

COLLEGE MONTESQUIEU	SEQUENCE N°1	ANNEE SCOLAIRE 2023/2024
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	EPREUVE DE THEMATIQUES	CLASSE : T <sup>le</sup> D DUREE : 4 H ; Coefficient : 4



**EVALUATION DES RESSOURCES : (15,5 Pts)**

Le candidat traitera trois des quatre exercices de cette partie.

**EXERCICE 1 : (5pts)**

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$A = \left(\frac{2+3i}{5+3i}\right)(2-3i)$  et  $B = (2+3i)^6$  1pt × 2 = 2pt

2) On donne  $z_1 = 4 - 3i$  et  $z_2 = 12 + 5i$

a) Déterminer le module de  $z_1$  et  $z_2$ . 0,25pt × 2 = 0,5pt

b) En déduire le module de  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ,  $z_1 \times z_2^5$ ,  $z_1^4$  et  $\frac{z_1^4}{z_2^5}$ . 0,5pt × 4 = 2pt

3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $-2z + i\bar{z} = 3$ . 0,5pt

**EXERCICE 2 : (5pts)**

1-a) Déterminer les racines carrées de  $-5 + 12i$ . 0,75pt

1-b) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(2-i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{1}{2}i = 0$ . 0,75pt2)

On considère la fonction polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$ .

a) Démontrer que pour tout nombre complexe  $z_0$ , on a :  $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)}$ . 0,75pt

b) En déduire que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{z}_0$  est aussi une racine de  $P$ . 0,75pt

c) Calculer  $P(i)$ . 0,5pt

d) En déduire une, puis deux racines de l'équation  $P(z) = 0$ . 0,5pt

e) Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tel que  $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + az + b)$ . 0,75pt

f) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . 0,75pt

**EXERCICE 3 : (5pts)**

1) On considère l'équation (E) :  $z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i) = 0$

1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle  $z_1$ . 0,75pt

2) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure  $z_2$ . 0,75pt

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

1) On considère le nombre complexe  $Z$  défini pour tout nombre complexe  $z \neq 1$  par  $Z = \frac{z-2}{2z-1}$ .

a) Déterminer la partie réelle  $X$  et la partie imaginaire  $Y$  de  $Z$  en fonction de la partie réelle  $x$  et la partie imaginaire  $y$  de  $z$ . 0,75pt

b) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que :

i)  $Z$  soit un nombre réel. 0,75pt

ii)  $Z$  soit un nombre imaginaire pur. 0,75pt

2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - 1 - i| = 2$ . 0,5pt

**EXERCICE 4 : (5pts)**

1) Calculer les limites ci-dessous

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+8}}$  (0,75pt) ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2+7} + 3x$  (0,75pt) ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3x-2} - x$  (1pt)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$  (0,5pt) ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{(\tan(x))^2}$  (0,75pt)

2) Etudier la branche infinie en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}$ . (1,25pt)

**EVALUATION DES COMPETENCES : (04,5 Pts)**

Utiliser les lieux géométriques des nombres complexes pour résoudre une situation problème.

M. SALIOU possède trois terrains non encore exploités qu'il voudrait absolument sécuriser à cause des personnes mal intentionnées qui utilisent ces espaces à des mauvaises fins. Il décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer entièrement chacun de ces trois terrains, le rouleau de cinq mètres de ce fil lui est vendu à 3500 FCFA. Il devra en plus remettre 3000FCFA pour les piquets et la main d'œuvre pour chacun des terrains.

Le terrain 1 est formé de l'ensemble des points  $M(z)$  du plan complexe tels que  $|2iz - 1 - 3i| = 8$ .

Le terrain 2 est de forme rectangulaire et ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution  $z$  de l'équation  $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$ ,  $\bar{z}$  étant le conjugué de  $z$ .

Le terrain 3 quant à lui est formé de l'ensemble des points  $M(z)$  du plan tel que le nombre complexe  $\frac{z}{z+2i}$  soit imaginaire pur. On prendra une unité égale à 10 mètres.

Tache 1 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain1. 1,5pt

Tache 2 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain2. 1,5pt

Tache 3 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain3. 1,5pt