

<b>COLLÈGE F.X. VOGT</b>		<b>Année scolaire 2023-2024</b>
<b>Second cycle</b> Département de Mathématiques	<b>MINI-SESSION</b>	<b>Date : Novembre 2023</b> <b>Niveau : 1<sup>ère</sup>D-TI</b> <b>Durée : 3h00 ; Coeff : 4</b>

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

#### Exercice 1 : (6 points)

- I-
1. Vérifier que  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ . **0,25pt**
  2. Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation:  $4\sin^2 x + (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} \leq 0$ . **1,75pt**
  3. Résoudre dans  $] -\pi; \pi]$  de l'équation trigonométrique ci-dessous et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique:  $3 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{3}$ . **1,5pt**
- II-
- On considère l'expression  $A(x) = \tan 3x - \tan x$ , définie pour tout  $x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\cos(3x) = \sin(x)$ . **1pt**
  2. Montrer que pour tout  $x \in D$ , l'expression simplifiée de  $A(x) = \frac{2 \sin x}{\cos 3x}$ . **0,75pt**
  3. En déduire les solutions dans  $] -\pi; \pi]$  de l'équation  $A(x) = 2$ . **0,75pt**

#### Exercice 2 : (5 points)

On considère l'équation trigonométrique (E):  $2 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) + 3 \tan \left(\frac{x}{2}\right)$ .

- a) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $2 \sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$ . **0,25pt**
  - b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation  $(E_1)$ :  $2 \sin x + 2 \cos x = 1 + 3 \tan \left(\frac{x}{2}\right)$ . **0,25pt**
2. On pose  $t = \tan \left(\frac{x}{2}\right)$ .
- a) Montrer que pour tout  $x \neq (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :  $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$  et  $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x$ . **1pt**
  - b) En déduire que l'équation  $(E_1)$  est équivalente à l'équation  $(E_2)$ :  $3t^3 + 3t^2 - t - 1 = 0$ . **0,5pt**
  - c) Montrer que :  $3t^3 + 3t^2 - t - 1 = (t + 1)(3t^2 - 1)$ . **0,5pt**
  - d) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_2)$ . **0,75pt**
3. En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation (E) puis placer les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique. **1,75pt**

#### Exercice 3 : (4 points)

- I-
- On considère le système (S) ci-après de paramètre réel  $m$  :  $\begin{cases} mx + y = -m \\ x + my = m \end{cases}$ .
1. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système (S) lorsque  $m = 2$ . **0,5pt**
  2. En déduire la résolution dans  $\mathbb{R}^2$  du système  $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-3} = -2 \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{y-3} = 1 \end{cases}$ . **0,75pt**
  3. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  suivant les valeurs de  $m$ , le système (S) lorsque son déterminant est nul. **1pt**

II- Lors d'une fête, le buffet repas était composé de deux entrées (salade de crevettes ou œufs mimosas) ; de trois plats de résistance (Ndolé ou Taro sauce jaune ou Okok sucré) ; et deux desserts aux fruits (ananas ou pastèque). Il a été exigé au service que les invités doivent être servis sur des plateaux, contenant chacun une entrée, un plat de résistance et un dessert aux fruits choisis par chaque invité.

1. Déterminer le nombre de plateaux possible que l'on pouvait ainsi former. **0,75pt**
2. Finalement, 25 plateaux ont été servis et le chef du protocole a remarqué que chacun contenait au moins l'un des trois repas suivants: œufs mimosas; le Ndolé et la pastèque. Il a compté 2 plateaux contenant ces trois repas, 10 plateaux contenant les œufs mimosas, 5 plateaux contenant les œufs mimosas et la pastèque, 6 plateaux contenant les œufs mimosas et le Ndolé, 9 plateaux contenant exactement deux de ces trois repas, 16 plateaux contenant les œufs mimosas ou le Ndolé.  
Combien de plateaux contenaient uniquement un seul de ces trois repas ? **1pt**

### **Partie B : Évaluation des compétences (5 points)**

#### **Situation :**

Monsieur Essomba est un mécanicien spécialisé en maintenance automobile. Il décide avec ses partenaires financiers de faire construire un nouveau local sur le terrain qu'ils ont acheté. Ce terrain est un quadrilatère dont les sommets sont les solutions sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$  de l'équation :  $-4\cos^2x + (2\sqrt{3} - 2)\cos x + \sqrt{3} = 0$ . L'unité de longueur sur le cercle trigonométrique étant 20 mètres. [Donnée:  $16 + 8\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2)^2$ ].

Le local qu'ils feront construire est un rectangle de 43 mètres de long (voir figure ci-dessous). À l'une des extrémités, et sur toute la largeur du local, un emplacement carré, de côté  $x$  est destiné au stockage des pièces détachées et de l'outillage, et à l'autre extrémité, un autre emplacement carré, de côté  $x$ , est destiné à l'accueil. M. Essomba souhaite que la partie centrale devant accueillir l'atelier de mécanique occupe une aire supérieure ou égale à 50% de la surface totale du local. Il aimerait connaître pour cela, la valeur maximale de  $x$  à choisir pour que cela se réalise.

Pour acheter ce terrain, M. Essomba et ses partenaires financiers ont utilisé les intérêts produits par la somme de 80 000 000 FCFA qu'ils avaient placée dans une banque pendant 02 ans à intérêts annuels composés. Au début de la deuxième année, le taux d'intérêt avait baissé de 2% par rapport à celui de l'année précédente. Ils ont retiré à la fin de la deuxième année uniquement les intérêts cumulés produits s'élevant à 6 520 000 FCFA pour acheter leur terrain. Ayant été informés quelques jours plus tard que le taux d'intérêt pratiqué dans cette banque était revenu comme au départ de la première année de leur placement, M. Essomba et ses partenaires ont décidé d'ajouter 2 000 000 FCFA au capital qu'ils possédaient dans cette banque après leur retrait à la fin de la deuxième année. Ils comptent retirer tout leur argent (capital et intérêts) à l'issue de la troisième année dans cette banque, afin de démarrer les travaux de construction de leur local.

#### **Tâches :**

1. Déterminer, au mètre carré près, l'aire du terrain acheté par M. Essomba et ses partenaires. **1,5pt**
2. Déterminer l'intervalle maximal auquel doit appartenir  $x$  afin que le local soit construit comme M. Essomba le souhaite. **1,5pt**
3. Déterminer la somme que vont retirer M. Essomba et ses partenaires à la fin de la troisième année dans cette banque. **1,5pt**

**Présentation : 0,5pt**

