COLLEGE PRIVE MONGO BETI B.P 972 TEL22 22 46 19 YAOUNDE					
ANNEE SCOLAIR	SEQUENCE	EPREUVE	CLASSE	DUREE	COEF
2023/2024	3	MATHS	TC	4H	7
Nom du professeur: M. KAMTO					

Partie A : Evaluation des ressources : 15,5pts

EXERCICE 1 : 4pts

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormé (o ; u ; v). on considère la suite des ponts M_n d'affixez$_n$ défini par : $z_0 = 8; et\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$

1) Ecrire $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle. 0,5pt

2) Calculer z_1; $z_2\ et\ z_3$ puis vérifier que z_3 est un nombre réel. Placer les points M_0; M_1; $M_2 et\ M_3$.0,75pt

3) Pour tout entier naturel n, calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$ et en déduire que le triangle OM_nM_{n+1}est rectangle et que $M_nM_{n+1} = OM_{n+1}$. 0,75pt

4) On pose $r_n = |z_n|\ et\ \theta_n = \arg(z_n)$.

a) Montrer que(r_n) et (θ_n) sont deux suites respectivement géométrique et arithmétique dont on précisera pour chacune d'elle la raison et le premier terme. 0,5pt

b) Exprimer $r_n\ et\ \theta_n$ en fonction de n puis M_nM_{n+1} en fonction de n. 0,75pt

c) Donner l'expression de z_n en fonction de n puis en déduire l'ensemble des entiers naaturel n pour lesquelles z_n est réel. 0,75pt

d) On considère la ligne brisée $M_0M_1M_2 \ldots\ldots. M_n$ et on pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$. Exprimer L_n en fonction de n et calculer sa limite. 0,75pt

EXERCICE 2 : 4pts

1) Soit $\theta \in [0; 2\pi]$ un nombre réel.

a) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (2^{\theta+1}cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$. 0,5pt

b) Donner chaque solution sous forme exponentielle. 0,5pt

c) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les point A et B dont les affixes sont solution de l'équation précédente. Déterminer θ pour que OAB soit un triangle équilatéral. 0,5pt

2) On considère l'application f dont l'écriture complexe est : $\mu^2 z + \mu - 1$

a) Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles f est une translation que l'on précisera. 0,5pt

b) Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles f est une homothétie de rapport -3. 0,5pt

c) On pose $\mu = 1 + i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,5pt

d) On considère le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = O$. Déterminer l'équation de l'image de (C) par f. 0,5pt

EXERCICE 3 : 2,5pts

I- Soit p un nombre premier.

1) a) Démontrer que pour tout entier naturel i strictement compris entre 0 et p, C_p^i est un multiple de p.

b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b , on a : $(a + b)^p \equiv a^p + b^p[p]$. 0,5pt

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel a, $a^p \equiv a[p]$. 0,5pt

b) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec p, on a $a^{p-1} \equiv 1[p]$. 0,5pt

II- Application

1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{22} par 23 ? 0,25pt

b)Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{2002} par 23. 0,5pt

2) Montrer que 23 divise $5^{2002} - 3^{2002}$.

3) Montrer que 23 divise $4 \times 5^{22n+1} + 3^{22n+1}$ pour tout entier naturel n. 0,5pt

EXERCICE 4 : 6pts

Soit f la fonction par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1)Montrer que f admet des primitives sur $[-1;+\infty]$ puis calculer les primitives de f. 0,5pt

Dans la suite, on suppose que f est définie sur $J = [0;1]$

1) Résoudre dans J l'équation $f(x) = x$ 0,25pt

2) Montrer pour tout $x \in J, f(x) \in J$ et que pour tout $x \in J, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 0,25pt

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ *et pour tout entier naturel* $n, u_{n+1} = f(u_n)$

a)Démontrer par récurrence que $\forall n \in N, u_n \in J$. 0,5pt

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1|$. 0,5pt

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n$. 0,5pt

d) En déduire que la suite (u_n) *converge* et calculer sa limite. 0,5pt

II) soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = -x + 2\sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 0,5pt
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$ 0,5pt
3) En déduire le signe de g sur R. 0,25pt
4) Montrer que pour tout reel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ puis dresser le tableau de variation de f. 0,75pt
5) Etudier les branches infinies de f. 0,5pt
6) Construire la représentation graphique de f. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 4,5pts

Une entreprise fabrique et vend des morceaux de savon. Le service de contrôle de qualité et prix a constaté qu'il y avait certains morceaux qui ne respectaient pas la masse normale de 400g. Pour mesurer l'efficacité de la chaine de production, l'entreprise installe un système électronique qui donne le carré du pourcentage de morceaux de savon ne respectant pas la norme en fonction du nombre de mois . Les données du système électronique pendant quelques mois sont consignées dans le tableau suivant :

Nombre de mois (X_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Carré du pourcentage (Y_i)	0	4	16	64	121	196	289	400

Pour exploiter ces données, le directeur de l'entreprise fait appel à une équipe d'experts en statistique et leur demande s'il est possible que le pourcentage des morceaux de savons défectueux après 16 mois dépasse 35% qui est le pourcentage limite prescrit par le service de contrôle. L'équipe affirme qu'avec la série statistique $(x_i ; z_i)$ où $z_i = \sqrt{y_i}$, il est possible d'estimer que dans 16mois le service de contrôle fermera cette entreprise.

Pour gérer l'exploitation des données, l'équipe d'experts est composée de plus de femmes que d'hommes. Pour leur nutrition, ils ont reçu 100 bons de commandes d'une valeur de 5000F chacun qu'ils ont utilisé entièrement. Chaque homme a reçu 8 bons et chaque femme a reçu 5 bons. Le comptable de l'équipe affirme que la somme totale d'argent pour la nutrition des femmes est de 70 000F.

M Fotso directeur de la savonnerie est propriétaire d'un terrain dans la ville de Yaoundé. Pour préparer sa retraite, il décide de transformer une partie de ce terrain en une cite touristique. Il fait appel à un entrepreneur pour l'étude du site. L'entrepreneur lui fait comprendre que dans le repère des services du cadastre où l'unité est le mètre, la zone pour le site est délimitée par l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $70 < |2iz + 2 - 3i| \leq 80$ où $z = x + iy$ **est un nombre complexe.**
L'entepreneur demande à M Fotso une somme de 5000F par mètre carré du site et M Fotso dispose d'une somme de 5 500 000F pour les travaux.

TACHES

1) L'équipe d'expert a-t-elle raison sur l'estimation de la fermeture ? justifier votre réponse. 1,5 pt
2) Le comptable de l'équipe d'expert a-t-il raison ? Justifier votre réponse. 1,5 pt
3) M Fotso pourra t'il réaliser son projet de site touristique ? 1,5 pt