3};\ si\ x \in]-1; 3[\cup]3; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(o\,; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier, dans cet ordre, la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse x_0=-1.
3) Etudier les variations de f.
4) Etudier les branches infinies de (C).
5) Construire soigneusement la courbe (C) de f avec ses demi-tangentes et asymptote éventuelles.
6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [5; +\infty[$. Montrer que g admet une réciproque g^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
7) Soit h la fonction définie par : $h(x) = |f(x)|$. Construire la courbe (C') de h dans le même repère que (C) de f.

Exercice26

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Donner l'ensemble de la fonction f.
2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Déterminer les réels $a; b$ et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
4) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (D).
5) Etudier la position de (C_f) par rapport à cette asymptote.
6) Calculer $f'(x)$ puis donner son signe.
7) Dresser le tableau de variation de f.
8) Donner l'équation de l'autre asymptote à (C).
9) Tracer la courbe (C_f) ainsi que ses asymptotes dans le même repère.
10) Montrer que le point $I(2;3)$ est un centre de symétrie de (C_f).

<u>Exercice27</u>

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan (P)rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On désigne par (ox) et (oy) les axes de coordonnées.

1) Etudier les variations de la fonction f_m telle que :
   $f_m(x) = mx^2 - \left(8m - \frac{1}{2}\right)x + 7m - \frac{1}{2}$. Où m désigne un paramètre réel.
   On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de m
2) Démontrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}(C_m)$ passe par deux points fixes A et B dont on indiquera les coordonnées.
3) On désigne par K le point de (C_m) appartenant à l'axe (oy), par I le second point commun à (C_m)parallèle à l'axe (ox) menée par K. Calculer les coordonnées du point I en fonction de m puis en déduire l'ensemble des points I lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

<u>Exercice28</u>

Soit (H_m) les courbes représentatives des fonctions (f_m) telle que :

$f_m(x) = \frac{(2m-1)x+m}{x-m}$ où m désigne un paramètre réel.

1) Construire la courbe pour $m = 1$ et pour $m = 0$ en repère orthonormé.
2) Montrer que toutes les courbes (H_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
   Quel est le coefficient directeur de la tangente en A aux diverses courbes (H_m) $(m \neq 0)$?

3) Il existe un deuxième point, P des courbes (H_m) où la tangente est parallèle à la tangente en A. Calculer l'abscisse de ce point P en fonction de m.
4) Quel est l'ensemble des points P quand m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice29

Une noix de coco située à $12\,m$ du sol, se détache de son cocotier et tombe.

$d(t)$ désigne la distance en mètre parcourue par la noix de coco au bout d'un temps t en seconde de chute. On admet que $d(t) = \frac{1}{2} \times 9,81 \times t^2$.

1) Déterminer à quel instant la noix de coco touche le sol.
2) Calculer la vitesse moyenne de la noix de coco durant la chute.
3) h désigne un nombre réel strictement positif proche de zéro.
   a) Calculer la vitesse moyenne de la noix de coco en $1\,s$ et $(1+h)s$.
   b) Que vaut cette vitesse lorsque h tend vers zéro ?
   c) Comment nomme-t-on cette vitesse en mathématiques ?
   d) Calculer de même la vitesse instantanée de la noix de coco : à l'instant $t = 1,25s$ et au moment où elle touche le sol.

Exercice30

1) f désigne la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + 2, \; si\; x \geq 1 \\ f(x) = ax^2 + b, \; si\; x < 1 \end{cases}$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

2) Déterminer une valeur approchée de chacun des nombres suivants :
   a) $A = 1,005^2$;
   b) $B = 0,997^3$;
   c) $C = \sqrt{0,996}$;
   d) $D = \frac{1}{1,007}$;
   e) $E = \frac{2,0001}{1,0001^2}$

Exercice31

f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x - 3$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a et b pour que f admette 2 pour maximum local en -1.

Chapitre5 : Trigonométrie

Exercice1

1) Les réels $\frac{25\pi}{4}$ et $-\frac{17\pi}{4}$ sont-ils des mesures d'un même angle orientés ?
2) $\frac{83\pi}{4}$ est une mesure en radians d'un angle orienté.
3) En déduire sa mesure principale.

Exercice2

Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle dont on donne une en radians.

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $-\frac{4\pi}{3}$ C) $-\frac{10\pi}{3}$ d) $\frac{185\pi}{6}$ e) $\frac{17\pi}{13}$ f)135π .

Exercice3

Donner une valeur approchée de la mesure en degrés, à une minute d'angle prés, d'un angle de 1 radian puis d'un angle de 100 radians.

Exercice4

On sait que $(\vec{u},\vec{v})= -\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Donne une mesure en radians de chacun des angles orientés :

a) $(\vec{u},-\vec{v})$ b) $(-\vec{u},\vec{v})$ c) $(-\vec{u},-\vec{v})$ d) $(\vec{v},\vec{u})$ e) $(2\vec{u},3\vec{v})$ f) $(-3\vec{u},5\vec{v})$ g) $(-3\vec{v},-\vec{u})$.

Exercice5

On donne $\sin b = -\frac{1}{3}$.

1) Calculer $\cos b$ sachant que $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$.
2) Calculer $\cos b$ sachant que $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$.
3) Parmi les cinq réels suivants, quatre sont mesures d'un même angle orienté : quel est l'intrus ?
   $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$.
4) Démontre que quel que soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $\sqrt{1+\sin 4x}=\sin 2x + \cos 2x$.
5) Montre que : $\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2}$.
6) Exprimer en fonction de $\cos 2x$ A et B tels que : $A = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$;
   $B = \frac{\sin 5x}{\sin x} + \frac{\cos 5x}{\cos x}$.
7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x}<0$.
8) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x - y = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

9) On donne deux réels $x\, et\, y$ tels que : $x+y=\frac{\pi}{3}$ et tels que $\tan x+\tan y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

a) Calculer $\tan(x+y)$ et en déduire $\tan x\times\tan y$.

b) Calculer $\tan x$ et $\tan y$ puis $x\, et\, y$.

Exercice6

On considère le système (S) suivant $\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\\ \sin x\sin y=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

1) Démontrer le système (S) est équivalente au système (S') suivant : $\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{2}\\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

2) Résoudre le système (S).

Exercice7

1) Soit f la fonction telle que : $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

   a) Préciser son ensemble de définition

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-\sqrt{3}$

2) On donne les réels $A=cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+cos^2(\frac{3\pi}{8})+cos^2(\frac{5\pi}{8})+cos^2(\frac{7\pi}{8})$ et $B=sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+sin^2(\frac{3\pi}{8})+sin^2(\frac{5\pi}{8})+sin^2(\frac{7\pi}{8})$.

3) Calculer $A+B$, $A-B$ puis en déduire $A\, et\, B$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation$\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$.

Exercice8

1) Développer$\cos(x-\frac{\pi}{6})$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x+\sin x=-1$.

4) Résoudre dans $I=[0;\,\pi]$ l'équation $-\sqrt{6}\cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x=2$.

5) Résoudre dans $I=[0;\,\pi]$ l'équation $\cos(3x-\frac{\pi}{6})=\cos(x+\frac{2\pi}{3})$.

6) Montrer que : a) $cos^4(x)+sin^4(x)+\frac{1}{2}sin^2(2x)=1$. b) $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$.

Exercice9

Soit x un réel de l'intervalle $I=[-\pi;\,\pi]$

1) Résoudre l'intervalle $I=[-\pi;\,\pi]$ $\sin 3x=-\sin 2x$.

2) Représenter les solutions de cette équation sur un cercle trigonométrique.

3) Calculer $(1+\sqrt{3})^2$.
4) Résoudre l'intervalle $=[-\pi;\ \pi]4\cos^2(x).+2(1-\sqrt{3})\cos(x).-\sqrt{3}$=0. On pourra poser $t=\cos(x)$.
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation l'équation : $-2\cos(2x)+\cos(x)+6=0$.
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation l'équation :$\tan(x+\frac{\pi}{4})-\tan(2x+\frac{\pi}{8})$=0.
7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation l'équation $\sin(-x+\frac{3\pi}{8})+\sin(2x+\frac{\pi}{8})$=0.

Exercice10

1) En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. Calculer les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2) En remarquant que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$. Calculer les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
3) Sachant que $\cos\frac{\pi}{5}$ .Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.
4) En utilisant les formules de duplication, calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$
5) En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{4\pi}{5}$ et $\tan\frac{4\pi}{5}$.

Exercice11

$\propto$ et β désignent deux nombres réels de $[0;\ \frac{\pi}{2}]$ tels que : $\cos\propto=0,4$ et $\cos\beta=0,6$.

1) Calculer $\sin\propto$ et $\tan\beta$.
2) Calculer $\sin(2\propto+\beta)$ et $\cos(\propto+2\beta)$.
3) a désignent un nombre réel. Exprimer $\cos 3a$ et $\sin 3a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$. On pourra écrire $3a=a+2a$.

Exercice12

1) a désignent un nombre réel. Calculer $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$ dans chacun des cas suivants :
   a) $\cos 2a=-\frac{1}{2}$ et $a\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
   b) $\cos 2a=0,2$ et $a\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.
2) a désignent un nombre réel. Calculer $\cos 2a$, $\sin 2a$ et $\tan 2a$ dans chacun des cas suivants :
a) $\cos a=-0,6$ et $a\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
b) $\sin 2a=0,2$ et $a\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Calculer $\cos(a+b+c)$

4) Déduire la valeur de $\cos 3a$ en fonction de $\cos(a+b+c)$.

Exercice13

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ et $\cos^2 x = \frac{3}{4}$
2) Résoudre dans chacun des cas suivants les équations sur les intervalles I donnés.
   a) $\cos 2x = -1,\ I = [\pi; 5\pi]$.
   b) $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{5},\quad I = [-2\pi; 2\pi]$.
   c) $\cos 3x = -\cos x,\ I = [-2\pi; 2\pi]$.
   d) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\sin x,\ I = [4\pi; 6\pi]$.
   e) $\sin 3x = \cos 2x,\ I = \mathbb{R}$.
   f) $(2\cos x - 1)(\cos x + 1),\ I = [0;\ \pi]$.
   g) $\tan x = \tan\frac{\pi}{4},\ I = \mathbb{R}$.
   h) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(2x + \frac{\pi}{6}) = 0,\ I = \mathbb{R}$.
   i) $3\tan^2 x - 1 = 0,\ I = [-\pi;\ \pi[$.
   j) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0,\ I = \mathbb{R}$.

Exercice14

(E) désigne l'équation : $2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$.

1) Justifier que l'équation $2x^2 + 9x + 4 = 0$ a deux solutions : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = -4$.
2) Résoudre les équations suivantes : $\cos x = x_1$ et $\cos x = x_2$
3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice15

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$
   b) $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   c) $\cos 3x + \sin 3x = -1$
2) x et y désignent deux réels tels que : $\cos(x - y) = \cos(x + y)$.
   a) Utiliser les formules d'addition pour démontrer que :
      $\sin x \times \sin y = 0.\ (E)$
   b) Résoudre (E).
3) Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\sin(3x+\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$.

b) $\sin 3x = \cos(x-\frac{\pi}{6})$.

c) $\sin(-x+\frac{3\pi}{2}) + \sin(2x+\frac{\pi}{3}) = 0$.

d) $\cos(-x+\frac{\pi}{3}) + \cos 3x = 0$.

e) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$.

f) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + \frac{3}{4} = 0$.

g) $\cos^2(2x-\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{\pi}{4}) = 0$.

h) $4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0$.

i) $2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$.

j) $\sin 2x - 2\sin x\cos(3x+\frac{\pi}{3}) = 0$.

k) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$.

l) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

Exercice16

(E) désigne l'équation $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Didney affirme que cette équation a pour ensemble de solutions :

$S = \left\{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi; -\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Loubelo lui rétorque que $\frac{7\pi}{8}$ est pourtant solution de (E).

1) Vérifier l'affirmation de Loubelo.
2) Résoudre l'équation (E) pour trouver l'erreur commise par Didney.

Exercice17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométriques.

1) $\sin x > -\frac{1}{2}$.
2) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3) $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
4) $\sin x \geq \frac{1}{2}$.
5) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6) $\sqrt{3}\tan x + 1 < 0$.

7) $1-2\sin x > 0$.
8) $\tan x - 1 > 0$.

Exercice18

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sin x - \cos x \leq 0$.
2) (I) désigne l'inéquation $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$
a) Factoriser le premier membre de (I).
b) Etudier le signe de chacun des facteurs.
c) En déduire les solutions de l'inéquation (I) dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Exercice19

1) Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométriques.
a) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $D = \mathbb{R}$.
b) $\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2}) - 1 \leq 0$, $D = [0; 2\pi[$.
c) $\sin x - \cos x \leq 0$, $D = \mathbb{R}$.
d) $|\tan x| \geq 1$, $D = \mathbb{R}$.
e) $\tan(x - \frac{\pi}{6}) \geq 0$, $D = \mathbb{R}$.
f) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$, $D =]-\pi; \pi]$.
g) $\cos x\,(2\sin x - 1) \leq 0$, $D = D =]-\pi; \pi]$.
h) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$, $D = [0; 2\pi[$.
i) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2}-1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$, $D = [0; 2\pi[$.
j) $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D =]-\pi; \pi]$.
k) $\frac{2\cos 2x - 1}{1+2\cos 2x} < 0$, $D = [0; 2\pi[$.

Exercice20

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{1-2\cos x}{0{,}5+\cos x} < 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquation ci-contre et représenter les images sur le cercle trigonométriques : $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquation ci-contre et représenter les images sur le cercle trigonométriques : $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$, $D = [0; 2\pi[$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquation ci-contre et représenter les images sur le cercle trigonométriques : $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquation ci-contre et représenter les images sur le cercle trigonométriques : $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$

<u>Exercice21</u>

Un topographe veut mesurer la hauteur h d'une colline. Pour cela, il dispose d'un théodolite, instrument permettant la mesure d'angles.

Il effectue deux mesures aux points A et B à 10 mètres d'intervalle et obtient les mesures des angles $\propto$ et β tels que $mes \propto = 27^{\circ}$ et $mes\ \beta = 25^{\circ}$

On note x la distance en m entre les points B et C de tels sorte que les triangles ACD et BCD soient rectangles en C de même hauteur h où $\widehat{DAB} = \propto$ et $\widehat{DBC} = \beta$ et que A, B et C sont trois points alignés.

1) Faire la figure. On prendra $[AC]$ horizontal.
2) Utiliser le triangle BCD exprimer $\tan\beta$ en fonction de h et x.
3) En déduire l'expression de x en fonction de h.
4) Utiliser le triangle ACD exprimer $\tan\propto$ en fonction de h et x.
5) Déduire des réponse précédentes l'égalité : $h = 10\frac{\tan\propto\times\tan\beta}{\tan\propto-\tan\beta}$. En déduire la hauteur h cherchée.
6) Le manuel de topographe donne la formule suivante : $h = l\frac{\sin\propto\times\sin\beta}{\sin(\propto-\beta)}$ où h est la hauteur recherchée en m, et l la distance en m entre les deux points d'observation. Utiliser la formule d'addition $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$ pour démontrer que cette formule est équivalente à celle trouvée au 5).

<u>Chapitre5</u> : fonctions trigonométriques

<u>Exercice1</u>:

Soit g la fonction telle que : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-5}{x+3} & si \quad x \leq 1 \\ g(x) = \cos\pi x & si\ 1 < x \leq 3 \end{cases}$

1) Préciser l'ensemble de définition de g

2) Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$
3) Montrer que g n'est pas dérivable en $x_0 = 1$
4) Etudier les variations de g sur $]-\infty\,;3]$
5) On désigne par (C) la courbe de g dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ unité graphique $2\,cm$. Déterminer les branches infinies à la courbe (C).
6) Construire la courbe (C).

Exercice2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Partie A

Soit $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$; $x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que $g(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 1$
3) Placer les images des racines sur le cercle trigonométrique.
4) On désignera par I et I' les points de coordonnées $(1;0)$ et $(-1;0)$; A et B les autres points.
   a) Donner les coordonnées des points A et B.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $IAI'B$?
5) Résoudre l'équation $g(x) = 0$, On désigne par $u_k (k \in \mathbb{N})$ la solution de l'équation $g(x) = 0$.
6) Montrer que (u_k) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{5\pi}{12}$ et de raison $r = \frac{\pi}{2}$.
7) On pose$S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k$. Déterminer le réel k sachant que $S_k = \frac{385\pi}{12}$.

Exercice3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3}), si\ x \geq 0 \\ f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+x+1}, si\ x < 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ unité : $2\,cm$.

1) Prouver que l'on peut étudier f surl'intervalle $I =]-\infty;\pi[$
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. On précisera les demi-tangentes à (C) .
3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $I =]-\infty;\pi[$.
4) Donner l'asymptote en $-\infty$.

5) Tracer (C).

Exercice4

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{-x}, si\ x \leq 0 \\ f(x) = -2 + 2\cos \pi x\,, si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer E_f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur E_f.
3) Préciser les demi-tangentes à (C_f) $x_0 = 0$.

Exercice5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}$

1) Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2) La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

Exercice6

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{x^2} + \cos x$
2) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{x^2} + \cos x$.

Exercice7

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
2) Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π
3) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
4) En déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
5) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice8.

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
2) Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π
3) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
4) En déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

5) Tracer la courbe représentative de f sur $[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}]$.

Exercice9.

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \cos^2 x$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Etudier la parité de f.
2) La fonction f est-elle périodique ? Justifier.
3) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x) + \pi$.
4) On note (Γ_1) la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ et (Γ_2) la représentation graphique de f sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$. Comment déduit-on (Γ_2) et (Γ_1) ?

Chapitre6 : Angle Orienté

Exrcice1 :

ABC est un triangle, (C) le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du plan. Soit E, F, G les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites $(AB), (AC), (BC)$.

1) Démontrer que les points E, F, G sont alignés si et seulement si M appartient au cercle (C).
2) Comment appelle-t-on la droite passant par les points E, F et G du triangle ABC relative à M.

Exrcice2 :

Soit (C) et (C') deux cercles sécantes en A et . (Δ) et (Δ') deux droites passant respectivement par A et B et distincts de (AB). La droite (Δ) recoupe (C) et (C') en P et P'. La droite (Δ') recoupe (C) et (C') en Q et Q'.

On suppose que les points A, B, P, Q, P', Q' tous distincts.

1) Faire la figure.
2) Montrer que : $2(\widehat{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PP'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{PP'}})[2\pi]$.
3) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{P'Q'}$.

Exrcice3 :

ABC est un triangle quelconque, trois points A', B', C' pris sur les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$, les points A', B', C' sont distincts des sommets A, B, C du triangle.

Soit (C_1) le cercle circonscrit au triangle $A'B'C$ et (C_2) le cercle circonscrit au triangle $A'C'B$. On désigne par O l'autre point d'intersection des cercles

(C_1) et (C_2).

1) Faire la figure.
2) Montrer que : $2(\widehat{\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA'}})=2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})[2\pi]$.
3) Montrer que : $2(\widehat{\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OA'}})=2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})[2\pi]$.
4) En déduire que O appartient au cercle circonscrit (C_3) au triangle $AB'C'$ que l'on tracera.

Exercice 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ direct.

Soit les points $A(-9\,;3), B(17\,;3), C(16\,;8)$ et $D(9\,;-9)$.

1) Faire la figure.
2) Calculer $\sin(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})$. En déduire l'ensemble des mesures $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})$.
3) Calculer l'ensemble des mesures de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$.
4) En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.
5) Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques, en passant par l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 5 :

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

D' est l'image de D par la symétrie de centre O.

B' est l'image de B par la symétrie de centre C.

(Γ_1) est le cercle circonscrit au triangle ADC.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que le point B appartient au cercle (Γ_1) .
3) Soit C' l'image de C par la symétrie axiale d'axe (DB') et (Γ_2) le cercle circonscrit au triangle DCB'.
   a) Complète la figure.
   b) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{B'D}}\right)=\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})[2\pi]$.

Exercice6 :

Dans le plan orienté, on donne : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) Construire l'arc capable de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}\right)$ relatif au segment $[AB]$, prendre
   $AB=4cm$, on notera par O le centre du cercle contenant cet arc.
2) Déterminer la mesure des angles : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}\right)$.
3) Quelle est la nature du triangle OAB.
4) Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=-\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AB}\right)+\pi[2\pi]$.

Exercice7 :

ABD est un triangle rectangle isocèle en A. (Δ) est la parallèle à (AB) passant par D, (Γ) est le cercle de centre D et de rayon $[DB]$. (Γ) coupe (Δ) en C et C', C' étant situé à la gauche du point D.

1) Faire la figure.
2) Trouve une mesure de chacun des angles suivants :
   a) $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)$; b) $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}\right)$;c) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD}\right)$; d) $\left(\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'C}\right)$ et e) $\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice8 :

Soit(C) un cercle de centre $O.A$ et B sont deux points du cercle (C) tels que le triangle OAB soit équilatéral de sens direct. M est un point de (C) distinct de A et B.

(Δ) et (Δ') sont deux droites tangents à (C) respectivement en A et B. (Δ'') est une droite tangente à M coupe (Δ) et (Δ') en R et S.

1) Faire la figure.
2) Montrer que :$\overline{(\Delta,\Delta')}=(\overline{OA,OB})[\pi]$.
3) En déduire deux mesures différentes de l'angle $\overline{(\Delta,\Delta')}$.
4) Montrer que : $\overline{(MA,MB)}=\frac{\pi}{6}[\pi]$.
5) Prouver les points O,A,M,Rappartient à un même cercle (Γ) que l'on tracera.
6) Justifier la cocyclicité des points O,M,S,B.

Exercice9 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct inscrit dans un cercle (C). Soit D un point du cercle (C) distinct de A,B et C. On désigne par A',B' et C' les projetés orthogonaux de D sur les droites $(BC);(AC)$ et (AB) respectivement.

1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A', C, D, B' sont situés sur un même cercle (C') que l'on tracera.
3) Justifier la cocyclicité des ponts B, A', D, C'.
4) En déduire que :
   a) $2(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D})$=2 $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$
   b) $2(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'C'})$=2 $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)[2\pi]$
5) En déduire l'alignement des points A', B' et C'.

Exercice10 :

L'unité étant le centimètre, ABC est un triangle tels que :

$BC = a = 4\sqrt{3}$;$AC = b = 4\sqrt{2}$;$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\widehat{A}$ est aigu.

Le projeté orthogonal de A sur (BC) est noté H. Faire une figure.

1) Calculer $\widehat{A}$, déduisez-en une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
2) Calculer $\widehat{C}$.
3) Sachant que : $(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}})$=$\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Démontrer due :$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}})$=$\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice11 :

Gloire est géomètre, l'un des clients lui a demandé de déterminer l'aire du terrain dont il vient d'hériter.

Ce terrain est représenter par un quadrilatère $ABCD$ de nature inconnue dont les diagonales se coupent en O.

1) Faire une figure.
2) Montrer que l'aire du terrain est égale $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \widehat{AOD}$
3) Sachant que $AC = 56m$, $BD = 32m$ et $mes\widehat{AOD} = 110^{\circ}$. Déterminer une valeur approchée au m^2 de l'aire du terrain on donne $\sin 110^{\circ} \approx 0,94$

Exercice12 :

$A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ désignent un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et de centre O.

On note r le rayon du cercle circonscrit au triangle OA_1A_2 et O' son centre.

1) Faire la figure.
2) Quelle est la nature de l'angle au centre de ce polygone ?
3) On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

a) Utiliser le triangle $O'A_1A_2$ pour justifier que : $OH = (1+\frac{\sqrt{3}}{2})A_1A_2$

b) Démontrer que $A_1A_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos 15^\circ$ et $\sin 15^\circ$

Exercice13 :

1) x désigne un nombre réel tel que :

a) $x \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ et $x \in [-4\pi\,;4\pi]$. Déterminer x

b) $x \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi]$ et $x \in [11\pi\,;12\pi]$. Déterminer x

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs non nuls tels que :
$mes(\overrightarrow{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $mes(\overrightarrow{\vec{w},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.Donner la mesure principale des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{\vec{u},\vec{w}})$;
$(\overrightarrow{-\vec{u},\vec{v}})$; $(\overrightarrow{\vec{u},\ 3\vec{v}})$; $(\overrightarrow{\vec{v},\vec{w}})$; $(\overrightarrow{\vec{v},2\vec{u}})$; $(\overrightarrow{-3\vec{u},2\vec{v}})$.

3) A, B et O désignent trois points tel que $mes\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \propto [2\pi]$. Exprimer en fonction de $\propto$ une mesure des angles orientés suivants :
$\left(\overline{\overrightarrow{OA},-\overrightarrow{OB}}\right)$;
$\left(\overline{2\overrightarrow{OA},-\overrightarrow{BO}}\right)$; $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\ 2\overrightarrow{OB}}\right)$; $\left(\overline{3\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\overline{-3\overrightarrow{OA},2\overrightarrow{BO}}\right)$; $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO}}\right)$.

Exercice14 :

1) $ABCD$ désigne le trapèze rectangle en A.

a) Faire la figure.

b) En utilisant les données de la figure, donner une mesure des angles orientés suivants : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CD}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}}\right)$.

2) $ABCD$ désigne le carré de centre O

a) Faire la figure.

b) Déterminer une mesure des angles orientés suivants : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)$,
$\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$, $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OB}}\right)$.

Exercice15 :

Construire un triangle ABC tel que : $mes\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et
$mes\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Que constate-t-on ?

Exercice16 :

A, B, C, D et E désignent cinq points du plan tels que : $AB = 2$; $AC = 3$; $AD = 1$ et $AE = 4$. De plus, on sait que : $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$,

$mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) Faire la figure.
2) Déterminer une mesure des angles orientés suivants : $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$.
3) En déduire les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$,
4) Que peut-on déduire pour les points A, D et E ?

<u>Exercice17 :</u>

ABC désigne un triangle isocèle tel que : $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 100^{\circ}$. Calculer :

a) $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + mes\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) + mes\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}\right)$.
b) $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + mes\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

<u>Exercice18 :</u>

A, B, C, D et E désignent cinq points du plan tels que : $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$, $mes\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$ et $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = -\frac{4\pi}{6}[2\pi]$.

1) Faire la figure.
2) Les points A, E et C sont-ils alignés ?

<u>Exercice19 :</u>

$ABCD$ désigne le carré de côtés 1 et AIB un triangle équilatéral.

La médiatrice de $[AB]$ coupe la droite (AB) en K et la droite (DC) en H.

1) Faire la figure.
2) Montrer que le triangle DAI est isocèle.
3) Calculer la mesure principale des angles suivants : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$, $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}\right)$.
4) Démontrer que $mes\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DH}\right) = \frac{\pi}{12}[2\pi]$.
5) Démontrer que $IH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sachant que $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6) En déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

<u>Exercice20 :</u>

A, B et B désignent trois points non alignés.

Construire et décrire l'ensemble des points M tels que :

1) $mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$.
2) $mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$.

<u>Exercice21:</u>

A et B désignent deux points tels que $AB = 4\ cm$.

1) Construire à la règle et au compas le point C tel que $AB = AC$ et $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
2) Construire à la règle et au compas le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{17\pi}{3}[2\pi]$.
3) Construire à la règle et au compas le point E tel que $DE = 3\ cm$ et $mes\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\right) = \frac{11\pi}{12}[2\pi]$.
4) a. Montrer que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.
   b. Construire à la règle et au compas le point F tel que A, F, C soient alignés et $mes\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BF}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   c. Montrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

<u>Exercice22 :</u>

A et B désignent deux points distincts du plan.

Représenter l'ensemble des points M du plan dans chacun des suivants ;

1) $\frac{13\pi}{6}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$.
2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{3}$.
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ est l'angle nul.
4) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ est l'angle plat.

<u>Exercice23 :</u>

ABC est un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Déterminer le point D tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et $AB = AD$.

<u>Exercice24</u>

Soit ABC un triangle équilatéral, de côté de longueur a, on suppose : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. I est le milieu du segment $[AB]$, J

Celui de $[AC]$. On note K le symétrique du point J par rapport à (AB).

1) **Déterminez les angles $(\widehat{\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA}}), (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BK}}), (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}})$.**
2) **Déduisez-en la nature du triangle BCK, et la distance CK.**
3) **On note $\propto$ l'angle $\widehat{BCK}$, Calculer $\cos\propto$ et $\sin\propto$.**
4) **Soit L le point du plan tel que CKL soit un triangle équilatéral direct.**
   a) **Montrez l'égalité : $BL^2 = \frac{11}{4}a^2 - a^2\sqrt{7}\cos(\frac{\pi}{3} - \propto)$.**
   b) **Calculez alors la distance BL.**
   c) **En appliquant la relation d'AL-Kashi dans le triangle LBC, calculez $\cos\widehat{LBC}$.**
   d) **Déduisez-en l'alignement L, B, I, et montrez que L est le symétrique du point I par rapport à B.**

<u>Chapitre7</u> : Isométrie et Transformation du plan

<u>Exercice1 :</u>

Soit f l'application du plan P dans P, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x';y')$ tels que : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1) **Montrer que f est une isométrie.**
2) **Déterminer l'ensemble des points invariants par f.**

<u>Exercice2 :</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application $f P$ dans P qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x';y')$ tels que : $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = x + 4y + 1 \end{cases}$

1) **a) Déterminer l'image A' du point $A(1,2)$ par f.**
   b) Déterminer l'antécédent B du point $C(-1,1)$.
2) **Montrer que f est une bijection du plan.**
3) **Déterminer l'ensemble des points invariants par f.**
4) **Soit l'application g définie par : $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 3x + y - 5 \end{cases}$**
   a) **Calculer l'expression gof et fog.**

b) Compare gof et fog.

5) Déterminer f^{-1}.

Exercice3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les droites $(\Delta): -2x+y-3=0$ et $(\Delta'): x-y-5=0$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à (Δ) parallélement à (Δ').

Exercice4 :

Soit f l'application du plan P dans P, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x';y')$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{4}{3}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Prouver que f est un antidéplacement.
3) Déterminer l'ensemble des points invariants.
4) Déterminer fof.
5) En déduire la nature de f.
6) Démontrer que $S_B o S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$, on pourra utiliser deux méthodes différentes.

Exercice5 :

Définir analytiquement la symétrie de centre $A(-4;2)$, puis en déterminer l'image de $(\Delta): 2x+3y-5=0$ par S_I.

Exercice6 :

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3cm$ et $= 2cm$. Construire l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par l'application $f = t_{\overrightarrow{AB}} o t_{\overrightarrow{AC}} o t_{\overrightarrow{BC}}$.

Exercice7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la transformation plane qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2x - y + 2 \\ y' = 2x + 3y - 12 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2) Justifier que f est une bijection.

3) On désigne par f^{-1} la réciproque. Déterminer l'expression analytique de f^{-1}.

4) Soit $ABCD$ un carré de sens direct, BEC un triangle équilatéral direct.

a) Prouver l'existence de l'unique rotation r qui transforme A en C et D en E.

b) Donner une mesure de son angle puis construire son centre.

c) Déterminer puis caractériser la composée $S_{BD} o S_{EB}$.

Exercice 8 :

$ABCD$ est un carré de centre O, de sens direct et I le milieu de $[AD]$. r et r' les quarts de tour indirects de centre respectifs O et D ; t la translation du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

1) Déterminer $r'or(D)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r'or$.
2) Soit M un point du segment $[OB]$. On désigne par P, N et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur $[AD]$; $[AB]$ et $[CD]$.
   a) Démontrer que $MQDP$ est un carré.
   b) Déterminer $r'or(A)$ et $r'or(B)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r'ot$.
   c) Justifier que $r'ot = r$.
   d) Déterminer $t(N)$ et $r'(Q)$. En déduire que $r(N) = \varphi$.
   e) En utilisant la conservation du produit scalaire prouve que $\overrightarrow{NA} \times \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PD}$.

Exercice 9 :

Partie A :

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+1}$

1) Déterminer les réels a ; b et c sachant que $f(0) = 3$ et que f admet en $x = -3$ un extremum égal à -6.
2) Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} ; si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) ; si\ x > 1 \end{cases}$ on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 1$.

c) Déduire une interprétation géométrique du résultat.

d) Prouver qu'on peut étudier f sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 5]$.

e) Par quel procéder la courbe (C_f)se complète-t-elle alors sur $]5; +\infty[$?

f) Etudier les variations de f sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 5]$.

g) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 5]$.

h) Montrer que la droite d'équation $(\Delta): y = x - 1$ est asymptote à (C_f).

i) Donner l'autre asymptote.

j) Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes ainsi que les tangentes.

3) On définit la fonction h par $h(x) = -f(x)$; $x \in E_f$.

a) Déduire le tableau de variation de la fonction h.

b) Tracer (C') la courbe de la fonction h dans le même repère que (C_f).

Partie B :

On considère la droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$ où $(a; b) \neq (0; 0)$.

1) Montrer que l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (D) est :

$$\begin{cases} x' = -\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)x - \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)y - \frac{2ac}{a^2+b^2} \\ y' = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)x + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)y - \frac{2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

2) En déduire les expressions analytiques des symétries orthogonales par rapport à l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et à la droite (Δ') d'équation : $y = x$.

3) Tracer la courbe (C'') image de (C) par $S_{\Delta'}$.

Exercice 10 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, de sens direct . Soit I et K les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. La bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}})$ coupe (AK) en E.

1) Déterminer les mesures des angles orientés dans le triangle AEC.

2) Soit $f = r(C; \frac{\pi}{4})\, o\, r(A; \frac{\pi}{2})$.

a) Déterminer les droites $(\Delta_1); (\Delta_2)$ et (Δ_3) telles que :
$r(C; \frac{\pi}{4}) = S_{\Delta_3} o S_{\Delta_2}$ et $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right) = S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

3) $g = r(B; \frac{\pi}{2})\, o\, r(K; -\frac{\pi}{2})$.

a) Déterminer les droites (D_1) ; (D_2) et (D_3) telles que :

$r(B;\ \frac{\pi}{2})$=$S_{D_3}oS_{D_2}$ et $r\left(K;\ -\frac{\pi}{2}\right) = S_{D_2}oS_{D_1}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11 :

Soit $A(3;1)$ un point dans le repère orthonormal $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ direct.

1) Construisez les sommets B et C du triangle ABC équilatéral direct de centre O ; on précise ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
   Utilisez pour cela les égalités $OA = OB = OC$ et
   $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
2) On pose $\theta = (\vec{\imath};\overrightarrow{OA})$. Calculer $OA, \cos\theta$ et $\sin\theta$.
3) Donner une mesure de chacun des angles $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB})$ et $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OC})$ en fonction de θ.
4) Calculer les coordonnées des points B et C.
5) Vérifier les égalités $AB = AC = BC$.

Exercice 12 :

On se propose, A et B étant deux points donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormal direct $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan , de déterminer, par ses coordonnées , le point C tel que le triangle ABC soit équilatéral et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

1) On donne $A(3;4)$ et $B(2;1)$. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle $(\vec{\imath};\overrightarrow{AB})$.
2) La translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ transforme B en B' et C en C'.
   Déterminer les coordonnées de B'.
3) On pose $\theta = (\vec{\imath};\overrightarrow{OB'})$. Déterminer une mesure de $(\vec{\imath};\overrightarrow{OC'})$.
4) Calculer les coordonnées de C' et C.

Exercice 13 :

Soit (D) une droite et A un point non situé sur (D). Un point M variable décrit (Δ) .On construit le triangle ABC équilatéral direct, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$, de hauteur $[AM]$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon AB. (Γ) coupe (AM) en deux points N et P, N étant tel que $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont de même sens.

1) Déterminer l'ensemble des points N et l'ensemble des points P quand M décrit (Δ).
2) Déterminer les lieux géométriques des points B et C.

__Exercice 14 :__

Soit (C) et (C') deux cercles de centres O et $'$, de même rayon, sécants en A et B. On note r la rotation de centre A qui transforme (C) en (C') et θ son angle. Un point M de (C) a pour image M' par r.

1) Donner une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BO'}})$.
2) Démontrer, en calculant $(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}})$, que les points B, M et M' sont alignés.
3) On suppose maintenant que ABC un triangle a, b et c les mesures de ses côtés, S son aire.
   a) Rappeler les formules donnant a^2 en fonction de $b; c$ et $\cos\widehat{A}$, S en fonction de $b; c$ et $\sin\widehat{A}$.
   b) Déduis-en que : $a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}=2[b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A}-\frac{\pi}{3})]$. puis $a^2+b^2+c^2-4S \geq 2(b-c)^2$

   Dans quel cas a-t-on cette égalité ? puis déduire $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.
   Dans quel cas ? Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

__Exercice15 :__

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, s la symétrie d'axe (OA).

Reconnaître, parmi les transformations suivantes :

1) $r \circ s \circ r^{-1}$.
2) $s \circ r \circ s$.
3) $t \circ s \circ t^{-1}$.
4) $s \circ t \circ s$.

__Exercice16 :__

$ABCD$ est un carré direct.

On considère la transformation : $f = r(O, -\frac{\pi}{2}) \circ r'(C, \gamma) \circ r''(B, -\frac{\pi}{2}) \circ s_A$

Déterminer $f(A)$ et en déduire suivant les valeurs de γ, la nature et les élements caractéristiques de f.

Exercice17 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, On note A', B' et C' les points tels que : $A' = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)(A)$, $B' = r\left(C, \frac{\pi}{2}\right)(B)$ et $C' = r\left(C, \frac{\pi}{2}\right)(C)$.

Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? Justifier.

Exercice17 :

$ABCD$ est un losange de sens direct tel que $mes\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $f = s_{(BC)} \circ s_{(AD)}$.
   b) $g = s_{(CD)} \circ s_{(AB)}$.
2) Démontrer que : $g \circ f = f \circ g = t_{\overrightarrow{AC}}$

Exercice18 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le vecteur $\vec{u}(1; 2)$ et la droite (D): $2x - 3y + 4 = 0$.

1) Quelle est l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$?
2) Soit (D') l'image de (D) par $t_{\vec{u}}$. Déterminer une équation cartésienne de (D').

Exercice19 :

On considère deux points distincts M et N.

1) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_M \circ s_N$
2) En déduire que toute translation est la composée de deux symétries centrales dont l'une est arbitrairement choisie.
3) ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_I$ et $s_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

Exercice20 :

$ABCO$ est un parallélogramme.

1) Démontrer que : $s_B \circ s_A = s_C \circ s_O$

2) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_C \circ s_B \circ s_A$

3) Construire l'image de $ABCO$ par cette transformation.

Exercice2 :

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et H le pied de la hauteur issue du sommet A. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $s_{(AB)} \circ s_{(AH)}$; $s_{(BC)} \circ s_{(AH)}$ et $t_{\overrightarrow{AH}} \circ s_A$

Exercice22 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(Δ) désigne la première bissectrice et r le quart de tour direct de centre O.

1) Quelles sont les expressions analytiques de $s_{(OI)}$ et $s_{(\Delta)}$?
2) En déduire l'expression analytique de r.

Exercice23 :

$ABCD$ est un rectangle.

1) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_{(DA)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$.
2) Construire l'image de $ABCD$ par cette transformation.

Exercice24 :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que les droites (AB) et (BD) soient perpendiculaires.

1) Faire une figure.
2) Démontrer que : $s_{(AB)} \circ s_{(DC)} = s_B \circ s_D$

Exercice25 :

$ABCD$ est un rectangle de sens direct.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

1) $s_{(AD)} \circ s_A \circ s_{(AB)}$.
2) $s_{(CD)} \circ s_A \circ s_{(AB)}$.
3) $s_{(AD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}$.

Exercice26 :

$ABCD$ est un parallélogramme de sens direct tel que les droites (CB) et (BD) sont perpendiculaires et $AC = 2\,BD$.

1) Faire une figure.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $s_{(AC)} \circ s_{(AD)}$
   b) $s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$
   c) $g \circ f$.

Exercice27 :

A et B sont deux points distincts.

1) Déterminer et construire la droite (Δ) telle que : $r\left(A, -\frac{2\pi}{3}\right) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}$
2) Déterminer et construire la droite (Δ') telle que : $r'\left(B, -\frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}$
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation : $r' \circ r$.

Exercice28 :

A et B sont deux points distincts.

1) Déterminer et construire la droite (Δ) telle que : $r\left(A, \frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}$
2) Déterminer et construire la droite (Δ') telle que :
   $r'\left(B, \frac{2\pi}{3}\right) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta')}$
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation : $r \circ r'$.

Exercice29 :

h_1 , h_2 , h_3 et h_4 désignent des homothéties de centres respectifs O, O', O et O' et de rapports respectifs k_1, k_2 , k_3 et k_4 tels que $k_1k_3 = 1$ et $k_2k_4 \neq 1$.

t est une translation de vecteur $\vec{u}$.

Déterminer si les transformations suivantes sont des homothéties ou des translations.

1) $h_1 \circ h_2$
2) $h_1 \circ h_3$
3) $h_2 \circ h_4$
4) $t \circ h_1$

Exercice30 :

A, B et C désignent trois points tels que A est le barycentre des points pondérés $(B,\ 3)$ et $(C, 1)$. Justifier que :

1) C est l'image de B par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport.
2) B est l'image de C par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport.
3) C est l'image de A par une homothétie de centre B dont on déterminera le rapport.

Exercice31 :

$ABCD$ désigne un parallélogramme.

I est le milieu du segment $[CD]$, J est le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K est le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

1) Faire une figure.
2) Que représente le point J pour le triangle BCD ?
3) Déterminer l'homothétie qui transforme la droite (JK) en la droite (AB).

Exercice32 :

(C) et (C') désignent deux cercles de centre respectifs O et O' et de rayons respectifs 1 et 2.

1) Faire une figure.
2) Construire dans chacun des cas, les centres des homothéties qui échangent (C) et (C').
   a) $OO' = 1$.
   b) $OO' = 2$.
   c) $OO' = \frac{1}{2}$

Exercice33 :

ABC désigne un triangle.

h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

h' est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Justifier que $h' \circ h$ est une symétrie centrale de centre un point I.
2) Faire une figure et construire l'image du point C par la symétrie $h' \circ h$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
4) En déduire la position du point I.

Exercice34 :

ABC désigne un triangle.

I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.

1) Faire la figure.
2) Déterminer les transformations suivantes :
   a) $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$
   b) $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$
   c) $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$
   d) $s_{(AB)} \circ s_{(IJ)}$

Exercice35 :

$ABCD$ désigne un rectangle de centre O.

1) Faire une figure.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $s_{(AD)} \circ s_{(CD)}$
   b) $s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$
   c) $f \circ g$.
3) Cités les triangles isométriques à : AOB, AOD et ABC.

Exercice36 :

ABC désigne un triangle rectangle isocèle en A.

s est la transformation telle que $s(A) = B$ et $s(B) = C$

$s = h \circ r$ avec h l'homothétie de rapport k et r la rotation d'angle θ.

1) Quelle est l'image du segment $[AB]$ par s ?
2) En déduire le rapport de h.

3) Déterminer une mésure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}})$.
4) En déduire une mesure de l'angle θ.

Exercice37 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

h est l'homothétie de centre $A(1; 2)$ et de rapport 3.

t est la translation de vecteur $\vec{u}(-1; 1)$.

Déterminer les coordonnées du point M' image du point $M(x; y)$ par la transformation $t \circ h$.

Exercice38 :

$ABCD$ désigne un carré.

I est le milieu du segment $[AB]$.

1) Faire la figure.
2) Déterminer le vecteur de la translation $t = s_I \circ s_B$
3) Déterminer et construire le point M tel que $s_I \circ s_B = s_M \circ s_C$

Exercice39 :

A et B désignent deux points distincts.

Pour tout point M du plan, I désigne le milieu de $[AM]$ et G le barycentre de $(A, -1), (B, 2)$ et $(M, 1)$.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que le point I est l'image du point M par une transformation du plan à déterminer.
3) Démontrer que le point G est l'image du point I par une transformation du plan à déterminer.
4) En déduire :
   a) Le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$.
   b) Le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$.
   c) Le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.
   d) Le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Exercice40 :

ABC désigne un triangle.

A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

A tout point M du plan, on associe le point $M' = f(M)$ défini par :

$\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ avec k un nombre réel non nul.

1) Dans cette question $k = \frac{1}{2}$.
   a) Démontrer que l'application f est une homothétie dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC et dont on déterminera le rapport.
   b) Quelle est l'image par cette homothétie du triangle ABC ?
2) Dans cette question $k = -1$.

   Démontrer que l'application f est une translation dont on donnera le vecteur.

3) Dans cette question $k \neq -1$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

<u>Exercice41 :</u>

ABC désigne un triangle.

A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

G est le centre de gravité, H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

h est l'homothétie de centre G et de rapport -2.

1) Déterminer les images par h des points A' , B' et C'.
2) Déterminer les images par h des droites (OA'), (OB') et (OC').
3) En déduire l'image du point O par h.
4) Démontrer que les points O, G et H sont alignés.
5) Comment appelle-t-on la droite passant par les points O, G et H.

<u>Exercice42 :</u>

A et B désignent deux points distincts du plan.

$s_1 = h(A, \frac{\sqrt{2}}{2}) \circ r(A, \frac{\pi}{4})$.

1) Construire le segment $[AA_1]$ image du segment $[AB]$ par s_1.

2) $s_2 = h(B, \frac{\sqrt{2}}{2}) \circ r(B, -\frac{\pi}{4})$. Construire le segment $[A_1B]$ image du segment $[AB]$ par s_2.

<u>Exercice43 :</u>

A et B désignent deux points distincts du plan.

f est la transformation qui à tout point M du plan associe le barycentre M' des points pondérés $(A, 1), (B, -2)$ et $(M, 3)$.

1) Faire la figure.
2) Construire les images respectives A' et B' des points A et B par f.
3) Démontrer qu'il existe un unique point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$ puis construire Ω.
4) Pour tout point M du plan, exprimer $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega M}$.
5) Déduire des questions précédentes la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
6) G est la transformation qui à tout point M du plan associe le barycentre M' des points pondérés $(A, 2), (B, -2)$ et $(M, 3)$.

a) Faire la figure.
b) Construire les images respectives A' et B' des points A et B par G.
c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant de M.
d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation G.

7) C et D désignent deux points tels que $ABCD$ soit un carré.
h est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a) Faire la figure.
b) Construire l'image du carré $ABCD$ par h.
c) Démontrer qu'il existe un unique point O tel que $h(O) = O$, construire O.
d) Démontrer que h est une homothétie de centre O dont on précisera le raport.

<u>Exercice44 :</u>

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectives B et C, de rapport respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$.

1) Démontrer que $h' \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.
2) Construire l'image de A par $h' \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice45 :

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectives B et C, de rapport respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

1) Démontrer que $h' \circ h$ est une translation.
2) Construire l'image de A par $h' \circ h$ et en déduire une détermination du vecteur de cette translation.
3) Exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{BC}$

Exercice46 :

ABC est un triangle.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Justifier que $t \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.
2) Construire l'image de A par $t \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice47 :

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Démontrer que $h' \circ h$ est la symétrie de centre I tel que : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OO'}$.
2) Déterminer la transformation $h' \circ h$.

Exercice48 :

O et O' sont deux points distincts du plan, k est un nombre réel non nul et différent de 1.

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{k}$.

1) Démontrer que $h' \circ h$ est la translation de vecteur $\frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h \circ h'$.

<u>Exercice49 :</u>

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont respectivement :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

1) Démontrer que les transformations $h' \circ h$ et $h \circ h'$ sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties.

<u>Exercice50 :</u>

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2;1)$ et de rapport -3, t la translation de vecteur $\vec{u}(1;3)$ et s la symétrie d'axe (OI).

1) Déterminer les expressions analytiques des homothéties $t \circ h$ et $h \circ t$.
2) Déterminer les expressions analytiques des similitudes $s \circ h$ et $h \circ s$.

<u>Exercice51 :</u>

$(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont trois droites sécantes deux à deux, construire un carré $ABCD$ tel que : $A \in (\Delta_1)$, $B \in (\Delta_2)$, $C \in (\Delta_3)$ et $D \in (\Delta_3)$.

<u>Exercice52</u>

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ direct, On considère les points $A(3;0)$ et $B(0;3)$.

r_2 est la transformation du plan qui, au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{9}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que $BM = BM'$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{BM'}}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
2) En déduire la nature de r_2.
3) r_1 est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$, Déterminer l'expression analytique de r_1.
4) On pose $= r_2 0\, r_1$.
   a) Déterminer l'expression analytique de f, puis calculer les coordonnées du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.
   b) Quelle est la nature de f.

Chapitre5 : Fonction partie entière

Exercice1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$,les équations suivantes :

1) $E(x) = 5$
2) $E(x) = -\frac{3}{2}$
3) $2E^2(x) - 5E(x) - 3 = 0$
4) $(1 - x)[4 - E(x)] < 0$
5) $E(-x + 2) \leq 2$
6) $E[1 - E(x)] = 4$.

Exercice2 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{E(x)}$
2) $f(x) = \frac{1}{E(x)-\frac{1}{2}}$
3) $f(x) = \frac{1}{E(x)+2}$

Exercice3 :

1) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $E(x + k) = E(x) + k$.
2) Construire la représentation graphique de E.
3) E est-elle continue sur son ensemble de définition ?
4) On considère la fonction $f(x) = x - E(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est périodique de période $T = 1$.
   b) Construire sa représentation graphique .

c) f est-elle bijective sur son ensemble de définition?

5) Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{x - E(x)}$ est périodique de période $T = 1$.
6) Quelle est l'expression de g sur $x \in [0; 1[$.

Exercice4 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+E(x)}{x}$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Démontrer que : $\forall\, x \in]0; +\infty[,\ 2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$ où E désigne la fonction partie entière.

1) L a fonction E est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2) Démontrer que $\forall\, x \in]0; 1[,\ f(x) = 0$.
3) En déduire la limite de f en 0.
4) Démontrer que : $\forall\, x \in]0; +\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
5) En déduire la limite de de f en $+\infty$.

Exercice6 :

Dans chacun des cas suivant, E désigne la fonction partie entière, étudier la limite de la fonction f en 0.

1) $f(x) = E(x)\sin x$;
2) $f(x) = \sin(\pi E(x))$;
3) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} E(x)\right)$;
4) $f(x) = E(2\sin x)$;
5) $f(x) = xE(\frac{1}{x})$;
6) $f(x) = \frac{xE(x)-x}{|x|}$.

Exercice 7

Etudier sur $\mathbb{R}$ la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = xE(x) - x + 2$ où $E(x)$ la fonction entière de x

<u>Chapitre</u> : Les Primitives

<u>Exercice1 :</u>

On considère les fonctions suivantes :$f(x) = x + 2$ et $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$

avec $k \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $F'(x)$.
2) Compare $F'(x)$ et $f(x)$.
3) Que peut-on conclure ?

<u>Exercice 2 :</u>

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = 4x^2 - 3x - 4$
2) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 3)^2$
3) $f(x) = \sin 3x$
4) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
5) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
6) $f(x) = \cos x(\sin x)^2$
7) $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$
8) $f(x) = \cos x\sqrt{\sin x}$

<u>Exercice3 :</u>

On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

1) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
2) Déduire la primitive de g qui prend la valeur -1 pour $x = 0$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit la fonction $h(x) = \cos 2x$.

1) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
2) Déduire la primitive de h qui admet $\frac{3}{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$.

<u>Exercice5 :</u>

Soif f la fonction définie par :$f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les réels a et b telle que $f(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{bx}{(x^2+1)^3}$

3) Déduire les primitives de f.

Exercice6 :

1) Linéariser$\sin 3x \times sin^3 x$.
2) On pose $f(x) = \sin 3x \times sin^3 x$ .Déterminer l'unique primitive F de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.
3) Soit $g(x) = 2x\sqrt{2x+4}$, $x \in [-2; +\infty[$. Déterminer les réels a et b tels que
$g(x) = a(2x+4)^{\frac{3}{2}} + b(2x+4)^{\frac{1}{2}}$.
4) En déduire l'unique primitive G de g telle que $G(0) = 0$.

Exercice7 :

Déterminer dans chaque cas, l'unique primitive F de f vérifiant la condition indiquée :

1) $f(x) = (x+1)(x^2+2x+2)^3; F(0) = 2$.
2) $f(x) = \sin 3x \times \cos x$; $F(\frac{\pi}{3}) = -1$.
3) Soit $g(x) = \frac{3x+1}{(x+1)^3}$; $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:
   $g(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$
   b) En déduire la primitive G de g qui s'annule en $x = 2$.

Chapitre6 : Calcule d'intégrale

Exercice :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 (x+2)dx$
2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$
3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin x)dx$
4) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$
5) $\int_0^2 \sqrt{2}\, x dx$
6) $\int_1^0 (3 + 2x + \sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2)dx$
7) $\int_{-1}^4 x^3 + 3x^2 - x - 1)dx$
8) $\int_0^{\pi} \cos x dx$
9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$
10) $\int_{-1}^1 \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^3} dx$

11) $\int_{-2}^{0} 2x\sqrt{2x+4}\,dx,$

Chapitre7 : Dénombrement

Exercice1

A et B sont deux ensembles finis tels que : $Card(A) = 7$; $Card(B) = 9$ et $Card(A \cup B) = 10$. Calculer $Card(A \cap B)$.

Eercice2

1) A, B et C sont trois ensembles finis tels que : $Card(A) \neq 1$,

$Card(A \times B) = 18$ et

$Card(A \times C) = 15$.Déterminer : $Card(A)$; $Card(B)$ et $Card(C)$.

2) On donne $Card(A) = 1521$; $Card(B) = 798$ et $Card(A \cup B) = 2319$. Calculer $Card(A \cap B)$ et $Card(B \backslash A)$.
3) On donne $Card(A) = 17$; $Card(B) = 24$ et $Card(A \cup B) = 25$. Calculer $Card(A \cap B)$ et $Card(A \backslash B)$.

Exercice3

Soit $E = \{a; b; c\}$.

1) Combien existe-t-il de partie de E?
2) Même question avec $F = \{a; b; c; c; d\}$.

Exercice4

Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $0 < p < n$, on a :

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

Exercice5

1) Calculer les nombres suivants :
   a) $A = C_3^2$
   b) $B = C_5^3$
   c) $C = C_{10}^5$
   d) $D = C_4^4$
   e) $E = C_0^0$
   f) $F = C_{17}^3$
2) Calculer le plus simplement possible : $M = C_1^0 + c_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.
3) Calculer les nombres suivants :
   a) $A = A_3^2$
   b) $C = A_{10}^5$

$c)$ $B = A_{100}^{2}$ et $D = A_{5}^{3}$

Exercice6

On donne $P(x) = C_{100}^{x}(\frac{1}{4})^{x}(\frac{3}{4})^{100-x}$; $x \in \mathbb{N}$ et $x \leq 100$.

1) Simplifier : $\frac{P(x)}{P(x-1)}$.
2) Calculer $P(92)$ et $P(94)$ en fonction de $P(93)$.
3) Démontrer que $P(92) = \frac{39339}{28}P(94)$.
4) Trouver $P(92)$ tels que : $P(94) = P(92) - 1$.
5) En déduire l'entier naturel n tels que $P(92) = 1 + 7n$.

Exercice7

1) Vérifier que : $\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{p} = \frac{1}{p}C_{n}^{p-1}$; $(n, p) \in \mathbb{N}^2; p \geq 1$
2) En déduire le calcul de la somme : $S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n$.
3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$
   a) Trouve deux réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
   b) En déduire la valeur de la somme : $S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

   Calculer : $A = \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \cdots + \frac{1}{49\times50}$.

Chapitre 8 : Statistique

Exercice1

On a relevé la durée de vie en mois de 60 moteurs d'un certain type. On a obtenu la série suivante :

52−63−39−73−41−51−51−59−62−74−38−43−57−55−55−64−55−81−48−56−58−60−74−35−47−59−52−62−55−58−79−66−55−68−45−66−59−84−68−44−53−54−62−65−75−42−55−67−45−56−81−47−55−58−75−50−62−66−49.

1) Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.
2) Construire le diagramme en boîte.

Exercice2

1) Calculer $A = \sum_{i=1}^{11}(-1)^i$ et $B = \sum_{i=1}^{12}(-1)^i$
2) On sait que $\sum_{i=1}^{50} a_i = 4$. En déduire la valeur de $S = \sum_{i=1}^{50}(3a_i + 2)$.

Exercice3

Deux tireurs s'entrainent au tir à la cible. Ils ont noté leurs résultats en point obtenus après 30 tirs :

Points	50	30	20	10	0
Tireur A	8	9	8	4	1
Tireur B	6	16	3	3	2

1) Calculer la moyenne et l'écart-type pour les séries des résultats de deux tireurs.
2) Comparer ces résultats.
3) Quel est le plus régulier ?

Exercice4

La moyenne et la variance de la série statistique des X_i sont respectivement égales à 17 et 2. On considère la série des Y_i, où $Y_i = 2X_i + 5$ .Déterminer la moyenne et la variance de Y_i.

Exercice5

1) a est un nombre réel. Démontrer que la somme $\sum_{i=1}^{p} n_i\,(X_i - a)^2$ est minimale pour $a = \overline{X}$.
2) En déduire que la variance est donnée par la formule $V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i X_i^{\,2}\right) - \overline{X}^2$

Exercice6

Les valeurs d'une série sont regroupées en classes :

Classe	$[2,8[$	$[8,10[$	$[10,12[$	$[12,20[$
Effectif	7	9	8	7

On effectue les calculs suivants à partir du centre des classes. Calculer une valeur approchée arrondie au dixième de :

4) La moyenne.
5) La variance.
6) L'écart-type.

Exercice7

La recette journalière d'un commerçant pendant une année dans le tableau suivant :

Recette journalière en	$[150;250[$	$[250;350[$	$[350;450[$	$[450;550[$	$[550;650[$	$[650;750[$

euros						
Nombre de jours	44	60	96	75	65	25

Calculer une valeur approchée de la : La moyenne ; la variance et l'écart-type de cette série en posant $y = \frac{x}{100}$ où x désigne le centre d'une classe. Donner l'arrondie à l'unité des résultats.

Exercice8

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs, pendant huit années consécutives.

numéro de l'année(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires(y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

1) Représenter le nuage des points $\{M_i\}_{1\le i\le 8}$ associé à cette série statistique.
2) a) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite.

3) On partage le nuage de point en deux parties d'effectifs égaux : $\{M_i\}_{1\le i\le 4}$ et$\{M_i\}_{5\le i\le 8}$.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2, points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.

b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la représenter.

c) Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2). Cette droite est une droite d'ajustement de la série : la méthode utilisée est appelée méthode de Mayer si le nombre de points du nuage est impair, on met indifféremment le point central dans l'un ou l'autre des nuages partiels.

4) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaires pour la 9^e année.

a) A l'aide de la droite de répression de y en x.

b) A l'aide de la droite(G_1G_2).

c) Comparer ces deux réponses.

Le système niveau est toujours en équilibre

Avec Mr Adbéel MAYOUMA le chef de SN