***Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.***

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (13,25 points)

### EXERCICE 1 : (3 points)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E): 21x - 17y = 4$.

1. Enonce le théorème de **BEZOUT**. **0,5pt**
2. **(a)** Montre en utilisant le théorème de **BEZOUT** que $(E)$ admet au moins une solution. **0,5pt**
   **(b)** Montre que l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $(E_0): 21x \equiv 4[17]$. **0,5pt**
3. **(a)** Détermine l'inverse modulo $17$ de $21$. **0,5pt**
   **(b)** Montre que les solutions de $(E_0)$ sont les entiers relatifs $x = 1 + 17k$ ; $k \in \mathbb{Z}$. **0,5pt**
4. Déduis-en l'ensemble des solutions de $(E)$. **0,5pt**

### EXERCICE 2 : (3 points)

Soit la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x - \sin x$.

1. Montre que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. **0,75pt**
2. **(a)** Montre que l'équation $\varphi(x) = 4$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$. **0,5pt**
   **(b)** Vérifie que $2,3 < \alpha < 2,4$. **0,25pt**
3. Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$.
   **(a)** Vérifie que $g(\alpha) = \alpha$. **0,5pt**
   **(b)** Montre que pour tout réel $x$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**
   **(c)** Déduis-en que pour tout réel $x$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. **0,5pt**

### EXERCICE 3 : (3 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $M$ le point d'affixe $z \neq -2i$ et $Z$ le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i}$. On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ deux réels.

1. Montre que $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$. **1,5pt**
2. Déduis-en la nature de :
   **(a)** L'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M$ du plan d'affixe $z$, tel que $Z$ soit un réel. **0,5pt**
   **(b)** L'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M$ du plan d'affixe $z$, tel que $Z$ soit un imaginaire pur. **0,5pt**
   **(c)** Construis les ensembles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans le même repère. **0,5pt**

### EXERCICE 4 : (4,25 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'expression $P(z) = z^3 - (2 + 6i)z^2 - (12 - 7i)z + 9 + 7i$.

1. **(a)** Détermine le nombre complexe $z_0$ tel que : $P(z)=(z-z_0)\left(z^2-(1+5i)z-8+i\right)$. **0,5pt**

   **(b)** Détermine les racines carrées de $\Delta = 8+6i$. **0,5pt**

   **(c)** Détermine les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-(1+5i)z-8+i=0$, puis déduis-en l'ensemble solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$. **0,75pt**

2. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 1+i$ ; $z_B = 2+3i$ et $z_C = -1+2i$. Soient les points $D$ et $E$, images respectives des points $B$ et $C$ par la symétrie centrale de centre $A$.

   **(a)** Calcule $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis déduis-en la nature exacte du triangle $ABC$. **0,5pt**

   **(b)** Détermine les affixes respectives des points $D$ et $E$. **0,5pt**

3. **(a)** Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe $a=-2+2i$. **0,5pt**

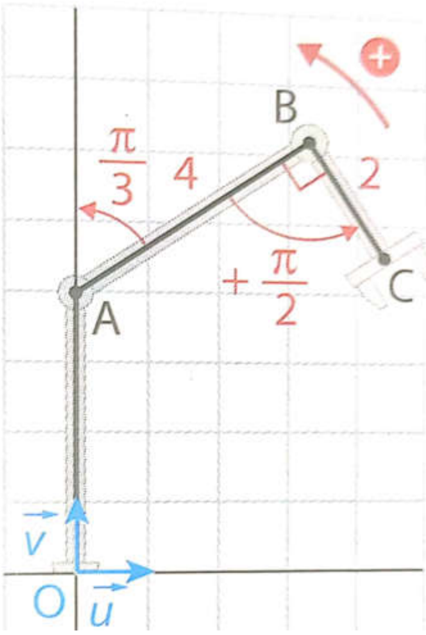
   **(b)** Ecris sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique le nombre complexe :
   $$b=\frac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)}{-2+2i}.$$ **0,5pt**

   **(c)** Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$. **0,5pt**

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (6,75 points)

**SITUATION :**

M. ONANA est un ingénieur en robotique. Il fabrique les bras de robots et des drones. Le bras d'un robot qu'il vient de fabriquer est formé de trois tiges pouvant pivoter (dans un même plan) autour des points $A$ et $B$, le point $A$ étant fixe (voir figure).




On se place dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ et on suppose que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA})=\theta$ où $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Ayant bénéficié d'une subvention de son pays, M. ONANA a vendu tous ses appareils (bras de robots et drones) faisant ainsi une recette de $10.000.000$ FCFA. Chaque bras de robot coutait $800.000$ FCFA et chaque drone coutait $500.000$ FCFA. Il y avait plus de drones que de bras de robots.

M. ONANA est né en $\overline{19\alpha\beta}^{10}$. En $2004$, son âge était curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance.

**Tâches :**

1. Pour quelle valeur de $\theta$ le bras du robot atteint-il le point d'affixe $3\sqrt{2}+i\left(4+\sqrt{2}\right)$ ? **2,25pts**
2. Calcule le nombre de bras de robots et le nombre de drones vendus par M. ONANA. **2,25pts**
3. Détermine l'âge actuel de M. ONANA. **2,25pts**