CENTRE DE REPETITION LA CONQUETE
TEL : 690 255 107 // 655 611 916
Département des mathématiques
Professeur : M. MANETOU KOKO F.

Année scolaire : **2023/2024**
Classe : **T^le C, D**
Session : **septembre**
Durée : **03 heures**
Coefficient: **07(C) & 04(D)**

CONTROLE CONTINU N°1

I. EVALUATION DES RESSOURCES (15,5 points)

EXERCVICE 1 : série C uniquement (05,5 points)

1. Déterminer le chiffre des unités du nombre $N = (3548)^9 \times (2537)^{31}$ **1pt**
2. Soient a, b et n trois nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Déterminer le plus petit entier naturel n tels que $n = \overline{300}^a = \overline{33}^b$. **0,75pt**
3. Démontrer en utilisant les congruences que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n+1} + 3 \times 5^{2n+1}$ est divisible par 17. **0,75pt**
4. On considère l'entier A_n défini $\forall n \in \mathbb{N}$ par $A_n = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$;
   a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^4 par 13. **0,5pt**
   b) En déduire que $\forall k, r \in \mathbb{N}$, on a $5^{4k+r} \equiv 5^r [13]$. **0,5pt**
   c) Déduire suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 5^n par 13. **1pt**
   d) Montrer que A_n est divisible par 13 si et seulement si n n'est pas multiple de 4. **1pt**

EXERCICE 1: Série D uniquement (05,5 point)

A. On considère dans l'ensemble c des nombres complexes, le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + z^2 - z(1 - i) + 2 + 2i$

1. Montrer que P admet une racine réelle z que l'on déterminera. **1pt**
2. Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$. **0,5pt**
3. Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.

B. Soit z un nombre complexe différent de i et (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que le nombre complexe $z' = \frac{z+i}{z-i}$ soit imaginaire pur.

1. a) Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z' = 2iz$, z_1 ayant une partie réelle positive. **0,5pt**
   b) Déterminer le module de z_1. **0,5pt**
2. démontrer que si z est un nombre complexe imaginaire pur, alors $\bar{z} = -z$. **0,5pt**
3. montrer alors qu'un point $M(z)$ appartient a (Γ) si et seulement si $z\bar{z} = 1$. **0,75pt**
4. En déduire alors que (Γ) est un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 prive d'un point que l'on déterminera. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (04,5 point)

On considère les nombres complexes : $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $u = 4 - 3i$

1. a) Donner la forme algébrique de z^2. **0,75pt**
   b) Déterminer le module de z^2, puis déduire le module de z. **1pt**
2. Déterminer les racines carrées de u. **1pt**
3. Vérifier que $u^4 = -527 - 336i$. **1pt**
4. donner la forme algébrique du nombre complexe $k = (4 - 3i)^{-4}$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (05,5 points)

Les parties A et B sont indépendantes uniquement pour la série C.

Partie A : 01,5 point

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier les variations de g. **0,5pt**
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2 ; 3[$ et donner un encadrement de α a 10^{-1} près. **0,75pt**

Septembre 2023

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. **0,25pt**

Partie B : série D uniquement (04 points)

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier les limites et les branches infinies de f aux bornes de D. **1,5pt**
2. Montrer que $f'(x) = g(x) \times h(x)$ ou h est une fonction à préciser. **0,75pt**
3. En déduire les variations de f, et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
4. Tracer (C), ainsi que ses asymptotes. **1pt**

Partie B : série C uniquement (04 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sin x$.
   a) Démontrer que f réalise une bijection réciproque f^{-1} de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J à déterminer. **0,75pt**
   b) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J, et déterminer sa dérivée. **1,25pt**
2. On considère la fonction h définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $h(t) = \sqrt[3]{2\cos t - 1}$.
   a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $2\cos t - 1 = -4\sin\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. **0,75pt**
   b) Montrer que $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{h(t)}{t - \frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{4\sin\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(t-\frac{\pi}{3}\right)^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{t-\frac{\pi}{3}}}$. **0,75pt**
   c) En déduire $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{2\cos t - 1}}{t - \frac{\pi}{3}}$. **0,5pt**

II. EVALUATION DES COMPETENCES (04,5 points)

Situation :

M.Falair possède deux terrains agricoles dont il aimerait les clôturer afin de les protéger contre les animaux sauvages à l'aide des fils barbelés vendus à 900FCFA le mètre sur le marché.

Le terrain 1 a la forme d'un triangle dont les dimensions sont les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z solution de l'équation $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$

Le terrain 2 est délimité par l'ensemble des points M(z) du plan complexes tels que $|z - 4 + 2i| = 3$.

Pour cultiver sur ses terrains, M.Falair utilise une machine fabriquée par une entreprise de la place. Cette entreprise peut produire en un mois entre 0 et 50 machines. Le bénéfice mensuel de cette entreprise exprimé en millier de francs est modélisé par la fonction $B(x) = x^3 - 96x^2 + 2484x - 10000$. où x représente le nombre de machine fabriquée en un mois.

Tâches :

1. Déterminer le montant à dépenser par M.Falair pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer le terrain 1. **1,5pt**
2. Déterminer le montant à dépenser par M.Falair pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer le terrain 2. **1,5pt**
3. Déterminer le nombre de machine fabriquée en un mois pour réaliser un bénéfice maximal. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt

septembre 2023