GROUPE DE REPETITION LES MAX	Semaine du 11 septembre 2023	Année scolaire : 2023/ 2024
	FICHE DE TD N°1	
Département de MATHEMATIQUE	NOMBRES COMPLEXES	Classe : $TleC\&D$

Proposée par : Mr NCHOUAPINE IBRAHIM

TEL : 658 14 66 29

TRAVAUX DIRIGEES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 0 :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z = 1 + i \; ; \; z = i \; ; \; z = 1 \; ; \; z = 1 + i\sqrt{3}$$

EXERCICE 1 :

Déterminer la forme exponentielle dans chacun des cas suivants :

$a)\ z = 1 - i\sqrt{3}$; $b)\ z = -4 - 4i\sqrt{3}$; $c)\ z = 4 + 4i$; $d)\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

EXERCICE 2 :

a) Linéariser $a)\ cos^4x$; $b) sin^4x$; $c) sin^2(2x)$ $d)\ cos^5x$; $e)\ sin^5x$

b) Linéariser l'expression : $A = cos^4x.sin^2x$

EXERCICE 3 :

Soient P un plan affine Euclidien et (O, I, J) un repère orthonormé direct de P.

Soient z un nombre complexe diffèrent de 1 et M son point image dans le plan P.

1) Soient x et y les parties réelle et imaginaires de z. Dans chacun des cas suivants, calculer en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

$a)\ Z_1 = \frac{z-2i}{z-1}$; $b)\ Z_2 = \frac{z-2}{2z-1}$;

2a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z_1 soit un nombre réelle.

2b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z_2 soit un nombre réelle.

2c) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z_1 soit un imaginaire pur.

2e) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z_2 soit un imaginaire pur.

EXERCICE 4 :

1a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ et en utilisant la racine carré d'un nombre complexe l'équation : $z^2 = 4i$.

1b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ et en utilisant la racine cubique d'un nombre complexe l'équation : $z^3 = 8i$.

1c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ et en utilisant la racine cubique d'un nombre complexe l'équation : $z^3 = 8$.

2) En utilisant la méthode algébrique, déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$a) -3+4i$; $b) \, 8-6i$; $c) -5+12i$; $d) \, 15+8i$; $\mathrm{e)} \, 7+24\mathrm{i}$; $\mathrm{f)} \, 24-10\mathrm{i}$.

EXERCICE 5 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a) \, z^2+4iz-4=0$;

$b) \, z^2-z-6=0$;

$c) \, 2z^2-2iz-1=0$;

$d) \, z^2-4z-8=0$;

$e) \, iz^2+ \, z-3+i=0$;

$f) \, iz^2+5i\,z+4i=0$;

$g) \, (-2+i)z^2+(4-5i)z+3-i=0$;

$h) \, z^2+(-7+i)z+12-16i=0$

EXERCICE 6 : Soit l'équation (E): $z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$;

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 7 :

Pour tout nombre complexe, on pose : $f(z)= \, z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i$.

1. **Montrer que $f(z)=0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.**
2. **Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(z)=(z-z_0)(z^2+az+b)$. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.**
3. **On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Soient A, B et C les points de P d'affixes respectives z_0 ; z_1 et z_2 où z_0 ; z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $f(z)=0$ et z_1 a une partie imaginaire positive.**
   a) **Représenter ces points dans un repère orthonormé.**
   b) **Quelle est la nature du triangle A, B et C.**

c) Déterminer un point D d'affixe z_3 tels que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE 8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : \frac{z-2}{z-1} = z$.

(On donnera le module et un argument de chaque solution).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : \frac{z-2}{z-1} = i$.

(On donnera les solutions sous forme algebrique).

3) Soit M, A et B les points d'affixes respectives : $z, 1$ et 2.

On suppose que M est distinct des points A et B.

a) Interpréter le module et l'argument de de $\frac{z-2}{z-1}$.

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (E').

4) a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'') : $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

On cherchera les solutions sous la forme algébrique.

EXERCICE 9 :

On définit la transformation f du plan par sa forme complexe :

$(E') : z' + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$

1) Quelle est la nature de l'application f ?

2) Qéterminer l'image $\mathcal{C}'$ par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-2 + i)$

Et de rayon 1.

EXERCICE 10 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (-1 + 5i)z^2 - 4 + 28i = 0$.

1. (a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur z_0 à préciser.

   (b) Déterminer alors deux nombres complexes b et c tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation (E_0) : $(z - z_0)(z^2 + bz + c) = 0$.
2. (a) Calcule $(3 - i)^2$ et donne le résultat sous forme algébrique.

   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + (-1 + 7i)z - 14 - 2i = 0$.
3. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 3i$, $z_B = -2 + 4i$ et $z_C = 2i$.

   (a) Donne la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$.

   (b) Déduis-en la nature exacte du triangle ABC.

EXERCICE 11 :

1. A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 + 4i$.

a. **Calculer le rapport $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.**

b. **Donner l'écriture complexe de la notation de centre B qui transforme A en C**

2. **Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $Z = x + iy$ du plan complexe, associe le point M' d'affixe Z' tel que** $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$

   a. **Déterminer l'expression de Z' en fonction de Z. 0,5pt**

   b. **Donner la nature et les éléments caractéristique de f.**

   c. **Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et (D) la droite d' équation (D) : $x - y - 2 = 0$.**
   Déterminer (C ') et (D') images respectives de (C) et (D) par f.

3. **On donne les points A, B, A' et B' d'affixes respectives** $Z_A = 2 + 3i$
$Z_B = -1 - 2i$, $Z_{A'} = i$ et $Z_{B'} = 3$
Déterminer l'écriture complexe de la similitude f qui transforme A en A' et B en B'.

<u>EXERCICE 12 :</u>

1) a) Déterminer la forme complexe de la rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) préciser l'image par r du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

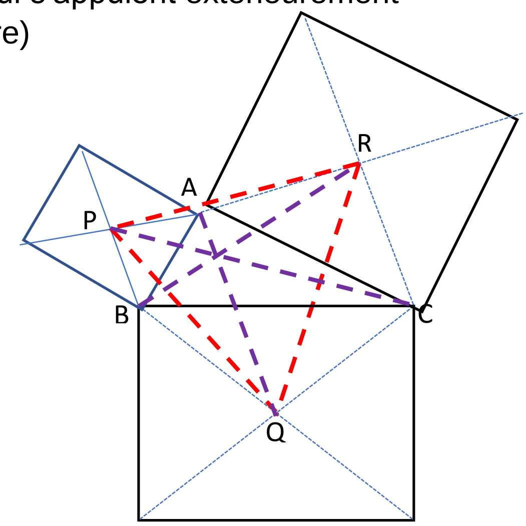
2) Soit t la transformation qui à tout M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - i\sqrt{3}$

a) Caractériser la transformation t.
b) Donner la forme complexe de $s = tor$
c) Déterminer la nature et éléments caractéristiques de s.

<u>EXERCICE 13</u>

On considère un triangle ABC de sens direct.

On construit trois carrés de centres respectifs P, Q et R qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB], [BC]$ et $[CA]$ du triangle ABC.(voir figure)



On note a, b, c, p, q et r les affixes respectives

Des points A, B, C, P, Q et R dans le repère

orthonormée ($o, \vec{e_1}, \vec{e_2}$) de sens direct.

1) démontrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.

2) a) démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$,

on a : $p = \frac{a+ib}{1-i}$

Etablir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.

3) a) Démontrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires.

b) En déduire que les droites $(AQ), (BR)$ et (CP) sont concourantes.

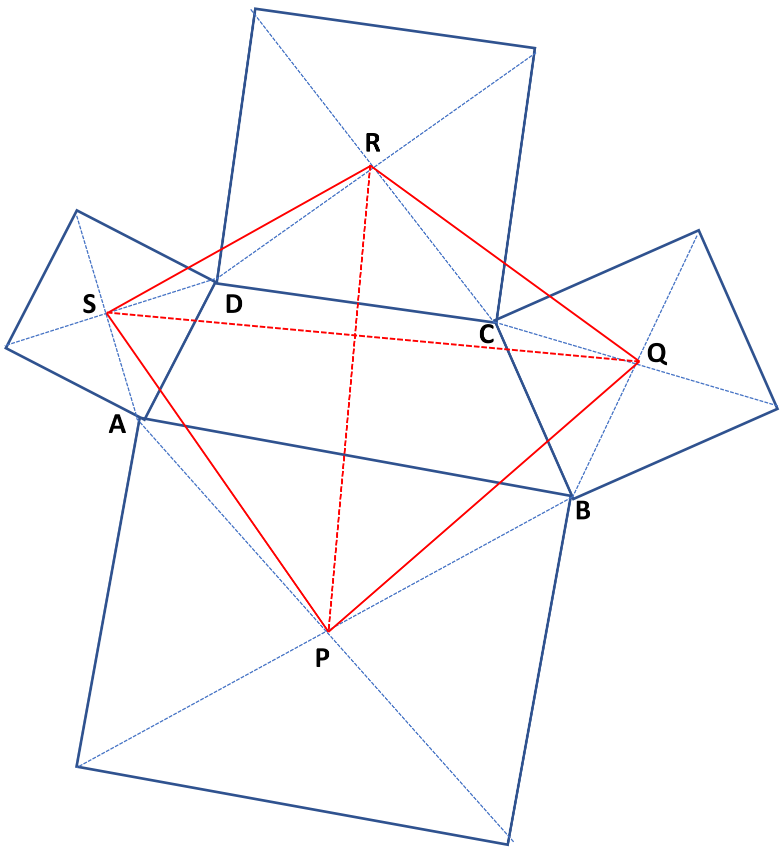
Information : ce point de concours s'appelle " $point\ de\ Vecten$ " du triangle ABC.

EXERCICE 14

On considère un quadrilatère $ABCD$de sens direct.

On construit quatre carrés de centre de centres respectifs $P, Q, R\ et\ S$ qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB], [BC], [CD] et\ [DA]$ du quadrilatère $ABCD$. (Voir figure)

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont perpendiculaires.



On note $a, b, c, d, p, q, r\ et\ s$ les affixes respectives des points $A, B, C, D, P, Q, R\ et\ S$ dans un repère orthonormé ($o, \vec{e_1}, \vec{e_2}$) de sens direct.

1) Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a : $p = \frac{a+ib}{1-i}$

Etablir des relations analogues pour $q, r\ et\ s$ en raisonnant dans les trois autres carrés.

2) Calculer $\frac{s-q}{r-p}$. $Conclure$.

EXERCICE 15

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct ($o, \vec{u}, \vec{v}$) d'unité graphique $2\ cm$.

On considère les points $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives $\boldsymbol{z_A = -2i}$, $\boldsymbol{z_B = -\sqrt{3} + i}$ **et** $\boldsymbol{z_C = \sqrt{3} + i}$.
1) a) Ecrire $\boldsymbol{z_A}$, $\boldsymbol{z_B}$ **et** $\boldsymbol{z_C}$ **sous forme exponentielle.**

b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2) a) Ecrire le quotient $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3) On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ $radiant$.

a) Montrer que le point O', image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{\mathbf{3}} - \boldsymbol{i}$.

b) Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c) Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation.

d) Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en $A et$ B.

4) a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $|z| = |z + \sqrt{3} + i|$.

b) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 16

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $\boldsymbol{z_A = \frac{3}{2} + 6i}$, $\boldsymbol{z_B = \frac{3}{2} - 6i}$ $\boldsymbol{z_C = -3 - \frac{1}{4}i}$ **et** $\boldsymbol{z_p = 3 + 2i}$**, et le vecteur** $\vec{\boldsymbol{w}}$ **d'affixe** $\boldsymbol{z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i}$**.**

- **a. Déterminer l'affixe $\boldsymbol{z_Q}$ du point $\boldsymbol{Q}$, image du point $\boldsymbol{B}$ par la translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{w}}$.**
- b. Déterminer **l'affixe $\boldsymbol{z_R}$ du point $\boldsymbol{R}$, image du point $\boldsymbol{P}$ par l'homothetie $\boldsymbol{h}$ de centre $\boldsymbol{C}$ et de rapport $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$.**
- c. Déterminer **l'affixe $\boldsymbol{z_S}$ du point $\boldsymbol{S}$, image du point $\boldsymbol{P}$ par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre $\boldsymbol{A}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.**
- d. Placer les points P, Q, R et S.

3) a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

b) Calculer $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$. **En déduire la nature précise du parallelogramme $\boldsymbol{PQRS}$.**

c) Justifier que les points P, Q, R et S sont cocycliques à un cercle noté $\mathcal{C}$.
On calculera l'affixe de son centre $\boldsymbol{\Omega}$ et son rayon ρ.

4) La droite $(\boldsymbol{AP})$ est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

EXERCICE 17

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On note $\boldsymbol{z_n}$ la suite de nombres complexes, de terme initial $\boldsymbol{z_0 = 0}$, et telle que :
$\boldsymbol{z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1}$, pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on note $\boldsymbol{A_n}$ le point d'affixe $\boldsymbol{z_n}$.

1. Calculer les affixes des points $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ **et** $\boldsymbol{A_3}$. Placer ces points dans le plan muni du repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

2.a) Montrer que le point $\boldsymbol{A_{n+1}}$ est l'image du point $\boldsymbol{A_n}$ par une similitude directe s, dont on définira le rapport, l'angle et le centre , d'affixe $\vec{\boldsymbol{w}}$.

b) Démontrer que le triangle $\Omega \boldsymbol{A_n} \boldsymbol{A_{n+1}}$ est isocèle rectangle.

3.a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $\Omega \boldsymbol{A_n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$.

b) À partir de quelle valeur de n les points An sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre et de rayon 0,001 ?

4.) Pour tout entier naturel n, on note $\boldsymbol{a_n}$ la longueur $\boldsymbol{A_n A_{n+1}}$ et $\boldsymbol{L_n}$ la somme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k.$$

$\boldsymbol{L_n}$ est ainsi la longueur de la ligne polygonal $A_0A_1 \ldots \boldsymbol{A_n A_{n+1}}$.

Déterminer la limite de $\boldsymbol{L_n}$ quand n tend vers $+\infty$.

5.) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points $\boldsymbol{A_n}$, $\boldsymbol{\Omega}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{A_{n+4}}$ sont alignés.

EXERCICE 18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
   a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.
   b. Calculer les distances OA, OB, OC. En déduire la nature du triangle $\boldsymbol{OAB}$.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(0;\ -1), (\mathrm{D};\ +1), (\mathrm{B};\ +1)$.
   a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $\boldsymbol{g = 4\sqrt{3} + 6i}$
   b. Placer les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et G sur une figure.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
   d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 19

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points
   - A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$
   - B d'affixe $b + i$, $b \in \mathbb{R}$
   - C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

   a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $(o, \vec{v})$.
   b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.
2. Dans cette question, on pose a$a = \sqrt{3}$ et $\boldsymbol{b = 0}$. On considère les points C d'affixe $c = i$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.
   a. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   b. Calculer le quotient $\boldsymbol{\frac{d-a}{c-a}}$;que peut-on déduire pour le triangle ACD ?
   c. Déterminer l'affixe du point E image de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   e. Déterminer la nature du triangle BEF.

EXERCICE 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$. On note r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O. On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère $CDGH$ est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O. On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$.
   On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3. a. Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

   b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

EXERCICE 21

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique $2\ cm$.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C).
3. Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$.
   a) Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.
   b) En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.
4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right)$.
   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
   b. Soit K le point d'affixe $z_k = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat.

EXERCICE 22

ABC est un triangle de sens direct.
DBA est un triangle isocèle et rectangle en D de sens direct.
ACE est un triangle isocèle et rectangle en E de sens direct.
On construit le point L tel que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

1) Faire une figure.
2) Démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E de sens direct.

EXERCICE 23

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm)
On appelle A,B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 1$ et $c = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On note I le milieu de $[A'B]$, J celui de $[B'C]$, K celui de $[C'A]$.
On considère l'application f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M'd'affixe z' tel que
$z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$

1. a) Déterminer les affixes a', b' et c' des points A',B',C' images des points A,B et C par f.
   b) Déterminer les affixes des points I, J et K.
2. Calculer les affixes des vecteurs : $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{KJ}$.
3. Montrer que le triangle IJK est équilatéral.
4. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z - 2i| = 2$.
   a) Déterminer et construire l'ensemble (E).
   b) Déterminer et construire l'image (E') de (E) par l'application f.
   c) Donner une équation cartésienne de (E').

EXERCICE 24

Soient A et B les points d'affixes respectives a = 1 et b = -1. Soit f l'application de P\{B} dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1) a) Déterminer et construire l'ensemble A des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.
   b) Déterminer et construire l'ensemble A' des points M d'affixe z tel que z' soit un imaginaire pur.
   c) Déterminer et construire l'ensemble D des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
2) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq -1$ on a : $(z' - 1)(z + 1) = -2$.
   b) En déduire que $AM' \times BM = 2$ et que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.
3) Montrer que si le point M appartient au cercle (Γ) de centre B et de rayon 2, alors le point M' appartient à un cercle (Γ') que l'on déterminera.
4) A tout point M(z) on associe le point N d'affixe $-\bar{z}$.
   Montrer que si le point M est distinct de B alors le point M' appartient à la demi droite $[AN)$.
5) Soit K le point d'affixe $t = -2 + i\sqrt{3}$.
   a) Ecrire t + 1 sous la forme exponentielle.

b) Montrer que le point K appartient au cercle (Γ).

6) En utilisant les questions précédentes, donner une construction du point $\mathrm{K}' = \mathrm{f}(\mathrm{K})$ et construire K'.

EXERCICE 25

Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ soient, dans le plan complexe, les sommets d'un triangle équilatéral est :

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_1 z_3 = 0$

EXERCICE 26

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. On désigne par Ω, A *et* B les points d'affixes respectives z_Ω, z_A *et* z_B telles que : $z_\Omega = 1 + i, z_A = 1$ *et* $z_B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. On note S la similitude directe de centre Ω qui transforme A *en* B.

   a) Justifie que : $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$.

   b) Déduis de 1.a) que S a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

   c) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z + 1$.

2. a) Justifie que l'affixe du point K, image du point J par la similitude directe S est : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

   b) Démontre que les points O, K *et* Ω sont alignés.

EXERCICE 27

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynome $P(z) = z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i$.

1. Montrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2 - 2i)(z^2 + 4)$.
2. Déterminer les racines carrées de $2i$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = -1 - i, z_B = -2i, z_C = 1 + i$ *et* $z_D = 2i$.

   a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   b) Tracer le parallélogramme $ABCD$.
5. Soit la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AD}$.

   a) Montrer que $z' = z + 1 + 3i$.

   b) Donner la nature et caractériser t.

   c) Calculer l'affixe du point B'image de B par la translation t.

EXERCICE 28

On considère le nombre complexe $Z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1) Calculer Z^2 puis en déduire le module et un argument de Z^2.
2) Déterminer le module et un argument de Z.
3) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$.
4) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation:

   (E) : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = 2$ puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique. (Unité 2 cm).

EXERCICE 29

Soit $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$.

1) Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ et $P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}P(z)$
2) En déduire que si z_0 est racine de P, alors il en est de même pour $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$.
3) a) Calculer. $P(1+i)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 1 - i$. On note R la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{2}$. On pose $A' = R(A)$ et on note $z_{A'}$ l'affixe de A'.
   a) Ecrire z_A *et* $z_{A'}$ sous la forme exponentielle et trigonométrique
   b) Ecrire $z_{A'}$ sous la forme algébrique
   c) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 30

1. Calculer $A = (1 - 2i)^4$.
2. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^4 = -7 + 24i$.

AL HAMDOU LIL LLAH RABBIL ALAMINE