CONTRÔLE CONTINU N°1
CLASSE TleC LE J-J
GOEF: 7 SESSION : 2023/2024

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES	15,5 POINTS

Exercice 1 : 03,50 Points

Soit P le polynôme à coefficients réels définie par $P(x) = ax^3 + bx - 4$ et vérifiant pour tout nombre réel x, l'égalité $P(x+1) - P(x) = 6x + 4$.

1- Sans calculer a et b déterminer $P(0), P(1)$ et $P(2)$. ***0,75pt***

2- **a)** Montrer alors que $a = 1$ et $b = 3$. ***0.5pt***

b) Donner une factorisation de $P(x)$. ***0,5pt***

3- On pose $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

a) Calculer $P(t)$. (On montrera les étapes du calcul) ***0.5pt***

b) En déduire que t est un nombre entier que l'on déterminera. ***0,5pt***

4- On pose $T(n) = P(n) - 3n + 4$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{k=n} T(k) = (1+2+3+\cdots+n)^2$. ***0,75pt***

Exercice 2 : 05,50 Points

A- Prouver que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : '' $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b$ est un multiple de 5'' est une relation d'équivalence. ***1pt***

B- **a)** Vérifier que pour tout réel x, $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| \leq \frac{1}{x^2}$. ***0,5pt***

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, démontrer que $\forall \alpha > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| \leq \alpha$. ***0,75pt***

C- Soit a et b étant des nombres réels.

1- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$. ***1pt***

2- Démontrer qu'il existe un unique couple (a_n, b_n) d'entiers naturels tels que :

$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. ***1pt***

3- Montrer que ${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = (-1)^n$. ***0,75pt***

4- Déterminer alors les diviseurs communs à a_n et b_n. ***0,5pt***

Exercice 3 : 02,00 Points

Soient a et b deux entiers.

1- Démontrer que a divise b si et seulement si pour tout entier relatif k, a divise $b - ka$. ***0,75pt***

2- Démontrer que $a - 5$ divise $a + 7$ si et seulement si $a - 5$ divise 12. ***0,75pt***

3- En déduire les entiers a tels que le nombre $\frac{a+7}{a-5}$ soit un entier. ***0,5pt***

Exercice 4 : 04,50 Points

Le but de cet exercice est la résolution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation (E) : $7^n - 3 \times 2^m = 1$, m et n étant des entiers n

1- Déterminer si possible des entiers naturels a et b tels que : $7^a - 4 = 0$; $7^b - 7 = 0$. ***1pt***

2- Résoudre l'équation (E) pour $m \leq 4$. ***1pt***

On suppose pour la suite que $m > 5$ et que le couple (m, n) est solution de (E).

3- Montrer que l'on a : $7^n \equiv 1[32]$. ***0,5pt***

4- Montrer que n est un multiple de 4. ***0,5pt***

5- **a)** Déterminer les entiers p, tels que $7^p \equiv 1[5]$. ***0,5pt***

b) En déduire que l'équation (E) équivaut à $3 \times 2^m \equiv 0[5]$. ***0,5pt***

6- Déterminer alors toutes les solutions de (E). ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

<u>Situation :</u>

Monsieur Fotso un grossiste dans la vente du ciment, va recevoir dans les jours qui suivent un camion contenant 14550 sacs de ciments. Il lui faudra donc des détaillants pour écouler toute sa marchandise. Chacun d'eux devra prendre entre 150 et 300 sacs de ciments et aussi déposer chacun une caution de 50000 francs dans un compte bancaire ouvert par M. Fotso pour l'occasion. Après tous les dépôts effectués, M. Fotso constate qu'il a moins de 3000000 francs.

Après cette bonne affaire M. Fotso décide d'encourager tous les élèves de la classe de Terminale C où il est parent délégué. Dans cette classe de moins de 40 élèves, la taille moyenne des élèves est de 167 centimètres, la taille moyenne des filles est de 160 cm et celle des garçons est de 173,5 cm. Il va alors remettre la somme de 4000 francs à chacune des filles et 3000 francs à chaque garçon.

Le jour de sa visite dans la classe, il retrouve au tableau l'extrait de texte suivant, parlant du codage : « *les 26 lettres de l'alphabet sont associées à leur indice : l'indice de A est 0, celui de B est 1, …., 25 est l'indice de Z. Pour le codage, chaque lettre d'indice x est remplacée par la lettre dont l'indice est le reste de la division euclidienne de $ax + b$ par 26, où a et b sont deux entiers compris entre 0 et 10. Le mot codé est différent du mot initial et deux lettres différentes ne peuvent être codées par la même lettre*.» Les lettres A et O ont été codées respectivement par les lettres F et Z. Pour gagner 5000 francs, M. Fotso demande qui peut coder son nom. L'élève Fothé a réussi à coder et a remporté cette somme.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

<u>Tâches</u>

1- Retrouver la somme exacte disponible dans le compte de M. Fotso après tous les dépôts. ***1,5pt***

2- Déterminer le code donné par l'élève Fothé. ***1,5pt***

3- Déterminer la somme totale donné par M. Fotso aux élèves de la classe de TC. ***1,5pt***