

COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé - Tél. : 222 31 54 28 E-mail : mail:collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-2024	
		Classe : T ^{le} D-TI	Contrôle No : 2
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES	Contrôle du 07 octobre 2023	Durée :	3h30

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

12,75 POINTS

Exercice 1 : 4,25 points

- I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :
- a) $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$ b) $4Z^2 + 8|Z|^2 - 3 = 0$ c) $2 + Z + (3 - 2i)\bar{Z} = 0$ 2pts
- II. On considère le polynôme Q définie dans $\mathbb{C}$ par : $Q(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$
- 1) Démontrer que Q admet une racine imaginaire pure z_0 à déterminer 0,75pt
- 2) Déterminer deux réels b et c tels que $Q(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$ 0,5pt
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$ 1pt

Exercice 2 : 4,5 points

le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm.

- I. On donne le nombre complexe u tel que $u = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
- 1- Calculer u^2 0,25pt
- 2- Déterminer le module et un argument de u . 0,5pt
- II. On définit sur $\mathbb{N}$ la suite des points A_n d'affixe Z_n par $Z_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)Z_n$
- 1) Déterminer la forme algébrique de Z_1 et Z_2 0,5pt
- 2) Montrer que (Z_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison sous forme exponentielle. 0,5pt
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{ni\frac{\pi}{3}}$ 0,5pt
- 4) Montrer que Z_n^{12} est un nombre réel 0,5pt
- 5) Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est géométrique de raison et de premier terme à préciser. 0,75pt
- 6) On pose $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$
- a) Calculer A_0A_1 0,25pt
- b) Exprimer L_n en fonction de n 0,75pt

Exercice 3 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

- A. Linéariser $\cos^2 x \sin^4 x$ 0,75pt
- B. On considère les points A, B, C et K d'affixes respectives :
- $Z_A = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2}$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = \frac{Z_B}{Z_A}$ et $Z_K = 1$
- 1) Écrire Z_C sous forme algébrique. 0,5pt
- 2) Déterminer le module et un argument de Z_A et Z_B . 1pt
- 3) Écrire Z_C sous forme trigonométrique. 0,75pt
- 4) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$. 0,5pt
- 5) Donner en justifiant, la nature exacte du triangle KOB 0,5pt

SITUATION :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$ d'unité 1 dam.

Le service technique d'une municipalité, souhaite aménager dans un parc public trois aires de jeux recouvertes de gazon dont le prix de revient de la pose d'un mètre carré est de 425 FCFA pour le divertissement des enfants.

LA PARCELLE 1 : est un quadrilatère dont les sommets sont images dans le plan complexe des solutions de l'équation $z^4 = -4$ dans $\mathbb{C}$.

LA PARCELLE 2 : est définie par l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{2z-4}{z-i}$ soit un imaginaire pur. Avec $z \neq i$.

LA PARCELLE 3 : est un triangle rectangle dont les sommets sont images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - (4 + 3i)z^2 + (-11 + 14i)z + 30 + 69i = 0$ et dont une solution est $z_0 = -3$.

Prendre $\sqrt{5} = 2,23$ et $\pi = 3,14$.

TÂCHES :

- | | |
|--|---------------|
| 1. Combien dépensera la municipalité pour la pose des gazons sur la parcelle 1 ? | 2,25pt |
| 2. Combien dépensera la municipalité pour la pose des gazons sur la parcelle 2 ? | 2,25pt |
| 3. Combien dépensera la municipalité pour la pose des gazons sur la parcelle 3 ? | 2,25pt |

Présentation 0,5 point