COLLÈGE François-Xavier VOGT
B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28
e-mail : collegevogt@yahoo.fr

COLLÈGE François-Xavier VOGT		Année scolaire 2023-2024
Département de Mathématiques	MINI SESSION	Situation 2

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe : P^{ère}C & C* **Durée : 2 heures 45min** **coefficient : 7**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 POINTS

EXERCICE 1 : (05 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations cartésiennes respectives $-5x+3y=26$ et $5x-3y=8$. A est le point de coordonnées $(-4;2)$.

1) Soient Cet F les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $(-9;5)$.

a- Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) de centre F et de rayon 8. **0,75pt**

b- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') de centre C et de rayon $\sqrt{34}$. **0,75pt**

c- Montrer que les cercles (C) et (C') sont sécants. **0,75pt**

2) Soit la droite (Δ), l'axe médian des droites (D_1) et (D_2) ((D_1) et (D_2)sont parallèles).

a- Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (Δ) est $5x-3y=-9$. **1pt**

b- Soit m un nombre réel et Ω_m le point de coordonnées $\left(3m-\frac{3}{2};5m+\frac{1}{2}\right)$. Déterminer l'ensemble décrit par les points Ω_m lorsque m varie sur $\mathbb{R}$. **0,75pt**

c- Déterminer la famille des cercles tangents simultanément aux droites (D_1) et (D_2). **1pt**

EXERCICE 2 : (06,5 points)

1) En remarquant que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, montrer que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **0,5pt**

2) On donne $A(x)=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x$.

a- Déterminer les nombres réels r et θ tel que $A(x)=r\sin(x+\theta)$. **0,75pt**

b- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $A(x)=2$. **0,75pt**

c- En déduire de la question précédente la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $A(x)<2$. **0,75pt**

3) On donne les expressions suivantes $A=cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right)+cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)+cos^3\left(\frac{7\pi}{12}\right)+cos^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $B=sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right)+sin^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)+sin^3\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sin^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

a- Montrer que pour tout réel x, $cos^3x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$ et $sin^3x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$. **1pt**

b- En déduire de la question 3)a- la valeur exacte de A et celle de B. **1pt**

4) EFG est un triangle quelconque. Les nombres a,b et c sont respectivement les mesures en radian des angles aux sommets E, F et G.

a- Justifier que $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi-c}{2}$ et $\frac{c}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)$. **0,25pt**

b- Montrer que $\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. **0,75pt**

c- En déduire des questions 4)a- et 4)b- que $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (03,5 points)

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha\le\beta$ et vérifiant (S): $\begin{cases}3\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=\frac{2m+3}{m+3}\\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{5m}{4m+1}\end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$.

On pose $S=\ \alpha+\beta$ et $P=\alpha\beta$. Le but de l'exercice est de résoudre (S) suivant les valeurs de m.

1) Montrer que pour tout nombre réel m différent de -3, $S=\frac{5m}{m+3}$ et $P=\frac{4m+1}{m+3}$. **0,5pt**

2) Montrer que α et β sont solutions de l'équation $(E): (m+3)x^2 - 5mx + 4m + 1 = 0$. **0,5pt**

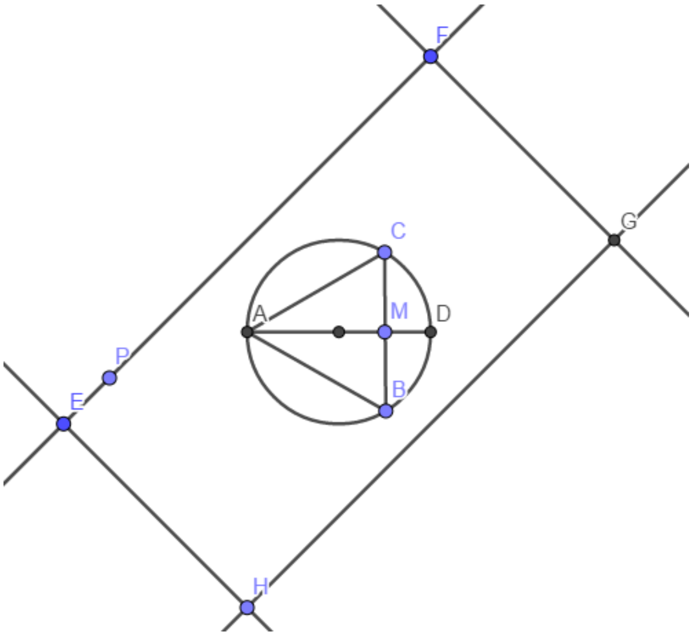
3) Soit Δ le discriminant de l'équation (E). Montrer que $\Delta = 9m^2 - 52m - 12$. **0,5pt**

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $9m^2 - 52m - 12 \geq 0$. **0,5pt**

5) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système (S) suivant les valeurs de m. **1,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 05 POINTS

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **d'unité le décamètre**. La figure ci-contre où EFGH est un rectangle représente le domaine de Monsieur IGREC. Ce domaine est délimité par les droites (EF), (HG), (EH) et (FG). Les droites (EF) et (FG) ont pour équations cartésiennes respectives $-x + y = 4$ et $x + y = 8$. La borne H a pour coordonnées $(-2; -6)$. Monsieur IGREC aimerait avoir une idée sur la superficie de son domaine afin d'optimiser son exploitation.



Monsieur IGREC désire construire une piscine sur son domaine. Cette piscine est représentée par le triangle isocèle ABC isocèle en A et inscrit dans un décor circulaire de rayon 2 décamètres. Les points A et D sont diamétralement opposés. La droite perpendiculaire à la droite (AD) en M rencontre le décor circulaire en B et C. En posant AM=x, Monsieur IGREC veut déterminer l'aire occupée par la piscine sachant que la distance BM est égale au tier de la distance AM.

L'entrée principale du domaine se trouve au point P sur la frontière représentée par la droite (EF). Le point P a pour coordonnées $(-5; -1)$. Pour surveiller son domaine, il doit placer un mirador simultanément à $2\sqrt{2}$ décamètre du point P et de la frontière (EF). Son gardien déclare qu'à plus de 10 décamètres, le contrôle ne peut être efficace. Le gardien réitère qu'à partir du mirador, il ne pourra pas assurer un contrôle efficace de la zone proche de la frontière représentée par la droite (FG).

<u>TÂCHES</u>.

1) Aide Monsieur IGREC à déterminer la superficie de son domaine. **1,5pt**

2) Déterminer la superficie occupée par la piscine. **1,5pt**

3) Le gardien a-t-il raison ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt