LES NOMBRES COMPLEXES

MATHEMATIQUES

TERMINALE S

Auteur : ALLOH Yaovi Robert
Professeur de Sciences Physiques au TOGO
Email : allohyaovirobert@gmail.com

MATHEMATIQUES

COLLECTION

LA CONNAISSANCE EST UNE FORCE

©2020 La connaissance est une force.

SERIE 1 LES NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 :

Pour chaque complexe, déterminer son module :

$Z_1 = 3 + 5i$; $Z_2 = \frac{1-i}{3+2i}$; $Z_3 = (1-i)^{12}$

EXERCICE 2 :

Déterminer un argument de chaque complexe :

$Z_1 = \sqrt{3} + i$; $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $Z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

EXERCICE 3 :

On donne $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$; $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1- Déterminer un argument de z_1 , z_2 et Z

2- Donner la forme algébrique de Z.

3- En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 4 :

On donne $Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- Donner la forme algébrique de $\overline{Z}, -\overline{Z}, -Z$.

2- Donner la forme trigonométrique de $\overline{Z}$, $-\overline{Z}$, $-Z$.

3- Donner la forme exponentielle de $\overline{Z}$, $-\overline{Z}$, $-Z$.

EXERCICE 5 :

On donne $Z = \frac{1+i}{1-i}$

1- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

2- Déterminer l'argument de Z.

3-Donner la forme algébrique de Z^{2013} et Z^{1995}.

EXERCICE 6 :

On donne $Z = \frac{-16\sqrt{3}+16i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1- Donner un module de Z.

2- Déterminer un argument de Z.

3- Donner la forme trigonométrique de Z.

4- Donner la forme trigonométrique de $\overline{Z}$.

5- Donner la forme exponentielle de Z, $-Z$, $\overline{Z}$, $-\overline{Z}$, $i\overline{Z}$.

6- Déterminer les solutions de l'équation

$z^4 = \frac{-16\sqrt{3}+16i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

7- Donner la forme algébrique de

$Z' = \left(\frac{-16\sqrt{3}+16i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

EXERCICE 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$a = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $Z_0 = 6 + 6i$

On note A_0 l'image de Z_0 , pour tout entier n on désigne par A_n le point d'affixe $Z_n = a^n . Z_0$

1- Exprimer Z_1 et a^2 sous forme algébrique.

2- Ecrire Z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}$

3- Exprimer Z_3 *et* Z_7 en fonction de Z_1 *et* a^2

En déduire l'expression de Z_3 *et* Z_7 sous forme exponentielle.

EXERCICE 8 :

Soit P le polynôme défini par :

$P(z) = Z^3 - (11 + 2i)Z^2 + 2(17 + 7i)Z - 42$

1- Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation $P(Z) = 0$.

2- Déterminer $Q(Z)$ / $P(Z) = (Z - \alpha).Q(Z)$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(Z) = 0$.

EXERCICE 9 :

Soit $P(Z) = Z^3 - (1 + 2i)Z^2 + 7iZ + 3(1 - 3i)$

1- Démontrer qu'il existe un imaginaire pure $i\beta$ solution de $P(Z) = 0$.

2- Déterminer $Q(Z)/P(Z) = (Z - i\beta).Q(Z)$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l(équation $(E) : Z \in \mathbb{C}$, $P(Z) = 0$.

EXERCICE 10 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation,

$(E) : Z^3 - 6iZ^2 - 18Z + 40i = 0$

a) Démontrer que (E)admet une solution imaginaire pur Z_0 que l'on précisera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2- On considère les points A, B *et* C du plan complexe d'affixes respectives

$Z_A = 4i$, $Z_B = 3 + i$ *et* $Z_C = -3 + i$

Soit f la similitude plane directe de centre A qui transforme B *en* C.

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'écriture complexe de f.

c) En déduire la nature exacte de la similitude f ainsi que ses éléments caractéristiques.

3-On considère les transformations g et φ du plan dont les écritures complexes sont respectivement :

$Z_1 = -2Z + 12i$ et

$Z_2 = -iZ - 4 + 4i$ et on pose $S = go\varphi$

a) Déterminer l'écriture complexe de S

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 11 :

Soit l'équation

(E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$ $(z \in \mathbb{C})$

1-Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E)

2- a) Déterminer les nombres réels a et b tels que:

$$(E) \Leftrightarrow \quad z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z-\frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$Z^2 + aZ + b = 0$, puis résoudre (E)

3- Démontrer que les points images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 12 :

Soit (E) : $z^5 = 1$

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) et représenter les images des solutions

2- Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

3-Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de : $4X^2 + 2X - 1 = 0$

En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

4- Soit l'équation

(E'): $(z-1)^5 = (z+1)^5$ $\quad (z \in \mathbb{C})$

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E'), alors : $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$

En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures

b) Résoudre (E')

EXERCICE 13 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On note

$A(-1+i)$; $B\left(\frac{1}{2}i\right)$ et $C\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i\right)$.

Soit $f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i}$ et $M(z)$

1- Placer les points A, B et C

2-a) Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et $arg[f(z)]$

b) En déduire l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $|f(z)| = 2$.

Représenter (Δ)

EXERCICE 14 :

1- Exprimer $1 - \cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ puis $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$2Z^2(1-\cos 2\theta) - 2Z\sin 2\theta + 1 = 0$ où Z est l'inconnue et θ un réel non nul de l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3- Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions Z_1 et Z_2

4- On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes Z_1 et Z_2

Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que le triangle OM_1M_2 soit isocèle et rectangle en O.

EXERCICE 15 :

On désigne par α un nombre réel tel que $-\pi \le \alpha \le \pi$

1- Montrer que

$sin^2\alpha - 2(1 + cos\alpha) = -4cos^4\frac{\alpha}{2}$

2- Résoudre le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante d'inconnue z,

$z^2 - 2zsin\alpha + 2(1 + cos\alpha) = 0$

3- Calculer en fonction de α le module et l'argument de chacune des solutions de cette équation.

.

EXERCICE 16 :

1-Résoudre dans ℂ× ℂ le système : $\begin{cases} u+v=-\frac{1}{2} \\ uv \quad =-\frac{1}{4} \end{cases}$

2- On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Démontrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.

En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

3- Démontrer que : $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$

4- En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}$

5- Démontrer que : $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

6- Déduire de la question précédente que : $cos^2\frac{\pi}{5}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$, puis en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

EXERCICE 17 :

Dans le plan complexe P de repère orthonormé $(\mathrm{o},\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$

On considère les points A et B d'affixes repectives : $Z_A=-2i$ et $Z_B=-i$

Soit la fonction f: $P-\{B\}\to P$

$$M(Z)\mapsto M'(Z')/Z'=\frac{Z+2i}{1-iZ}$$

1- Déterminer l'ensembledes points invariants par f.

2-Après avoir interprèté géométriquement $|f(Z)|$ et $\mathrm{Arg}[f(Z)]$, déterminer les ensembles suivants:

(E_1) : $\{M(Z)\epsilon\,(P)/f(Z)\epsilon\,IR\}$; (E_2) : $\{M(Z)\in(P)/f(Z)\in IR_+\}$

(E_3) : $\{M(Z)\in(P)/f(Z)\in IR_-\}$; (E_4): $\{M(Z)\in(P)/f(Z)\in iIR\}$

(E_5): $\{M(Z)\in(P)/f(Z)\in iIR_-\}$; (E_6) : $\{M(Z)\in(P)/f(Z)\in iIR_+\}$

EXERCICE 18 :

Soit l'application $f(Z)=\frac{Z-2i}{Z+1}$ $définie\ \forall Z\in$ ℂ- {1}. On désigne par $A, B, Met\ M'$

Les points du plan complexe d'affixes respectives $-1,\ 2i,\ z\ et\ f(z)$

1- Calculer le module et un argument de f(i).

2- Interpréter géométriquement $|f(Z)|\ et\ Arg[f(Z)]$. Utiliser la question 2) dans le reste de l'exercice

3- Déterminer et représenter :

a) $(D)=\{M\in(P)/|f(f)|=2\}$

b) $(S)=\{M\in(P)/f(Z)=R_-\}$

c) $(C)=\{M\in(P)/f(Z)\in iR\}$

4-a) Calculer pour tout $Z\neq-1$, $|f(Z)-1|\times|Z+1|$

b- On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, montrer que M' appartient à un cercle (C') que l'on déterminera

EXERCICE 19 :

Dans un plan complexe P d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C et D D'affixes respectives $Z_A=2i$; $Z_B=i$;

$Z_C=-1+i$ $et\ Z_D=1+i$

1- Soit la fonction de $P-\{B\}$ dans P qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z'=i\left(\frac{Z-2i}{Z-i}\right)$

a) Développer (Z+1-i)(Z-1-i)

b) Calculer les points M vérifiant f(M)= M et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2- Interpréter géométriquement $|f(Z)|\ et\ Arg[f(Z)]$

3- Utiliser la question 2) pour déterminer les ensembles suivants :
$(C_1) = \{M \in (P)/|f(Z)| = 2\}$
$(C_2) = \{M \in (P)/[f(Z)]\ soit\ un\ réel\}$
$(S) = \{M \in (P)/[f(Z)]\ soit\ imaginaire\ puis\ négatif\}$
$(DC) = \{M \in (P)/[f(Z)]\ \ soit\ réel\ négatif\}$
4-a) Démontrer que $Z' - i = \frac{1}{Z-i}$ et en déduire que $|Z' - i| \times |Z - i| = 1$ pour tout complexe $Z \neq i$
b) Soit M le point du cercle (C) de centre B et de rayon 1/2 ; montrer que M' le point d'affixe Z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

EXERCICE 20 :

Soit $P(Z) = Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - (1 - 9i)Z + 6 - 2i,\ Z \in ₵.$
1- Démontrer que l'équation P(Z)=0 admet une solution réelle notée Z_1 et une solution imaginaire pure notée Z_2.
2- Résoudre dans ℂ, l'équation P(Z)=0, on notera Z_3 la troisième solution.
3- Soit A, B et C d'affixes respectives $Z_1,\ Z_2\ et\ Z_3$. Déterminer l'affixe du point D telle que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$
4- Placer les points A, B, C et D dans le plan d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
5- Calculer $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 21 :

1- On considère dans l'ensemble ℂ des nombres complexes, l'équation :
$(E) : Z \in ₵,\quad Z^4 + (-5 + 3i)Z^3 + (8 - 9i)Z^2 + (-14 + 6i)Z + 10 = 0$
a) Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E).
b) Résoudre l'équation (E).
2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, 1-3i et 3-i.
a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.
b_1) Déterminer l'écriture complexe de S.
b_2) Donner les éléments caractéristiques de S $(centre\ \Omega, rapport\ k\ et\ angle\ \alpha)$.
3- On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n (n ∈ IN) avec $Z_0 = i\ et$
$Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.
a) Calculer $\frac{Z_{n+1} - \omega}{Z_n - \omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S.
En déduire la nature du triangle $\Omega\ M_n\ M_{n+1}$
b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par la relation :
$U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.
c) Exprimer en fonction de n la longueur
$d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ \dots\ M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$, (n ≥ 2).

EXERCICE 22 :

1- Déterminer $Z_1,\ Z_2\ et\ Z_3$ sachant que
$$\begin{cases} -2Z_1 + Z_2 - 4Z_3 = -4 + 8i \\ -Z_1 + 2Z_2 + Z_3 = -8 - 2i \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 = 3 + 11i \end{cases}$$
Où $Z_1,\ Z_2\ et\ Z_3$ sont des nombres complexes.
2- Soient A, B et C trois points du plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'affixes respectives $Z_A = 3 + 3i$; $Z_B = -2 + 2i\ \ et\ \ Z_C = -1 - 3i$.

a) Faire une figure que l'on complètera par la suite.

b) Calculer $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ et en déduire la nature exacte du triangle ABC.

3- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe f qui fixe A et transforme B en C.

4-Soit I le milieu de $[AC]$ d'affixes Z_I et D l'image de I par f.

a) Déterminer Z_D l'affixe de D.

b) En déduire la nature exacte du quadrilatère ABCD.

c) En déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques et déterminer le centre du cercle (C).

d) Déterminer l'image du cercle (C) par f.

5-On construit une suite (M_n) de points du plan en posant : $\begin{cases} M_0 = S(A);\ M_1 = B;\ \ M_2 = C \\ M_{n+1} = S(M_n) \ \ \forall\, n \in N^* \end{cases}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note Z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |Z_n - Z_A|$

a) Vérifier que $Z_{n+1} - Z_A = (1+i)(Z_n - Z_A)$.

b) Monter que r_n est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer le plus grand entier naturel n_0 $tel\ que\ r_{n0} \leq 10^2$.

EXERCICE 23 :

On considère l'équation $(E) : z\ \epsilon\ ₵\, , z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.

1-a) Vérifier que i est solution de (E).

$\forall z\ \epsilon\ ₵\, , z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

c) En déduire les solutions de (E).

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par $A, B\ et\ C\ les\ points\ d'affixes\ z_A = i\ ,\ z_B = 2+3i\ \ et\ z_C = 2-3i$

a) Soit r la rotation de centre $B\ et\ d'angle \frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de $A\ par\ r$.

b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire l'existence d'une homothétie $h\ de\ centre\ B\ qui\ transforme\ A'en\ C$ et préciser son rapport.

3- On considère la transformation plane $s\ définie\ par :\ \ s = hor$

a) Quelle est l'image de $A\ par\ s$.

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de s.

EXERCICE 24 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2 cm

1- Placer les points K, L, M d'affixes respectives $Z_K = 1+i$, $Z_L = 1-i$, $Z_M = -i\sqrt{3}$. On complètera la figure dans les questions suivantes.

2-a) On appelle N le symétrique de M par rapport à L. Vérifier que l'affixe Z_N du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A.

Déterminer les affixes $Z_A\ et\ Z_C$ des points A et C.

c) La translation du vecteur d'affixe 2i transforme le point M en D et le point N en B.

Déterminer les affixes $Z_D\ et\ Z_B$ des points D et B.

3-a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$, $[AC]$.

b) Montrer que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 25 :

Dans le plan complexe de repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A=-2i,\ \ Z_B=4-2i,\ \ Z_C=4+2i\quad et\ Z_D=1$

1-a) Placer les points A, B, C et D

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2- On désigne par T l'application qui, à tout point M d'affixes z ; associe le point M' d'affixes Z' tel que

$Z'=\dfrac{z-(4+2i)}{z+2i}$

a) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $|Z'|=1$

Construire E dans le même repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

b) Montrer que pour tout complexe z distinct de -2i ; $(z'-1)(z+2i)=-4-4i$

c) Montrer que pour $M'\neq D$:

$DM'\times AM=4\sqrt{2}\ \ et\ \ Mes\,(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{DM'}})+Mes\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right)=\dfrac{5\pi}{4}$

EXERCICE 26 :

1- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3-(9+4i)Z^2+(19+20i)Z-11-16i=0$

a) Montrer que (E) admet une solution réelle a.

b) Vérifier que pour tout nombre complexe Z:

$Z^3-(9+4i)Z^2+(19+20i)Z-11-16i=(Z-1)[Z^2-(8+4i)Z+11+16i]$

c) Résoudre alors (E)

2- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $3+2i;\ 4+3i;\ \ 5+2i\ \ et\ \ 1$

a) Placer les points A, B, C et D

b) Soit E le milieu du segment $[AC]$. Calculer l'affixe du point E.

c) Montrer que A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que les points A, B, C et D sont alignés

e) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B qui transforme A en D

3- Soit $s=hor$

a) Quelle est l'image de C par s.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation s

c) Déterminer l'écriture complexe puis l'expression analytique de s

d) Déterminer l'image par J de la droite (Δ) d'équation $-x+2y=4$

EXERCICE 27 :

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ les équations :

$(E_1): Z^2-(1+7i)Z-8+11i=0$; $(E_2):\ Z^2-(7+5i)Z+15i=0$

1-a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u=24+10i$.

b) Développer : $(3-5i)^2$

2- Résoudre les équations $(E_1)\ \ et\ \ (E_1)$.

II/ Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A=2+i\,,\qquad Z_B=1+2i\,,\qquad Z_C=6+3i\ \ et\ \ Z_D=-1+6i$

1- Placer les points A, B, C et D dans le repère$(o,\vec{u},\vec{v})$.

2-a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f telle que :

$f(A)=B\ \ et\ \ f(C)=D.$

b) Montrer que f est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques.

3- Soit J le point d'affixe $Z_J = 3 + 5i$.

Montrer que la rotation r de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4- Soit I le point d'affixe $Z_I = 1 + i$; M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

En utilisant les résultats précédents, déterminer la nature du quadrilatère IMJN.

5- On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrés de sens direct.

a) Calculer les affixes Z_P et Z_Q des points P et Q.

b) Déterminer les rapports : $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP})$ et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ})$. En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g $telle$ $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

EXERCICE 28 :

Dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points B, D définis par $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle. On ferra une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

1- Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe Z_E du point E.

2- Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients a, b et 1.

3- On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F. A tout point M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z', image de M par S.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Exprimer Z' en fonction de Z.

c) Déterminer le centre I de S.

d) Déterminer les images de C et de D par S.

e) Calculer l'aire de l'image par S du rectangle ABCD.

f) Déterminer l'expression analytique de S. En déduire une équation cartésienne de l'image par S de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4-a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$.

b) Déterminer en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de (Γ) par S.

EXERCICE 29 :

1- Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système suivant : $\begin{cases} Z + Z' + 2i = 1 + 14i \\ Z.Z' + 2i(Z + Z') = -58 + 2i \\ -2iZ.Z' = 68i \end{cases}$

2- On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^3 - (1 + 14i)Z^2 - 2(29 - i)Z + 68i = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera a.

b) Soit le polynôme complexe f définie par : $f(Z) = Z^3 - (1 + 14i)Z^2 - 2(29 - i)Z + 68i$.

En utilisant la question 1), déterminer deux nombres complexes b et c tels que, pour tout nombre complexe Z, $f(Z) = (Z - a)(Z - b)(Z - c)$.

En déduire les deux autres solutions de (E). On notera b la solution dont la partie réelle est négative et c l'autre.

3- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$; on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = 2i$; $Z_B = -1 + 4i$; $Z_C = 2 + 8i$ et $Z_D = 7i$.

Soit S la similitude directe laissant invariant le point A et transformant B en C.

a) Déterminer l'application complexe associée à S.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
c) Placer les points A, B, C et D dans le repère orthonormal précédent.
d) Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 30 : (BAC D TOGO 2020)

f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (2+4i)z + 2 - 4i$.

1-a) Vérifier que $f(i) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2- On considère l'application g du plan dans le plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 1 + 2i$.

a) Soit A le point d'affixe $1+3i$. Déterminer l'affixe de A' image de A par g.

b) On note z_A l'affixe du point A et $z_{A'}$ l'affixe du point A'. Pour tout z différent de A, déterminer le nombre complexe $\frac{z'-z_{A'}}{z-z_A}$.

c) Pour tout M distinct de A, déterminer $Mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{A'M'}})$ puis $\frac{A'M'}{AM}$.

d) En déduire les éléments caractéristiques de g.

3- Montrer que pour tout M différent de A, le triangle AMM' est rectangle isocèle en M'.

EXERCICE 31 : (BAC D TOGO 2019)

I- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = -i;\ Z_B = 1 + i;\ Z_C = -1 + 2i;\ Z_D = -2$.

1- Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2-a) Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_D} = Z$.

b) Calculer le nombre complexe Z.

3- Déterminer le module et l'argument de Z puis en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

II- Soit λ un nombre complexe de module 1 différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n la suite (Z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} Z_O = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$

On note M_n le point d'affixe Z_n.

1-a) Calculer Z_1, Z_2 et Z_3.

b) Démontrer que : $\forall n \in IN^*,\ Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$.

c) En déduire que :: $\forall n \in IN, Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda - 1} i$.

2- On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$.

3- Etudier du cas $\lambda = i$.

a) Montrer que $\forall n \in IN$ et $\forall k \in IN,\ Z_k = Z_{4n+k}$.

b) Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle.

c) Déterminer les images de A, B, C et D par φ et placer dans le repère précédent ces images.

d) Montrer que $\forall n \in IN,\ Z_{4n+1} = -i$.

EXERCICE 32 : (BAC D TOGO 2018)

1-a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 + 2Z + 2 = 0$.

On désigne par Z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et par Z_2 l'autre solution.

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives Z_1, Z_3 et $Z_3 = \sqrt{3} - 1$.
Placer les points A, B, C.

c) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$.

d) En déduire la nature du triangle ABC.

2- Trouver les fonctions numériques f, deux fois dérivables telles que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$, où f' et f'' sont les dérivées première et seconde de f.

3- On considère l'équation différentielle :
(1) : $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des entiers naturels appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
On dispose de trois urnes contenant chacune 6 boules identiques numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de chaque urne et on note le numéro de la boule tirée. La première urne donne la valeur de a, la deuxième celle de b et la troisième urne la valeur de c.

a) On suppose que $b = c = 2a$. Soient les fonctions $F : x \longmapsto (A\cos x + B\sin x)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels. Justifier que les fonctions F sont solutions de l'équation (1).

b) Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) pour que F soient solutions de (1).

c) Montrer que la probabilité pour qu'on ait le triplet $(1, 2, 2)$ est égale à $\frac{1}{216}$.

4- Déterminer la probabilité pour que F soient solutions de (1).

EXERCICE 33 : [BAC D TOGO 2017]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1-a) Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2- On note $(z_n)_{n\in IN}$, la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$ et A_n, le point d'affixe z_n telle que : $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$.

a) Déterminer les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$ où $\omega = 1 + i\sqrt{3}$.

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.
Déterminer l'affixe du point A_{2017}.

3-a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

EXERCICE 34 : [BAC D TOGO 2015]

1- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$(E) : Z \in \mathbb{C}, \quad Z^4 + (-5 + 3i)Z^3 + (8 - 9i)Z^2 + (-14 + 6i)Z + 10 = 0$

a) Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives *1, i, 1-3i et 3-i*.

a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

b_1) Déterminer l'écriture complexe de S.

b_2) Donner les éléments caractéristiques de S $(centre\ \Omega, rapport\ k\ et\ angle\ \alpha)$.

3- On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n (n ∈ IN) avec $Z_0 = i\ \ et$
$Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.

a) Calculer $\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S.

En déduire la nature du triangle $\Omega\ M_n\ M_{n+1}$

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par la relation : $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.

c) Exprimer en fonction de n la longueur $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ \dots\ M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$, (n ≥ 2).

EXERCICE 35 : (BAC D TOGO 2014)

Soit l'équation (E) : $Z \in ₵,\ Z^n = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\ ,\ n \in IN^*$.

1- Déterminer les solutions Z_k de (E).

2- On pose n=5

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points-images des solutions Z_k de (E).

3- On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a) Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimer α en fonction de $\bar{J}$.

b) Montrer que α est une solution de l'équation $Z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$

4-Soit la transformation T de P dans P , d'affixes Z associe le point M' de P d'affixe Z' tels que :

$$Z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)Z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\,.$$

a) Ecrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

b) Donner la nature de T et préciser ses élément caractéristiques.

EXERCICE 36 : (BAC D TOGO 2013)

Soit a un nombre complexe.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)z^2 - 2i(a + 1)z + (i - 1)(a^2 + 1) = 0$.

2- Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a.

3- Caractériser la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2.

4- On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

EXERCICE 37 : (BAC D TOGO 2012)

On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}\,, z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$.

1-a) Vérifier que i est solution de (E).

b) Définir les nombres réels $a, b\ et\ c$ tel que :
$\forall z \in \mathbb{C}\,, z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.

c) En déduire les solutions de (E).

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par $A, B\ et\ C\ les\ points\ d'affixes\ z_A = i\ ,\ z_B = 2 + 3i\ \ et\ z_C = 2 - 3i$

a) Soit r la rotation de centre B $et\ d'angle\ \frac{\pi}{4}$.
Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de $A\ par\ r$.

b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire l'existence d'une homothétie $h\ de\ centre\ B\ qui\ transforme\ A'en\ C$ et préciser son rapport.

3- On considère la transformation plane $s\ définie\ par :\ \ s = hor$

a) Quelle est l'image de $A\ par\ s$.

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de s.

EXERCICE 38 : [BAC D TOGO 2011]

Soit $P(Z) = Z^3 + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma$ un polynôme complexe de degré 3 où $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ sont des nombres complexes donnés.

1-a) Démontrer que si le polynôme $P(Z)$ admet trois racines $a, b\ et\ c$ alors on a simultanément :
$a + b + c = -\alpha\ ; ab + bc + ac = \beta\ \ et\ \ abc = -\gamma$.

b) Former alors le polynôme $P(Z)$ lorsque ses racines sont : $a = 1 + 3i\sqrt{3}\ ; b = -2 + i\sqrt{3}\ et$
$c = 4 - 2i\sqrt{3}$.

2- On désigne par $A, B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $a, b\ et\ c$ dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

c) En déduire la valeur de $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

3-a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A, qui transforme B en C.

b) Déterminer l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par S.

EXERCICE 39 : [BAC D TOGO 2010]

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par T l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$.

1- Montrer que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif dont on donnera les éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par T.
Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'})$ en supposant $M \neq \Omega$.

2-a) Construire M' image de M par T où M est un point donné distinct de Ω.

b) Déterminer l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$. Construire (D').

3-a) Montrer qu'il existe un point B de (P) distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' (où B' est l'image de B par T) soient liés par la relation $z_0 z'_0 = 1$.
Placer B et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O. Montrer que les points $\Omega', \Omega, B\ et\ B'$ sont cocycliques.
Déterminer l'affixe du centre G du cercle (Γ) passant par $\Omega', \Omega, B\ et\ B'$.

EXERCICE 40 : [BAC D TOGO 2009]

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points : A d'affixe $a = -4$; B d'affixe $b = 4$; E d'affixe $e = 4i$; C d'affixe c et D d'affixe d tels que les quadrilatères $AOEC\ et\ BOED$ soient des carrés.

1- Placer les points précédents dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et donner les affixes des points C et D.

2- Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Préciser les points $f(A) et f(O)$. Peut-on prévoir ces résultats ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose M un point quelconque du plan distinct du point C.

c) Exprimer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de l'affixe z de M.

d) Déduire que $MM' = MC$.

e) Calculer $\frac{z-c}{z-z'}$ et montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}})$ est $\frac{\pi}{2}$.

f) Quelle est la nature du triangle $MM'C$?

EXERCICE 41 : (BAC D TOGO 2008)

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$; $Z_D = 2 + 4i$.

1- Soit S la similitude plane directe qui à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = 3iz + 13 - 9i$.

a) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

b) Quelle est l'image par S du point C ? du point D ?

c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2- Soit R la similitude plane directe qui transforme B en C et D en A.

a) Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image $R(M)$.

b) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c) Que représente le point D pour le triangle ABC ?

3- Montrer que J est un point de la droite (AB). Donner une mesure (en radian) de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 42 : (BAC D TOGO 2007)

1- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.

2- Soit K, L, M les points d'affixes respectives : $Z_K = 1 + i$, $Z_L = 1 - i$, $Z_M = -i\sqrt{3}$.

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Unité graphique $2\,cm$. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3-a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe Z_N du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A.

Déterminer les affixes Z_A et Z_C des points A et C.

c) La translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B.

Déterminer les affixes respectives Z_D et Z_B des points D et B.

4-a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

b) Montrer que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 43 : (BAC D TOGO 2006)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe 2i et P* le plan P privé de A.

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M'd'affixe $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$

1- Montrer que pour tout point M de P*, le point M' est distinct de A.

2- Démontrer que T est une bijection de P* sur lui-même. Déterminer sa réciproque T^{-1}.

3-a) Montrer qu'un point M de P* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation $z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

b) Trouver le réel α tel que $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$

c) Montrer alors que T admet deux points invariants B et C.

4- On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D*) la droite (D) privée de A. Montrer que (D*) est globalement invariant par T.

5-a) Montrer que pour $z \neq 2i$, $|Z' - 2i|.|Z - 2i| = 9$

b) Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3. Montrer que (Γ) est globalement invariant par T.

EXERCICE 44 : [BAC D TOGO 2005]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique $1\,cm$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 8$; $Z_B = 8i$; $Z_C = Z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $Z_D = Z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1- Ecrire Z_A et Z_B sous forme trigonométrique. Donner le module et un argument de Z_C et Z_D puis écrire ces nombre sous forme algébrique.

2- Montrer que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon puis tracer le cercle (C) et placer les points A, B, C et D.

3- On note Z_1 et Z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$. Montrer que $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$.

4- On note Z_3 et Z_4 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Calculer $|Z_3|$ et $|Z_4|$.

5- Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

EXERCICE 45 : [BAC D TOGO 2004]

1- On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = az + b$ $(a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C})$. A quelle condition sur a existe-t-il un élément et un seul invariant par f ?

2- f_1 et f_2 étant les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par : $f_1(z) = 2iz + 2(1 + i\sqrt{3})$ et $f_2(z) = \frac{\sqrt{3}-i}{2}z - 2i + \sqrt{3}(1 - 2i)$. Déterminer l'image de z par l'application $g = f_2 o f_1$.

Calculer le nombre complexe z_0 invariant par g.

3-a) M, M' et Ω étant les points images des nombres $z, g(z)$ et z_0 dans le plan, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M'.

b) Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle.

EXERCICE 46 : [BAC D TOGO 2003]

1- Montrer que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z = x + iy$ (où x et y sont des réels) vérifie la relation : $(2 + 3i)z + (-2 + 3i)\bar{z} - 12i = 0$ (1) est une droite (D) que l'on déterminera par une équation cartésienne et aussi par un point et un vecteur directeur. Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, l'unité graphique étant $1\,cm$.

2- Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire z_1 qui vérifie la relation (1). Calculer z_0 et z_1.

3- Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4 + \frac{4}{3}i$.

Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment $[AB]$.

4- Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation $\left|-\frac{4}{3}i - z\right| = \left|4 + \frac{4}{3}i - z\right|$.

5- Déterminer et représenter sur le graphique précédent l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un entier relatif.

EXERCICE 47 : [BAC D TOGO 2002]

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on définit la transformation F, qui, au point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = -2iz + 1 + 2i$.

1- Reconnaître F et donner ses éléments caractéristiques.

2- On considère la suite des points M_n de coordonnées (x_n, y_n) définie par récurrence de la manière suivante : le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0), est donné et différent du point $\Omega(1; 0)$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = F(M_n)$.

Exprimer x_{n+1} *et* y_{n+1} en fonction de x_n *et* y_n, soit $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point M_n. On pose $Z_n = z_n - 1$.

3- Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = -2iZ_n$. On donne d_n la distance de Ω à M_n.

4- Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Cette suite est-elle convergente ?

Exprimer d_n en fonction de n *et de* d_0 où $d_0 = \Omega M_0$.

5- Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} - z_n = Z_{n+1} - Z_n$ *et* $Z_{n+3} - Z_{n+2} = -4(Z_{n+1} - Z_n)$.

Que peut-on alors dire, en justifiant, des droites (M_nM_{n+1}) *et* $(M_{n+2}M_{n+3})$?

EXERCICE 48 : [BAC D TOGO 2001]

Soit l'application f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \longmapsto z' = (1 + i)z + 3$

M et M' désignent, dans le plan complexe P rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives Z et Z' (unité de longueur : $2\ cm$).

1- Soit le nombre complexe $a = \sqrt{2} + i$.

Calculer $f(a)$ et placer sur une figure les points A d'affixes a et A' d'affixe $f(a)$.

2- Montrer que l'équation $Z = f(Z)$ possède dans $\mathbb{C}$ une unique solution Z_O.

3- Soit K le point d'affixe $3i$.

a) Calculer $\frac{Z-Z\prime}{Z-3i}$ pour $Z \neq 3i$

b) Montrer que, pour tout point M différent de K, le triangle KMM' est un triangle rectangle isocèle dont on précisera le sommet de l'angle droit.

En déduire une construction du point M' connaissant un point M du plan. Faire cette construction.

4-a) Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan P tels que O, M *et* M' sont alignés et le cercle de diamètre $[OK]$.

b) Vérifier que le point A défini au 1- appartient à (C). Tracer (C) dans le repère précédent.

EXERCICE 49 : [BAC D TOGO 2000]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère l'application F qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = t^3z + t(t + 1)$ où t désigne un nombre complexe.

1- Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2- Déterminer l'ensemble des complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3- Caractériser F lorsque $t = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.