

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,5 points)

EXERCICE 1 : 4,25 points

A- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$

L'équation (E) : $z^2 - 3e^{i\frac{3\pi}{8}}z + 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0$.

1. Démontrer que l'une des racines carré de Δ de (E) est : $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. 0,75pt
2. a) Calculer les valeurs exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. 1pt
 b) En déduire celles de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$. 0,5pt
3. a) Résous alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ 0,25pt
 b) Soit A et B les points d'abscisses respectives des solutions de (E) tes que : $|z_B| > |z_A|$. Montrer que A est milieu de [OB]. 0,5pt

B- On considère les nombres complexe :

$$z_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}.$$

- a. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 . 0,5pt
- b. En déduire la forme trigonométrique de z_1^2 . 0,25pt
- c. Ecrire z_2 sous sa forme trigonométrique. Etablir que $z_1^2 = 4z_2^2$. 0,5pt

EXERCICE 2 : 4,25 points

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.

1. a) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure. 0,5pt
 b) déterminer les réels a et b tels que pour tout complexe z, on ait
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. 0,25pt
 b) En déduire les solutions de (E) sous la forme trigonométrique. 0,75pt
3. On considère le point A d'abscisse $z_A = i$, le point B d'abscisse $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C d'abscisse z_C symétrique de z_B par rapport à O.
 a) Représenter sur un même graphique les points A ,B et C 0,75pt
 b) déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. 1pt
 c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC 0,5pt

EXERCICE 3 : 3,75 points

1. Linéariser $\cos x \sin^2 3x$. 0,5pt
2. Ecrire $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i$ sous la forme trigonométrique et simplifier $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ 1,5pt
3. déterminer les racines quatrième de $-8 - 8i\sqrt{3}$ et représenter leur point images Dans le plan complexe. 0,75pt
4. Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$. On considère le nombre complexe suivant :
 $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$. Déterminer le module et un argument de z. 1pt

EXERCICE 4 : 3,25 point

- I- soient les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et $z_2 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$
1. Calculer le module et un argument de z_2 0,5pt
 2. On pose $U = \frac{z_2}{z_1}$
 - a) Ecrire U sous la forme algébrique 0,75pt
 - b) Calculer le module et un argument de U 0,5pt
 - c) En déduire le module et un argument de z_1 0,5pt
 3. Utiliser les résultats précédents pour donner les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ 0,5pt
- II- soit z un nombre complexe tel que $z = \frac{z+2-i}{z-i}$
1. On pose $z = x + iy$. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z en fonction de x et y 0,5pt
 2. déterminer l'ensemble des point M(z) tel que z soit un réel 0,25pt
 3. déterminer l'ensemble des point M(z) tel que $|z| = 1$ 0,25pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 4,5 points

Situation :

M. Noubissi possède trois terrains 1 , 2 et 3

Le terrain 1 a une forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est un polygone dont les sommets A , B et C ont pour affixes respectives $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, 2 et $-3 + i$.

Le terrain 2 a la forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est l'ensemble des point M dont l'affixe z est tel que :

$$|2iz + 1 - 3i| = 10.$$

Le terrain 3 a une forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z solution de l'équation $R_e(z) = 0$ où $z' = \frac{z-3+i}{z+2i}$. $z = x + iy$.

M. Noubissi veut clôturer chacun des trois terrains à l'aide d'un grillage vendu à 5000 Frs les 3m.

Tâches :

- 1) Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 1 ? 1,5pt
- 2) Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 2 ? 1,5pt
- 3) Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 3 ? 1,5pt

« Quoi qu'il arrive dans la vie, faites toujours du bien... »