**Édition** : août 2018

# CHAP 1 : ARITHMETIQUE

## I/ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Cours rédigé par **OUAFEU TOKAM GUY PAULIN**

Date : 23 Août 2018

**Objectifs pédagogiques :**

A la fin de cette lecon, l'éleve doit etre capable de :

-Déterminer l'ensemble des diviseurs et des mulitiples d'un entier relatif.

-Utiliser les regles de calculs sur les congruences pour déterminer le reste de la division euclidienne.

- Utiliser les regles de calcul sur les congruences pour déterminer les criteres de divisibilité en base 10.

### 1) Relation de divisibilité :

#### a/ Définition :

**Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, on dit que $a$ est divisible par $b$ ou que $b$ est un diviseur de $a$, ou que $a$ est un multiple de $b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Cette relation entre $a$ et $b$ se note $a|b$ .**

**Exemple : $3|21$ car $21 = 7 \times 3$ , $5|5$ car $5 = 5 \times 1$**

**Remarque :** L'ensemble des diviseurs d'un entier b est noté $\mathfrak{D}(b)$ et l'ensemble des multiples d'un entier relatif $a$ est noté $a\mathbb{Z}$ .

Exemples : $2\mathbb{Z}$ = {……. ;-6 ; -4 ; -2 ;0 ; 2 ; 4 ; 6 ;……..} et $\mathfrak{D}(6)$ = {-6 ; -3 ; -2 ;-1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

Resoulvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (x-1)(y+3) =21

Comme x-1 et y+ 3 sont des entiers relatifs, il s'en suit que (x-1)| 21 et (y+3)| 21

Or $\mathfrak{D}(21)$ = {-21 ;-7 ; -3 ;-1 ; 1 ; 3 ; 7 ;21 }

D'où les systemes suivants : $\begin{cases} x-1=21 \\ y+3=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=21 \end{cases}$ ;

$\begin{cases} x-1=-21 \\ y+3=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-21 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=3 \\ y+3=7 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=7 \\ y+3=3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=-3 \\ y+3=-7 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x-1=-7 \\ y+3=-3 \end{cases}$

Donc S= {(22 ;-2) ; (2 ;19) ; (-20 ;-4) ; (0 ;-24) ; (4 ;4) ; (8 ;0) ; (22 ;-2) ; (-2 ;-10) ; (-6 ;--6)

**Activité d'apprentissage**

**Enoncé :**

Soient x , y , z et t des entiers relatifs non nuls .Répondre aux questions ci-dessous en se servant de la définition de la divisibilité.

(i)On suppose que x|y et y|x. Justifier l'existence de deux entiers relatifs $k_1$ et $k_2$ tels que $x = y\,k_1$ , $y = x\,k_2$ et $k_1\,k_2 = 1$. Puis conclure .

(ii) On suppose que t|x et t|y , Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que mx+ny=tk quels que soient m et n entiers relatifs. Puis conclure .

(iii) On suppose que x|y et z|t, Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que yt=xzk. Conclure et en déduire que $x^m|y^m$, m étant un entier naturel.

(iv) On suppose que x|y et d un entier non nul , Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que yd=xdk. Conclure .

(v) On suppose que x|y, montrer que tout multiple de y est multiple de x.

(vi) On suppose que x|y, montrer que $|x| \leq |y|$ .

**Solution de l'activité d'apprentissage :**

(i) On sait par hypothese que : ( $\mathbf{x|y} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ y = k_1 x$ ) et ( $\mathbf{y|x} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ x = k_2 y$ ) ,

d'où $y = k_1 x = k_1 k_2 y$ ; par conséquent $k_1 k_2 = 1$ car y est non nul.

Or ( ($k_1 k_2 = 1$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ) $\Leftrightarrow$ ( $k_1 = k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = -1$ ) ), donc **x = y ou x = - y .**

(ii) On sait par hypothese que ($\mathbf{t|x} \Leftrightarrow \exists$ k'' $\in \mathbb{Z}$ / x=k''t ) et ( $\mathbf{t|y} \Leftrightarrow \exists$ k' $\in \mathbb{Z}$ / y=k't ) ,

d'où mx + ny = mk''t + nk't = (mk''+nk') t. Il suffit de poser k = mk''+nk', Il s'en suit que **t|mx+ny .**

(iii) On sait par hypothese que ($\mathbf{x|y} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ y = k_1 x$ ) et ( $\mathbf{z|t} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ t = k_2 z$) ,

d'où $yt = k_1 x \, k_2 z = k_1 k_2 zx$. Il suffit de prendre $k = k_1 k_2$, il s'en suit que **xz|yt . (1)**

En particulier, Supposons x|y et montrons que $x^m|y^m$ . Procédons par recurrence ;

Soit P(m) la proposition :'' $x^m|y^m$ pour tout entier naturel m''.

Si m=1, on a x|y qui est vraie par hypothese . Soit m un entier naturel stictement supérieur à 1, supposons que P(m) est vraie et montrons que P(m+1) est aussi vraie . C'est-à-dire que $x^{m+1}|y^{m+1}$.

On sait que P(m) vraie signifie $x^m|y^m$ (2) . De plus par hypothese, x|y (3). En appliquant la proprieté montrée precedemment (1) aux relations (2) et (3) on obtient $x^m \times x | y^m \times y$ , c'est-à-dire $x^{m+1}|y^{m+1}$.

d'où P(m+1) est vraie. Donc p(m) est vraie pour tout entier naturel m.

(iv) évident

(v)Supposons x|y et montrons que x divise tout multiple de y. Soit t un multiple de y, alors il existe k élement de $\mathbb{Z}$ tel que t =ky .Puisque x|y , alors il existe k' élément de $\mathbb{Z}$ tel que y=k'x .Ainsi, t peut s'écrire t=k k'x avec kk' element de $\mathbb{Z}$ ; donc x|t.

(vi) Par hypothese , ($x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^* \ / \ y = kx$) , d'où $|y| = |k| . |x|$ . Or $|k| \geq 1$

Il s'ensuit que $|y| \geq |x|$ .

**b/ Propriétés :**

**Soient *a, b , c , d* $\in \mathbb{Z}^*$**

***P*$_1$ : *a|b et b|a* $\Leftrightarrow$ *a = b ou a = - b ;***

**P$_2$ : Si *d|a et d|b* alors pour tous entiers relatifs *u et v* , *d|(au+bv) ;***

**P$_3$ : Si *a|b et c|d* , alors *ac|bd* ;**

**P$_4$ : Si *a|b* , alors pour tout entier naturel *k* , $a^k|b^k$ ;**

**$P_5$ : Si d est un entier relatif non nul , alors $a|b \Leftrightarrow ad|bd$ ;**

**$P_6$ : Si $b|a$ , alors $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.**

**$P_7$ : Si $b|a$ alors $|b| \leq |a|$**

**Exercices d'applications :**

**Exercice 1 :**

1) $2^n$ divise- t-il $4^n$ pour tout entier $n$ ?
2) Montrer que $|n^2-1| \leq |n^4-1|$ pour tout entier relatif n.
3) Montrer que si n est impair, alors $n(n^2+3)$ est pair.
4) a. Trouver les entiers naturels strictement supérieurs à 1 dont les cubes divisent 18360.
   b. En déduire dans $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation $b^3(2b^2+2b+1)=18360$.

**Exercice 2** :

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. On pose $A=n^2-2n+2$ , $B=n^2+2n+2$

a) Factoriser $n^4+4$
b) Montrer que $A|n^4+4$ et $B|n^4+4$
c) Montrer que tout diviseur de A qui divise n divise 2.
d) Montrer que tout diviseur commun de A et B divisent $4n$

**2) Division Euclidienne**

**a/ Axiomes fondamentaux de $\mathbb{N}$ :**

Nous admettons les axiomes suivants sur la structure de l'ensemble des entiers naturels

Principe du bon ordre

-Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

-Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élement.

Principe de descente infinie :

-Toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est stationnaire à partir d'un certain rang.

**Activité d'apprentissage**

**Soit** $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On pose $Q = \{ k \in \mathbb{N} / a - bk \geq 0 \}$. On suppose dans un premier temps que $a \geq 0$

(i) Justifier que $Q$ est non vide.
(ii) Justifier que $Q$ est majoré par $a$ et qu'il admet un plus grand élément $q$.
(iii) On pose $r = a-bq$ , Justifier que $r \geq 0$ et que $r < b$ .

On suppose dans un second temps que $a < 0$ , on pose $Q' = \{ k \in \mathbb{N} / -a \geq bk \}$.D'après ce qui précède on sait qu'il existe un couple $(q,r) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tel que $-a=bq+r$ et $0 \leq r < b$.

(iv)Si $r=0$,déterminer q' et r' tel que $a=bq'+r'$ avec $0 \leq r' < b$.
(v)Si $r \geq 1$, montrer que en posant $q'=-q-1$ et $r'=b-r$ ,on peut écrire que $a=bq'+r'$ avec $0 \leq r' < b$

Soient $(q,r)$ , $(q',r') \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tels que $a=bq+r=bq'+r'$ , $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$ et $q \neq q'$
(vi)Justifier que $b \leq |r-r'| < b$ , puis en déduire une absurdité.
(vii)En déduire que $r=r'$ et $q=q'$.

**b/ Théorème :**

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a= bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. Dans cette expression a est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple : La division Euclidienne de 12839 par 2567 s'écrit par $12839 = 5\times2567 + 4$

La division Euclidienne de - 26 par 5 s'écrit par $-26 = 5\times(-6) + 4$

**Exercice d'application :** Déterminer tous les chiffres dont le reste de la division euclidienne par 2 est 4

### 3) Système de numération

**a/Définition :**

**Soit $a \in \mathbb{N}$ , $a > 1$ et $x \in \mathbb{N}^*$ . L'expression** $x = x_n a^n + x_{n-1}\, a^{n-1} + \cdots + x_2\, a^2 + x_1 a + x_0$ avec $x_n \neq 0$ , $0 \leq x_i < a$ pour tout i =0,…,n ; est l'écriture de $x$ dans le système de numération de base $a$. On note $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0}^{a}$

**Exemple :** $18 = \overline{10010}^2 = 0\times2^0 + 1\times2^1 + 0\times2^2 + 0\times2^3 + 1\times2^4$ , $35 = \overline{1022}^3$

**Remarques :**

**R1 :** l'écriture $\overline{x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0}$ ou $x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0$ est dans la base 10 ou décimale

**R2 :** En base 16 ou hexadécimale, on represente les nombres 10, 11, 12, 13 ,14 , 15 respectivement par A, B , C , D, E ; F.

**R3 :** La base 2 est appelée base binaire, elle n'utilise que des chiffres 0 et 1.

**Exercice d'application :**

i)Ecrire en base 6 le nombre 453

ii). Un nombre s'écrit 36723 dans le système décimal et $\overline{442003}^b$ en base b. Déterminer **b**

### 4) Relation de congruence :

**a/Définition (congruence modulo un entier )**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ . On dit que a est congru à b modulo n si $n|(b-a)$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a-b = kn$. On note $a \equiv b$ mod[n] ou $a \equiv b[n]$ ; se lit '' a congru à b modulo n''

**Exemple :** $6 \equiv 1$ mod[5] car $6 - 1 = 5 = 5\times1$ ; $25 \equiv 4$ mod[7] car $25 - 4 = 21 = 7\times3$ ; $6 \equiv -1$ mod[7]

**Activité d'apprentissage :**

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs, $n$ un entier naturel tels que $a \equiv b$ mod[$n$] . On désigne par $r$ , $r'$, $q$ et $q'$ respectivement les restes et quotients de $a$ et $b$ dans la division euclidienne par $n$ .

(i) Montrer que $a-b = n(q-q') + (r-r')$

(ii) En déduire que $r = r'$

**Solution :** (i) On sait par hypothèse que $a = nq+r$ et $b = nq'+r'$ ,

par conséquent $a-b = (nq+r) - (nq'+r') = nq+r - nq'-r' = n(q-q') + (r-r')$.

(ii)On sait par hypothèse que $a \equiv b$ mod[$n$] , ce qui veut dire que $a-b$ est multiple de n. Entre autres $a-b = n(q-q') + (r-r')$ traduit l'écriture de la division euclidienne de $a-b$ par $n$ à condition que $r > r'$ car $r-r' < |b|$. Sinon, considérer $b-a = n(q'-q) + (r'-r)$. Comme $a-b$ est multiple de n, $r-r' = 0$. D'où $r = r'$.

**Propriété :** Si $a \equiv b\ mod[n]$ , alors $a$ et $b$ ont le même reste dans la division euclidienne par $n$.

**Exemple :** On sait que $11 \equiv 6$ mod[5] , or le reste de la division euclidienne de 6 par 5 est 1. D' où 1 est aussi le reste de la division euclidienne de 11 par 5.

**Conséquence :** Si a ≡ b mod[n] et que $0 \leq b <$ n alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.

Ainsi les restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel n sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 …. ; n-1.

**b/ Propriétés :**

**$P_1$ :** $a \equiv a\ mod[n]$

**$P_2$ :** Si $a \equiv b\ mod[n]$ et $b \equiv c\ mod[n]$ , alors $a \equiv c\ mod[n]$

**$P_3$ :** Si $a \equiv a'\ mod[n]$ , $b \equiv b'\ mod[n]$ alors : $a+b \equiv a'+b'\ mod[n]$

**$P_4$ :** Si $a \equiv a'\ mod[n]$ , $b \equiv b'\ mod[n]$ alors : $ab \equiv a'b'\ mod[n]$

***P₅ :*** *Si $a \equiv a'$ mod[n] , $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $ka \equiv ka'$ mod[n]*
***P₆ :*** *Si $a \equiv a'$ mod[n] , $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $a^k \equiv a'^k$ mod[n]*
***P₇ :*** *$a \equiv 0$ mod[n] $\Leftrightarrow$ a est multiple de n*
***Remarque : Si*** *pgcd(k ,n)=1, alors ( $ka \equiv ka'$ mod[n]avec $k \in \mathbb{Z}^*$ ) $\Longrightarrow$ ($a \equiv a'$ mod[n] )*

**Preuve des propriétés:**

***P₁ :*** *a-a = 0* qui est un multiple de *n*. D'où le résultat

***P₂ :*** Supposons que *$a \equiv b$ mod[n] et $b \equiv c$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers ***k et k'*** tels que ***a-b=kn et b-c=k'n***
D'où *a-c = (a-b ) +(b-c) =kn +k'n =(k+k') n,* donc **a-c** est multiple de ***n* et** *$a \equiv c$ mod[n]*

***P₃ :*** Supposons que *$a \equiv a'$ mod[n] et $b \equiv b'$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers k et k' tels que ***a-a'=kn et b-b'=k'n***
*D'où a+b =a'+kn +b'+k'n =(a'+b') +(n+n')k ,* ce qui implique *(a+b) –(a'+b')* est multiple de *n*
*Donc a+b $\equiv$ a'+b' mod[n]*

***P₄ :*** *Supposons* que *$a \equiv a'$ mod[n] et $b \equiv b'$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers ***k et k' tels que a=a'+kn et b=b'+k'n***
*D'où ab = (a'+kn)(b'+k'n)=a'b'+a'k'n+knb'+kk'n²=a'b'+ n(a'k'+kb'+kk'n)*
*Donc ab $\equiv$ a'b' mod[n]*

***P₅ :*** Supposons que *$a \equiv a'$ mod[n] , soit $k \in \mathbb{Z}^*$*
Il s'en suit qu'il existe un entier ***k'*** tels que ***a-a'=k'n ,*** en multipliant cette égalité par k on obtient ***k(a-a')=kk'n ,*** Ce qui signifie ***(ka-ka')=kk'n, donc*** *ka $\equiv$ ka' mod[n]*

***P₆ :*** *Supposons que $a \equiv a'$ mod[n] , soit $k \in \mathbb{Z}^*$* et p(k) la proposition *$a^k \equiv a'^k$ mod[n]*
Pour k = 1, on a *$a \equiv a'$ mod[n]* .Ce qui est vraie par hypothèse. *Donc p(1) est vraie*
Soit k> 1. supposons que p(k) est vraie et montrons que p(k+1) est aussi vraie , c'est-à-dire que
*$a^{k+1} \equiv a'^{k+1}$ mod[n]. D'après la propriété 4, $a^k \equiv a'^k$ mod[n] et $a \equiv a'$ mod[n] impliquent que*
*$a^k \times a \equiv a'^k \times a'$ mod[n]. D'où le résultat.*

***P₇ :*** Soit *a* tel que *$a \equiv 0$ mod[n]*. Ce qui signifie qu' il existe un entier *k* tel *que a-0= kn . Donc a=kn* est un multiple de *n*

**Exercice d'application :**

(i) Trouver le reste de la division euclidienne de $17^{53}$ par 5
(ii)Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 de $2^n$ , pour *n* entier naturel
(iii) En déduire les solutions x dans ℕ de $2^n \equiv x$*-4[3]* en fonction de tout entier naturel *n.*
(iv) Résoudre dans ℤ , *$n^3 + 2n + 1 \equiv 1$ mod[4]*
(v) Soit A = $\overline{5x23}^{\,6}$ , montrer que *A $\equiv$ x - 4 [7]* . En déduire la valeur de *x* pour laquelle A est divisible par 7.

**4) Congruence et critères de divisibilités :**

**Activité d'apprentissage :**

I. Soit x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{\,a}$ tel que *a*| x
   i) Justifier l'existence d'un entier q tel que $x_0$= (q-$x_n a^{n-1} - x_{n-1}\, a^{n-2} - \cdots - x_1)\, a$
   ii) En déduire que $x_0$= 0
   iii) Réciproquement, si on suppose que $x_0$= 0 , montrer que *a*| x
   iv) En déduire la règle de divisibilité en base 10

II. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que x=$(x_n 10^{n-1} + x_{n-1}\, 10^{n-2} + \cdots + x_1)\, 10 + x_0$

ii) En déduire que x≡ $x_0$ mod[2] et x ≡ $x_0$ mod[5]

iii) Si x≡ 0 mod[2] (respectivement x≡ 0 mod[5] ) , déterminer $x_0$

III. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que x=$(x_n 10^{n-2} + x_{n-1}\, 10^{n-3} + \cdots + x_2)\, 10^2 + x_1 10 + x_0$

ii) En déduire que x ≡ $\overline{x_1 x_0}$ mod[4] et x ≡ $\overline{x_1 x_0}$ mod[25]

iii) Si x≡ 0 mod[4] (respectivement x≡ 0 mod[25] ) , déterminer $\overline{x_1 x_0}$

IV. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que pour tout entier naturel i on a $10^i \equiv 1$ mod [3] et $10^i \equiv 1$ mod [9]

ii) En déduire que x≡ $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 + x_0$ mod [3] (respectivement mod[9])

iii) Si x≡ 0 mod[3] (respectivement x≡ 0 mod[9] ) , déterminer $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 + x_0$

V. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que pour tout entier naturel p , $10^p \equiv (-1)^p$ mod [11]

ii) En déduire que x ≡ $(-1)^n x_n + (-1)^{n-1} x_{n-1} + \cdots + (-1)^2 x_2 + (-1)^1 x_1 + (-1)^0 x_0$ mod [11]

iii) En déduire que x≡ $(x_0 + x_2 + x_4 + \dots.) - (x_1 + x_3 + x_5 + \dots.)$ mod[11]

**Propriétés :**

Soit x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

**P1** : x est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si $x_0 \equiv 0$ mod[2] (respectivement $x_0 \equiv 0$ mod[5] )

**P2** : x est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si $x_1 x_0 \equiv 0$ mod[4] (respectivement $x_1 x_0 \equiv 0$ mod[25] )

**P3** : Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)

**P4** : Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme des chiffres de rang paire diminué de la somme des chiffres de rang impair est multiple de 11

**Exercice d'application :**

1/ Déterminer le reste de la division de 478987 par 4 et par 25

2/Montrer que 5296 est divisible par 4

3/Vérifier que 12475 est divisible par 25

4/ Déterminer le reste de la division de 478987 par 3.

5/ 165789 est 'il multiple de 11 ?

**Devoirs :**

1) Pour tout entier naturel *n*, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
   a/ Montrer que $A_{n+3} \equiv A_n$ *[7]*.
   b/ Déterminer l'ensemble S des entiers naturels *n* tels que $A_n \equiv 0$ *[7]*
   c/ Les nombres $x = \overline{1110}^2$ , $y = \overline{1010100}^2$ , $z = \overline{1001001000}^2$ sont'ils divisibles par 7 ?
2) a/ Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tels que $5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13.
   b/ Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ , le reste de la division euclidienne par 3 de $B = 2n^3 - n^2 + 2$.
3) Un nombre entier N = $\overline{abcca}^5 = \overline{bbab}^8$
   a/Montrer que $309a + 15c = 226b$.
   b/Montrer que $2b \equiv 0[3]$ ; en déduire b.
   c/Montrer que $3a \equiv 1[5]$ ; en déduire *a* et *c*
   d/ Ecrire N dans la base 10.

# NOMBRES COMPLEXES TERMINALE C

## INTRODUCTION

***Activité :***

Soient les équations suivantes :

$$(E_1): x^2 - 1 = 0$$
$$(E_2) x^2 + 1 = 0$$
$$(E_3) 2x^2 + 8 = 0$$

1) Résoudre dans IR si possible ces équations
2) Dans le cas où l'équation n'admet pas de solution dans IR ; supposer qu'il existe un nombre $i$ tel que $i^2 = -1$ et continuer la résolution.

***Résumé :***

Il existe un ensemble noté C appelé ensemble des nombres complexes qui possèdent les propriétés suivantes :

**P1)** C contient l'ensemble des nombres réels IR

**P2)** l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent dans l'ensemble C et les règles de calcul sont les mêmes.

**P3)** Il existe dans l'ensemble C un nombre imaginaire noté $i$ vérifiant $i^2 = -1$

**P4)** Tout nombre complexe $z$ s'écrit de façon unique $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec $a$ *et* $b$ des nombres réels. Cette écriture est appelée forme algébrique du complexe z.

***Exemple*** : $z = 4 + 2i; z = 5 + i;\ \ z = 6; z = 5i$ sont des nombres complexes.

## *I-* ETUDE ALGEBRIQUE

### 1- Forme algébrique d'un nombre complexe

***Définition 1*** **:** L'écriture $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec $a; b$IR est appelée **forme algébrique** de $z$.

**a** est appelé **partie réelle** de z et noté **Re(z)**

**b** est appelé **partie imaginaire** de z et noté **Im(z).**

1) Si **b=0 ; z=a** est dit réel ;
2) Si **a=0 z=ib** est dit imaginaire pur.
   L'ensemble des imaginaires purs est noté **iR** et l'ensemble des imaginaires purs non nul **iR**$^*$. Tous sont des sous-ensembles de C.

***Exemple :*** $\boldsymbol{z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = 2i;\ z_3 = 4}$

$\mathrm{Re}(z_1)=2 \quad \mathrm{Im}(z_1)= 3 \quad \mathrm{Re}(z_2)= 0$ etc….

- Deux nombres complexes $\boldsymbol{z = a + ib}$ et $\boldsymbol{z' = a' + ib'}$ sont égaux ssi **a=a'** et **b=b'**.
- Un nombre complexe $\boldsymbol{z = a + ib}$ est nul ssi $\boldsymbol{a = 0}$ *et* $\boldsymbol{b = 0}$.

### 2- Nombre complexe conjugué

***Définition 2*** : soit $\boldsymbol{z = a + ib}$ On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$

***Exemple*** : $z_1 = 2 + 3i\ ;\ z_2 = 4\ ;\ z_3 = 7i$

$\bar{z}_1 = 2 - 3i;\ \bar{z}_2 = 4;\ \ \bar{z}_3 = -7i$

***Propriétés*** :

***P1)*** $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$

***P2)*** $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$

***P3)*** $\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)$

***P4)*** $\mathrm{Im}(\bar{z})=-Im(z)$

***P5)*** $\bar{\bar{z}}=z$

***P6)*** $z+\bar{z}=2Re(z)$

***P7)*** $z-\bar{z}=2iIm(z)$

***P8)*** $z\in\mathrm{IR}\leftrightarrow z=\bar{z}$

***P9)*** $z\in i\mathrm{IR}\leftrightarrow z=-\bar{z}$

***P10)*** si $z\neq 0$ et $n\in\mathrm{IN}$ alors $\bar{z}^n=(\bar{z})^n$

***P11)*** si $z'\neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

***Démonstration :*** TAF

***Exemple***: Déterminer la forme conjuguée des nombres complexes suivants :

$z_1=(3+2i)^5$ $z_2=\frac{1+i}{3-4i}$ .....

## 3- Opérations dans C

***Propriétés***: soient $\boldsymbol{z=a+ib}$ et $\boldsymbol{z'=a'+ib'}$ deux nombres complexes.

$z+z'=$ = a $+ib+a'+ib'=a+a'+i(b+b')=A+iB\in C$

avec A= $a+a'\in R\ et\ B=b+b'\in R.$

$z\times z'=(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ba'+ab')=A+iB\in C$

avec A= $aa'-bb'\in R\ et\ B=ab'+ba'\in R.$

.si z≠ 0 $\frac{z'}{z}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a'+ib')(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a'a+b'b}{a^2+b^2}+i\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\in C.$

## 4- Formule de binôme de newton

***Propriétés***

Soient z, z'$\in C, n\in C,$

$(z+z')^n=C_n^0z^n+C_n^1z^{n-1}z'+C_n^2z^{n-2}z'^2+\cdots\cdots+C_n^{n-2}z^2z'^{n-2}+C_n^{n-1}$

$zz'^{n-1}+C_{nz'^n}^n=\sum_{k=0}^n C_n^k\,z^{n-k}z'^k$

Rappel : triangle de pascal

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

**Exemple :** $(z+z')^0 = 1 \ \ si\ z + z' \neq 0$; $(z + z') = z + z'$; $(z + z')^2 = 1z^2 + 2zz' + 1z'^2$; $(z + z')^3 = 1z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + 1z'^3$.

**Exercice :**

Calculer $(3-2i)^4$.

**5-Module d'un nombre complexe**

***Définition 3*** :

soit z= $a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z, le nombre reél

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exemple** : Déterminer les modules des nombres complexes suivants : z= 2 + 5i ;

$$z = 4 - 3i; z = -i; \ z = -5$$

***Propriétés*** **:** soient $(z, z') \in C^2, n \in C$.

$\boldsymbol{P_1}$) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\boldsymbol{P_2}$) si de plus $z' \neq 0$, on a $\begin{cases} \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|} \\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \end{cases}$

$\boldsymbol{P_3}$) $\forall n \in C^*, |z^n| = |z|^n$

$\boldsymbol{P_4}$) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

.$\boldsymbol{P_5}$) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

$\boldsymbol{P_6}$) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

$\boldsymbol{P_7}$) $|\overline{z \times z}| = a^2 + b^2 = |z|^2$ avec $\boldsymbol{z = a + ib}$

$\boldsymbol{P_8}$) $|Re(z)| \leq |z|, Im(z) \leq |z|$.

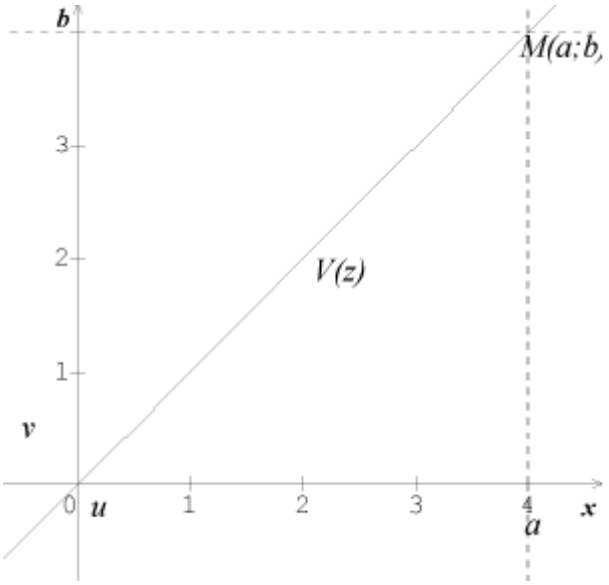
**6-Représentation graphique**

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère du plan complexe et $\boldsymbol{z = a + ib}$
un nombre compléxe, le point M(a, b)dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *est appelé point image*

Du complexe z et z est appelé affixe du point M.

Le vecteur $\vec{V}(a,b)$*est le vécteur image de* $\boldsymbol{z}$ *et* $\boldsymbol{z}$ *est appelé* $affixe$ *du vécteur* $\vec{u}$

Dans ce repère, l'axe des abscisses devient l'axe des réels, l'axe des ordonnées devient L'axe des imaginaires purs.




**Remarque :**

*si* $A(z_A)$ *et* $B(z_B)$ *alors* :

$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ $\qquad\qquad$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$

$\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB.$

## II- ETUDE TRIGONOMETRIQUE

On prendra $(O, \vec{u}, \vec{v})$ repère orthonormé direct du plan

### 1- forme trigonométrique d'un nombre complexe

***Activité :***

En notant M(z) l'affixe de z donner une mesure de chacun des angles orientés $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ *dans les cas suivants*. On les notera respectivement $\theta_1$ et $\theta_2$.

**1er cas** $z_1 = \sqrt{3} - i.$ $\qquad$ **2e cas** $z_2 = 1 + i.$

$\theta = mes(\vec{u}, \vec{v})$ $\quad cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ $et$ $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\ \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

$\theta_1$ $est\ appelé\ argument\ de\ z_1$. $\quad on\ note\ \theta_1 = argz_1$

$\theta_2$ $est\ appelé\ argument\ de\ z_2$. $\quad on\ note\ \theta_2 = argz_2$.

***Définition 4*** :

z est nombre non nul, M le point image de z dans le plan complexe. On appelle **argument de z** Toute mesure notée argz de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.L'argument de z est encore appelé **argument principal** de z.

**Exemple** : on a le tableau

| Z | 1 | I | -1 | -i | 1+i | -1+i | 1−i | -1−i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arg(z) | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ |

***Remarque*** **:** on n'attribue pas d'argument au nombre complexe 0.

2- **Détérmination pratique**

Si $z = a + ib \in C\ et\ \theta = argz\ alors\ on\ a$ :

Cos$\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$ $et$ $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$.

**Exemple** : z=1+i$\sqrt{3}$

- ✓ **Propriétés:** soit z$\in C^*$ ; $z' \in C^* et\ n \in N^*$
  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi] = -\arg(z) + 2K\pi \quad k \in Z.$
- ✓ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad k \in Z.$
- ✓ $\arg(z\times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad k \in Z.$
- ✓ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi\ avec\ k \in Z\ et\ z' \neq 0.$
- ✓ $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \quad k \in Z.$
- ✓ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi \quad k \in Z.$
- ✓ Si z$\in R^*, argz = k\pi\ (k \in Z)$
- ✓ Si z$\in iR^*, argz = \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ (k \in Z)$

***Définition 5*** **:** si $\boldsymbol{z = a + ib}$ est un nombre complexe de module $|\boldsymbol{z}|$**=r** et d'argument $\theta$; alors l'écriture $\mathbf{z=r(cos\theta + isin\theta)}$ est appelée forme trigonométrique de z. $z = [r\ ;\ \theta]$est appelée forme polaire de z.

***Remarque*** **:**

Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on procède comme suit :

Si $z = a + ib$

- on calcule $|z| = r$.
- on détermine $\theta$ à partir de $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} \\ sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

**Exemple :**

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes :

$z_1 = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

### 3- Egalité de deux nombres complexes

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls

$z=z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \; et \; \arg(z) = \arg(z') + k2\pi \;\; [k \in Z]$.

### 4- Argument d'un produit et d'un quotient

***Propriétés*** : soient $z_1 = [r_1 ; \theta_1] ; z_2 = [r_2 ; \theta_2]. \; on \; a$ :

1. $\bar{z}_1 = [r_1, -\theta_1]$
2. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [r_1, \theta_1] = [r_1, \theta_2] \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \;\; k \in Z \end{cases}$

**Théorème : (formule de Moivre)**

Pour tout nombre réels θ, pour tout entier relatif n,

$$z^n = (cos\theta + sin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta.$$

***Exemple*** : écrire 1+i sous la forme trigonométrique puis déduire $(1 + i)^{15}$ en utilisant la formule de moivre.

Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2009}$

### 5- forme exponentielle d'un nombre complexe

Dans la formule de Moivre, on remarque que l'argument se comporte comme l'éxposant. On convient à noter : $cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}$

#### a- définition et propriétés

***Définition 6*** : si $\boldsymbol{z = a + ib}$ est un complexe de module r et d'argument θ alors l'écriture $z=re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** de z.

**Exemple :** $z_1$=-1-i $z_2=1+i\sqrt{3}$

**Remarque : (conséquences)**

- Quels que soit les réels a et b on a :
  $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Et pour tout $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$,

$r_1 e^{ia} \times r_2 e^{ib} = r_1 r_2 e^{i(a+b)}$

- Quels que soient les réels a ; b $r_1$ et $r_2$ avec $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ on a :
  $\frac{r_1 e^{ia}}{r_2 e^{ib}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(a-b)}$

**b- Formule d'Euler**

$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$ ce qui conduit à :

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

De même,

$\begin{cases} \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} \\ \cos n\theta - i\sin n\theta = e^{-in\theta} \end{cases}$ ce qui conduit à :

$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ $\sin n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ (Formules d'Euler)

## 6- Nombres complexes et trigonométrie

### a) Polynôme trigonométrique

On appelle polynôme trigonométrique une somme de termes du type $\cos^p x \sin^q x$ où $p \in IN$ $q \in IN$

Exemple : $p(x) = \frac{2}{3} cosx sin^3 x + 4cos^4 x + sinx$

### b) Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Linéariser un polynôme trigonométrique revient à l'écrire sous forme d'une somme de termes du type $\cos mx$ *ou* $\sin nx$ m, n ∈IN

Pour cela on peut procéder de la manière suivante :

- On pose

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

- On développe $(e^{ix} + e^{-ix})^n$ ou $(e^{ix} - e^{-ix})^n$
- On applique les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx \\ e^{ikx} - e^{-ikx} = 2isin\ kx \\ e^{ikx} \times e^{-ikx} = 1 \end{cases}$$

***Applications :***

Linéariser $sin^5 x$ *et* $cos^4 x$

$$sin^5 x = \frac{1}{16}(sinx - 5sin3x + 10sin6x$$

$$cos^4 x = \frac{1}{8}(cos4x + 4\cos 2x + 3)$$

## III- Equations dans C

### 1- Racine carrée d'un nombre complexe

**Définition 7** : soit $Z = a + ib$ avec a$\epsilon$IR et b$\in$IR . On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe z tel que $z^2=Z$

***Exemple*** **:** 1 a pour racines carrées 1 et -1

-4 a pour racines 2i et -2i

**détermination pratique des racines carrées d'un nombre complexe**

posons z= x+iy et $Z = a + ib$

on a $z^2=Z$ équivaut à $(x+iy)^2= a+ib$

donc a $z^2=Z$ équivaut $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ |z^2| = |Z| \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

***Remarque*** **:** (1) et (3) permettent de déterminer x et y. (2) permet de déterminer les signes de x et y.

### 2- racine n$^{ième}$ d'un nombre complexe

***Définition 8*** **:** soit n un entier naturel tel que n≥2 et u un nombre complexe non nul. On appelle **racine n$^{ième}$** de u tout nombre complexe z tel que $z^n=u$.

**Détermination des racines n$^{ième}$ de u**

On sait les faire pour n≤2 par la **méthode algébrique.** Pour n>2 on utilise beaucoup plus la **méthode trigonométrique.**

**Méthode**

On pose $\boldsymbol{Z = [r, \theta]}$.

Déterminions $z = [\rho, \alpha]$ tel que $z^n = Z$. On a $z^n = [\rho^n, n\alpha]$. Ainsi $z^n = Z$ implique $\begin{cases} r = \rho^n \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{cases}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Propriétés :** Soit $re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

- $re^{i\alpha}$ admet n racines n-ième telles que $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ (k∈{0, 1,…,n-1})
- Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$

***Application :***

Résoudre dans C l'équation $Z^3 = 1$

Exercice : déterminer les racines 4$^{ieme}$ de $z_1=1$ et celles de $z_2= 4 + 4i\sqrt{3}$

### 3- Résolution d'équation dans C

#### a- Equation du premier degré

On appelle **équation du premier** degré dans C toute équation de la forme **(E) : $\boldsymbol{az + b = 0}$** avec a, b$\in C$ avec $a \neq 0$

La solution de (E) est $\frac{-b}{a}$

**Exemple :** résoudre dans C

(E) : $(1-i)z+3=-z+i$ S=$\{\frac{-7-5i}{5}\}$

**b- Equation du second degré**

On appelle **équation du second degré** dans C toute équation de la forme $(\boldsymbol{E})$ : $\boldsymbol{az^2+bz+c=O}$ où $a \in C^*$ $b,c \in C$

Pour résoudre (E), on calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

On distingue deux cas :

**1er cas :** $\Delta = 0$

(E) admet une solution double $z=\frac{-b}{2a}$ et $s=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

**2ème cas :** $\Delta \neq 0$

posons $\delta_1$ *et* $\delta_2$ les racines carrées de **:** Δ. On a alors $z_1 = \frac{-b-\delta_1}{2a}$ *et* $z_2 \frac{-b+\delta_1}{2a}$

***NB :*** on peut utiliser $\delta_2$ au lieu de $\delta_1$ et avoir le même résultat.

***Exemple :***

Résoudre dans C les équations suivantes :

(1): $z^2-2iz-2=0$ $S=\{1+i,\ -1+i\}$

(2): $2z^2+3z+2=0$ $S=\left\{\frac{-3-i\sqrt{7}}{4};\ \frac{-3+i\sqrt{7}}{4}\right\}$

(3): $(2+i)z^2-(9+2i)z+5(3-i)=0$ $S=\{3+i;1-2i\}$

**c- Equation dont la résolution se ramène à celle d'une équation du second degré**

Exercice 38, 39, 43 page 227 CIAM Tle SM

## IV- Géométrie et nombres complexes

Soit $(o,\ \vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan

### 1- Angles orientés et nombres complexes

***Définition 9*** **:** soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives $z_A; z_B; z_C; z_D$ alors :

$$mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi \ \ k \in Z$$

**Application :** On donne A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives $z_A=\sqrt{3}+2i,;\ z_B=\sqrt{3}+i\ z_C=-2i;\ z_D=1-i$

Déterminer $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$

### 2- Configuration du plan et nombres complexes

| Configuration | caractérisation | Caractérisation complexes |
|---|---|---|
| $(AB)$ *perpendiculaire* à $(CD)$ | $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ | $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A} \in iR^*$ |
| $(\boldsymbol{AB})//(\boldsymbol{CD})$ | $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=k\pi$ | $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A} \in R^*$ |
| A, B, et C alignés | $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=0+k\pi$ | $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A} \in R$ |
| ABC isocèle en A | AB=AC et $mes\ \hat{A}=\alpha$ $0<\alpha<\pi$ | $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\alpha}$ *ou* $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\alpha}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ABC équilatéral | AB=AC=BC et $mes\ \hat{A} = \frac{\pi}{3}$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}\ ou\ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| ABC rectangle en A | $mes\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\ ou\ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ |
| A, B, C et D cocycliques | $mes\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ $\equiv mes\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$ | $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$ $= arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right)[\pi]$ |

# CHAPITRE 3 : CALCUL VECTORIEL

## Lecon 1 : Généralisation des résultats Barycentriques

### 1.1 Définitions et barycentres

**Définition 1** Soit E un espace vectoriel. Un **espace affine** est un ensemble non vide E muni d'une action du groupe additif de E transitive.

**Exemple** : Une droite affine est un espace affine de dimension 1.

Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

**Définition 2 :** On appelle point pondéré d'un espace affine $\mathcal{E}$ tout couple ( A, $\alpha$) avec A $\epsilon$ $\mathcal{E}$ et $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

**Exemple 1:** On montre que l'ensemble des barycentres de deux points A et B est la droite (AB).

**Exemple 2:** On montre que l'ensemble des barycentres de trois points A, B et C est le plan (ABC).

**Définition 3** : Soit n $\epsilon \mathbb{N}$, $A_1$, $A_2$,….,$A_n$ n points $\epsilon \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \epsilon \mathbb{R}$. Le système $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$ est appelé système des points pondérés de $\mathcal{E}$. On note $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On désigne par m=$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ la masse système.

**Théorème**

•Si m=0 alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est constant

•Si m≠0 alors il existe un point G et un seul tel que

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Le point G est alors appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)$.

En particulier si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ alors G est appelé l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

***Preuve du Théorème***

•Si m=0,

Soit O un point fixe

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ qui est un vecteur indépendant de M .

•Si m≠0,

Soit G un point fixe

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$

$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ . On définit ainsi un point G tel que

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

## 1.2 Fonction vectorielle de LEIBNIZ

Définition : On appelle **fonction Vectorielle de Leibniz** associé au système des points $(A_i; \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ l'application qui à tout point M de $\varepsilon$ associe le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ tel que $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

**Exemple :** Soit (A,1), (B,-1) et (C,-1) un système de points pondérés du plan.

La fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système est :

$\longmapsto \overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

**Remarque :** Dans le cas ou m=0 , ∀ M, M′ ∈ $\varepsilon$, $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(M')}$.

La fonction vectorielle de Leibniz a les propriétés suivantes :

**<u>Théorème</u>**

Soit $(A_i; \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ un système de points pondérés de l'espace de masse m=$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

- Si m = 0 alors le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est constant
- Si m ≠ 0 , alors il existe un unique point G de l'espace vérifiant $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$. De plus, pour tout point O de l'espace, on a :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ . Cet unique point est appelé barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ .

**Proposition :**

L'espace étant muni d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). Soit $(A_i; \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$. On suppose $A_i(x_i, y_i, z_i)$ et G$(x_G, y_G, z_G)$ on a :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; \; Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \text{ et } Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

**Remarque :**

$R_1$-On ne modifie pas le barycentre d'un système en multipliant la masse de chaque point par un même nombre non nul. De façon précise ,les systèmes $(A_i; \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(A_i; k\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ (k≠ 0) ont le même barycentre.

$R_2$-On ne modifie pas le barycentre d'un système de points pondérés en remplaçant plusieurs d'entre eux par leur barycentre

**Exemple d'application :**

L'espace est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). A(3, -4, 2) ; B(1, 5, -2) et C(-4, -1, 2).

1-Calcule les coordonnées du barycentre I de (B,2) ; (C,3)

2-Calcule les coordonnées du barycentre J de (A,5) ; (B,2) et (C,3)

3-Vérifie que I est milieu de [AI]

## 1.2 Fonction scalaire de LEIBNIZ

**Activité**

On considère l'application g du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe le réel $g(M)$ défini par : $g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Soit G le barycentre des points massifs $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

1) Démontrer que $g(M) = (\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{MG}^2 + \alpha\mathrm{GA}^2 + \beta\mathrm{GB}^2 + \gamma\mathrm{GC}^2$.
2) Déterminer $g(A)$ , $g(B)$ , $g(C)$.
3) Montrer que $g(A) = (\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{GA}^2 + g(G)$ ; $g(B) = (\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{GB}^2 + g(G)$ et $g(C) = (\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{GC}^2 + g(G)$

**4)** Démontrer que $\alpha\, g(A) + \beta g(B) + \gamma g(C) = 2(\alpha+\beta+\gamma)\, g(G)$.

**5)** Déduire que

$$g(G) = \frac{\beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 + \alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

**Définition :** On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associé au système des points pondérés $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ l'application $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$

$$\mathcal{G} : M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2$$

**Proposition :** Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ alors : $\boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2}$.

**Corollaire :** Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

alors : $\boldsymbol{\mathcal{G}(G) = \dfrac{\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2+\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}}$

**Théorème**

Soit $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ un système de points pondérés de l'espace de masse m=$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

- Si m≠0 alors pour tout réel k , l'ensemble de niveau k de l'application $\boldsymbol{g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2}$ est :
  a) Dans le plan : soit le vide, soit le singleton$\{G\}$, soit un cercle de centre G
  b) Dans l'espace : soit le vide, soit le point G soit la sphère de centre G .
- Si m=0, on pose $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$
  a) Si $\vec{V} = \vec{0}$ , l'ensemble de niveau k de $g$ est soit le vide soit $\mathcal{E}$.
  b) Si $\vec{V} \neq \vec{0}$ , l'ensemble de niveau k de $g$ est :
     - Dans le plan une droite orthogonale à $\vec{V}$
     - Dans l'espace un plan orthogonal à $\vec{V}$

**Preuve du théorème**

On vérifie que dans le cas m≠ 0, ona : $g(M) = g(G) + (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)MG^2$. La relation $g(M) = k$ conduit donc à $g(G) + m\, MG^2 = k$ et on déduit que

$$MG^2 = \frac{1}{m}\big(k - g(G)\big) = \lambda$$

- ✓ Si $\lambda < 0$ alors l'ensemble cherché est le vide
- ✓ Si $\lambda = 0$ alors $M = G$ et l'ensemble cherché est$\{G\}$
- ✓ Si $\lambda > 0$ alors $MG = \sqrt{\lambda}$ l'ensemble cherché est
    - Dans le plan, le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$
    - Dans l'espace, la sphère de centre G de rayon $\sqrt{\lambda}$

**Application**

On donne dans un repère orthonormé du plan les points A et B définis par

A( 2 ;0) et B( 0 ;1). Soit la fonction M⟶ $MA^2 - MB^2$. Déterminer et construire l'ensemble de niveau 3 de cette fonction.

### 1.3 Ensemble de niveau de la fonction $\frac{MA}{MB}$

Soit A et B deux points de l'espace . On considère la fonction $M \longrightarrow \frac{MA}{MB}$. Soit k ∈ $\mathbb{R}$

On pose $E_k = \left\{M \in \mathcal{E} / \ \frac{MA}{MB} = k\right\}$

- ➢ Si $k < 0$ alors $E_k = \emptyset$.
- ➢ Si $k = 0$ alors $E_k = \{A\}$
- ➢ Si $k = 1$ , alors $E_k$ est la médiatrice de $[AB]$
- ➢ Si $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$ , on pose $G_1 = bar\{(A, 1); (B, k)\}$ et $G_2 = bar\{(A, 1); (B, -k)\}$ alors l'ensemble $E_k$ est :
    - Le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ si on est dans le plan
    - La sphère de diamètre $[G_1G_2]$ si on est dans l'espace.

**Application**

Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de l'espace tels que $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 2$ avec A(2,0) et B(0,1) dans le repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$ )

# *Leçon 2 : ORIENTATION DANS L'ESPACE*

## 2-1 Activité préparatoire

Soit (O, $\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}$) un repère de l'espace et les points I ; J et K tels que

$\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ ; $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

Pour orienter l'espace, les physiciens imaginent un observateur ayant les pieds en O, la tête en K et fixant le point I.

Dans chaque cas de figure, précise la position du point J par rapport à l'observateur.

Le principe précédent est connu sous le nom de **règle du bonhomme d' Ampère** est à la base de l'orientation de l'espace.

Orienter l'espace, c'est distinguer ces deux types de repères qu'on qualifiera l'un de repère direct et l'autre de repère indirect.

## 2.2 Résumé

**Définition** Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls du plan euclidien orienté. On pose

$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$ . On a: $(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

On a de même les propriétés suivantes ;

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv 0[2\pi]$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \pi[2\pi]$
- Soit A et B deux points distincts du plan, $\alpha$ un réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$

L'ensemble des points M du plan tels que mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[2\pi]$ est :

✓ la droite (AB) privée du segment [AB] si $\alpha = 0$

✓ le segment [AB] privé des points A et B si $\alpha = \pi$

- ✓ Un arc de cercle de diamètre [AB] si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .
- ✓ l'un des arcs de cercle d'extrémités A et B privés de A et B : Cercle dont le centre est le point O de la médiatrice de [AB] tel que l'on ait $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$

Soit R= (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) un repère de l'espace.

On dit que R est **direct** lorsqu'un observateur situé sur la demi-droite $[O; \vec{k}[$ les pieds en O et regardant dans la direction $\vec{\imath}$ a le vecteur $\vec{\jmath}$ sur sa gauche.

**Remarques:**

$R_1$ : Un repère de l'espace est dit indirect s'il n'est pas direct .

$R_2$ : Une base ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) est directe lorsque pour tout point O de l'espace le repère

(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) est direct.

### 2. 3 Propriétés

**$P_1$** Permuter deux vecteurs d'une base change son orientation. Ainsi, les bases ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et ( $\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}$) sont de sens contraires.

**$P_2$** : Permuter de façon circulaire les trois vecteurs d'une base ne change pas son orientation. Ainsi, les bases ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) , ( $\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath}$) et ($\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) sont de même sens.

**$P_3$** : Remplacer un vecteur d'une base par son opposé change son orientation. Ainsi,

- les bases ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et ( $-\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) sont de sens contraires.

- les bases ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et ( $-\vec{\imath}, -\vec{\jmath}, \vec{k}$) sont de même sens.

**Remarque**

L'espace E étant orienté, on peut définir une orientation de tout plan de l'espace E. Soit (P) un plan de E de repère ( $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) et $\vec{k}$ un vecteur normal à (P).

On convient que ( $o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) est un repère direct de (P) si (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) est un repère direct de E. Un plan est orienté par le choix d'un de ses vecteurs normaux.

**Application**

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

Préciser si les repères et bases suivants sont directs ou indirects

a) (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$)  d) ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$)

b) ($\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}$)  c) (F,$\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}$)

# Leçon 3 : PRODUIT VECTORIEL

## 3.1 Définition

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle **Produit Vectoriel** de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et définie par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \textbf{si } \vec{u} \textbf{ et } \vec{v} \textbf{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).\vec{k} \end{cases}$$

où $\vec{k}$ est un vecteur normal unitaire au plan définie par $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$

NB : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit « $\vec{\mathbf{u}}$ **vectoriel** $\vec{\mathbf{v}}$ »

## 3.2 Conséquences de la définition

**C1.** Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

**C2** . Si $\|\vec{u}\|=1 = \|\vec{v}\|$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors ( $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$) est une base orthonormée directe de l'espace.

## 3. 3 Propriétés

**P₁** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De façon précise, on a : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$.

**P₂** Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe du plan alors ( $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$) ) est une base orthonormée directe de l'espace.

**P₃** Soient $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté et k ∈ $\mathbb{R}$.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (k\vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

$P_4$ $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace.

• $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ • $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ • $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$ • $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$ • $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

### 3.4 Remarques

**$R_1$** Des points A, B et C de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, sont non alignés et définissent un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

**$R_2$** Pour étudier la position relative de deux plans $(P)$ et $(P')$, on peut déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement normaux à $(P)$ et $(P')$.

• Si $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ alors $(P) \parallel (P')$.

• Si $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$ alors $(P)$ et $(P')$ sont sécants suivant une droite dont un vecteur directeur est $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

• Si $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$ et Si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ alors $(P) \perp (P')$.

***Application***

Soit $(P) : 3x - y + z - 3 = 0$ *et* $(Q) : 2x + 3y - 3z + 2 = 0$

Démontrez que $(P)$ et $(Q)$ sont perpendiculaires et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

### 3.5 Expression analytique du produit vectoriel

#### 3.5.1 Activité

Soit $\vec{u}\ (x, y, z)$ et $\vec{v}\ (x', y', z')$ dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

Déterminez les valeurs de $\alpha, \beta$ *et* $\gamma$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$.

#### 3.5.2 Résumé

Soit $\vec{u}\ (x, y, z)$ et $\vec{v}\ (x', y', z')$ dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{\imath} + (x'z - xz')\vec{\jmath} + (y'x - yx')\vec{k}$.

Pratiquement et pour moins d'efforts de mémoire, on dispose les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la façon suivante

| $\vec{u}$ | $\vec{v}$ |
|---|---|
| x | x′ |
| y | y′ |
| y | z′ |

De sorte que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$.

### 3.5.3 Application

1) On donne $\vec{u}\ (1,1,2)$ et $\vec{v}\ (1,1,-2)$ dans une base orthonormée. Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$
2) Déterminer une équation du plan (P) défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ (3,0,-4)$ et $\overrightarrow{AC}\ (2,-1,1)$

# Leçon 4 : Applications du produit vectoriel

## 4.1 Calculs des distances

### 4.1.1 Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite de repère (A, $\vec{u}$ ) et M un point de l'espace. On a :

**d ( M, (D) )=** $\frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

**Preuve :**

Soit H le projeté orthogonal de M sur (D)

On a : $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$

car $\overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} = 0$ vu que ces deux vecteurs sont colinéaires.

Ainsi, $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u}$ = MH x $\|\vec{u}\|$x sin $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{MH}, \vec{u}}\right)$

$\Longrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|$ = MH x $\|\vec{u}\|$ $\Longrightarrow$ d ( M, (D) )= MH = $\frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

### 4.1.2 Distance d'un point à un plan

Soit ( $\mathcal{P}$)le plan de repère (A, $\vec{u}, \vec{v}$ ) et M un point de l'espace. On a :

**d ( M, ( $\mathcal{P}$))=** $\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

Preuve :

Soit K le projeté orthogonal de M sur le plan ( $\mathcal{P}$)

On a : $\overrightarrow{MK}$ est colinéaire à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ( vecteurs normaux à ( $\mathcal{P}$) ).

$|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|=|(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}).(\vec{u}\wedge\vec{v})|=|\overrightarrow{MK}.(\vec{u}\wedge\vec{v})+\overrightarrow{KA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|$

$=|\overrightarrow{MK}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|=$ MK x $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

Ainsi, **d ( M, ( $\mathcal{P}$))= MK =** $\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$**.**

## 4.2 Calcul d'aires et de volumes

**Aire d'un triangle ou de parallélogramme**

L'aire d'un triangle ABC est **A =** $\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\sin\widehat{BAC}$

Or $\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\sin\widehat{BAC}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ donc **A =** $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$**.**

De ce qui précède, •l'aire du parallélogramme ABCD est : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

• Le volume d'un tétraèdre ABCD est : $\frac{1}{6}\|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\|$**.**

**Preuve :**

ABCD est un tétraèdre si et seulement si les points A, B, C et D sont non coplanaires c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\neq 0$

Le volume de ABCD est $\frac{1}{3}$ x B x h or B= aire de ABC

et h= d( D, (ABC))= $\frac{\|\overrightarrow{AD}\wedge(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$**.**

Ainsi**, Le volume de ABCD** est $\frac{1}{3}$ x B x h = $\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{2}$ $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$x $\frac{\|\overrightarrow{AD}\wedge(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$

$=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\|$.

- Le volume d'un pavé ( parallépipède ) ABCDFGHI est : $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AF}}.(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AC}})\right|$

**<u>Application</u>**

1. Soit A $(0,3,-1)$, B $(1,4,0)$ et M ( 1,-1, 1)
   Détermine la distance du point M à la droite (AB).
2. Soit A $(0,3,-1)$, B $(1,4,0)$, C( -2,2,0) et M ( 1,-1, 1)
   Détermine la distance du point M au plan (ABC).
3. ABCDEFGH est un cube de coté 1. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ , $\overrightarrow{AE}$). On désigne par I le milieu du segment $[\![EF]\!]$ et par K le centre du carré ADHE
   a) Vérifie que $\overrightarrow{BK}$ = $\overrightarrow{\mathrm{IG}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{IA}}$
   b) En déduire l'aire du triangle IGA
   c) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (AIG)

# Table des matières


**1 LIMITES ET CONTINUITES** **2**

1.1 Limites . . . 2

1.1.1 Rappel sur les limites . . . 2

1.1.2 Opérations sur les limites . . . 2

1.1.3 Propriétés de comparaison . . . 3

1.2 Branches infinies . . . 4

1.3 Continuité . . . 4

1.3.1 Fonctions continue en un point . . . 4

1.3.2 Fonction continue sur un intervalle . . . 5

1.3.3 Calcul approché des zéros d'une fonction . . . 6

1.3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 6

1.3.4 Fonction continue strictement monotone . . . 6

# LIMITES ET CONTINUITES

## Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ☞ Savoir calculer la limite d'une fonction en levant l'indétermination.
- ☞ Savoir étudier graphiquement la continuité d'une fonction.
- ☞ Savoir et connaitre appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
- ☞ Déterminer l'image d'un intervalle en utilisant la monotonie ou le tableau de variation d'une fonction.

## 1.1 Limites

### 1.1.1 Rappel sur les limites

- ☞ On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arriver sont des parties de $\mathbb{R}$.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction $f$ est l'ensemble constitué des éléments qui ont une image par $f$.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ est l'ensemble des nombres réels qui n'annulent pas $q$.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction irrationnelle $i = \sqrt{g}$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $g(x) \geqslant 0$.
- ☞ Si $f$ et $g$ sont des fonctions numériques, alors $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$ et $D_{f\times g} = D_f \bigcap D_g$.

Exemple : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x-4}{|\,x\,|-2}$ ; $g(x) = \sqrt{4+x} + \dfrac{2}{\sqrt{4-2x}}$ ; $h(x) = \sqrt{|\,3x-2\,|-1}$ et $t(x) = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x+2}$

### 1.1.2 Opérations sur les limites

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur leur domaine, $l$ et $l'$ deux réels non nuls.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | l | l | l | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | l' | 0 | $\infty$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ | 0 | 0 |
| $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$ | l+l' | l | $\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I | $\infty$ | $\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x)$ | $l\times l'$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I | F.I | 0 |
| $\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ | F.I | F.I | F.I | 0 | $\infty$ | F.I |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \mid f(x) \mid$ | $\mid l \mid$ | $\mid l \mid$ | $\mid l \mid$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)}$ | $\sqrt{l}$ si $l\geq 0$ | $\sqrt{l}$ si $l\geq 0$ | $\sqrt{l}$ si $l\geq 0$ | | $+\infty$ | | | 0 | | 0 |

**Remarque 1.1.1 :**

- ☞ La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.
- ☞ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- ☞ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$, et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

**Exercice d'application 1.1 :**

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\tan(2x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{2x^2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x+2)$ et $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-\sqrt{x+6}}$

### 1.1.3 Propriétés de comparaison

**Propriété 1.1.1 :**

*Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions numériques d'une variable réelle admettant des limites en $x_0$*

- ☞ *Si $f\leq g$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.*
- ☞ *Si $f\leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.*
- ☞ *Si $f\leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.*
- ☞ *Si $g\leq f\leq h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.*
- ☞ *S'il existe un nombre réelle $l$ et un intervalle $[A;+\infty[$ tels que :*

  $\forall x\in[A;+\infty[, |f(x)-l|\leq g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

**Exercice d'application 1.2 :**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes positives définit par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n+4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\leq 4$.
2. Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Vérifier que $4-U_{n+1}=\frac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{3U_n+4}}$.

4. (a) Montrer que : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$.

   (b) En déduire que : $4 - U_{n+1} \leq 4(\frac{3}{4})^n$

5. Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 1.2 Branches infinies

Pour étudier les branches infinies d'une fonction numérique $f$, on procède comme suit :

On calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

☞ Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe de $f$.

☞ Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors la courbe de $f$ admet **une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de $f$ admet **une branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de $f$.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$, alors la courbe de $f$ admet **une branche parabolique de direction** celle de la droite d'équation $y = ax$.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$ n'existe pas, alors la courbe de $f$ admet une **direction asymptotique**, celle de la droite d'équation $y = ax$.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas, alors la courbe de $f$ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

**NB : On illustrera avec des figures.**

**Exercice d'application 1.3 :**

Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$.

$a)\ f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 10}$, $b)\ f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$, $c)\ f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, $d)\ f(x) = 2x + 4 + \cos(x)$.

## 1.3 Continuité

### 1.3.1 Fonctions continue en un point

**Définition 1.3.1 :**

*Soit $f$ une fonction définie sur son domaine de de définition $D_f$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*On dit que $f$ est **continue en** $x_0$ lorsque $x_0 \in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

**Propriété 1.3.1 :**

*Soit $f$ une fonction définie sur son domaine de définition $D_f$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si $f$ est continue à gauche et à droite de $x_0$.*

**Exercice d'application 1.4 :**

On considère la fonction numérique $f$ définit par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & si\, x \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si\, x < 0 \end{cases}$

Déterminer le domaine de définition de $f$ et étudier la continuité de $f$ en 0.

**Remarque 1.3.1 :**

Si une fonction $f$ n'est pas définie en $x_0$ mais admet **une limite finie** en $x_0$, alors on peut prolonger cette fonction par continuité en $x_0$.

Si $g$ est **le prolongement par continuité** de $f$ en $x_0$, alors $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$

**Exemple 1.3.1 :**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. $f$ est-elle prolongeable par continuité en 1, en -1 ? Si oui définir le prolongement par continuité $g$ de $f$.

### 1.3.2 Fonction continue sur un intervalle

**Définition 1.3.2 :**

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de son domaine de définition.*

*On dit que $f$ est continue sur $I$, lorsque $f$ est continue en tout point de $I$.*

**Propriété 1.3.2 :**

☞ *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$*

☞ *Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de son domaine de définition.*

☞ *Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.*

♠ *Les fonctions $f+g$, $kf$, $f \times g$ et $|f|$ sont continues sur $I$.*

⋯ *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur $I$.*

⋯ *Si $f$ est positive sur $I$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur $I$.*

☞ *Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.*

*Soit $f$ une fonction continue sur $I$, telle que $f(I) \subset J$ et $g$ une fonction continue sur $J$.*

*La fonction $gof$ est continue sur $I$.*

☞ *Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est soit un intervalle, soit un singleton.*

☞ *Soit $f$ une fonction numérique admettant une limite à droite de $a$ et à gauche de $b$. Alors*

⋯ *Si $f$ est **continue et strictement croissante** sur un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$, alors*

$f([a\,;b]) = [f(a)\,;f(b)]$, $f(]a\,;b]) = ]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)]$, $f([a\,;b[) = [f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$,

$f(]a\,;b[) = ]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$ *et* $f(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$.

⋯ *Si $f$ est* ***continue et strictement décroissante*** *sur un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$, alors* $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)]$, $f(]a\,;b]) = [f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$, $f([a\,;b[) = ]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)]$, $f(]a\,;b[) = ]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$ *et* $f(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$.

**Exercice d'application 1.5 :**

Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + x - 2$ $\quad I = [-2\,;3]$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ $\quad I = ]0\,;+\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

### 1.3.3 Calcul approché des zéros d'une fonction

#### 1.3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1.3.1 :**

*Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$.*

$T_1$) *Si $f$ est une fonction* ***continue*** *sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

$T_2$) *Si $f$ est une fonction* ***continue et strictement monotone*** *sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un unique nombre réel $\alpha \in [a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

**Exercice d'application 1.6 :**

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation $(E)$ admet une unique solution dans l'intervalle $I$, puis déterminer par balayage un encadrement à $10^{-1}$ près de cette solution.

1. $x^4 - 3x = 1$ $\quad I = ]1\,;2]$
2. $\cos(x) = x$ $\quad I = \mathbb{R}$

### 1.3.4 Fonction continue strictement monotone

**Rappel :**

Soit $f : A \to B$ une fonction numérique.

☞ $f$ est dite **injective** si et seulement si pour tous éléments $x_1$ et $x_2$ de $A$, on a : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

☞ $f$ est dite **surjective** si et seulement si pour tout élément $y$ de $B$, il existe au moins un élément $x$ de $A$ tel que $y = f(x)$.

☞ $f$ est dite **bijective** si et seulement si pour tout élément $y$ de $B$, il existe un unique élément $x$ de $A$ tel que $y = f(x)$.

☞ Une fonction est injective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe un ou zéro point.

☞ Une fonction est surjective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe en au moins un point.

☞ Une fonction est bijective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe en un unique point.

**Propriété 1.3.3 :**

*Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.*

☞ *$f$ réalise une bijection de $I$ vers $f(I)$.*

☞ *La bijection réciproque, notée $f^{-1}$, est continue sur l'intervalle $f(I)$.*

☞ *$f^{-1}$ est strictement monotone et a le même sens de variation que $f$.*

☞ *Les courbes de $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$)*

**Exercice d'application 1.7 :**

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction $f$ admet une bijection réciproque $f^{-1}$ et tracer sur le même graphique les courbes représentatives de $f$ et $f^{-1}$ :

1. $f(x) = x^3 \qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x - \sin(x) \qquad I = ]-3\pi\,;\,3\pi[$

# Table des matières


**1 NOMBRES PREMIERS, PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS RELATIFS 3**

1.1 NOMBRES PREMIERS . . . 3

1.2 Nombre premier . . . 4

1.2.1 Définition . . . 4

1.2.2 Critère d'arrêt ou test de primalité . . . 4

1.2.3 Infinité des nombre premiers . . . 4

1.2.4 Décomposition, diviseur d'un entier . . . 5

1.3 PPCM et PGCD de deux entiers relatifs . . . 5

1.3.1 PPCM de deux entiers relatifs . . . 5

1.3.1.1 Définition . . . 5

1.3.1.2 Propriétés . . . 6

1.4 PGCD de deux entiers relatifs . . . 6

1.4.1 Définition et propriétés . . . 6

1.4.1.1 Définition . . . 6

1.4.1.2 Propriétés . . . 7

1.4.2 Nombres premiers entre eux . . . 8

1.4.2.1 Définition et propriétés . . . 8

1.4.3 Algorithme d'Euclide . . . 8

1.5 Théorème de Bézout et théorème de Gauss . . . 9

1.5.1 Identité de Bézout . . . 9

1.5.2 Théorème de Bézout . . . 10

1.5.3 Le théorème de Gauss et son corollaire . . . 10

1.5.3.1 Théorème de GAUSS . . . 10

1.5.3.2 Corolaire du théorème de Gauss . . . 10

1.6 Le petit théorème de Fermat et son corolaire . . . 11

1.7 Equations diophantiennes . . . 11

1.7.1 Résolution des équations du types $ax + by = 0$ . . . 11

1.7.2 Résolution des équations du types $ax + by = c$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ . . . . . 11

# NOMBRES PREMIERS, PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS RELATIFS

## 1.1 NOMBRES PREMIERS

### Objectifs

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- ☞ Reconnaitre si un nombre est premier.
- ☞ Déterminer le nombre de diviseur d'un entier
- ☞ Déterminer des entiers connaissant leur PGCD et leur PPCM.
- ☞ Calculer le PGCD de deux entiers en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- ☞ Reconnaitre deux entiers premiers entre eux.
- ☞ Utiliser l'identité de Bezout pour montrer que deux entiers sont premiers entre eux et déterminer une solution particulière de l'équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.
- ☞ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ un système d'équation liant deux entiers $x$ et $y$ avec leur PGCD ou leur PPCM.
- ☞ Utiliser le théorème de Gauss pour :
- ♣ résoudre des problèmes de divisibilité ;
- ♣ résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ des équations linéaires $ax + by = c$ dont les coefficients sont des entiers.

## 1.2 Nombre premier

### 1.2.1 Définition

On dit qu'un entier naturel $p$ est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et $p$.

**Exemple 1.2.1 :**

- ♠ 2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont des nombres premiers.
- ♠ $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ et $8 = 2 \times 4$ ne sont pas des nombres premiers.

**Remarque 1.2.1 :**

- ☞ 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur positif)
- ☞ Un entier naturel non premier est parfois appelé un **nombre composé**.

### 1.2.2 Critère d'arrêt ou test de primalité

**Propriété 1.2.1 :**

*Tout entier naturel $n$ différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier.*

*Si $n$ n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier $p$ tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$*

**Preuve:**

- ☞ Si $n$ est premier, il admet un diviseur premier : lui-même.
- ☞ Si $n$ n'est pas premier, l'ensemble $D$ des diviseurs $d$ de $n$ tels que : $2 \leq d < n$ n'est pas vide.
  D'après le principe du bon ordre, $D$ admet un plus petit élément $p$.
  Si $p$ n'était pas premier, alors il admettrait un diviseur $d'$ tel que $2 \leq d' < p$ qui diviserait aussi $n$.
  Ceci contredirait la minimalité de $p$ dans $D$. Donc $p$ est premier.
- ☞ On a donc $p$ premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$ (car $p$ est le plus **petit diviseur** de $n$).
  En multipliant l'inégalité $p \leq q$ par $p$, on obtient : $p^2 \leq pq \Leftrightarrow p^2 \leq n$ d'où $2 \leq p \leq \sqrt{n}$. ■

**Remarque 1.2.2 :**

Le critère d'arrêt s'énonce encore comme suit :

"si $n$ n'admet pas de diviseur premier $p$ tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, alors $n$ est premier."

**Exercice d'application 1.1 :**

Montrer que 89 est un nombre premier.

### 1.2.3 Infinité des nombre premiers

**Propriété 1.2.2 :**

*Il existe une infinité de nombre premier*

**Preuve:**

Procédons par l'absurde

Supposons qu'il existe un nombre fini $n$ de nombres premiers : $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_i$, $\cdots$, $p_n$.

Soit $N$ un nombre entier non premier, supérieur à 2 : $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n + 1$.

D'après le critère d'arrêt, $N$ admet un diviseur premier. Soit $p_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ce diviseur premier.

$p_i$ divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n$ et $N$ donc $p_i$ divise $1 = N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n$.

Ceci est absurde car $p_i \geq 2$.

Conclusion : il existe une infinité de nombres premiers. ■

### 1.2.4 Décomposition, diviseur d'un entier

**Propriété 1.2.3 :**

- ♣ ***Théorème fondamental de l'arithmétique :***

  *Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe des nombres premiers $P_1, P_2, \cdots P_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ tels que : $n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$.*

  *Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs prêt.*

- ♣ *Soit $x$ un entier naturel se décomposant en un produit de facteurs premiers de la forme : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$. Alors le nombre de diviseur positif de $x$ est $N = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \times \cdots \times (1+\alpha_k)$*

**Preuve :** TPE (travail personnel de l'élève)

**Exercice d'application 1.2 :**

1. Décomposer 14616 en produit de facteur premier et préciser le nombre de ces diviseurs positifs.
2. Un entier naturel $n$ a 15 diviseurs. On sait de plus que $n$ est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier $n$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.
4. Dresser la liste des nombres premiers inférieur à 100.

## 1.3 PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

### 1.3.1 PPCM de deux entiers relatifs

#### 1.3.1.1 Définition

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.

L'ensemble des multiples strictement positif commun à $a$ et $b$ contient $ab$ et est donc non vide : il admet donc un plus petit élément que l'on appelle le plus petit commun multiple de $a$ et $b$. On le note $PPCM(a\,;b)$

**Remarque 1.3.1 :**

Il découle de cette définition que pour tout entier relatifs $a$ et $b$, on a

1. $PPCM(a\,;b) = PPCM(|a|\,;|b|)$.
2. $PPCM(a\,;b) = PPCM(b\,;a)$.
3. $Max(a\,;b) \leq PPCM(a\,;b) \leq ab$

#### 1.3.1.2 Propriétés

**Propriété 1.3.1 :**

$P_1$) *Soit $x$ et $y$ deux entiers naturels tels que : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$ et $y = P_1^{\beta 1} \times P_2^{\beta_2} \times \cdots \times P_k^{\beta_k}$.*
*Alors $PPCM(a\,;b) = \prod_{i=0}^{k} P_i^{max(\alpha_i\,;\beta_i)}$*

$P_2$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Alors $b \mid a \Leftrightarrow PPCM(a\,;b) = a$.*

$P_3$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif $c$, on a :*
*$(a \mid c$ et $b \mid c) \Leftrightarrow PPCM(a\,;b) \mid c$.*

$P_4$) *Soit $a$, $b$ et $k$ trois entiers naturels non nuls. Alors $PPCM(ka\,;kb) = kPPCM(a\,;b)$.*

Activité :

Soit $B$ une boîte en forme de pavé droit de hauteur $L$, à base carrée de côté $l$, où $l$ et $L$ sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$.
On veut remplir la boîte $B$ avec des cubes tous identiques dont l'arête $a$ est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte $B$ sans laisser d'espace vide).

1. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$.
   (a) Quelle est la plus grande valeur possible pour $a$ ?
   On appelle $d$ cette valeur. $d$ est appelé le PGCD de $a$ et de b.
   (b) Démontrer que tous les diviseurs de $d$ conviennent comme valeur de $a$.
   (c) Existe-t-il d'autres valeurs possibles pour $a$ ?
2. Dans cette question, le volume de la boîte $B$ est $v = 77760$. On sait que, pour remplir la boîte $B$, la plus grande valeur possible de $a$ est 12.
   On pose : $l = al'$ et $L = aL'$
   (a) Que peut-on dire de $PGCD(l'\,;L')$ si $a = 12$ ? Pourquoi ?
   (b) Vérifier, dans le cas $a = 12$, que $l'^2L' = 45$.
   (c) Montrer qu'il y a exactement deux boîtes $B$ possibles dont on donnera les dimensions.

## 1.4 PGCD de deux entiers relatifs

### 1.4.1 Définition et propriétés

#### 1.4.1.1 Définition

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.
L'ensemble des diviseurs strictement positif commun à $a$ et $b$ noté $D(a\,;b)$ contient 1 et est fini : il admet donc un plus grand élément que l'on appelle le **plus grand commun diviseur** de $a$ et $b$. On le note $PGCD(a\,;b)$.

**Exemple 1.4.1 :**

$PGCD(24\,;\,18) = 6$, $PGCD(60\,;\,84) = 12$, $PGCD(150\,;\,240) = 30$

**Remarque 1.4.1 :**

Il découle de cette définition qu'on a :

1. pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(|a|\,;\,|b|)$.
2. pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(b\,;\,a)$.
3. pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq PGCD(a\,;\,b) \leq Min(a\,;\,b)$.

### 1.4.1.2 Propriétés

**Propriété 1.4.1 :**

$P_1$) *Soit $x$ et $y$ deux entiers naturels tels que : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$ et $y = P_1^{\beta 1} \times P_2^{\beta_2} \times \cdots \times P_k^{\beta_k}$.*
*Alors $PGCD(a\,;\,b) = \prod_{i=0}^{k} P_i^{min(\alpha_i\,;\,\beta_i)}$*

$P_2$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Alors $b \mid a \Leftrightarrow PGCD(a\,;\,b) = b$.*

$P_3$) *Soit $a$, $b$ et $k$ trois entiers naturels non nuls. Alors $PGCD(ka\,;\,kb) = kPGCD(a\,;\,b)$.*

$P_4$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif $c$, on a :*
*$(c \mid a$ et $c \mid b) \Leftrightarrow c \mid PGCD(a\,;\,b)$.*

$P_5$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Alors $PGCD(a\,;\,b) \times PPCM(a\,;\,b) = ab$*

**Preuve :** TPE (travail personnel de l'élève)

**Remarque 1.4.2 :**

☞ De la propriété $P_3$), on a : $PGCD(a\,;\,1) = 1$ et $PGCD(a\,;\,a) = a$

**Exemple 1.4.2 :**

☞ $PGCD(75\,;\,0) = 75$.

☞ $PGCD(-36\,;\,-12) = PGCD(36\,;\,12) = 3$.

☞ $PGCD(72\,;\,6) = 6$ car 6 divise 72.

☞ $PGCD(720\,;\,60) = 10PGCD(72\,;\,6) = 60$.

☞ $PGCD(15\,;\,1) = 1$.

**Exercice d'application 1.3 :**

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants $(\Sigma)$ : $\begin{cases} PGCD(x\,;\,y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$ et $(\Gamma)$ : $\begin{cases} PPCM(x\,;\,y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$
2. Déterminer les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels tels que :
   $2\mu + 3\delta = 11$ avec $\mu = PPCM(a\,;\,b)$ et $\delta = PGCD(a\,;\,b)$.

### 1.4.2 Nombres premiers entre eux

#### 1.4.2.1 Définition et propriétés

**Définition 1.4.1 :**

*Deux nombres entiers relatifs sont dit premiers entre eux (où étrangers) si leur PGCD est égal à 1*

**Exemple 1.4.3 :**

1) $PGCD(9\,;4) = 1$, donc 4 et 9 sont premiers entre eux.

2) $PGCD(a\,;1) = 1$, donc 1 est premier avec tout entier.

3) Tout nombre premier p est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas.

**Attention :** Il ne faut pas confondre des nombres premiers entre eux et des nombres premiers. 4 et 9 ne sont pas premiers et pourtant ils sont premiers entre eux.

Par contre, deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

**Propriété 1.4.2 :**

$P_1$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs premiers entre eux :*

- *Tout diviseur de $a$ est premier avec $b$ ;*
- *Pour tous entier naturels $n$ et $m$, $a^n$ est premier avec $b^m$*

$P_2$) *Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls et $d$ un diviseur commun à $a$ et $b$.*

*Si $a = da'$ et $b = db'$, alors $d$ est le PGCD de $a$ et $b$ si et seulement si $a'$ et $b'$ sont premiers entre eux.*

**Preuve :** TPE (travail personnel de l'élève)

### 1.4.3 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le $PGCD$ de deux entiers naturels non nuls.

Il repose sur la propriété suivante :

**Propriété 1.4.3 :**

*Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls tels que $b$ ne divise pas $a$.*

*La suite des divisions euclidiennes suivantes finit par s'arrêter. Le dernier reste non nul est alors le PGCD de $a$ et de $b$.*

$$\begin{array}{lll}
\text{Division de } a \text{ par } b & a = bq_0 + r_0 & \text{avec } b > r_0 \geq 0 \\
\text{Division de } b \text{ par } r_0 & a = r_0q_1 + r_1 & \text{avec } r_0 > r_1 \geq 0 \\
\text{Division de } r_0 \text{ par } r_1 & r_0 = r_1q_2 + r_2 & \text{avec } r_1 > r_2 \geq 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Division de } r_{n-2} \text{ par } r_{n-1} & r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & \text{avec } r_{n-1} > r_n \geq 0 \\
\text{Division de } r_{n-1} \text{ par } r_n & r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0 &
\end{array}$$

*On a alors $PGCD(a\,;b) = r_n$.*

**Preuve:**

☞ Montrons que $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0)$

Soit $D = PGCD(a\,;b)$ et $d = PGCD(b\,;r_0)$.

$D$ divise $a$ et $b$, donc $D$ divise $r_0 = a - bq_0$, d'où $D$ divise $b$ et $r_0$ ie $D$ divise $d$. Ainsi $D \leq d$.

$d$ divise $b$ et $r_0$, donc $d$ divise $a = bq_0 + r_0$, d'où $d$ divise $a$ et $b$ ie $d$ divise $D$. Par conséquent $d \leq D$.

On déduit de ces deux inégalités que $D = d$, d'où $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0)$

☞ La suite des restes : $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n$ est une suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ car :

$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_n$.

D'après le principe de descente infinie, il existe alors $n$ tel que $r_{n+1} = 0$

☞ De proche en proche, on en déduit que :

$PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0) = \cdots = PGCD(r_{n-2}\,;r_{n-1}) = PGCD(r_{n-1}\,;r_n)$

Or $r_n$ divise $r_{n-1}$, donc $PGCD(r_{n-1}\,;r_n) = r_n$

☞ Conclusion : $PGCD(a\,;b) = r_n$. Le dernier reste non nul est le PGCD. ■

**Exemple 1.4.4 :**

♦ Calculer $PGCD(4539\,;1958)$ de deux façons différentes, puis déterminer $PPCM(4539\,;1958)$

## 1.5 Théorème de Bézout et théorème de Gauss

### 1.5.1 Identité de Bézout

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls et $D = PGCD(a\,;b)$.

Il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $au + bv = D$.

**Preuve:**

Soit $G$ l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma+nb$ où $m$ et $n$ sont des entiers relatifs.

☞ $G$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car $|a| \in G$.

En effet si $a > 0$, alors $|a| = a = 1a + 0b \in G$ et si $a < 0$, alors $|a| = -a = -1a + 0b \in G$.

D'après le principe du bon ordre, $G$ admet un plus petit élément $d$ tel que $d = au + bv$.

☞ $D = PGCD(a\,;b)$ divise $a$ et $b$, donc $D$ divise $au + bv = d$ et donc $D \leq d$.

☞ Montrons que $d$ divise $D$ (il suffira de montrer que $d$ divise $a$ et $b$).

En divisant $a$ par $d$, on a $a = dq + r$ avec $d > r \geq 0$. Ainsi, on a :

$r = a - dq = a - auq - bvq = a(1 - uq) + b(-vq)$

Si $r \neq 0$ alors $r \in G$, or $r < d$ et $d$ est le plus petit élément de $G$, ce qui est contradictoire.

Donc $r = 0$ et par conséquent $d$ divise $a$.

En procédant de la même façon, on montre que $d$ divise $b$.

$d$ divise $a$ et $b$, donc $d$ divise $D = PGCD(a\,;b)$, d'où $d \leq D$

☞ $D \leq d$ et $d \leq D$, donc $D = d$. ■

### 1.5.2 Théorème de Bézout

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.

$a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $au+bv = 1$.

Preuve : exercice

**Exemple 1.5.1 :**

Deux entiers naturels consécutifs $n$ et $n+1$ sont premiers entre eux car $(1)(n+1)+(-1)(n) = 1$.

**Exercice d'application 1.4 :**

1. Montrer que $a = 2n+1$ et $b = 3n+2$ sont premiers entre eux, $n \in \mathbb{N}$
2. Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux et $a$ et $c$ sont premiers entre eux alors $a$ et $bc$ sont premiers entre eux ($a$, $b$, $c \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que 59 et 27 sont premier entre eux, puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tel que : $59x+27y = 1$

### 1.5.3 Le théorème de Gauss et son corollaire

#### 1.5.3.1 Théorème de GAUSS

Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs non nuls.

Si $a$ divise $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a$ divise $c$.

**Preuve:**

Si $a$ divise le produit $bc$, alors il existe un entier $k$ tel que $bc = ka$.

Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que : $au+bv = 1$. En multipliant cette dernière égalité par $c$, on a :

$acu+bcv = c$, or $bc = ka$, donc $acu+kav = c$, d'où $a(cu+kv) = c$.

Ainsi, $a$ divise $c$. ■

**Exercice d'application 1.5 :**

1. Trouver tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tels que : $5(x-1) = 7y$.
2. Soit $p$ un entier naturel premier. Montrer que si $p$ divise $ab$, alors $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$.
3. Déduire de la question 2) que si pour tout entier naturel $n$, $p$ divise $a^n$, alors $p$ divise $a$.
4. Soit $n$ un entier naturel non nul. Si $a$ est premier avec $n$ et si $ab \equiv ac[n]$, alors $b \equiv c[n]$ avec $c \neq 0$.
5. Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $PPCM(a\,;b) = ab$

#### 1.5.3.2 Corolaire du théorème de Gauss

Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs non nuls.

Si $b$ et $c$ divisent $a$ et si $b$ et $c$ sont premiers entre eux, alors $bc$ divise $a$.

**Preuve:**

Si $b$ et $c$ divisent $a$, alors il existe deux entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que :

$a = kb$ $\quad$ $a = k'c$ $\quad$ donc : $\quad$ $kb = k'c$.

$b$ divise $k'c$, or $PGCD(b\,;\,c) = 1$ donc, d'après le théorème de GAUSS, $b$ divise $k'$, d'où $k' = k''b$ et par conséquent, $a = k'c = k''bc$. Ainsi, $bc$ divise $a$. ■

**Exercice d'application 1.6 :**

1) Montrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$ 2) Montrer que $n(n^6-1)$ est divisible par 42.

## 1.6 Le petit théorème de Fermat et son corolaire

**Propriété 1.6.1 :**

☞ *Le petit théorème de Fermat :*

*Si $p$ est un nombre premier et $a$ un entier naturel premier avec $p$, alors $a^{p-1}-1$ est divisible par $p$ (ie $a^{p-1} \equiv 1(p)$).*

☞ *Corolaire du petit théorème de Fermat :*

*Si $p$ est un nombre premier et $a$ un entier naturel, alors $a^p - a$ est divisible par $p$ (ie $a^p \equiv a(p)$).*

***Preuve : Exercice***

**Exercice d'application 1.7 :**

*1) Sans utiliser la calculatrice, montrer que 23 divise $(3^{11}-1)(3^{11}+1)$.*

*2) Le nombre $2^{971}-2$ est-il divisible par 971 ? (On vérifiera que 971 est un nombre premier).*

*3) Montrer que $n(n^6-1)$ est divisible par 42.*

## 1.7 Equations diophantiennes

### 1.7.1 Résolution des équations du types $ax + by = 0$

L'équation $ax + by = 0$ a pour solution $\{(-kb\,;\,ka)\ k \in \mathbb{Z}\}$ (Preuve : Exercice)

### 1.7.2 Résolution des équations du types $ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$

Méthode : Pour résoudre l'équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}$, on procède comme suit :

- ♣ Si le $PGCD(a\,;\,b)$ ne divise pas $c$, alors l'équation n'admet pas de solution.
- ♣ Si le $PGCD(a\,;\,b)$ divise $c$, alors on simplifie cette équation par le $PGCD(a\,;\,b)$, puis on cherche à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de cette équation et on utilise la propriété précédente.

  On obtient comme solution $\{(-kb+x_0\,;\,ka+y_0)\ k \in \mathbb{Z}\}$, puis l'on vérifie que les solutions trouvées vérifient bien l'équation.

**Exemple 1.7.1 :**

Déterminer l'ensemble des solutions de équations $(\Sigma)$ : $4x - 32y = 2$ et $(E)$ : $17x - 33y = 1$

**Solution:**

Comme $PGCD(4\,;\,32) = 4$ et 4 ne divise pas 2, alors l'équation $(\Sigma)$ n'admet pas de solution.

Comme 17 et 33 sont premier entre eux, alors l'équation $(E)$ admet des solutions.

Déterminons une solution particulière de $(E)$.

$17 \times 2 - 33 \times 1 = 1$, donc le couple $(2\,;\,1)$ est une solution particulière de $(E)$.

Ainsi, on a : $\begin{cases} 17x - 33y &= 1 \\ 17(2) - 33(1) &= 1 \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$17(x-2) - 33(y-1) = 0 \Leftrightarrow 17(x-2) = 33(y-1)\,(*)$

33 divise $17(x-2)$ et $PGCD(17\,;\,33) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 33 divise $x-2$.

On a donc : $x - 2 = 33k$, $k \in \mathbb{Z}$ ie $x = 33k + 2$

En remplaçant $x$ par sa valeur dans $(*)$ et en réduisant, on obtient $y = 17k + 1$.

Réciproquement, le couple $(33k+2\,;\,17k+1)$ vérifie l'équation $(E)$, donc $S = \{(33k+2\,;\,17k+1),\, k \in \mathbb{Z}\}$ .■

**Exercice d'application 1.8 :**

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $4x + 6y = 4$, $15x + 8y = 5$ et $3x + 7y = 1$

# CHAPITRE 6 : *DERIVATION, PRIMITIVES ET ETUDE DE FONCTIONS*

**Objectifs** :

Au terme de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- **Déterminer la fonction dérivée d'une fonction composée ;**
- **Etudier et construire la courbe d'une fonction ;**
- **Connaitre une primitive de chacune des fonctions usuelles**
- **Savoir déterminer une primitive d'une fonction continue**

## 6.1/ : DERIVATION

### 6.1.1/ **Définitions et propriété**

a) Définition 1 : **fonction dérivable en un point**

Soit a un élément de K. soit f une fonction définie sur K.

f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie . Dans ce cas, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se note f '(a)

NB : f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie

b) Définition 2 **: fonction dérivable sur un intervalle**

*Etant donné A ⊂ I, On dit que f* ***est dérivable sur*** *A quand elle est dérivable en tout point de A.*

*Si f est dérivable sur A, la fonction* $A \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f'(x)$ *est notée f '. C'est la* ***fonction dérivée*** *de f.*

*Exemple : la fonction f :* $x \mapsto 2x^2$ *est dérivable sur* R , et pour tout x∈ R, $f'(x)=4x$.

*En effet,soit a∈* R, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-2a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 2(x+a) = 4a$

**Proposition**:

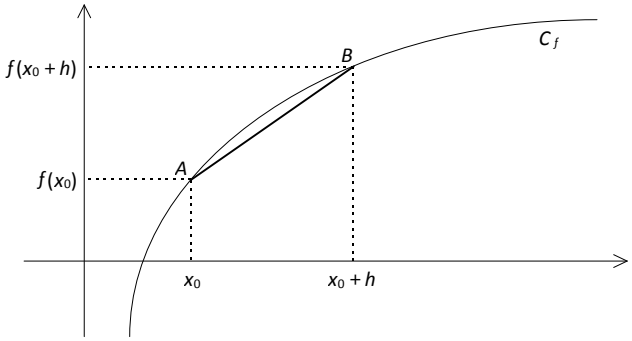
Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
Démonstration : ……

### *6.1.2* **interprétation graphique du nombre dérivé**

il représente le **coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point de $C_f$ d'abscisse $x_0$** (dans l'hypothèse où ce coefficient directeur et cette tangente existent !)

Le coefficient directeur de la sécante (*AB*) est : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Lorsque *h* tend vers 0 :




- le point *B* tend vers le point *A*
- la droite (*AB*) tend alors vers la tangente à $C_f$ en *A*
- l'accroissement moyen de *f* en $x_0$ tend vers $f'(x_0)$.

À la limite, le point *B* est en *A*, la droite (*AB*) est alors tangente à $C_f$ en *A* et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

### 6.1.3 **Approximation affine**

**Proposition :**

Soit *f* une fonction définie sur I et dérivable en a ϵI.

*1. Il existe une fonction φ telle que pour tout réel h avec a + h ϵ I :*
*f*(*a* + *h*) = *f*(*a*) + *hf'* (*a*) + *h'*(*h*) *et* $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$

*2. La fonction h→ f*(*a*) + *hf'* (*a*) *est une approximation affine de f pour h proche de 0.*

**Preuve :**

*Pour h≠* 0, *on pose φ* (*h*) = $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ - *f* '(a).

*f est dérivable en a donc lorsque h tend vers 0, φ'*(*h*) *tend vers f'* (*a*) – *f'* (*a*) = 0.
*De plus, h φ* (*h*) = *f*(*a* + *h*) - *f*(*a*) + *hf'* (*a*) *soit f*(*a* + *h*) = *f*(*a*) + *hf'* (*a*) + *h φ* (*h*)

### *6.1.3* **Dérivée à gauche et à droite**

**Définition :**

*Soit f une fonction définie en* $x_0$.
*1. On dit que f est* ***dérivable à gauche en*** $x_0$ *si f est définie sur un intervalle de la forme* ] *a*; $x_0$] *et* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite finie à gauche en* $x_0$.
*Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en* $x_0$ *et est noté f'g*(*x*0).
*2. On dit que f est* ***dérivable à droite en*** $x_0$ *si f est définie sur un intervalle de la forme* [$x_0$; *a*[ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite finie à droite en* $x_0$.
*Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en* $x_0$ *et est noté f'd*($x_0$).

**Remarque :** *Soit f une fonction et* (*Cf*) *sa courbe représentative.*
*1. Si f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en* $x_0$, *alors* (*Cf*) *admet une demi-tangente à gauche (respectivement à droite) au point d'abscisse* $x_0$, *dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f à gauche ( respectivement à droite) en* $x_0$.
*2. Si* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *admet une limite infinie à gauche ou à droite en* $x_0$, *alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente parallèle à d'axe des ordonnées au point d'abscisse* $x_0$*:*

*3. Dans le cas où la courbe (Cf) admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente à gauche et unedemi-tangente à droite de supports distincts, on dit que ce point est un point* ***anguleux****.*

**Proposition :**

*Une fonction f est dérivable en $x_0$ si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et les nombres dérivés à gauche et à droites sont égaux.*

**Exemple 1 :** soit f la fonction définie par f(x) = $\sqrt{4-x^2}$ .

Montrer que (Cf) admet une demi-tangente verticale en A, son point d'abscisse 2

**Solution** :

$\mathcal{D}$f= $[-2;2]$.

Pour répondre, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to 2^<} \frac{f(x)-f(2)}{x-(2)}$ est infinie.

$\lim\limits_{x\to 2^<} \frac{f(x)-f(2)}{x-(2)} = \lim\limits_{x\to 2^<} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^<} \frac{\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^<} \frac{\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}}{-(2-x)} = \lim\limits_{x\to 2^<} -\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} = -\infty$

( $\lim\limits_{x\to 2^<} -\sqrt{2+x} = -2$ et $\lim\limits_{x\to 2^<} \sqrt{2-x} = 0^+$ )

d'où (Cf) admet une demi-tangente verticale en A$\binom{2}{0}$

**Exemple 2** :

$f$ est la fonction définie par $f$(x)= $\begin{cases} x^2 \ , si\ x > -1 \\ \frac{-1}{x} \ , \ si\ x \leq -1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f en a= -1

**Solution :**

1) $\lim\limits_{x\to -1^<} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^<} \frac{\frac{-1}{x}-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^<} \frac{-1-x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1^<} \frac{-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^>} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^>} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^>} x-1 = -2$

comme $\lim\limits_{x\to -1^<} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim\limits_{x\to -1^>} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ , $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ n'existe pas.

$f$ n'est donc pas dérivable en a=-1

Cependant, $\lim\limits_{x\to -1^<} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ existe et est finie. On dit alors que $f$ est dérivable à gauche en a=-1 ; le nombre dérivé de $f$ par -1 est donc $f'_g$ (-1)= $\lim\limits_{x\to -1^<} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ = 1

De même, $f$ est dérivable en -1 à droite et $f'_d$ (-1)= -2

Le point A$\binom{-1}{f(-1)}$ est un point anguleux à (C$f$) car (C$f$) admet en A deux demi-tangentes distinctes

### 6.1.5 Calcul des)) dérivées

**Proposition :** ***Dérivées des fonctions élémentaires***

| $f$ | $f'$ | Ensemble de dérivabilité |
|---|---|---|
| x↦ $C$ (constante) | x↦ 0 | $\mathbb{R}$ |
| x↦ $x$ | x↦ 1 | $\mathbb{R}$ |
| x↦ $\frac{1}{x}$ | x↦ $\frac{-1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| x↦ $x^n$ ( n∈ $\mathbb{Z}^*$) | x↦n$x^{n-1}$ | $\begin{cases}\mathbb{R}\ si\ x>0\\ \mathbb{R}^*\ si\ x<0\end{cases}$ |
| x↦ $\sqrt{x}$ | x↦ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\ ;\ +\infty[$ |
| cos$x$ | -sin$x$ | $\mathbb{R}$ |
| sin$x$ | cos$x$ | $\mathbb{R}$ |
| tan$x$ | x↦ $\frac{1}{cos^2x}$ (= 1+$tan^2x$) | $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}$ |
| ln($x$) | $\frac{1}{x}$ | $]0\ ;\ +\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |

**<u>Propriété</u> :** ***Dérivées et opérations sur les fonctions***

• Si $f$ et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f$ + g est dérivable sur I et **$(f+g)'=f'+g'$.**
• Si $f$ est dérivable sur I et si λ est un réel, λ $f$ est dérivable sur I et **$(\lambda f)'=\lambda f'$.**
• Si $f$ et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f$ × g est dérivable sur I et

**$(f\times g)'=f'g+fg'$.**

• Si $f$ et g sont deux fonctionsdérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

• Si $f$ est dérivables sur I, g dérivable sur J et si pour tout x de I, $f(x)\in J$, $gof$ est dérivable sur I et **$(gof)'=f'\times g'of$.**

Cette dernière formule fournit en particulier le tableau suivant :

| **Fonction** | Dérivée | Domaine de dérivabilité |
|---|---|---|
| $f^n$, n ∈ N∗ | $nf'f^{n-1}$ | en tout réel où $f$ est dérivable |
| $\frac{1}{f}$ | $-\frac{f'}{f^2}$ | en tout réel où $f$ est dérivable et non nulle |
| $\frac{1}{f^n}$, n ∈ N∗ | $-\frac{nf'}{f^{n+1}}$ | en tout réel où $f$ est dérivable et non nulle |
| $\sqrt{f}$ | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ | en tout réel où $f$ est dérivable et strictement positive |
| $e^f$ | $f'e^f$ | en tout réel où $f$ est dérivable |

| | | |
|---|---|---|
| ln(*f*) | $\frac{f'}{f}$ | en tout réel où $f$ est dérivable et strictement positive |
| sin(*f*) | *f* 'cos(*f*) | en tout réel où $f$ est dérivable |
| cos(*f*) | - $f'$ sin(*f*) | en tout réel où $f$ est dérivable |

Exemple **:** soit *f* la fonction définie par *f*(*x*) = cos $(-2x^2 + 4x - 9)$

Montrer que *f* est dérivable sur R et calculer *f'*(x)

Solution :

On a : $f: x \overset{P}{\to} (-2x^2 + 4x - 9) \overset{cos}{\longrightarrow} \cos(-2x^2 + 4x - 9)$. P(*x*) = $(-2x^2 + 4x - 9)$

$\forall x \in R, f(x) = \cos(p(x)) = cos \text{ o } p(x)$. Ainsi *f* est derivable sur R comme composée de deux fonctions dérivables sur R et a pour dérivée :

$f'(x) = p'(x) \times \cos'(p(x))$ = (-4*x*+4)(-sin$(-2x^2 + 4x - 9)$)

$$\boldsymbol{f'(x)} \text{ = (4}\boldsymbol{x}\text{-4)(sin(-2}\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{4x} - \boldsymbol{9}))$$

**Propriété :** **(dérivée *de la bijection réciproque)***

*Soit une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I on suppose que f est strictement monotone et que f' ne s'annule pas sur I alors f est bijective, f*-1 *est une bijection de f*(*I*) *sur I, dérivable et* $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$ et $D_{(f^{-1})'} = D_{f^{-1}} \setminus \{f(x) \text{ tel que } f'(x)=0, x \in D_f\}$

**N.B** Pour déterminer facilement $(f^{-1})'(x)$, il suffit d'exprimer *f'* (*x*) en fonction de *f*(*x*).

Exemple :

Soit *f : ]-1 ;*$+\infty[ \to ]-\infty; 1[$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

1) démontrer que *f est une* bijection
2) justifier que $f^{-1}$ est dérivable en 0 et calculer alors la valeur de $(f^{-1})'(0)$
3) déterminer $f^{-1}$
4) vérifier 2) en utilisant 3)

**solution** : ….

### 6.1.6 Dérivée successive

**Propriété :**

*Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, sa dérivée f' est appelée* ***dérivée première*** *et est notée* $f^1$*.Si f' est dérivable sur I, alors sa dérivée notée f ''(ou encore* $f^2$*) est appelée dérivée seconde de f. Ainsi de suite jusqu'au rang n (n* $\in$ N*),* $f^n$ *sera appelée dérivée nième de f.*

**Exemple :** *Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par f(x) =* $\frac{2x+1}{x+1}$

*Pour x≠ -* 1 *calculer f', $f^2$; $f^3 et f^4$ . Peut-on conjecturer f(n)* $\forall n \in \mathbb{N}*$ *? si oui démontre*

*Solution :….*

### 6.1.7 Point d'inflexion

**Définition :**

*soit f une fonction numérique. On **appelle point d'inflexion** le point où la courbe de f change de concavité.*

**Propriété :**

*Soit f une fonction numérique à variable réelle et deux fois dérivable sur un intervalle I :*

1. *Si pour tout x∈ I, f''(x) < 0 alors la courbe de f est en dessous de la tangente en tout point de I. Dans ce cas, f est dite c**oncave**.*
2. *Si pour tout x∈ I, f''(x) > 0 alors la courbe de f est au dessus de la tangente en tout point de I. Dans ce cas, f est dite **convexe**.*
3. *Si pour tout x ∈I, f''(x) = 0 et f'' change de signe en* $x_0$ *alors le point d'abscisse* $x_0$ *est un point **d'inflexion** à la courbe de f.*

*Exemple 1: démontrer que la courbe représentative de la fonction f définie par f(x)=* $x^3 - 3x^2$ *+ 3x-5 admet un point d'inflexion que l'on précisera*

*Exemple 2 :*

*( Cf) est la courbe de la fonction définie sur R par f(x)=* $(1-x)^4$

1) *étudier la concavité de ( Cf)*
2) *a) écrire l'équation cartésienne de (*Δ*) , la tangente à ( Cf)en A d'abscisse 0*

c) *en déduire que pour tout x∈R,* $1 - 4x \leq (1-x)^4$

### 6.1.8 Accoisement finis

**Définition 1** *: **Extremum***

*On dit que M ∈* R *est un maximum de f si et seulement si :*

$$\begin{cases} \exists a \in D_f \text{ tel que } f(a) = M \\ \forall x \in D_f \; f(x) \leq f(a) \end{cases}$$

*(On dit aussi que f présente en a un maximum)*

*On définit de même un minimum et on parlera d'extremum lorsqu'on aura un maximum ou un minimum.*

**Définition 2** *: **Extremum local***

*On dit que M = f(a) est un extremum local (ou extremum relatif) ssi ∃r > 0 tel que la restriction de f à [a - r; a + r] ∩ Df présente en a un extremum.*

**Théorème :**

*Soit f une fonction admettant un extremum relatif en x*0 *et dérivable en* $x_0$*, alors*

$$f'(x0) = 0$$

*Démonstration…..*

**Théorème : *Caractérisation des extrema locaux***

*Soient f une fonction dérivable sur un intervalle] a; b [ et* $x_0 \in$ *]a; b[.*

*Si f' s'annule et change de signe en $x_0$, alors f admet un extremum relatif en $x_0$.*
**Preuve…**

**Propriété : *Inégalité des accroissements finis***

*Soient f une fonction dérivable sur un intervalle* $[a; b]$.*S'il existe deux réels m et M tels que pour tout* $x \in [a; b]$, $\boldsymbol{m \leq f'(x) \leq M}$ *, alors* $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$.

**Corollaire** *: **Inégalité des accroissements finis***
*Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant :*

$$\exists M \in R_+ \ \forall x \in I; \ |f'(x)| \leq M$$

*Alors :*

$$\forall a; b \in I; ; \ |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

***Preuve :***…

Exemple : f est définie sur l'intervalle]-1 ;+∞[ par f(x) = $\sqrt{1+x}$

1) donner un encadrement de f '(t) ( $t \in [0; \frac{1}{2}]$ )
2) en déduire que :

a-) $1+\frac{1}{2\sqrt{6}} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1+\frac{1}{4}$

b-) $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; 1+\frac{1}{\sqrt{6}}x \leq f(x) \leq 1+\frac{1}{2}x$

**Solution** :…

### 6.1.9 Applications de la dérivation

**Dérivée et variations**

**Proposition :**

*Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
*1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I,* $f'(x) \geq 0$.
*2. f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I,* $f'(x) = 0$.
*3. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I,* $f'(x) \leq 0$

***Preuve :***…

Exemple :

Etudier les variations de g(x)= $\frac{x^2-2}{x+1}$

**Solution** : …

## 6.2/ PRATIQUE D'ETUDE D'UNE FONCTION

### 6.2.1/ **Eléments de symétrie d'une courbe**

**Propriété** : ( centre de symétrie)

Les assertions suivantes sont équivalente :

i) Ω est le **centre de symétrie** de (Cf) ;

ii) ∀ x ∈ Df ;( 2a – x ) ∈ Df et f(2a-x) = 2b- f(x)

iii) ∀ h ∈ $R/$ (a+h) ∈ Df ; (a-h) x ∈ Df et f(a+h) + f(a-h) = 2b

iv) $Dans\ le\ repère$ $(\Omega;\vec{\imath};\vec{j})$, la courbe réprésentative de f est celle d'une fonction **impaire.**

**NB** : si M(x ;y) dans $(O;\vec{\imath};\vec{j})$ et M(X ;Y) dans $(\Omega;\vec{\imath};\vec{j})$ alors : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

**Exemple :** h est la fonction définie par h(x) =$\frac{2x-3}{x+4}$

Démontrer que $\Omega(-4;2)$ est centre de symétrie de la courbe de h.

Solution :

Il suffit de montrer que la courbe de h dans le repère ( $\Omega;\vec{\imath};\vec{j}$) est celle d'unr fonction impaire

Soit M(x ;y) dans $(O;\vec{\imath};\vec{j})$ et le couple de coordonnées (X ;Y) dans ( $\Omega;\vec{\imath};\vec{j}$) .on a : $\begin{cases} x = X - 4 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

- Ecrivons Y en fonction de X.

  Y= h(x) $\Leftrightarrow$ Y+2= $\frac{2(X-4)-3}{X-4+4} = \frac{2X-11}{X} - 2$

  $\Leftrightarrow$ **Y =** $\frac{-11}{X}$

Pour terminer, montrons que g : X ↦ $\frac{-11}{X}$ est impaire

- Soit X dans Dg. X≠ 0 ; - X ≠ 0 c-à-d -X∈ Dg
- **g (-X)** = $\frac{-11}{-X}$ = -( $\frac{11}{X}$ ) = - **g(X)**

  **d'ou g est impaire**

**Propriété:** (axe de symétrie)

Les assertions ci-après sont équivalentes :

**i)** la droite **x = a** est **axe de symétrie** de (Cf)

ii) $\forall x \epsilon Df; (2a-x) \epsilon\ Df\ et\ \boldsymbol{f(2a-x) = f(x)}$

**iii)** $\forall\ h \in R/$ (a+h) $\epsilon\ Df; (a-h)\ \epsilon Df$ et ***f(a-h) = f(a+h)***

**iv)** Avec A$\binom{a}{0}$ , la courbe réprésentative de *f* dans le repère (A ;$\vec{\imath};\vec{j}$) est celle d'une fonction **paire**

**Exemple :** *f* : x↦ $\frac{x^2-2x}{x^2-2x+5}$

Démontrer que (Δ) : x=1 est axe de symétrie à (*Cf).*

**Solution** :

- Recherche du D*f :*

Tcf : D*f* = *R*

*Soit h* dans R / (1+h) $\epsilon Df$, comme D*f* = R, (1+h) $\epsilon Df$

*f*(1+h) = $\frac{(1+h)^2-2(1+h)}{(1+h)^2-2(1+h)+5} = \frac{h^2-1}{h^2+4}$

*f*(1-h) = $\frac{(1-h)^2-2(1-h)}{(1-h)^2-2(1-h)+5} = \frac{h^2-1}{h^2+4}$

Ainsi , $\forall \frac{h\epsilon R}{} (1+h)\epsilon Df; (1-h)\epsilon Df \; et$ *f*(1+h) = *f*(1-h)

Donc (Δ) : x=1 est axe de symétrie à (*Cf).*

6.2.2/ **Etude des branches infinies d'une fonction**

**<u>Définition</u> 1** ( branches infinies)

On dit que (C*f*) présente une **branche infinie** dans l'un ou l'autre des cas suivants :

i) En -∞ , *f* admet une **limite finie ou infinie**
ii) En a $\epsilon R$, *f* admet une limite infinie

**<u>Définition</u> 2 :** ( asymptote parallèle aux axes)

i) La droite d'équation **x=a** est **asymptote verticale** à (C*f)* lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

ii) La droite d'équation **y=b e**st **asymptote horizontale** à (C*f)* lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

**<u>Définition</u> 3** : (asymptote oblique)

La droite (Δ) $d'équation\ y = ax + b$ est **asymptote oblique** au voisinage de -∞ ( resp +∞)

lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ **( resp** $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ **)**

**<u>Définition</u> 4** :

(C*f*) et (C*g*) sont asymptotes en $-\infty$ **(resp en** $+\infty$**)** lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ **(** resp

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ **).**

**<u>Exemple</u> 1 :**

Soit *f :* $x \mapsto -x + |x - 1| - \frac{1}{x-1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **;** $\lim\limits_{x\to 1<} f(x)$ **;** $\lim\limits_{x\to 1>} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-2x + 1)]$

2) Donner une interprétation géométrique de chacun des résultats.

**Exemple 2 :**

Soint $f$ et $g$ les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{x^3-5}{x}$

Montrer que (C$f$) et (C$g$) sont asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$

**Solution 1 :**

1) Levée des barres de valeur absolue

| x | $-\infty$ | **1** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| x-1 | - | 0 | + |
| $\lvert x-1\rvert$ | -(x-1) | 0 | x-1 |

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1-\frac{1}{x-1} \ \ si \ \ x<1 \\ -1-\frac{1}{x-1} \ \ si \ x>1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to1<} f(x) = \lim\limits_{x\to1<}(-2x+1-\frac{1}{x-1} = +\infty \ (car \ \lim\limits_{x\to1<} x-1=0)$
- $\lim\limits_{x\to1>} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1-\frac{1}{x-1}) = -1$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-1}=0$ )

2) Interprétation

| Résultats | interprétations |
|---|---|
| | |

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x+1)=0$ | $(\Delta_1)$ : y= -2x+1 est asymptote oblique à (C*f*) en $-\infty$ |
| $\lim_{x\to1<} f(x) = +\infty$<br>$\lim_{x\to1>} f(x) = -\infty$ | $(\Delta_2)$ : x=1 est asymptote verticale à (C*f*) |
| $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ | $(\Delta_3)$ : y= -1 est asymptote horizontale en $+\infty$ |

**Solution** 2 : il suffit de montrer que $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty}[x^2-\frac{x^3-5}{x}] = \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^3-x^3+5}{x}] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x}=0$

(On peut illustrer qu'elles sont asymptotes à l'aide d'un schéma)

### 6.2.3 Recherche des branches infinies :

Nous nous limiterons au cas $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Les situations sont résumées par le tableau ci-dessous

| instructions | situations | onclusion |
|---|---|---|
| Calculer $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ | $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$ | (Cf) présente à l'infinie une branche parabolique de direction verticale |
| | $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ | (Cf) présente en l'infinie une branche parabolique de direction horizontale |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a(a\epsilon\mathbb{R}^*)$, alors calculer $\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$ | Si $\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$ = b | (Cf) admet (Δ) : y= ax+b comme asymptote oblique à l'infinie |
| | | Si $\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]=\infty$ | (Cf) présente une branche parabolique de direction y= ax |

**Remarque** : soit $\Omega(a;b) est\ centre$ de symétrie de (Cf) si et seulement si la fonction g définie par g(x)= *f*(x+a) –b est impaire

(Δ) : x=a est axe de symétrie de (Cf) si et seulement si g définie par g(x)=*f*(x+a) est paire

**Exemple** : on considère la fonction *f*(x)= x+$\sqrt{x}$

Etudier les branches infinies de (Cf)

**Solution** :

D*f* =[0 ;+ ∞[

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = + ∞; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \mathbf{1}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)$-x] = $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ = + ∞

**Conclusion**: (Cf) présente en + ∞ une branche parabolique de direction y=x

Illustration : (schéma)…

## Plan d'étude d'une fonction :

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f* s'il n'est pas explicitement donné

2) Etudier la parité et la périodicité de *f* ( facultatif). Cette étude permet de réduire l'ensemble d'étude de *f*.précisément :

   i) Si *f* est **paire** ou **impaire** , on peut restreindre l'étude de *f* à D*f* ∩ [0 ; + ∞[

   ii) Si *f* est **périodique** , de période T, on peut restreindre l'étude de *f* à $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \cap Df$

3) Dérivabilité de *f* , calcul de la dérivée , sens de variation de *f* .

4) Limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f* ou de son ensemble d'étude

5) Tableau de variation de *f*.

6) Construction de la courbe :

   i) Etudier les branches infinies puis construire les asymptotes éventuelles

   ii) (facultatif) déterminer les points de rencontre de (C*f*) avec les axes des coordonnées

   iii) Placer les points particuliers de (C*f*) ( points à tangente horizontale ; points à tangente verticale ; point d'inflexion…)

   iv) Construire un tableau de valeurs et enfin construire soigneusement (C*f*).

   **Application** : soit *f* la fonction définie par *f*(x) = $\frac{x^2}{x-1}$

   Etudier et construire soigneusement (C*f*)

## 6.3/ PRIMITIVES D'UNE FONCTION

**Activité préparatoire** :

On considère les fonctions $F_1;\ F_2\ et\ f$ définies par $F_1(x) = 2x^3 - 4x + 5$ et

$F_2(x) = 2x^3 - 4x$-8 et *f*(x) = $6x^2$-4

1) Calculer $F'_1$et $F'_2$
2) Que constates- tu ?

**Solution** :

1) $F'_1(x) = 6x^2-4$ et $F'_2(x) = 6x^2-4$
2) *on constate* que $F_1 \neq F_2$ mais $F'_1 = F'_2 = f$

6.3.1/ **Définitions et propriétés** :

**Définition** :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle K ; soit F une fonction dérivable sur K.

F est **une primitive** de $f$ sur K lorsque F'= $f$

**Propriété** :

Si $f$ admet F pour **primitive** sur l'intervalle K, alors les primitives de $f$ sur K sont les fonctions $F_\propto$,($\propto \epsilon \mathbb{R}$) définies par : $\boldsymbol{F_\propto(x) = F(x) + \propto}$

**Exemple :** Fet *f* sont les fonctions définies sur l'intervalle ]0 ;+∞[ par F(x)= $-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$ et

$F(x) = -x-\frac{1}{x^2}$

1) Montrer que F est une primitive de *f* sur ]0 ;+∞[
2) Déterminer toutes les primitives de *f* sur ]0 ;+∞[
3) Déterminer la primitive de f sur ]0 ;+∞[ qui prend la valeur $y_0=\frac{3}{4}$ en $x_0$=2

**Solution** :

1) Il suffit de montrer que F'=*f*

   $\forall x \in ]0 ; +\infty[$ , $F'(x) = -\frac{1}{2}\times 2x - \frac{1}{x^2}$ . d'où F'(x) = *f* (x)
2) Les primitives de *f* sur ]0 ;+∞[ sont les fonctions $F_\alpha$ ; ($\alpha \epsilon \mathbb{R}$), définies par :

$F_\alpha(x) = F(x) + \alpha$. ainsi $\boldsymbol{F_\alpha(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\alpha}$

3) Soit G la fonction cherchée .$\exists c \in R \ / \forall x \in ]0 ;+\infty[$, $G(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\alpha$ **(** car G est une primitive de *f* sur ]0 ;+∞[ ).

Or $G(2) = \frac{3}{4}$ . c-à-d $-\frac{2^2}{2}+\frac{1}{2}+\alpha = \frac{3}{4}$ ainsi $c = \frac{3}{4}+\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

**Conclusion :** G est la fonction de ]0 ;+∞[ $\rightarrow R$

$$x \mapsto -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{9}{4}$$

**Propriété :**

si la fonction *f* est **continue** sur l'intervalle K, alors *f* admet **au moins une primitive** sur K.

### 6.3.2/ Recherche des primitives d'une fonction

#### a) primitives des fonctions élémentaires

| Intervalle K | Fonction *f* définie par : | Une primitive de *f* sur K est F définie par : |
|---|---|---|
| K⊂ℝ | $f(x)$ =0 | F($x$) = c (c= cste) |
| K⊂ℝ | $f(x)$ = a (a=cste) | F($x$) = a$x$ |
| K⊂ℝ | $f(x)$ = x | F($x$) = $\frac{x^2}{2}$ |
| K⊂ℝ | $f(x)$ =$x^n$ (n∈ ℕ) | F($x$) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| K⊂ℝ* | $f(x)$ = $\frac{1}{x^2}$ | F($x$) = - $\frac{1}{x}$ |
| K⊂ℝ* | $f(x)$ = $\frac{1}{x^n}$ (n≥ 2) | F($x$) = $\frac{-1}{(n-1)x^{(n-1)}}$ |
| $U'$ | $f(x)$ = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x}$ |
| K⊂ℝ | $f(x)$ = cos$x$ | F($x$) = sin$x$ |
| K⊂ℝ | $f(x)$ = sin$x$ | F($x$) = - cos$x$ |
| K⊂ℝ\ { $\frac{\pi}{2}$ +k$\pi$ ($k\epsilon\mathbb{Z}$) | $f(x)$ = $\frac{1}{cos^2x}$ ( = 1+$tan^2x$) | F($x$) = tan$x$ |

#### b) primitives et opérations sur les fonctions

**Propriété :**

soient u et v deux fonctions de primitives respectives U et V sur l'intervalle K.

soeient $\alpha$ $et$ $\beta$ deux constantes réelles ; on a le tableau ci-après :

| fonctions | Primitives sur K |
|---|---|
| u+v | U+V |
| $\alpha u$ | $\alpha U$ |
| $\alpha u + \beta v$ | $\alpha U + \beta V$ |

Exemple : déterminer toutes les primitives sur ]0 ;+∞[ de la fonction *f* définie par :
$f(x) = \frac{1}{3} - x^3 + \frac{24}{7\sqrt{x}}$

Solution :

Les primitives de *f* sur ]0 ;+∞[ sont les fonctions $F_\alpha$ , ($\alpha\epsilon\mathbb{R}$), définies par :

$$\boldsymbol{F_\alpha(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{x^4}{4} + \frac{48}{7}\sqrt{x} + \alpha}$$

**Propriété :**

Soient *u* une fonction dérivable sur un intervalle K et *v* la fonction dérivable sur l'intervalle *u*(K). **(*vou*)** est la primitive sur K de la fonction **u'× *v'ou*.**

**Propriété**

Cette propriété est définie par le tableau ci-dessous :

| Fonction *f* | Une primitive de *f* est : | commentaires |
|---|---|---|
| u'$u^n$ ( n∈ ℕ) | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | Sur tout intervalle sur lequel u est dérivable |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u}$ | Sur tout intervalle sur lequel u ne s'annule pas |
| $\frac{u'}{u^n}$ (n≥ 2) | $-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}$ | |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | Sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive |
| $x\mapsto u(\alpha x+\beta)\ avec\ (\alpha;\beta = cste)$ | $x\mapsto \frac{1}{\alpha}U(\alpha x+\beta)$ ;(avec U étant une primitive de *u*) | Sur tout intervalle sur lequel $\varphi: x\mapsto u(\alpha x+\beta)\ est\ continue$ |
| u'cos(u) | sin(u) | Sur tout intervalle sur lequel u est dérivable |
| u'sin(u) | -cos(u) | Sur tout intervalle sur lequel u est dérivable |
| $\frac{u'}{cos^2u} = [u'(tan^2u)]$ | tan(u) | Sur tout intervalle K sur lequel u est dérivable et telle que u(K)⊂ $R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}$ |

**Exercice d'application** :

Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer une primitive sur un intervalle à préciser.

$f: x\mapsto 3x^5-7x^3+2012-\frac{9}{x^5}$ ; g : $x\mapsto cosx.sin^3x$ ; $h: x\mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}$ ; $q: x\mapsto \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}$

$i: x\mapsto (3x-11)^8$ ; $j: x\mapsto cos(3x-\frac{\pi}{5})$ ; $l: x\mapsto \frac{2x}{cos^2(x^2)}$

**Solution : ……**

**c) Primitives des polynômes trigonométriques :**

Activité 1 :

***i)*** Linéariser $f: x\mapsto sin^2x.cos^4x$

***ii)*** Déterminer alors toutes les primitives de *f* sur R

Activité 2 :

soit g la fonction définie par g(x) = $sin^2x.cos^3x$

i) Démontrer que $\forall x\in R, g(x) = cosx(sin^2x-sin^4x)$

ii) En déduire la primitive G de g sur R qui prend la valeur $y_0 = -\sqrt{2}\ en\ x_0 = -\pi$

**Solution 1** :

i) $\forall x\in R, f(x) = -\frac{1}{32}cos6x-\frac{1}{16}cos4x+\frac{1}{32}cos2x+\frac{1}{16}$

ii) $les\ primitives\ de\ f\ sur\ R\ sont\ les\ fonctions\ F_\alpha; (\alpha\epsilon R)$ définies par :

$$\boldsymbol{F_\alpha(x) = -\frac{1}{32}\times\frac{1}{6}sin6x - \frac{1}{16}\times\frac{1}{4}sin4x + \frac{1}{32}\times\frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{16}x + \alpha}$$

**Solution 2 :**

i) $\forall x \in R$,g(x)= cos*x* $(sin^2x)(cos^2x)$
= cos*x* $[(sin^2x(1-sin^2x)]$
= **cos*x*** $\boldsymbol{(sin^2x - sin^4x)}$

ii) $\forall x \in R, g(x) = cosxsin^2x - sin^4cosx.$

Une primitive de g sur R est $G_0 définie\ par :\ G_0(x) = \frac{1}{3}sin^3x - \frac{1}{5}sin^5x$

$\exists \alpha \epsilon R/\ \forall x \in R, G(x) =\ G_0(x) + \alpha$

$= \frac{1}{3}sin^3x - \frac{1}{5}sin^5x + \alpha$

Or G$(-\pi) =\ -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\sin(-\pi))^3 - \frac{1}{5}(\sin(-\pi))^5 +\ \alpha = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -\sqrt{2}}$

D'ou G: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$a

$x \mapsto \boldsymbol{\frac{1}{3}sin^3x - \frac{1}{5}sin^5x - \sqrt{2}}$

**Méthode de détermination des primitives des polynômes trigonométriques :**

**$1^{er}$ *cas*:**

Dans le cas des fonctions $f : x \mapsto cos^n x$ ; $g : x \mapsto sin^n x$ *où* m,n $\in \mathbb{N}^*\backslash\{1)$ ou de la fonction h : $x \mapsto cos^m x.sin^n x$ où m,n $\in \mathbb{N}^*\backslash\{1)$ et sont de même parité , **linéariser** et par la suite déterminer les primitives.

**$2^{eme}$ *cas*:**

si la fonction h ci-dessous h : $x \mapsto cos^m x.sin^n x$ est telle que m et n ne soient pas de même parité alors

i) Utiliser l'égalité $sin^2x + cos^2x = 1$
ii) Mettre h(x) sous la forme :

- cos*x*$\times P(sinx)$ si m est impaire
- sin*x*$\times P(cosx)$ si n est impaire où P est un polynôme

Application : trouver l'ensemble des primitives des fonctions ci-dessous

*f*(x) = $sin^2x \times cos^4x$ ; *g*(x) = $sin^3x \times cos^2x$ ; h(x) = $sin^4x \times cos^3x$

CHAPITRE 7 : ESPACES VECTORIELS SUR IR , APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES

**FICHE PEDAGOGIQUE**

**O.P.G**

| |
|---|
| Bien que l'essentiel des activités mathématiques (tant en analyse qu'en géométrie) que nous effectuons jusqu'en classe de terminale se pratique dans le plan (dimension 2) ou dans l'espace (dimension 3), certains problèmes (système de 4 équations à 4 inconnues par exemple) font apparaître la nécessité de travailler dans des espace de dimension supérieure. La leçon sur les espaces vectoriels permet de fixer un cadre théorique pour aborder ces problèmes.<br>Les applications linéaires ainsi que les matrices sont des thèmes qui vont entre autres nous permettre de transposer le champ lexical dans lequel est énoncé un problème pour un autre dans lequel il se démontrera plus aisément (On parle de transport de structures). |

**Temps imparti selon la progression :** 9 h

**Nombre de leçons :** 02

| **N° et titre éventuel des leçons** | Durée |
|---|---|
| L1 : **ESPACES VECTORIELS SUR IR** | 5h |
| L2 : **APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES** | 4h |

**Objectifs pédagogiques opérationnels :**

| | |
|---|---|
| OPO 1<br>(Leçon 1) | 1.1 Justifier qu'un ensemble donné à une structure d'espace vectoriel sur IR.<br>1.2 Justifier qu'un ensemble donné à une structure de sous espace vectoriel.<br>1.3 Connaître ce qu'est :<br>• une famille génératrice ;<br>• une famille libre ;<br>• une combinaison linéaire.<br>1.4 Justifier qu'une famille de vecteurs est une famille génératrice (vecteurs linéairement dépendants)<br>1.5 Justifier qu'une famille de vecteurs est une famille libre (vecteurs linéairement indépendants).<br>1.6 Déterminer une base et la dimension d'un IR _ espace vectoriel ou d'un sous espace vectoriel.<br>1.7 Écrire les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée. |
| OPO 2<br>(Leçon 2) | 2.1 Justifier qu'une application donnée est linéaire.<br>2.2 Déterminer la matrice d'une application linéaire.<br>2.3 Déterminer le noyau d'une application linéaire.<br>2.4 Déterminer l'image d'une application linéaire. |

| | |
|---|---|
| | 2.5 Justifier qu'une application linéaire est un isomorphisme ou un automorphisme.<br>2.6 Multiplier une matrice par un réel et multiplier deux matrices.<br>2.7 Calculer le déterminant d'une matrice<br>2.8 Déterminer l'inverse d'une matrice inversible |

**Pré-requis**

 Il est souhaitable de voir la leçon sur les **lois de composions et Structures** avant d'aborder ce cours.

**Références :** Mathématiques Tle C Collection Monge

Mathématiques Tle C collection Excellence

# Leçon 1 : ESPACES VECTORIELS SUR IR

## I- Espace vectoriel

### 1. Définition et vocabulaire

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée «⊕» et d'une loi de composition externe à opérateur dans IR notée « • »

$$\oplus : (E \times E) \to E$$
$$(u, v) \mapsto u \oplus v$$
$$et$$

$$\bullet : (IR \times E) \to E$$
$$(\lambda, u) \to \lambda \bullet u$$

**Définition.**

(E , ⊕ , •) est un espace vectoriel sur IR ( on dit encore IR-espace vectoriel, en abrégé IR-e-v) si et seulement si :

 pour l'opération ⊕ on a

P1) $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$ on dit que la loi ⊕ est commutatif.

P2) $(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$, on dit que la loi ⊕ est *associative*.

P3) $\exists ! \vec{0}_E \in E \ / \ \vec{u} \oplus \vec{0}_E = \vec{u}$ on dit que la loi ⊕ admet un *élément neutre* $\vec{0}_E$.

P4) $\exists ! \overrightarrow{u'} \in E \ / \ \vec{u} \oplus \overrightarrow{u'} = \vec{0}_E$, on dit que $\overrightarrow{u'}$ est l'opposé ou le symétrique de $\vec{u}$.

***Remarque* :** les propriétés P2, P3 et P4 permettent de dire que (E , ⊕) est un groupe ; les propriétés P1, P2, P3 et P4 permettent de dire que (E , ⊕) est un groupe commutatif ou abélien.

 pour l'opération • $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \ ; \ \forall \alpha, \beta \in IR$ on a :

P5) $1 \bullet \vec{u} = \vec{u}$, on dit que 1 est l'élément unitaire.

P6) $(\alpha + \beta) \bullet \vec{u} = (\alpha \bullet \vec{u}) \oplus (\beta \bullet \vec{u})$ la loi • est distributive à droite.

P7) $\alpha \bullet (\beta \bullet \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \bullet \vec{u}$

P8 )$\alpha \bullet (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (\alpha \bullet \vec{u}) \oplus (\alpha \bullet \vec{v})$, la loi • est distributive à gauche.

***Attention* !**

 Ne pas confondre l'opération « • » à la multiplication usuelle dans IR : $\alpha\beta$ désigne la multiplication de deux réels et $\alpha \bullet \vec{u}$ désigne la « multiplication » d'un réel par un élément de E.

 Même si dans les exemples pratiques la loi « • » n'est autre chose que la multiplication usuelle, et la loi notée «⊕ » l'addition usuelle, il ne faut pas perdre de vue que ce ne sont que des cas particulier dans une théorie générale.

**Vocabulaire**

 Les éléments de E sont appelés les **vecteurs**

 La loi « ⊕ » de E est communément appelée **addition** dans E, et pour simplifier les choses, on la note « + »

 La loi « • » de E est communément appelée **multiplication par un réel** et pour simplifier les choses, $\lambda \bullet u$ est simplement notée $\lambda u$

 On appelle vecteur nul de E et on note $\vec{0}_E$, l'élément neutre de la loi «⊕ »

**Exemples**

$(IR^n, +, \times)$ $\forall n \geq 1$ est un IR-espaces vectoriel.

Pour n= 2 montrons que $(IR^2, +, \times)$ est un espace vectoriel réel ;

$IR^2 = \{(x, y) / x \in IR \text{ et } y \in IR\}$ ; $soient\ \vec{u}, \vec{v} \in IR^2 / \vec{u} = (a, b)\ et\ \vec{v} = (c, d)$; $\forall \alpha, \beta \in IR$

 pour l'opération + on a

P1) Montrons que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = \vec{v} + \vec{u}$$

P2) Montrons que $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, on dit que la loi $\oplus$ est *associative*.

P3) Montrons que $\exists! \vec{0}_E \in E$ tel que $\vec{u} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{u}$ le couple (0,0) est l'élément neutre pour +

P4) Montrons que $\exists! \overrightarrow{u'} \in E$ tel que $\vec{u} \oplus \overrightarrow{u'} = \vec{0}_E$, soit $\vec{u} = (a, b)$ le couple $\overrightarrow{u'} = (-a, -b)$ est l'opposé ou le symétrique de $\vec{u}$.

 Pour l'opération × on a :

P5 ) Montrons que 1 est l'élément unitaire si $\vec{u} = (a, b)\ on\ a\ 1 \times \vec{u} = 1(a, b) = (1 \times a, 1 \times b) = (a, b) = \vec{u}$,

P6) Montrons que $(\alpha + \beta) \times \vec{u} = (\alpha \times \vec{u}) + (\beta \times \vec{u})$ si $\vec{u} = (a, b)$ alors

$$(\alpha + \beta) \times \vec{u} = (\alpha + \beta)(a, b) = \big((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b\big) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$$
$$= \alpha(a, b) + \beta(a, b) = (\alpha \times \vec{u}) + (\beta \times \vec{u})$$

P7) Montrons que $\alpha \times (\beta \times \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \times \vec{u}$

$\alpha \times (\beta \times \vec{u}) = \alpha \times (\beta \times (a, b)) = \alpha \times ((\beta \times a, \beta \times b)) = ((\alpha \times \beta \times a, \alpha \times \beta \times b)) = (\alpha \times \beta) \times (a, b) = (\alpha \times \beta) \times \vec{u}$

P8 ) Montrons que $\alpha \times (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \times \vec{u}) + (\alpha \times \vec{v})$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\big((a, b) + (c, d)\big) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

On utilise le même cheminement pour montrer que IRn $\forall n \geq 1$ est un IR-espaces vectoriel.

**Propriété :**

P1) $\vec{0}_E$, est unique.

P2) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E, \exists! \vec{w} \in E / (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \vec{w}$

P3) Soit $\vec{u} \in E, \exists! \overrightarrow{u'} \in E / \left(\vec{u} \oplus \overrightarrow{u'}\right) = \vec{0}_E$, on note $\vec{u} = -\overrightarrow{u'}$

P4) $\alpha \bullet \vec{u} = \beta \bullet \vec{u} \Rightarrow \alpha = \beta\ ou\ \vec{u} = \vec{0}_E$

P5)$\alpha \bullet \vec{u} = \vec{0}_E \Rightarrow \alpha = 0\ ou\ \vec{u} = \vec{0}_E$

P6) $\alpha \bullet (-\vec{u}) = -\alpha\vec{u} = (-\alpha)\vec{u}$

## 2- Sous espace vectoriel

### 2.1- Définition et propriété

**Définition**

Soit E un espace vectoriel réel et F une partie de E.

F est un sous espace vectoriel de E ssi F est stable pour $\oplus$ et $\bullet$ c'est-à-dire :

P1) $F \neq \emptyset$.

$P_2$) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \ (\vec{u} \oplus \vec{v}) \in F$

$P_3$) $\forall \vec{u} \in F, \forall \alpha \in IR \ \alpha \bullet \vec{u} \in F$

**Exemple**

Si E=$IR^3$, F= {(x,y,z) /x+y-z=0} est un sous espace vectoriel de E.

**Preuve**

i) $F \neq \emptyset$, car (0 ; 0 ; 0)$\in F$, puisque 0+0-0=0

ii) $Soit \ \vec{u}(x;y;z) et \ \vec{v}(x';y';z')$ tel que $\vec{u}, \vec{v} \in F,$ montrons que $(\vec{u} \oplus \vec{v}) \in F$

$$(\vec{u} \oplus \vec{v})(x + x'; y + y'; z + z')$$

$x + x' + y + y' - (z + z')$=x+y-z+x'+y'-z'=0+0=0

Donc $(\vec{u} \oplus \vec{v}) \in F$

iii) $\forall \vec{u} \in F, \forall \alpha \in IR$ montrons que $\alpha \bullet \vec{u} \in F$

$$\alpha \bullet \vec{u}(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$$

$$\alpha x + \alpha y - \alpha z = \alpha(x + y - z) = \alpha \times 0 = 0$$

Donc $\alpha \bullet \vec{u} \in F$

D'après i), ii), iii) F est un sous espace vectoriel de $IR^3$

**Propriété** Soit E un espace vectoriel réel et F une partie de E.

F est un sous espace vectoriel de E ssi $F \neq \emptyset$ et $\forall \alpha, \beta \in IR, \forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \ (\alpha \bullet \vec{u} \oplus \beta \bullet \vec{v}) \in F$

**Preuve**

$\Longrightarrow$ Supposons que F est un sous espace vectoriel de E on a

i) $F \neq \emptyset$, par définition d'un sous espace vectoriel

ii) $Soit \ \vec{u}, \vec{v} \in F, \ \alpha, \beta \in IR$ montrons que $(\alpha\vec{u} \oplus \beta\vec{v}) \in F$

Par définition d'un sous espace vectoriel $\alpha\vec{u} \in F \ et \ \beta\vec{v} \in F$

$(\alpha\vec{u} \oplus \beta\vec{v}) \in F$ par définition d'un sous espace vectoriel.

$\Leftarrow$ Supposons $F \neq \emptyset$ et $\forall \alpha, \beta \in IR, \forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \ (\alpha \bullet \vec{u} \oplus \beta \bullet \vec{v}) \in F$

i) $F \neq \emptyset$,

ii) pour $\alpha = \beta = 1$ on a$(\vec{u} \oplus \vec{v}) \in F$

iii) $pour \ \alpha = \alpha \ et \ \beta = 0 \ on \ a \ \alpha \bullet \vec{u} + 0 \bullet \vec{v} = \alpha \bullet \vec{u} \in F$

Donc F est un sous espace vectoriel de E.

**Proposition**

**P1)** Tout sous espace vectoriel est un espace vectoriel.

**P2)** Toutes les propriétés d'un sous espace vectoriel sont les même que celle d'un espace vectoriel.

**P3)** $\{\vec{0}_E\}$ est un sous espace vectoriel de tout espace vectoriel E appelé espace vectoriel nul de E.

**2.2- Intersection d'une famille de sous espaces vectoriels**

**Propriété** : Si (E , $\oplus$ , •) est un espace vectoriel sur IR et si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous espace vectoriel de E alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ un sous espace vectoriel de E.

**Preuve :**

i) $\forall i \in I, \vec{0}_E \in E_i, \ car E_i$est sous espace vectoriel de $E$, d'où $\bigcap_{i\in I} E_i \neq \emptyset$,

ii) $\forall \vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i, \forall \alpha \in IR$ montrons que $\alpha \bullet \vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i$

Si $\vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i$ alors $\vec{u}$ appartient à tous les $E_i$

Ainsi $\alpha \bullet \vec{u}$ appartient à tous les $E_i$ car les $E_i$ sont sous espaces vectoriels.
D'où $\alpha \bullet \vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i$

iii) Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$ montrons que $\vec{u} + \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$ alors $\vec{u}, \vec{v}$ appartient à tous les $E_i$
Ainsi$\vec{u} + \vec{v}$ appartient à tous les $E_i$ car les $E_i$ sont sous espaces vectoriels.
D'où$\vec{u} + \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$

D'après i), ii), iii) $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous espace vectoriel de $IR^3$

**Remarque** : Si A et B sont deux sous espaces vectoriels de E alors $A \cup B$ n'est pas toujours un sous espace vectoriel de E.

**2.3- Somme de deux sous espace vectoriel**

**Définition** Soit $E_1$ et $E_2$ deux sous espaces vectoriels de E. on appelle somme des sous espaces vectoriels E1 et E2 l'ensemble $E' = \{\vec{u} \in E \ tel \ que \ \exists \vec{u}_1 \in E_1, \ \vec{u}_2 \in E_2 , \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$

**Propriété** : E' est un sous espace vectoriel de E noté $E_1 + E_2$et contenant $E_1 \cup E_2$

**Preuve :** Exercice

**2.4-Somme directe**

**Définition**

La somme de deux sous espaces vectoriels de $E_1$ et $E_2$ est direct ssi $\forall \vec{u} \in E_1 + E_2 \ \exists! \overrightarrow{u_1} \in E_1 et \exists! \ \vec{u}_2 \in E_2 \ tel \ que \ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

**Propriété** La somme de deux sous espaces vectoriels de $E_1$ et $E_2$ est direct ssi $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$ on note $E_1 \oplus E_2$

**2.5-Sous espace vectoriels supplémentaires**

Soit E un espace vectoriel réel si $E_1$ et $E_2$ sont deux sous espaces vectoriels de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$, on dira que $E_1 et \ E_2$ sont deux sous espaces supplémentaires de E.

## II- Base d'un espace vectoriel réel

**1. Combinaison linéaire**

Soient $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_n$ n vecteurs d'un IR – espace vectoriel E.
On dit qu'un élément $\vec{u}$ de E est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_n$ s'il existe des nombres réels $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , ... , $\alpha_n$ tel que $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + ...+ \alpha_n \ \vec{u}_n$

**Exemple :**

Dans le IR-e.v ($IR^3$ , + , •), on considère les vecteurs $\vec{e}_1$ = (1 ; 0 ; 0) , $\vec{e}_2$ = (0 ; 1 ; 0) , $\vec{e}_3$ = (0 ; 0 ; 1)

Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u}\left(2; 3; \frac{1}{2}\right)$; peut encore s'écrire : $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$ .

Alors $\vec{u}$ est une combinaison linéaires des vecteurs $\vec{e}_1$ , $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ affectés des coefficients respectifs 2, -3 et $\frac{1}{2}$

**2. Famille génératrice.**

Une famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ) de p vecteurs d'un IR-e-v E est dite génératrice d'un sous espace vectoriel E' de E si tout vecteur de E' est combinaison linéaire des vecteurs de la famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$).

**Propriété**

Soit E un IR-e.v et ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ) une famille de p vecteurs de E

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ) est un sous espace vectoriel de E.

On l'appelle le sous espace vectoriel engendré par la famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ).

**3. Famille liée ou linéairement dépendante**

Une famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ) de p vecteurs d'un IR-e-v E est dite liée si :

$\exists \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_p \epsilon IR, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}_E \Rightarrow (\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots ; \alpha_p ) \neq (0; 0; \ldots ; 0)$

**Remarque :**

**R1)** Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

**R2)** Pour qu'une famille soit lié il faut et il suffit que l'un des vecteurs sont combinaison linéaire des autres.

**Exemple :** $B = \{(0; 0), (1; 2), (5; 7)\}$ est une famille liée.

**4. Famille libre ou linéairement indépendante.**

Une famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_p$ ) de p vecteurs d'un IR-e-v E est dite libre si :

$\forall \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_p \epsilon IR, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots , = \alpha_p = 0$

**Exemple** $A = \{(2; 3), (4; 7)\}$ $A \subset IR^2$

Soit $\alpha$ , $\beta \in IR$ $\alpha(2; 3) + \beta(4; 7) = 0_{IR^2}$

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 7\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + 12\beta = 0 \\ -6\alpha - 14\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow -2\beta = 0 \ ie \ \beta = 0$$

Ainsi $\alpha = 0$

Donc A est une famille libre.

**5. Base d'un IR-espace vectoriel**

**Définition :**

Soit E un IR-e.v non réduit au singleton $\{\vec{0}_E\}$ .

Toute famille ( $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , ... $\vec{u}_n$ ) libre **et** génératrice de E est appelé base de E

**Exercice d'application**:

I- Montrer que $F = \{(x; y) \in IR^2 / 2x - 3y = 0\}$ est un s.e.v. De $IR^2$

II- E est un plan vectoriel de base $(i; j)$. On donne $\vec{e}_1 = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1- Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E.
2- Donner les composantes de $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ dans $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
3- Donner les composantes de $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ dans $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On considère $ir^2$ muni de sa base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les vecteurs

$$\vec{u} = (m^2 - m) + 2m\vec{\jmath} \quad ; \quad \vec{v} = (m - 1)\vec{\imath} + (m + 1)\vec{\jmath}, \ m \in IR$$

1- Déterminer m pour que le système $(\vec{u}; \vec{v})$ soit : a) lié b) libre.
2- On prend m=2
   I- Vérifier que $(\vec{u}; \vec{v})$ forme une base.

II- Déterminer les composantes de $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ dans $(\vec{u}; \vec{v})$

E est un plan vectoriel de base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ et f un endomorphisme de e defini par
$f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ ; $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ / $\overrightarrow{u'} = f(\vec{u})$

1- Définir analytiquement f
2- Déterminer le noyau et l'image de f, tout en donnant une base et la dimension de chacun de ces sous espaces
3- On donne $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ $\quad \overrightarrow{e_2} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$
   I- Montrer que $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_1})$ est une base de E
   II- Déterminer les composantes de $f(\overrightarrow{e_1})$ $et$ $f(\overrightarrow{e_2})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_1})$

**Remarque**

Soit E un IR-e.v non réduit au singleton $\{0_E\}$ .
Si E possède une base de n vecteurs, alors toute autre base de E possède n vecteurs. Et l'entier naturel n est appelé **dimension** de E, et on dit que E est de dimension fini.
On note **n = dim E**
Par convention, dim$\{ 0_E \}$ = 0

**Exemple :**

dim IR = 1 ; dim IR$^2$ = 2 ; dim IR$^3$ = 3 ; dim $L(Pn)$ = n ;

**Propriété**

Soit E un IR-e.v non réduit au singleton $\{ 0_E \}$ et de dimension n .
Pour toute base $( \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \ldots , \vec{e}_n )$ de E et tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe un unique n-uplet de réels ( $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , ... , $\alpha_n$ ) tel que $\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$

**Vocabulaire :** les réels $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , ... , $\alpha_n$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base $( \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \ldots , \vec{e}_n )$

**Exemple** Dans IR$^2$, $( \vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est une base de IR$^2$ alors si $\vec{v} = 6\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 \Longrightarrow \vec{v}(6; 8)$

**7. Sous-espace vectoriel d'un IR-e.v de dimension fini**

Soit E un IR-e.v de dimension finie n .

**Propriétés**

P$_1$ **)** Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie p et l'on a p ≤ n
P$_2$ **)** Toute famille libre **ou** génératrice de **n** vecteurs **de E** est une base de E

**Remarque : (cas particulier de la dimension 2)**

Soit E un IR-e.v de dimension finie 2 et $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ une base de E.
Soient $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives $\vec{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{u'}(x', y')$ y'dans la base $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$
Les énoncés suivants sont équivalents :

- (u ; u') est une famille libre de E ;
- (u ; u') est une famille génératrice de E ;
- (u ; u') est une base de E ;
- $det\ (u\ ;\ u') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \neq 0.$

**Vocabulaire**

- Tout IR-e.v ou sous espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**

- Tout IR-e.v ou sous espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**

## Leçon 2 : APPLICATIONS LINÉAIRES - MATRICES

## I. Application linéaire

### 1-Définition et propriété

Soient E et F deux IR-e.v et f une application de E vers F.

f est une application linéaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E : f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $\forall \alpha \in IR, \forall \vec{u} \in E : f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

**Propriété**

Soient E et F deux IR-e.v et f une application de E vers F.

f est une application linéaire si et seulement si : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ ; $\forall \alpha, \beta : f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

**Remarques**

Soient E et F deux IR-e.v et f une application linéaire de E vers F.

$R_1$) Toute application linéaire de E vers F est un homomorphisme d'espace vectoriel de E vers F ;

$R_2$) On a : $f(0_E) = 0_F$ et f(-u)=-f(u) ;

$R_3$) Si F = IR , f est une **forme linéaire** sur E :

$R_4$ ) Si F = E , f est un **endomorphisme** de E.

### 2. Image et Noyau d'une application linéaire

Soit f une application linéaire d'un IR-e.v E vers un IR-e.v F

**Définition 1**

L'mage de $f$, notée $\boldsymbol{Imf}$, est le sous-ensemble de F constitué des images $f(\vec{u})$ de tous les vecteurs $\vec{u}$ de E

$$Im\, f = \{f(\vec{u}) ; \vec{u} \in E\}$$

**Définition 2**

Le noyau de $f$, noté $\boldsymbol{Kerf}$ est le sous-ensemble de E défini par :

$$Kerf = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 0_F\}$$

**Propriétés**

**P1 :** $Kerf$ est un sous espace vectoriel de E ;

**P2 :** $Imf$ est un sous espace vectoriel de F ;

**P3 :** $f$ est injective si et seulement si $Ker\, f = \{0_E\}$ ;

**P4 :** f est surjective si et seulement si $Im\, f$ = F ;

**P5** : Pour toute famille $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ génératrice de E, la famille $\{f(e_i)\}_{1 \le i \le n}$ est une famille génératrice de F ;

**P6** : Pour toute famille $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ libre de E, la famille $\{f(e_i)\}_{1 \le i \le n}$ est une famille libre de F ssi f est injective.

**Preuve**

**Propriété**

Soit E un IR-e.v de dimension finie n ≥ 1 et $f$ un endomorphisme de E. Les énoncés suivants sont équivalents.

(i) $f$ est injective ;

(ii) $f$ est surjective ;

(iii) $f$ est bijective.

**3- Isomorphisme**

Soit $f$ une application linéaire d'un IR-e.v E vers un IR-e.v F. Si $f$ est bijective, on dit que $f$ est un isomorphisme de E vers F.

**Remarques**

R1) Un isomorphisme de E vers E est encore appelé **automorphisme** de E ;

R2) On note L (E , F) l'ensemble des applications linéaires de E vers F : ( L(E , F) , + , • ) est un IR-e.v .

**Propriété** : Soit $f$ est un isomorphisme de E vers F.

**P1**-L'image d'un sous espace vectoriel de E par f est sous espace vectoriel de F ;

**P2**- L'image réciproque d'un sous espace vectoriel de F par f est sous espace vectoriel de E ;

**P3**-Pour toute famille génératrice $\{\vec{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ de E, la famille $\{f(\vec{e}_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de $f$(E) de F.

**P4**- Pour toute base $\{\vec{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ de E, la famille $\{f(\vec{e}_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de $f$(E) de F.

En générale l'image d'un truc par un isomorphisme d'espace vectoriel est un truc

## II- Matrice d'une application linéaire

Dans toute la suite :

- E est un IR-e.v de dimension fini n ( n≥ 1). On pose B = ( $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \ldots , \vec{e}_n$ ) une base de E
- F est un IR-e.v de dimension fini ( m≥ 1). On pose B' = ( $\vec{e'}_1 , \vec{e'}_2 , \ldots , \vec{e'}_m$ ) une base de F

**Cas des plans vectoriels ( dim E = dim F = 2 )**

B = ( $\vec{e}_1 , \vec{e}_2$ ) et B' = ( $\vec{e'}_1 , \vec{e'}_2$ )

Soit f une application linéaire du IR-e.v E vers le IR-e.v F

**1- Définition et Propriété**

F est entièrement déterminée par la donnée de $f(\vec{e}_1) = \alpha\,\vec{e'}_1 + \beta\,\vec{e'}_2$ et de $f(\vec{e}_2) = \gamma\,\vec{e'}_1 + \delta\vec{e'}_2$

On appelle matrice de $f$ relativement aux bases B et B' le tableau carré : $\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$

**Vocabulaire** : ce tableau est appelé matrice carrée réelle d'ordre deux (ou matrice réelle 2 x 2)

**Propriété :** Si un vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ dans la base B , alors

$$f(\vec{u}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2)$$

$$= x(\alpha\,\vec{e'}_1 + \beta\,\vec{e'}_2) + y(\gamma\,\vec{e'}_1 + \delta\vec{e'}_2) = (x\alpha + y\gamma)\vec{e'}_1 + (x\beta + y\delta)\vec{e'}_2$$

donc $f(\vec{u}) = \vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\alpha + y\gamma\\ x\beta+y\delta\end{pmatrix}$ dans la base B'.

On écrit ce résultat sous forme matricielle : $\begin{pmatrix}x\alpha + y\gamma\\ x\beta+y\delta\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

On note $M_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

Soient $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ des matrices des applications linéaires f et g respectivement.

**2-Déterminant d'une matrice**

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice de $M_2$.

On appelle déterminant de A le réel $det\ A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

**Propriété:**

Soient A et B deux matrices de $M_2$ , on a det (A x B ) = det A x det B

**Théorème**

Soient f une application linéaire d'un plan vectoriel E vers un plan vectoriel F, et soit M la matrice de f relativement à des bases B et B' de E et F respectivement.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) F est bijective (c'est-à-dire f est un isomorphisme de E vers F)

(2) det M ≠ 0

**Exercice d'application**

E est un espace vectoriel de dimension 2 rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Soit $f$ un endomorphisme de E défini par : $f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ *et* $f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

1) a) Ecrire la matrice A de $f$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

B) $f$ est-il un automorphisme ?

C) Déterminer le noyau de $f$, *Kerf* et l'image de $f$, *Imf* .

2) on pose : $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ *et* $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ .

A) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. Déterminer la matrice B de $f$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3- **Addition**

Par définition, la somme A + B est la matrice de l'application linéaire f +g , et on a :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

4- **Multiplication**

Par définition, le produit A x B est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ , et on a :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$$

***Attention !*** En général : A x B ≠ B x A

**Remarques**

On définit la multiplication d'une matrice A par un réel α par : $\alpha\ A = \alpha \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{bmatrix}$

α A est la matrice de l'application linéaire α f

**Propriété**

( $M_2$ , + , • ) est un IR-e.v de dimension 4, et de base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ telle que

$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

***Remarque :***

- L'élément neutre pour la loi + , appelé matrice nulle, est la matrice $0_{M_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- L'élément neutre pour la loi x , appelé matrice unité, est la matrice $1_{M_2} = I_{M_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**5-Matrice inverse**

Si $det\ A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ alors la matrice inverse de A est définir par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Exemple A=$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$

## I. Espace vectoriel

**Exercice 1** :

III- Montrer que $F = \{(x;y) \in IR^2 / 2x - 3y = 0\}$ est un s.e.v. de IR²

IV- E est un plan vectoriel de base $(\vec{i};\vec{j})$. On donne $\vec{e}_1 = \vec{i} - 2\vec{j},\ \vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$

4- Montrer que $(e_1;e_2)$ est une base de E

5- Donner les composantes de $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ dans $(\vec{i};\vec{j})$.

6- Donner les composantes de $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ dans $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

On considère IR² muni de sa base canonique $(\vec{i};\vec{j})$ les vecteurs

$\vec{u} = (m^2 - m) + 2m\vec{j}$ ;

$\vec{v} = (m-1)\vec{i} + (m+1)\vec{j},\ m \in IR$

3- Déterminer m pour que le système $(\vec{u};\vec{v})$ soit : a) lie b) libre

4- On prend m=2

III- Vérifier que $(\vec{u};\vec{v})$ forme une base

IV- Déterminer les composantes de $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ dans $(\vec{u};\vec{v})$

E est un plan vectoriel de base $(\vec{i};\vec{j})$ et f un endomorphisme de e défini par $f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}\ et\ f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ ; $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ tels que $\overrightarrow{u'} = f(\vec{u})$

4- Définir analytiquement f

5- Déterminer le noyau et l'image de f, tout en donnant une base et la dimension de chacun de ces sous espaces

6- On donne $\overrightarrow{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$ $\overrightarrow{e_2} = 2\vec{i} - \vec{j}$

III- Montrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_1})$ est une base de E

IV- Déterminer les composantes de $f(\overrightarrow{e_1})\ et\ f(\overrightarrow{e_2})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_1})$

**Exercice 3** :

I- soit l'espace vectoriel réel IR² muni de la base canonique $(\vec{i};\vec{j})$ soit f = $\{(x;y) \in IR^2 / x - y = 0\}$g= $\{(x;y) \in IR^2 / 2x + y = 0\}$

1) montrer que f est un sous espace vectoriel de IR².

2) Déterminer une base $\overrightarrow{e_1}$ de f et une base $\overrightarrow{e_2}$ de g.

3) montrer que ( $\overrightarrow{e_1}$ ; $\overrightarrow{e_2}$ ) est libre ; en déduire que ( $\overrightarrow{e_1}$ ; $\overrightarrow{e_2}$ ) est une base de IR².

4) soit f un endomorphisme de ir² dont sa matrice par rapport a $(\vec{i};\vec{j})$ est

$$M_{(\vec{i};\vec{j})}^{f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) déterminer l'expression analytique de f dans $(\vec{i};\vec{j})$ .

b) déterminer f( $\overrightarrow{e_1}$ ) et f( $\overrightarrow{e_2}$ ) en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$

c) quelle est alors la matrice de f dans la base ( $\overrightarrow{e_1}$ ; $\overrightarrow{e_2}$ ).

d) calculer det $M_{(\vec{i};\vec{j})}^{f}$ ; qu'en déduire ?

e) déterminer l'inverse de $M_{(\vec{i};\vec{j})}^{f}$.

f) calculer $M_{(\vec{i};\vec{j})}^{f} . M_{(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})}^{f}$.

5) montrer que dans l'espace vectoriel réel ir³ le système $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ tel que $\vec{u}(1;2;-1)$ $\vec{v}(0;1;1)$ et $\vec{w}(1;5;2)$ est lié.

Ii- soit E un plan vectoriel réel, $(\vec{i},\vec{j})$ une base E ; et $f_a$ l'application linéaire de E dans E qui au vecteur $\vec{u}(x,y)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = (1-a)x + ay \end{cases}$ ou a est un réel donne.

1) Ecrire la matrice de $f_a$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ .

pour quelle valeur de a $f_a$ est-elle un isomorphisme de E sur E ?

2) Déterminer, suivant les valeurs de a, l'ensemble des vecteurs de E invariants par $f_a$.

3) on se place dans le cas a = 0

a. Déterminer le noyau ker $f_0$ et l'image im $f_0$ de $f_0$

On rappelle que : $Kerf_0 = \{\vec{u} \in E / f_0(\vec{u}) = 0\}$

im $f_0$ = $\{\vec{u} \in E / \exists \vec{v} \in E, f_0(\vec{v}) = \vec{u}\}$

b. On pose : $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$ .

Montrer que $(\vec{I},\vec{J})$ est une base de E et écrire la matrice $f_0$ dans cette base.

# *Chapitre 8 : TRANSFORMATIONS DU PLAN COMPLEXE*

## 1. ECRITURE COMPLEXE DES ISOMETRIES ET DE L'HOMOTHETIE

### *1.1 Activité*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $M(z)$ , $M'(z')$ , $\Omega(\omega)$ et un vecteur $\vec{u}(a)$ .

1. On suppose que dans cette question $M'$ est l'image de $M$ par la translation de vecteur $\vec{u}$. On rappelle que $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ , donne une relation entre $z, a$ et $z'$.
2. On suppose dans cette question que $M'$ est l'image de $M$ par la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ .
   a) Donne une interprétation géométrique de $arg\frac{z'-\omega}{z-\omega}$
   b) On rappelle que $r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ mes(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta\end{cases}$, donne la valeur $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right|$ , un argument de $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ puis la forme exponentielle de $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$
   c) Déduire une expression entre $z, z', \omega$ et $\theta$
3. On suppose dans cette question que $M'$ est l'image de $M$ par la symétrie de centre $\Omega$ .
   On rappelle que $S_\Omega(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$
   Donne une relation entre $z, z'$ et $\omega$
4. On suppose que $M'$ est l'image de $M$ par l'homothétie $h$ de centre $\Omega$ et de rapport $k$ non nul
   On rappelle que $h(k,\Omega)(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$, donne une relation entre $z', z, \omega$ et $k$.

### *1.2 Résolution*

1. Puisque $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ , on a : $z'-z=a \Leftrightarrow z'=z+a$ (cette dernière est l'écriture complexe de la translation $t$)
2. 
   a) $arg\frac{z'-\omega}{z-\omega}=mes(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
   b) $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1$ , $Arg\frac{z'-\omega}{z-\omega}=mes(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$ donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta}$
   c) $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta} \Leftrightarrow z'-z=e^{i\theta}(z-\omega)$ (Cette dernière est l'expression complexe de la rotation $r$)
3. Puisque $S_\Omega(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$, on a : $z'-\omega=-(z-\omega)$ (cette dernière est l'expression complexe de la symétrie $S$)
4. Puisque $h(k,\Omega)(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ alors on a : : $z'-\omega=k(z-\omega)$ (cette derniere est l'expression complexe de l'homothétie $h$)

### *1.3 Résume*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. L'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$ est de la forme : $z'=z+b$

2. L'écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$ est de la forme $z' - z = e^{i\theta}(z - \omega)$
3. L'écriture complexe d'une symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$ est de la forme $z' - \omega = -(z - \omega)$
4. L'écriture complexe d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k$ ( non nul) peut s'écrire de la forme $z' - \omega = k(z - \omega)$

### *1.4 Exercice d'application*

Soit les points $\Omega(-2,1)$, $A(1,-1)$ , $B(1,1)$ et le réel $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Dans chacun des cas :

a) Donner l'écriture complexe de la transformation

b) Donner l'image du point $A$ ainsi que l'image de la droite $(AB)$

Cas 1 : Symétrie de centre $\Omega$

Cas 2 : Homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-\frac{1}{4}$

Cas 3 : La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$

Cas 4 : La symétrie orthogonale d'axe $(AB)$

***Remarque***

1. On peut également donner l'écriture complexe d'une symétrie orthogonale en suivant les étapes suivantes :

On suppose que $M'$ est l'image de $M$ par la symetrie orthogonale d'axe $(D)$ notée $S_{(D)}$et on pose $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

a) Donner l'expression analytique $S_{(D)}$

b) En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ , exprimer $z'$ en fonction $\bar{z}$

2. On remarquera que l'écriture complexe d'une symétrie orthogonale est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

***Exemple*** (Cas particuliers)

Soit $M(z)$ , $M'(z')$ et $H(h)$ trois points du plan complexe. On suppose que $M'$ est l'image de $M$ par la symetrie orthogonale d'axe $(D)$ notée $S_{(D)}$, $H$ le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $(D)$ et on pose $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$.

$$S_{(D)}(M) = M' \iff \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$$

$$\iff \begin{cases} x' - h_1 = -(x - h_1) \\ y' - h_2 = -(y - h_2) \end{cases} (1)$$

1. Si $(D)$ est l'axe de abscisses

On a : $h_1 = x$ et $h_2 = 0$ donc $(1)$ devient $\begin{cases} x' - x = -(x - x) \\ y' - 0 = -(y - 0) \end{cases}$

Soit $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ D'où $z' = x - iy = \bar{z}$

Donc l'écriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisse est : $z' = \bar{z}$

2. Si $(D)$ est l'axe des ordonnées

On a : $h_1 = 0$ et $h_2 = y$ donc $(1)$ devient $\begin{cases} x' - 0 = -(x - 0) \\ y' - y = -(y - y) \end{cases}$

Soit $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ D'où $z' = -x + iy = -\bar{z}$ donc $z' = -\bar{z}$

## 2. SIMILITUDE DIRECTE PLANE

### *2.1 Définition*

Une ***similitude*** est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

***Remarque***

Une **similitude est dite directe** si l'isométrie est un déplacement et elle est dite indirecte si l'isométrie est un antidéplacement.

***Exemple***

a) Une translation et une rotation sont des similitudes directes
b) Une symétrie orthogonale est une similitude indirecte

### *2.2 Propriété*

Toute similitude directe $s$ du plan dans lui-même a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

***Preuve***

Puisque $s$ est une similitude directe du plan, elle est le composé d'un déplacement (translation ou rotation) et d'une homothétie.

D'après le point 1. Du résumé précèdent

. L'expression complexe d'un déplacement est de la forme : $z' = e^{i\alpha}z + c$ (si $\alpha = 2k\pi$ on a une translation sinon on a une rotation qu'on peut caractériser) avec $c \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

. L'expression complexe d'une homothétie $h$ de rapport $k$ est de la forme : $z' = kz + d$ avec $d \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

Ainsi l'expression complexe de $r \circ h = h \circ r$ est de la forme : $z' = e^{i\alpha}(kz + d) + c = ke^{i\alpha}z + de^{i\alpha} + c$ en posant $a = ke^{i\alpha}$ et $b = de^{i\alpha} + c$ on a bien $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

Et $z' = az + b$ d'où le résultat

***Remarque***

a) On dira que $\Omega(\omega)$ est un point invariant (lorsqu'il existe ) s'il est solution de l'équation : $z = az + b$ autrement dit lorsque $a \neq 1$ , on a un unique point invariant $\Omega(\frac{b}{1-a})$
b) Si $a = 1$ , on a une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
c) Si $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ , on a une homothétie de rapport $k$ et de centre l'unique point invariant $\Omega(\omega)$
d) Sinon on calcule $|a|$
   1. Si $|a| = 1$ , on a une rotation de centre l'unique point invariant $\Omega$ et d'angle $\mathrm{Arg}(a)$
   2. Si $|a| \neq 1$, on a une similitude directe plane de centre l'unique point invariant $\Omega(\omega)$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \mathrm{Arg}(a)$.

### *2.3 Exercice d'application*

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le pont $M'(z')$

a) $z' = (1+i)z$

b) $z' = (\sqrt{3}-i)z + 1 + i(\sqrt{3}-i)$

c) $z' = -2z + i$

2. donner l'écriture complexe de la similitude directe plane qui transforme les points $A(\frac{1}{2}+i)$ et $B(i)$ respectivement en $C(1)$ et $D(1+i)$

3. Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega(1+i)$ , d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et de rapport $k = \sqrt{2}$

### *2.4 Propriétés*

Soit $s$ et $s'$ deux similitudes directes planes d'angles respectifs $\alpha$ et $\alpha'$, de rapport respectifs $k$ et $k'$.

a) $s \circ s'$ est une similitude de rapport $kk'$ et d'angle $\alpha + \alpha'$

b) La réciproque $s^{-1}$ de $s$ est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$

***Preuve (indications)***

a) Il suffit de considérer les écritures complexes de $s$ et $s'$ puis chercher $s \circ s'$

b) Considérer l'expression complexe de $s$, exprimer $z$ en fontion de $z'$ puis conclure

***Exercice d'application***

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe ,puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations ${s_1}^{-1}$ et $s_1 \circ s_2$

a) $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ et $s_2 : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - \frac{1}{2}i$

b) $s_1 : z' = (1-i)z + 1 + i$ et $s_2 : z' = -2z$

***Remarques et rappels***

1. Considérons une similitude $s$ de centre $\Omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $k$.

$M$ , $N$ ,$M'$ et $N'$ des points distincts du plan.

a. $s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ Mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases}$

b. $\begin{cases} s(M) = M' \\ s(N) = N' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M'N' = kMN \\ Mes(MN, M'N') = \theta \end{cases}$

c. La similitude conserve la configuration géométrique c'est-à-dire , l'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment de longueur $l$ est un segment de longueur $|k|l$, l'image d'un quadrilatère d'aire $A$ est un quadrilatere de meme nature et d'aire

$k^2A$, l'image d'un solide de volume $V$ est un solide de même nature et de volume $|k^3|V$

2.L'ecriture complexe d'une similitude indirecte plan est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

## *3. EXERCICE D'INTEGRATION ET DE DEMONSTRATION*

A- $ABC$ est un triangle de sens direct, rectangle et isocèle en $A$ ;$A'$ le symetrique de $A$ par rapport à $C$.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $s$ telle que $s(A') = C$ et $s(C) = B$
2. Déterminer l'image par $s$ de la droite $(AC)$
3. Soit Ω le centre de $s$. Démontrer que $\Omega CB$ est un triangle rectangle et isocèle ; construire Ω

B- Soit $ABCD$ un carré de coté 1 et de sens direct, $I$ le milieu de $[CD]$ . Déterminer d'une méthode géométrique puis d'une méthode algébrique la similitude $s$ telle que $s(I) = B$ et $s(D) = C$

C- Soit $f$ l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1. Déterminer l'expression complexe de $f$
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f$
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f^{-1}$ ainsi que son expression analytique
4. Déterminer l'image du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$ ainsi que son aire

Proposé par ***WAFO W. Calvin***

# CHAPITRE : LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## 1. OBJECTIFS

A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de :

- Appliquer les propriétés analytiques et algébriques de la fonction logarithme népérien ;
- Résoudre les équations et inéquations comportant ln ;
- Etudier une fonction ln.

## 2. ACTIVITE PREPARATOIRE

**Activité :** Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

Avec nos connaissances actuelles sur le calcul des primitives, trouvez une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$

**Solution :**

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{(1-1)x^{1-1}}+c\ (avec\ c\in\mathbb{R})$$

$$=-\frac{1}{0}+c\ (impossible)$$

On ne peut pas trouver une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$ avec nos connaissances actuelles. La fonction $f$ étant continue sur $]0;+\infty[$, il existe une fonction dont la dérivée est $\frac{1}{x}$. Cette fonction est appelée **fonction** logarithme népérien.

## 3. DEFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique fonction $f$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifiant $f(1)=0$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}$. ln est la primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$\forall x>0,\ lnx=\int_1^x\frac{1}{t}dt$$

## 4. PROPRIETES ALGEBRIQUES ET ANALYTIQUES

## 4.1. Propriétés algébriques

$\forall a > 0 \text{ et } b > 0, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$

$\forall a > 0, \ln\frac{1}{a} = -\ln(a).$

$\forall a > 0 \text{ et } b > 0, \ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b).$

$\forall a > 0 \text{ et } n \in \mathbb{Q}, \ln(a^n) = n\ln(a).$

$\forall a > 0, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$

**NB :** Pour tout réel $x$, $\ln(e^x) = x$. Pour tout réel $x$ strictement positif, $e^{\ln x} = x$

***EXERCICE D'APPLICATION***

*Simplifier les expressions suivantes :* $A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ ; $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ ; $C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$ ; $D = \ln e^3 - 2(3\ln\sqrt{e} + \ln e^{3/4})$

## 4.2. Propriétés analytiques

• La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x > 0, (\ln x)' = \frac{1}{x}$

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

• Limites aux bornes du domaine :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

• Théorème de croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Nombre dérivé en 1 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

## 5. RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

$\forall a \in \mathbb{R}$ , l'équation $\ln(x) = a$ a une solution et une seule.

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$ $(\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b)$. $\forall x > 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$, $(\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b)$. $\forall x > 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ $\ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a$.

***EXERCICE D'APPLICATION***

*Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes*

$a)$ $\ln(3x+1) = \ln(x-4)$

$b)$ $\ln(x^2-5) = \ln x + 2\ln 2$

$c)$ $\ln(x+2) - \ln 5 = 2\ln 3 - \ln(x-2)$

$g)$ $\ln(2x-1) \leq \ln(-x+2)$

$d)$ $2(\ln x)^3 - 4\ln x^2 = -4 + (\ln x)^2$

$e)$ $\ln(x^2-4) > \ln(4x-1)$

$f)$ $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 \leq 0$

## 6. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME

- Domaine de définition de la fonction logarithme népérien $D_f = ]0; +\infty[$
- Quelques limites avec « ln »

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\ln x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

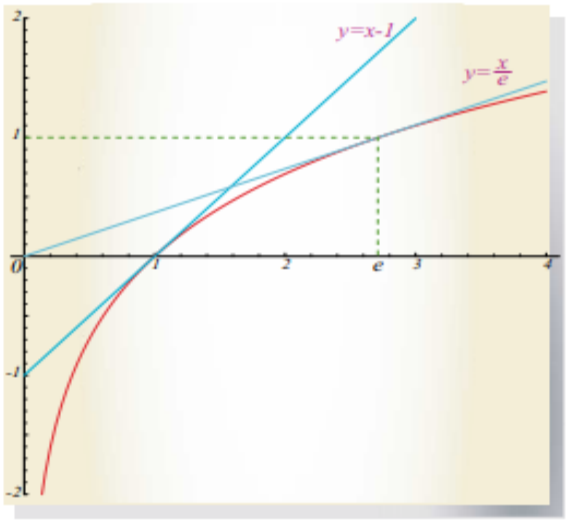
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. $\forall x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
  Donc la fonction $x \mapsto \ln x$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.
- Tableau de variations

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

***Conséquence :*** *il existe un nombre et un seul noté* ***e*** *tel que* $\ln e = 1$. *Une valeur approchée de* ***e*** *est* $e \sim 2{,}71828$

- Représentation graphique




Remarque :

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ est la droite d'équation $y = x - 1$

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x = e$ est la droite d'équation $y = \frac{x}{e}$ ( cette droite passe par le point O)

## 7. LOGARITHME ET FONCTIONS COMPOSEES

### 7.1. Dérivée logarithmique

Soit $U$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. On suppose que U garde un signe constant sur $I$ et $\forall\, x \in I, U(x) \neq 0$

On suppose que $U$ est positive sur $I$ alors, la fonction $\ln U$ est dérivable sur $I$ et $\forall\, x \in I$,

$(\ln U)'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Si $U$ est négative sur $I$ alors $-U$ est positive sur $I$ et $\forall\, x \in I$, $(\ln(-U))'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Ainsi $\forall\, x \in I, (\ln|U|)'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

### 7.2. Primitives de $f: x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$

Les primitives de $f : x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$ sont les fonctions $\boldsymbol{F : x \to \ln|U(x)| + k\ (k \in \mathbb{R})}$

## EXERCICES D'APPLICATION

***Exercice 1 :***

*1) Déterminer une primitive de $f$ sur $I$ dans chacun des cas suivants :*

*a)* $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ $\qquad I = ]-\infty; +\infty[$

*b)* $f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}}{x^2-5x+6}$ $\qquad I = ]-\infty; 2[$

*2) Déterminer la primitive de $f$ sur $I = ]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en $x_0 = 2$*

$f(x) = 3 - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$

***Exercice 2 :***

*Soit la fonction* $f(x) = -x + 1 + \ln(-2x)$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de $f$*
2) *Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition*
3) *Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations*
4) *Ecrire une équation de la tangente à $(C)_f$ au point d'abscisse $x_0 = -\frac{1}{2}$*
5) *Justifier que (D) : $x = 0$ est asymptote verticale à $(C)_f$*
6) *Tracer $(C)_f$*

***Exercice 3 :***

*On considère la fonction :* $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

*a) Déterminer le domaine de définition de $f$ et calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine*
*b) Montrer que l'on peut réduire l'étude de $f$ à $[0; +\infty[$*
*c) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations*
*d) construire $(C)_f$*

### 7.3. Autres fonctions logarithmiques

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\boldsymbol{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}}$ est appelé **logarithme de base $a$** $(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$

La fonction $log$ est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$

**Remarque :** Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée $\log_{10}(x)$ est définie par : $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

- **En chimie :** Le pH d'une solution aqueuse est égal à : $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration de la solution en ions $H_3O^+$ (en $mol.L^{-1}$).
  Exemple : La concentration en ions $H_3O^+$ d'une solution dont le pH est égal à 7 a pour logarithme décimal −7 elle vaut donc $10^{-7}$. Si le pH augmente de 1, il devient égal à 8, le logarithme de la concentration diminue de 1, il devient −8, la concentration est égale à $10^{-8}$. Ainsi, si le pH augmente de 1, la concentration est divisée par 10 et, si le pH diminue de 1, la concentration est multipliée par 10.
- **Intensité de certains phénomènes naturels** : L'intensité d'un séisme, la luminosité d'une étoile, l'intensité d'un son sont des grandeurs pour lesquelles les unités de mesures utilisent les logarithmes décimaux. En effet, on a observé que nos sens perçoivent un signal proportionnellement au logarithme de son intensité. L'exemple le plus quotidien est le décibel qui sert à mesurer l'intensité du son de nos baladeurs…

**NB :** Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimale sont analogues à celles de la fonction logarithme népérien.

## ***T.A.F A LA MAISON***

***Activité 1***

***Partie A :*** *Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$*

1) *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$*
2) *Calculer $g'(x)$. Dresser, alors, le tableau de variations de $g$.*
3) *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$. $(\alpha < \beta)$*
4) *Que vaut $\beta$ ? Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-3}$.*
5) *Donner le signe de $g(x)$ en fonction de $x$.*

***Partie B :*** *Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2(\ln(x) - 1) + x$*

1) *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$*
2) *Montrer que : $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $10^{-2}$ près.*
3) *Montrer que pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$ : $f'(x) = x.g(x)$*
4) *Dresser le tableau de variation de $f$*

***Activité 2 :***

*Soient $f$ la fonction définie sur $I = ]4;+\infty[$ par : $f(x) = -x + 3 + \frac{1}{2}\ln(\frac{x-4}{x-2})$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.*

*Étudier les limites de $f$ aux bornes de $I$.*

*Montrer que : $f'(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-4)(x-2)}$*

*Dresser le tableau de variation de $f$.*

*Soit $(D)$ la droite d'équation $y = -x + 3$. Etudier les positions relatives de la courbe $(C)$ et de la droite $(D)$. Représenter sur un même graphique la courbe $(C)$ et de la droite $(D)$.*

***Activité 3***

*Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n \ln x$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

1) *Montrer que $f_n$ est continue en 0. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$*
2) *Dresser le tableau de variation de $f_n$.*
3) *Sur un même graphique, tracer $(C_1)$, $(C_2)$ et $(C_3)$*
4) *Démontrer que toutes les courbes $(C_n)$, passent par 2 points fixes O et A.*
5) *Démontrer que toutes les courbes admettent en A la même tangente.*

***Activité 4***

*On considère la fonction $f$ définie sur $]-2; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$*

*a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition*

*b) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$.*

*c) Déterminer le sens de variation de la fonction $f$.*

*d) Tracer sa courbe représentative.*

***Activité 5***

***Partie I :*** *On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$*

*1) Etudier le sens de variation de g*

*2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$*

***Partie II :*** *On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique : 2 cm)*

*1) Déterminer la limite de $f$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.*

*2) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à $(\Delta)$ sur $]0; +\infty[$. Montrer que $(\Delta)$ coupe (C) en un point A que l'on précisera*

*3) Etudier le sens de variation de $f$. Dresser le tableau de variation de $f$*

*4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe $(C)$ où la tangente $(T)$ est parallèle à $(\Delta)$. Préciser les coordonnées du point B*

*5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha$. Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de $\alpha$. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à $(C)$ au point d'abscisse $\alpha$ est supérieur à 1. On admettra que*

$0{,}31 < \alpha < 0{,}35$

*6) Représenter succinctement la courbe $(C)$ et les droites $(T)$ et $(\Delta)$*

***Activité 6***

***Partie I :*** *La fonction f est définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$

*1) Etudier le sens de variations de $f$. Calculer les limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de $f$.*

*2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $l$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier $n$ tel que $l \in ]n; n+1[$*

*3) Déterminer le signe de $f(x)$*

***Partie II :*** *La fonction g est définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $g(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \ si \ x > 0 \end{cases}$

*1) Montrer que la fonction $g$ est continue en 0. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$*

*2) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xf(\frac{1}{x})$*

*3) Montrer que $g(l) = \frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de $g$.*

*4) Donner les équations des tangentes à la courbe $\Gamma$ représentative de $g$ aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.*

*5) Représenter succinctement $\Gamma$ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

***Activité 7***

*Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par* $f(x) = x^2(\ln x - \frac{3}{2})$ *si* $x > 0$ *et* $f(0) = 0$

*1) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0. $f$ est-elle dérivable en 0 ?*

*2) Etudier le sens de variations de $f$ et étudier la limite de f en $+\infty$*

*3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$*

*4) Soit $T$ la tangente à la courbe représentative (C) de $f$ au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de $T$ .*

*5) Tracer la courbe représentative (C) de $f$ et la droite $T$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

*6) Soit $\lambda \in ]0; e]$ . On pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} f(x)\,dx$*

*a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in ]0; e]$*

*b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0*

*c) En déduire l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives ( $x = 0$) et ( $x = e$ )*

***Activité 8***

*Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x\ln(|x|)$*

*1) Donner le domaine de définition D de la fonction $f$ ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier leslimites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout $x$ de D la dérivée de $f$ (si elle existe !)*
*2) On étudie, pour cette question, le cas $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda) = 0$ ; montrer que l'on a ; $0{,}3 \leq \lambda \leq 0{,}4$ (on pourra utiliser le fait que le réel $e$ tel que $\ln e = 1$ vérifie $2{,}5 \leq e \leq 3$*

*3) En déduire le tableau de variations de $f$ (sur D)*

*4) Déterminer une primitive de $g$ définie par $g(x) = \ln(x)$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille*

*ISOMETRIE DU PLAN*

*APPLICATIONS AFFINES*

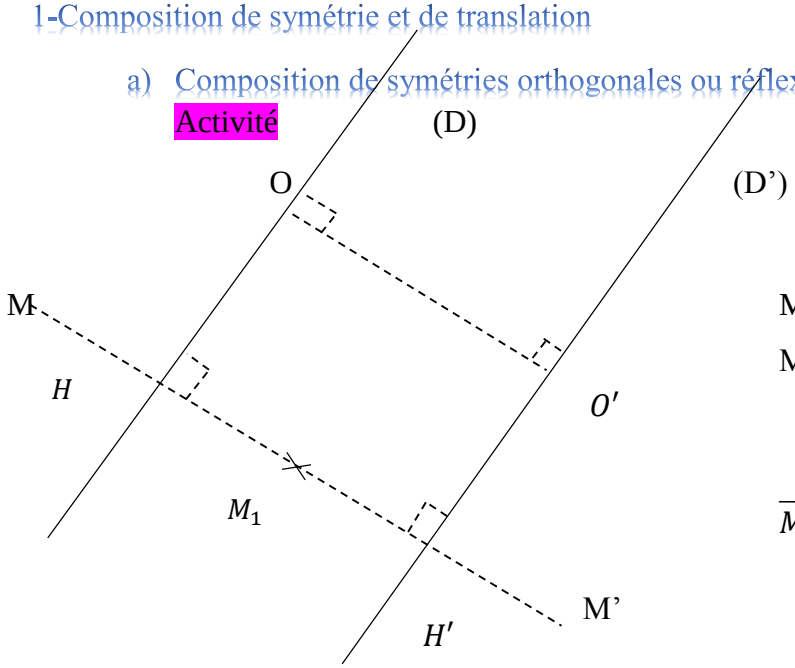
## I- COMPOSITION D'ISOMETRIES

Une isométrie est une application qui conserve les distances, les produits scalaires. Exemple : Symétrie Orthogonale, Rotation, Translation, Symétrie Centrale.

### 1-Composition de symétrie et de translation

#### a) Composition de symétries orthogonales ou réflexion

Activité




$M_1 = S_{(D)}(M)$ et $M' = S_{(D')}(M_1)$

$M' = S_{(D')}[S_{(D)}(M)]$

$= S_{D'} \circ S_D(M)$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M1M'}$

$= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M1H'}$

$= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M1H'})$

$= 2\overrightarrow{HH'}$

$= 2\overrightarrow{OO'}$

Donc $M' = t_{2\overrightarrow{oo'}}(M)$

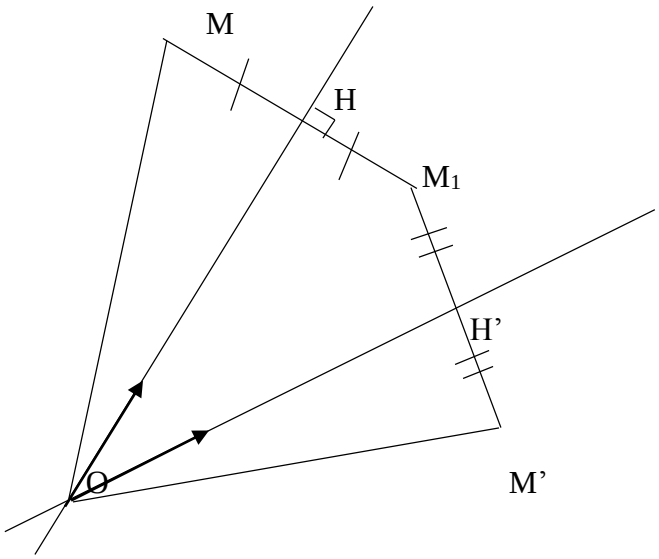
D'où $S_{D'} \circ S_D(M) = t_{2\overrightarrow{oo'}}$

**Propriété 1 :**

Soient (D) et (D') deux droites parallèles. O un point de (D) et O' son projeté orthogonal sur (D'). La composée $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ des symétries $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$

$$S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{2\overrightarrow{oo'}}$$

**Activité 2 :**




$M_1 = S_{(D)}(M)$ et $M' = S_{(D')}(M)$

$M' = S_{(D')}(M_1)$

$= S_{(D')}[S_{(D)}(M)]$

$= S_{(D')\,O}\, S_{(D)}(M)$

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$

$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM1}, \overrightarrow{OM'}})$

$= 2(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM1}, \overrightarrow{OH'}})$

$= 2[(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{M1H}, \overrightarrow{OH'}})]$

$= 2(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}})$

$= 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}})$

D'où $M' = r(O, 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}))$

Ainsi $S_{D\,O}\, S_{D'} = r(O, 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}))$.

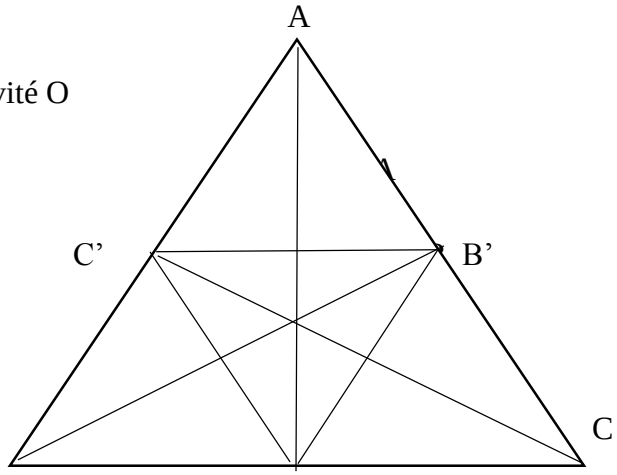
Propriété 2 :

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. La composée $S_{D\,O}\, S_{D'}$ des symétries orthogonales $S_D$ et $S_{D'}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}})$.

$$S_{D\,O} S_{D'} = r(O; 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}))$$

Exemple :

ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O




$S_{(AB)} \circ S_{(A'B')} = t_{2\vec{\imath c}} = t_{\overrightarrow{cc'}}$

$S_{(A'C')} \circ S_{(AC)} = t_{2\overrightarrow{BK}} = t$

$S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r(A; 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})) = r(A; \frac{2}{3}\pi)$

$S_{(AB)} \circ S_{(A'C')} = r(C'; 2(\widehat{\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}})) = r(C'; -\frac{2}{3}\pi)$

$S_{(BB')} \circ S_{(AC)} = r(B'; 2(\widehat{\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BB'}})) = r(B'; 2x(\frac{\pi}{2}))$

$= r(B'; \pi) = S_{B'}$

$S_{(A'C')} \circ S_{(OA)} = r(A'; 2(\widehat{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}})) = r(A'; 2x(\frac{1}{6}\pi)$

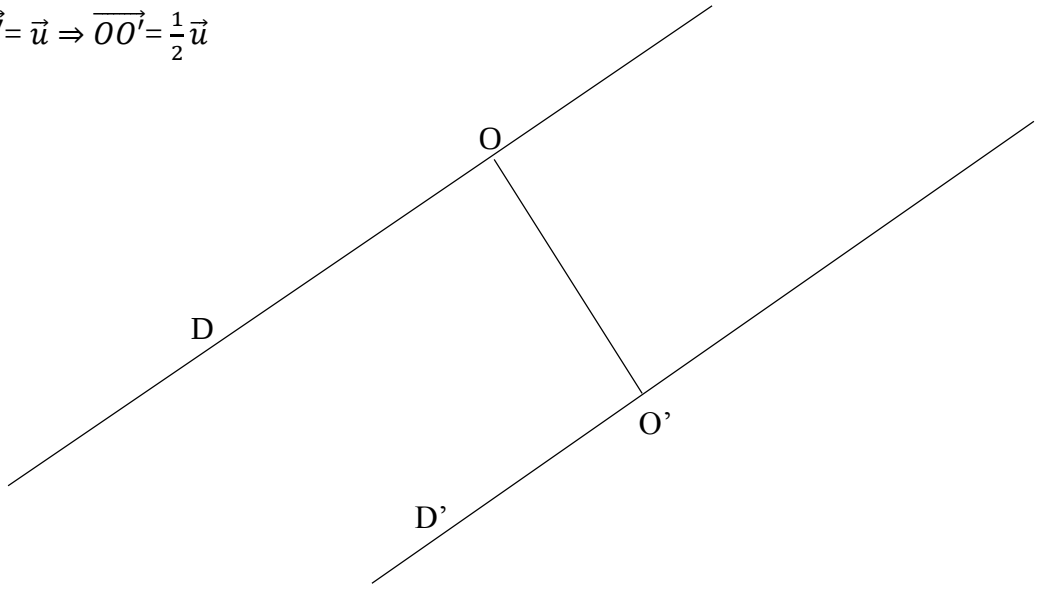
$= r(A'; \frac{1}{3}\pi)$

## b) Décomposition de translation en de rotation

Activité

Soient (D) et (D') deux droites parallèles telles que $S_{D'} \circ S_D = t_u$. Soient $O \in (D)$ et O' son projeté orthogonal sur (D'). On a : $S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{OO'}}$

D'où $2\overrightarrow{OO'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\vec{u}$

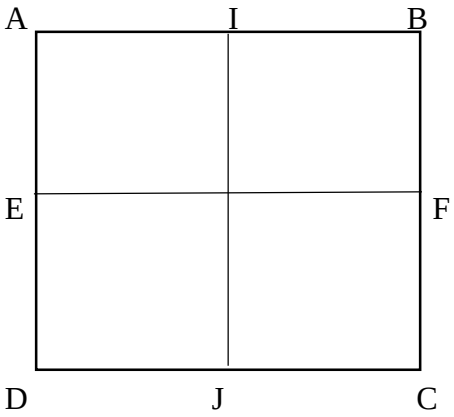


Ainsi (D') est l'image de (D) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $\vec{u}$ est un vecteur normal à (D).

Propriété 1 :

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Pour toute droite (D) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (D') et une seule telle que $S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{\vec{u}}$. On a : (D') = $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ (D) ou D = $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$(D').

Exemple : ABCD est un carré




$t_{(AB)} = S_{(IJ)} \circ S_{(AD)}$

$= S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$

$t_{(AD)} = S_{(EF)} \circ S_{(AB)}$

$= S_{(DC)} \circ S_{(EF)}$

Propriété

Soit $t_{\vec{U}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Pour toute droite (D) et de vecteur directeur $\vec{u}$, il existe une droite (D') et une seule telle que $S_{D''} \circ S_D = t_{\vec{U}}$.

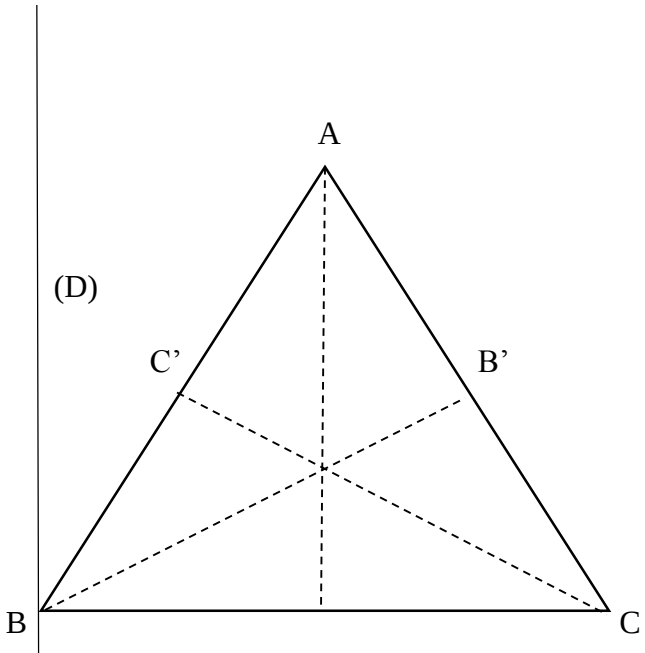
On a : (D') = $t_{(\frac{1}{2}\vec{u})}$ (D) et (D) = $t_{(-\frac{1}{2}\vec{u})}$ (D').

Exercice :

Soit ABC un triangle équilatéral et A' ; B' et C'les milieux respectifs de [BC] ; [AC] et [AB].
Déterminer la droite (D) telle que : $S_{(AA')} \circ S_{(D)} = t_{\overrightarrow{BC}}$

(D) = $t_{(-\frac{1}{2}BC)}$ (AA')

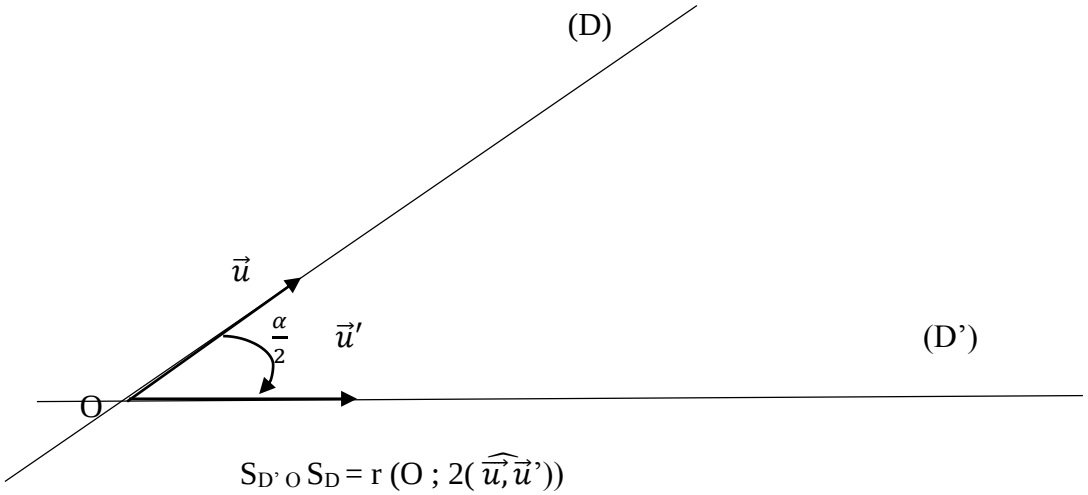
= $t_{(\frac{1}{2}CB)(AA')}$



A’

## Activité 2 :

Soient (D) et (D’) deux droites sécantes en un point O. On a :




$S_{D' O} S_D = r (O ; 2(\widehat{\vec{u},\vec{u}'}))$

$S_{(D' O} S_D = r(O; \alpha)$.  D’où $2(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}) = \alpha + 2k\pi$

$(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}) = \frac{\alpha}{2} + k\pi$

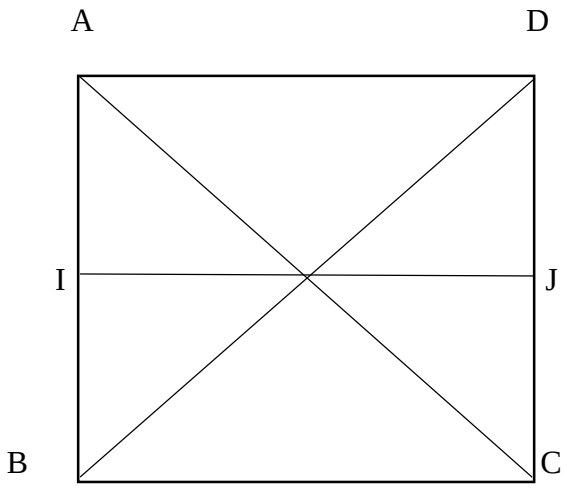
Donc (D’) est l’image de (D) par la rotation de centre O et d’angle $\frac{\alpha}{2}$

## Propriété

Soit r(O ; α) une rotation de centre O et d’angle α. Pour toute droite (D) passant par O, il existe une droite (D’) et une seule telle que $S_{D' O}S_D = r(O ; \alpha)$

(D’)= r(O ; $\frac{\alpha}{2}$) (D) et (D)= r(O ;- $\frac{\alpha}{2}$) (D’).

Exemple : Soit ABCD un carré



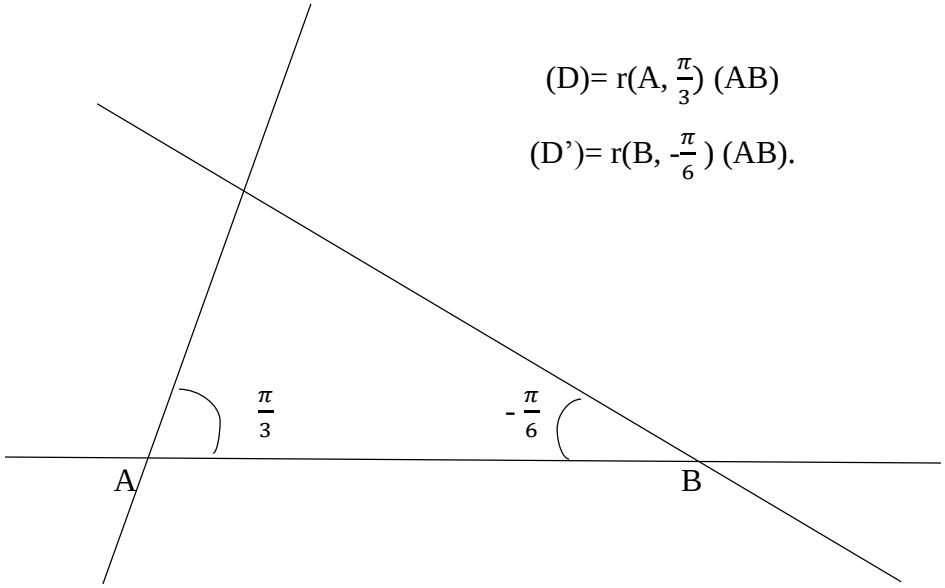

$r(B,\frac{\pi}{2}) = S_{(BD) O}S_{(BC)}$

$= S_{(AB) O}S_{(BD)}$.

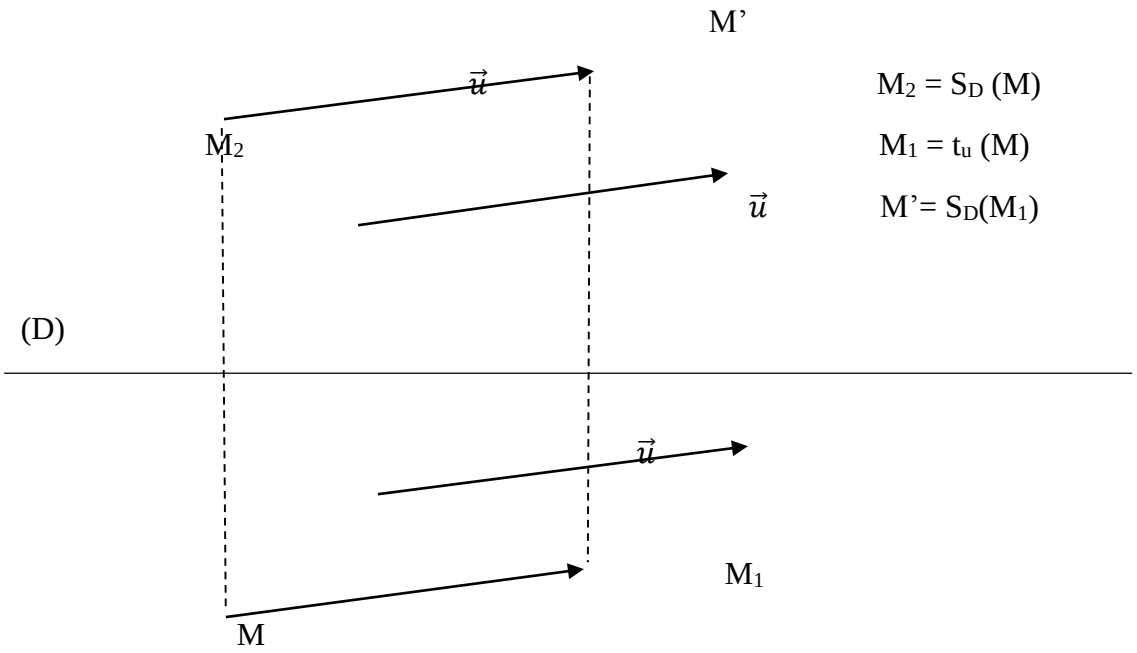
## Exercice

A et B sont deux point distincts.

1- Déterminer et construire la droite (D) tels que r(A, $\frac{\pi}{2}$) = $S_{(D)} \circ S_{(AB)}$
2- Déterminer et construire le point (D') tels que r'(B, $\frac{\pi}{3}$) = $S_{(AB)} \circ S_{D'}$




c) Composition d'une symétrie orthogonale et d'une translation




M'= $t_u (M_2) = t_u [S_D (M)] = t_u \circ S_D (M)$

M'= $S_D (M_1) = S_D [t_u (M)] = S_D \circ t_u (M)$

D'où $t_u \circ S_D = S_D \circ t_u$

- Points invariants de $S_D \circ t_u$ ($\vec{u} \neq 0$)

Soit M un point invariant de $S_D \circ t_u$. On a :

$S_D \circ t_u(M) = M \Leftrightarrow S_D \circ S_D \circ t_u (M) = S_D (M)$

$\Leftrightarrow t_u(M) = S_D (M)$

On pose M'= $t_u$ (M) = $S_D$(M) on a :

$\overrightarrow{MM'}= \vec{u}$ et $\vec{u}$ est médiatrice à [MM'] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}= \vec{u}$ et $\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{u}$ (impossible car $\vec{u} \neq \vec{0}$)

Donc $S_D$ o $t_u$ n'admet pas de point invariant

Définition :

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle symétrie glissée d'axe (D), la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la translation de vecteur $\vec{u}$. ON a : $t_u$ o$S_D$ = $S_D$ o $t_u$

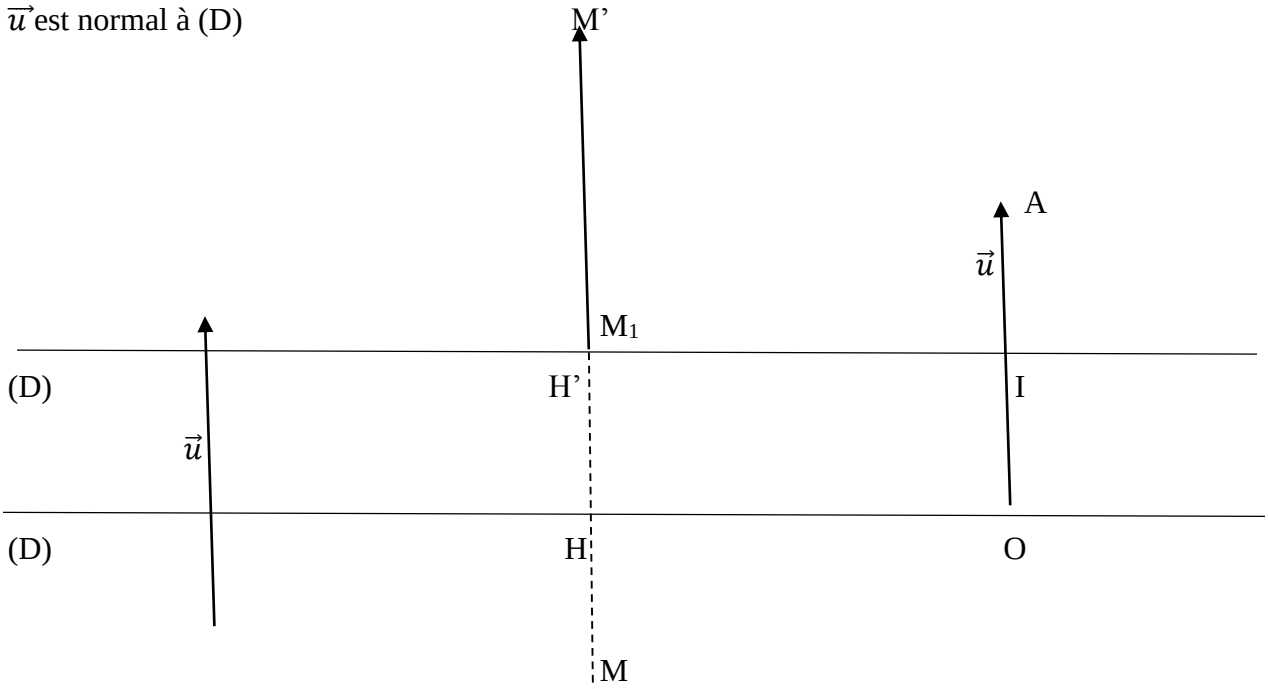
Propriété :

Une symétrie glissée n'admet pas de point invariant.

- Nature de la composée d'une symétrie glissée et d'une translation

Activité 1 :

$\vec{u}$ est normal à (D)




M'= $t_u$ o $S_D$ (M) ; $\overrightarrow{OA}= \vec{u}$ et I est le milieu de [OA]. On a:

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M1M'}= 2\overrightarrow{MH} + \vec{u}$

$= 2\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'}$

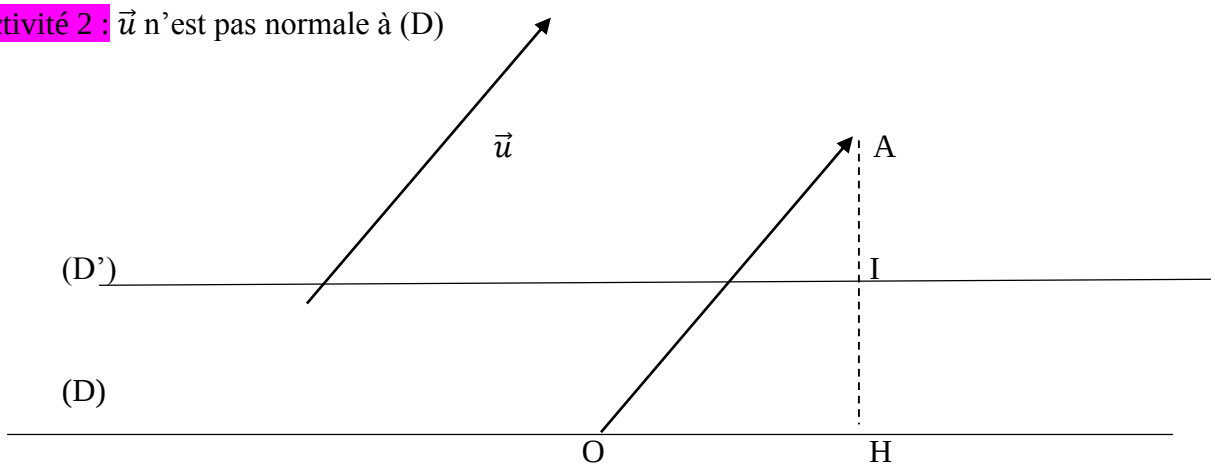
$= 2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HH'})$

$= 2\overrightarrow{MH'}$

Donc M'= $S_{D'}$ (M)

Ainsi $t_u$ o $S_D$= $S_{D'}$

Activité 2 : $\vec{u}$ n'est pas normale à (D)




O∈ (D) ; A ∈ $(\mathcal{P})$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. H est le projeté orthogonal de A sur (D) et I milieu de [AH]

$S_{D'} \circ S_D = t_{2HI} = t_{HA}$ ; $t_u \circ S_D = t_{OH+HA} \circ S_D$

$= t_{OH} \circ t_{HA} \circ S_D$

$= t_{OH} \circ S_{D'} \circ S_D \circ S_D$

$= t_{OH} \circ S_{D'}$

Donc $t_u \circ S_D$ est la symétrie glissée d'axe (D') et de vecteur $\overrightarrow{OH}$

Propriété :

Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul

- Si $\vec{u}$ est normale à (D), alors $t_u \circ S_D$ est une symétrie orthogonale,
- Si $\vec{u}$ n'est pas normale à (D), alors $t_u \circ S_D$ est une symétrie glissée.

3- Composition de rotations et de translations

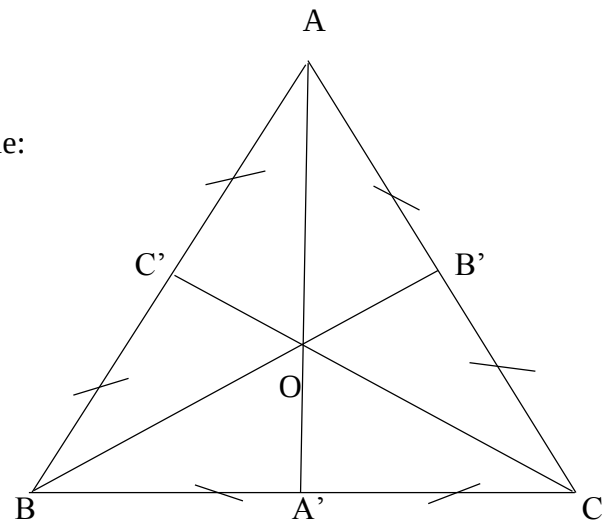
a)Composée de rotations

Propriété :

Soient r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α'.

- Si α+α' ≠ 0, alors $r \circ_O r'$ est une rotation d'angle α+α'
- Si α+α = 0, alors $r \circ_O r'$ est une translation

Exemple:



- $r(O, \frac{\pi}{3}) \circ r(A, -\frac{\pi}{3})$ est une translation t. $t(A) = r(C, \frac{\pi}{3})(A) = B \Rightarrow t = t_{AB}$

- $r(B, \frac{2}{3}\pi) \circ r(C, \frac{2}{3}\pi) = S_{(BA)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(CA)} = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

D'où $r(B, \frac{2}{3}\pi) \circ r(C, \frac{2}{3}\pi)$ est une rotation de centre A et d'angle $\alpha = \frac{4}{3}\pi$

- $r(A, \frac{2}{3}\pi) \circ r(B, \frac{\pi}{3})$ est une rotation d' angle $\pi$ ou une symétrie centrale.

$S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BB')}$

$S_{(AC)} \circ S_{(BB')}$ est une rotation de centre B' et d'angle $\pi$ ou une symétrie de centre B'.

Remarque :

Pour déterminer la composée de $r(B, \frac{\pi}{2}\beta) \circ r(A,\alpha)$ de deux rotations de centres distincts A et B, on peut utiliser les droites (D) et (D') telles que $r(B, \beta) = S_{D'} \circ S_{(AB)}$ et $r(A,\alpha) = S_{(AB)} \circ S_{D'}$

On aura $r(B,\beta) \circ r(A, \alpha) = S_{D'} \circ S_D$.

b) Composée d'une rotation et d'une translation

Propriété :

Soit r une rotation d'angle non nul $\alpha$ et t une translation, $t \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha$. $r \circ t$ est aussi une rotation d'angle $\alpha$. En générale $t \circ r \neq r \circ t$.

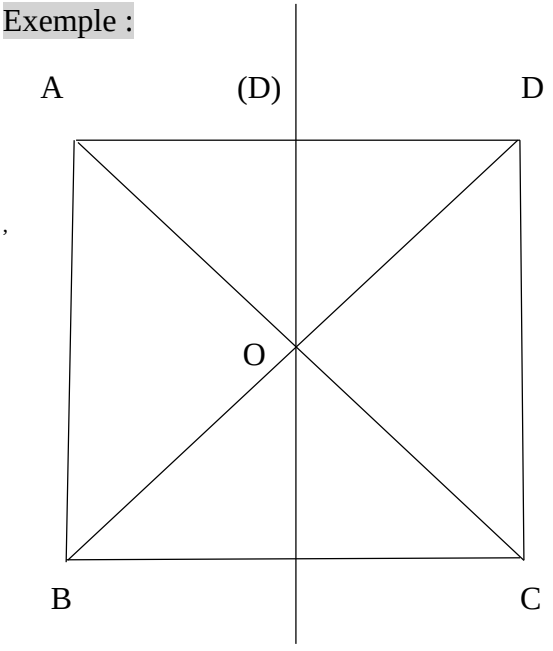
NB : Pour déterminer la composée de $t_u \circ r$ (O, $\alpha$) d'une rotation et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul, on peut utiliser les droites (D) et (D') telles que :

- (D) est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$
- , $t_u = S_{D'} \circ S_D$ et $r(O, \alpha) = S_D \circ S_{D'}$

On a : $t \circ r = S_{D'} \circ S_D$.

Respectivement $r(O, \alpha) \circ t_u$ $r = S_{D'1} \circ S_{D1}$ et $t_u = S_{D1} \circ S_{D1}$

Exemple :




,

$r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{CB}$ est un quart de tour direct

$= S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_D$

$= S_{(AC)} \circ S_D$ or $(AC) \cap (D) = \{0\}$

D'où $r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{(CB)} = r(O; \frac{\pi}{2})$

## II- Classification des isométries du plan

### 1- Classification à l'aide des points invariants

#### a) Décomposition d'une isométrie

Théorème : Soit f une isométrie du plan et A un point. Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telles que g(A) = A et $f = t_O g$.

NB : une isométrie est une transformation du plan qui conserve les distances.

#### b) Isométrie laissant invariant trois points non alignés

Propriété :

Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identité.

Preuve :

Soit f une isométrie laissant invariant trois points A, B et C non alignés. Soient M et M'tels que M'=f(M). On a : MA=M'A, MB =M'B et MC=M'C. A,B et C appartient à la médiatrice [MM'] ⇒ A, B et C sont alignés (impossible). D'où M=M' ⇔ f(M)= M.

#### c) Isométrie laissant invariant deux points distincts

Propriété :

Une isométrie qui laissant invariant deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identité est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Preuve :

Soit f une isométrie laissant invariant deux points distincts A et B. Soit C et C' tels que C'= f(C), C ∉ (AB). On a : AC=AC' et BC=BC' d'où (AB) est la médiatrice de [CC']. Considérons l'isométrie $S_{(AB)} \circ f$ : $S_{(AB)} \circ f$ (A) =A

$S_{(AB)} \circ f$ (B)= B ; $S_{(AB)} \circ f$ (C)= $S_{(AB)} \circ f$ (C')= C

D'où $S_{(AB)} \circ f = idE \Leftrightarrow f = S_{(AB)}$

#### d) Isométrie laissant invariant un point du plan

Propriété :

Une isométrie du plan qui laissant invariant un seul point A du plan est une rotation de centre A.

#### e) Conséquences

Théorème :

Toute isométrie du plan est une translation, une rotation ou symétrie orthogonale, une symétrie glissée.

### 2- Déplacement et antidéplacement

#### a) Définition

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé. On a le tableau suivant :

| Isométries | Avec points invariants | Sans points invariants |
|---|---|---|
| Déplacement | Rotation | Translation |
| Antidéplacement | Symétrie orthogonale | Symétrie glissée |

Remarque : Toute isométrie est soit un déplacement soit un antidéplacement

### b) Composition de déplacement et antidéplacement

La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

NB : La composée de deux isométries est une isométrie.

**Propriété 2 :**

La transformation réciproque d'un déplacement est déplacement.

La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

### c) Détermination d'une isométrie

**Propriété :**

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB≠ A'B' et A ≠B, il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'

Remarque :

- Si $\overrightarrow{AB}= \overrightarrow{A'B'}$ alors f est la translation de vecteur$\overrightarrow{AA'}$
- Si$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$

Propriété 2 :

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB=A'B' et A≠ B, il existe un antidéplacement et un seul transformant A en A' et B en B'

Exercice : 2a,2b,2c,2d et 2e

## III- Applications affines

### 1- Définition

### a) Définition 1

Une application affine du plan $(\mathcal{P})$ est une application de $(\mathcal{P})$ $dans$ $(\mathcal{P})$ qui conserve le coefficient de colinéarité c'est-à-dire si A,B,C et D qui ont pour images respectives A',B',C' et D' par f :

$\overrightarrow{CD}= \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{f(C)f(D)}= \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'D'}= \lambda\overrightarrow{A'B'}$

### b) Définition 2 :

Une transformation affine du plan et une application affine bijective du plan.

### c) Définition 3 :

Soit f une application affine de $(\mathcal{P})$ et $\varphi$ une application vectorielle de $\mathcal{V}$ $dans$ $\mathcal{V}$ telle que pour tous points A et B du plan $(\mathcal{P})$ on a : $\varphi(\overrightarrow{AB})= \overrightarrow{f(A)f(B)}$.$\varphi$ est appelé application vectorielle associée à f.

### d) Propriété :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et pour tout $\alpha\epsilon\mathbb{R}$. $\varphi(\alpha\vec{u})= \alpha\varphi(\vec{u})$ et $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$. On dit que $\varphi$ est une application linéaire associée à f.

Preuve :

- Soient A,B,C et D quatre points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}= \overrightarrow{CD}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi(\alpha\vec{u}) = \varphi(\alpha\overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{CD})= \overrightarrow{f(C)f(D)}$

$= \alpha\overrightarrow{f(A)f(B)}$ conservation du coefficient de colinéarité

$= \alpha\varphi(\overrightarrow{AB}) = \alpha\varphi(\vec{u})$

- Posons $\vec{u}= \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}= \overrightarrow{BC}$ ; f(A)= A' ; f(B)= B' et f(C)= C'.

$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}= \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)}$

$= \varphi(\overrightarrow{AB}) + \varphi(\overrightarrow{BC})$

$= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

$\overrightarrow{A'C'}= \overrightarrow{f(A)f(C)}= \varphi(\overrightarrow{AC})= \varphi(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$= \varphi(\vec{u}+\vec{v})$.

Remarque :

$\varphi(\vec{0})= \vec{0}$ car $\varphi(\overrightarrow{AA})= \overrightarrow{f(A)f(A)}= \vec{0}$

$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i)= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{u}_i)$

G=bar

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_2$ | ..... | $A_n$ |
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | ..... | $\alpha_n$ |

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}= \vec{0} \Leftrightarrow \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i}) = \varphi(\vec{0})$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\overrightarrow{GA_i})= \vec{o}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)}= \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ f(G)= bar

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(A_1)$ | $f(A_2)$ | ..... | $f(A_n)$ |
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | ..... | $\alpha_n$ |

Conséquence : Toute application affine conserve le barycentre.

- Exemples de transformations affines :

Les isométries du plan, les homothéties

- Exemples d'applications affines : les projetions.

## 2- Autres propriétés

$P_1$ : Soit f une application du plan, f est une application affine si et seulement si f conserve le barycentre de deux points.

$P_2$ : La composé de deux applications du plan est une application affine du plan.

$P_3$ : La réciproque d'une transformation affine est une transformation affine.

$P_4$ : une application affine du plan est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

$P_5$ : Si deux applications affines du plan coïncident trois non alignés alors elles sont égales.

$P_6$ : Une application affine du plan est bijective si et seulement si l'image d'un repère est un repère.

$P_7$ : Soient f une application affine et (AB) une droite

- Si f(A)= f(B) alors l'image de (AB) est {f(A)}
- Si f(A)≠ f(B) alors l'image de (AB) est la droite (f(A)f(B)) = (A'B')

$P_8$ : Soit f une application affine du plan $(\mathcal{P})$

- Si f est bijective alors f$(\mathcal{P})$= $(\mathcal{P})$
- Si f n'est pas bijective alors f$(\mathcal{P})$ est un singleton ou une droite

$P_9$ : Soit f une application affine du plan munie d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. f est une application affine si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ a, b, c, a', b', et c' $\in \mathbb{R}$.

Preuve : Expression analytique d'une transformation affine

O'= f(O) ; O'$\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ ; φ($\vec{\imath}$)$\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ ; φ($\vec{\jmath}$)$\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ ; M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que M'= f(M).

On a : $\overrightarrow{O'M'}$= $\overrightarrow{f(o)f(M)}$= φ($\overrightarrow{OM}$)= φ(x $\vec{\imath}$ + y$\vec{\jmath}$)

= xφ($\vec{\imath}$)+ yφ($\vec{\jmath}$)= x(a $\vec{\imath}$ + a'$\vec{\jmath}$) +y(b $\vec{\imath}$+b'$\vec{\jmath}$)

$\Leftrightarrow$ (x' – c') $\vec{\imath}$ + (y' – c')$\vec{\jmath}$ = ax $\vec{\imath}$+ a'x$\vec{\jmath}$ +by $\vec{\imath}$ +b'y$\vec{\jmath}$

= (ax + by) $\vec{\imath}$ + (a'x +b'y)$\vec{\jmath}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - c = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une translation de vecteur -2 $\vec{\imath}$ + $\vec{\jmath}$

$\begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y - 4 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une homothétie de rapport k=-3 et de centre Ω(2 ;1)

$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 5 \\ y' = 3x - 7y + 11 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une application affine.

$P_{10}$ : L'image par une transformation affine du plan de deux droites strictement parallèles sont deux droites strictement parallèles.

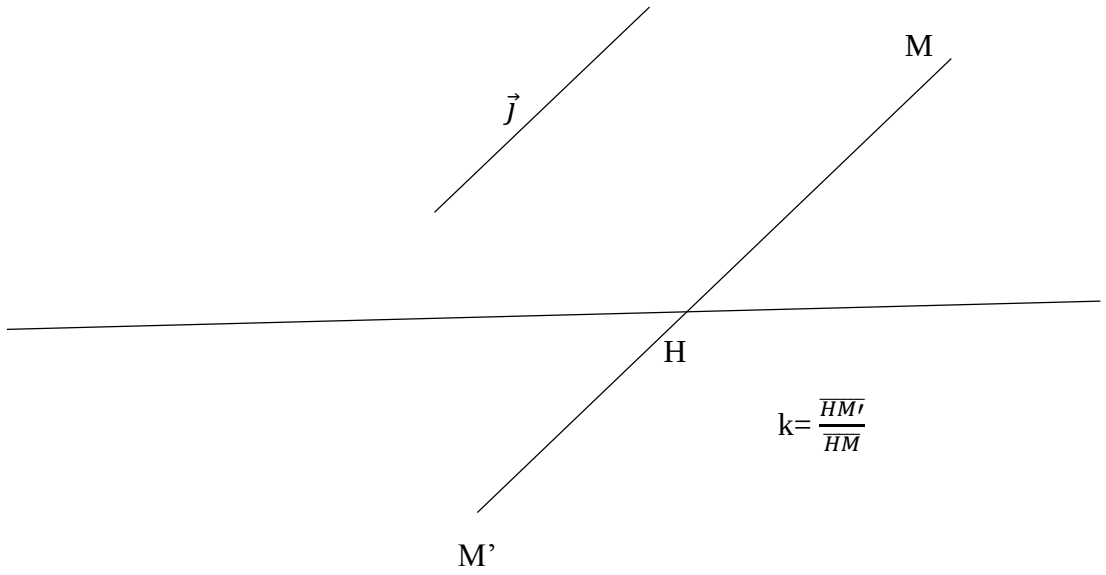
$P_{11}$ : Les images par une transformation affine du plan de deux droites sécantes sont deux droites sécantes.

## 3- Affinité du plan

### a) Affinité d'axe (D), de direction δ et de rapport k

**Définition :**

Soient (D) une droite et δ une direction de droite distincte de celle de la droite (D) et k ∈ℝ. On appelle affinité d'axe (D) de direction δ et de rapport k l'application f qui : a tout point M du plan associe le point M' tels que $\overrightarrow{HM'}$= k$\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur (D) suivant la direction j.




Lors que la direction de j est orthogonale à (D) f est l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k.

**Remarque :**

- Si k= 0 alors f est la projection sur (D) suivant la direction j
- Si k= 1 alors f est l'application identité du plan
- Si k= -1 et que la direction de (D) est orthogonale à f alors f est la symétrie orthogonale d'axe (D).

L'ensemble des points invariant d'une affinité est sur l'axe.

### b) Expression analytique d'une affinité

**Propriété :**

Le plan est munie d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{j}$), l'expression analytique d'une affinité d'axe (D) d'équation y=b et de direction celle de $\vec{j}$ et de rapport k est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$

Preuve : Soient M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ;M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et H$\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{hM'} = k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-x \\ k'y-b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - b = ky - kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = ky = (1-k)b \end{cases}$$

Remarque :

- Toute affinité est une application affine
- Soit f une affinité d'axe (D) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de direction celle du vecteur $\vec{v}$ et de rapport k. L'application linéaire associée à f est φ telle que φ($\vec{u}$)= $\vec{u}$ ; φ($\vec{v}$)= k$\vec{v}$ f est bijective si et seulement si k≠ 0.

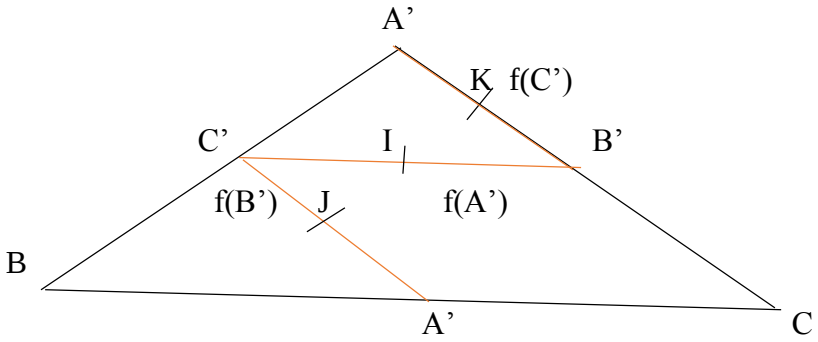
Travail à faire : exercice 3a, 3b, 3c et 3d P98.

Exercice 3a :

Soit ABC un triangle ; A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. F l'application affine définie par : f(A)= A, f(B)= B' et f(C)= C'

1- Déterminer les images par f des points A', B' et C'
2- Déterminer les images par f des droites (AA'), (BB') et (CC')
3- Déterminer les expressions analytiques de f dans le repère (ABC)

Solution :




1- Images des points A', B' et C'

A' milieu de [BC] donc f(A') est le milieu de [f(B)f(C)] ⇔ f(A') est le milieu de [B'C']

B' milieu de [AC] donc f(B') est le milieu de [f(A)f(C)] ⇔ f(B') est le milieu de [A'C']

C' milieu de [AB] donc f(C') est le milieu de [f(A)f(B)] ⇔ f(C') est le milieu de [A'B']

Autres méthodes :

$\overrightarrow{A'B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A')f(B)}=\frac{1}{2}\overrightarrow{f(C)f(B)}$

$\Leftrightarrow$ f(A')B'$=\frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}=$ I

$\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(C')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)f(B)}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(C')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}=$ K

$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)f(C)}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(B')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=$ J

2- Images des droites (AA'), (BB') et (CC')

f(A)= A et f(A')= I $\Leftrightarrow$ f([AA'])= (AI)

f(B)= B' et f(B')= J $\Leftrightarrow$ f([BB'])= (B'J)

f(C)=C' et f(C')= K $\Leftrightarrow$ f([CC'])= (C'K)

3- Expressions analytiques

Soient M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$ dans le repère (ABC) égale à $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, M'= f(M) et φ l'application associée à f.

$\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{f(A)f(M)}=$ φ(AM)= φ(x$\overrightarrow{AB}$ + y$\overrightarrow{AC}$)

= xφ($\overrightarrow{AB}$) + yφ($\overrightarrow{AC}$)

= x$\overrightarrow{f(A)f(B)}$ + y$\overrightarrow{f(A)f(C)}$

= x$\overrightarrow{AB'}$ + y$\overrightarrow{AC'}$

= x$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ + y$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{y}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où $\begin{cases} x' = \frac{y}{2} \\ y' = \frac{x}{2} \end{cases}$ car $\overrightarrow{AM'}$= x'$\overrightarrow{AB}$ + y'$\overrightarrow{AC}$

Exercice 3b : P98

($\mathcal{D}$) et (Δ) sont deux droites sécantes en un point O. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M on associe le point M' tels que :

- si Mϵ (Δ), alors M'= M

- si M$\notin$ (Δ), alors le milieu [MM'] appartient à (Δ) et [MM'] // ($\mathcal{D}$)

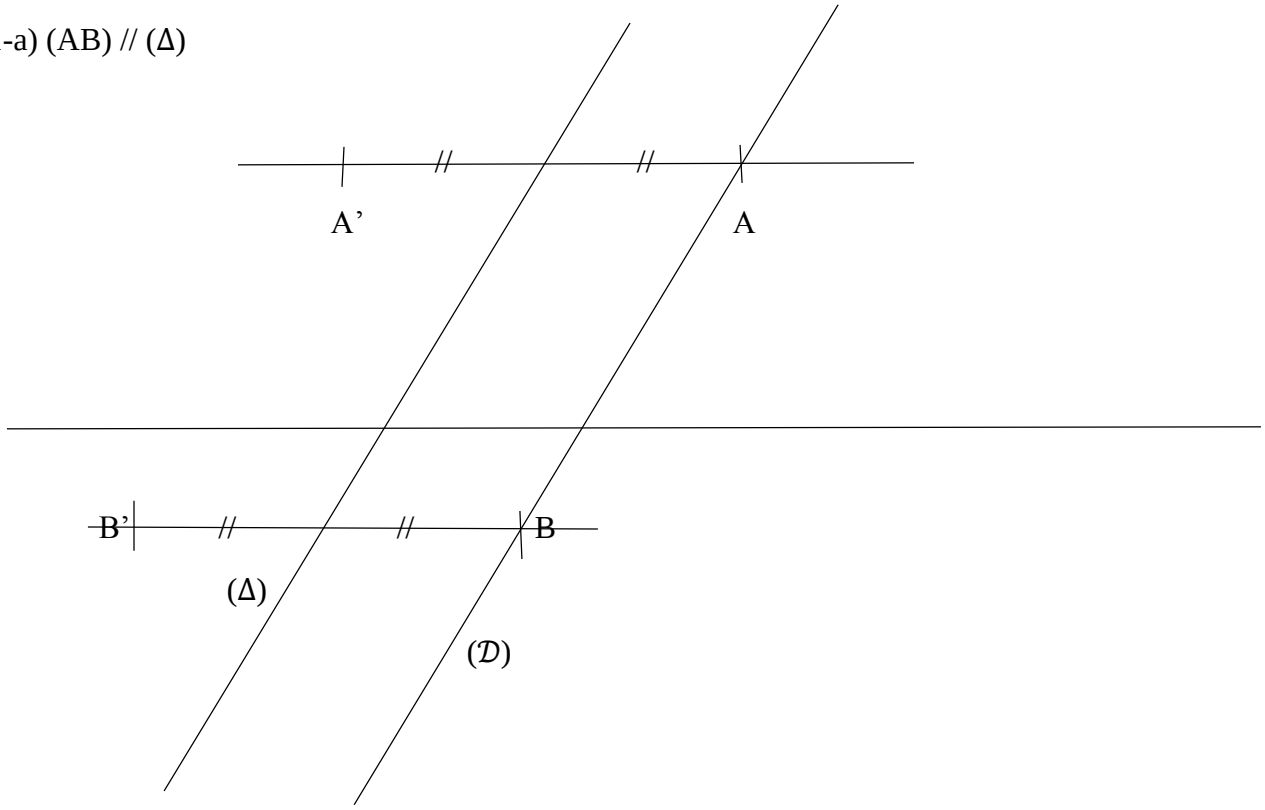
1-) Construire les images par f de deux points distincts A et B dans les cas suivants :

a) Les droites (AB) et (Δ) sont parallèles
b) Les droites (AB) et Δ) sont sécantes

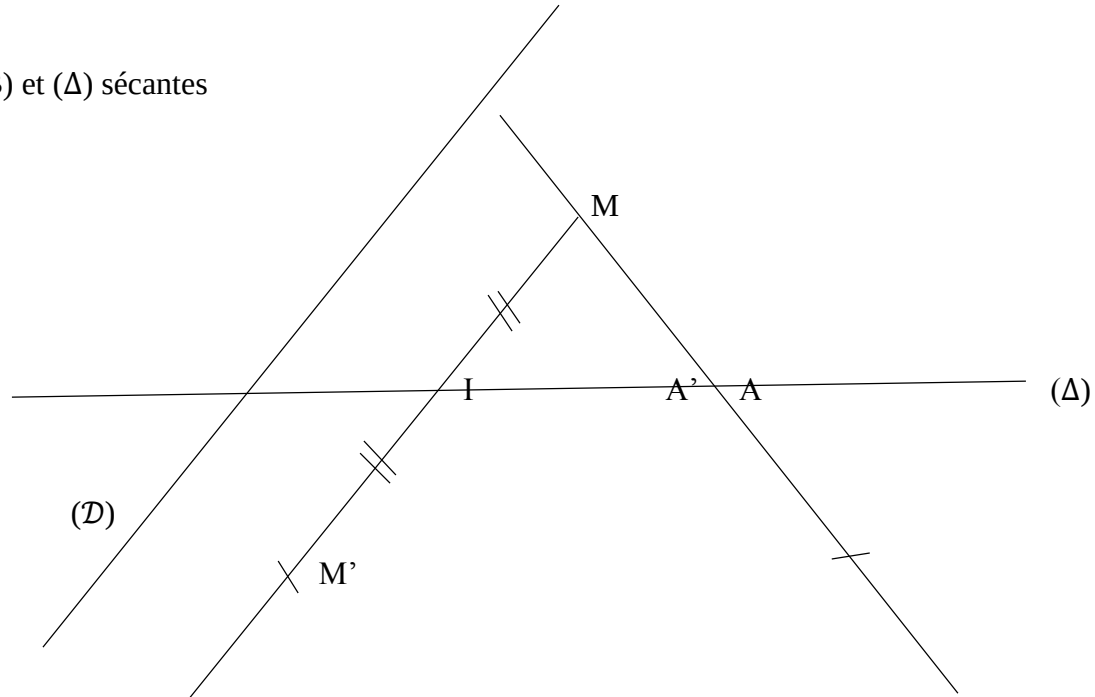
2-) démontrer que f est une application affine du plan

Solution :

1-a) (AB) // (Δ)




1-b) (AB) et (Δ) sécantes



Donc f est l'affinité d'axe (Δ) de direction ($\mathcal{D}$) et de rapport k= -1

Exercice 3c :

Le plan est munie d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ , on considère f une application affine telle que f(O)= I , f(I)= J et f(J)= O

1- Démontrer que f est bijective
2- Déterminer l'ensemble des points invariants par f

Solution :

1- L'image du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $(I,\vec{\jmath},\vec{O})$ c'est aussi un repère car I, J et O sont non alignés.

F est donc bijective.

2- Soit Mϵ ($\mathcal{P}$) tels que f(M)= M

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. φ est l'application linéaire associée

$\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{f(o)f(M)}=\varphi(\overrightarrow{OM})$

$=\varphi(x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ})=x\varphi(\overrightarrow{OI})+y\varphi(\overrightarrow{OJ})$

$=x\overrightarrow{f(O)f(I)}+y\overrightarrow{f(O)f(J)}$

$\overrightarrow{IM}=x\overrightarrow{IJ}+y\,\overrightarrow{IO}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0-1\\0-0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}x-1=-x-y\\y=x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-x-x\\y=x\end{cases}$

$\Rightarrow 3x=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

D'où $M\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$

f admet un unique point invariant $M\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

# *FONCTIONS EXPONENTIELLES _ FONCTIONS PUISSANCES*

## *I. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE E*

### *1. Définition et conséquence*

#### *a) Définition*

On appelle fonction exponentielle de base e et on note exp l'application réciproque de la fonction ln.

$$\exp: IR \to IR_+^*$$
$$x \to y = expx$$

#### *b) Conséquence*

De cette définition, il résulte que :

- $\forall x \epsilon IR \; et \; \forall y \epsilon IR_+^*, y = expx \leftrightarrow x = lny$
- $\forall x \epsilon IR, expx \epsilon IR_+^* \; et \; x = \ln(expx)$
- $1 = lne \leftrightarrow exp1 = e$
- $0 = \ln 1 \leftrightarrow \exp 0 = 1$
- $\forall \; x \epsilon IR_+^*, \exp(\ln x) = x$

  La fonction exponentielle étant l'application réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur $IR_+^*$, est elle-même continue et strictement croissante sur $IR$. Il en résulte que :$\forall (a,b) \epsilon IR^2, a > b \; \leftrightarrow \exp b$

$$a > 0 \leftrightarrow \exp a \; > 1$$
$$a < 0 \leftrightarrow 0 < \exp a < 1$$
$$\exp a = \exp b \; \leftrightarrow a = b$$

### *2. Propriétés*

#### *a) Propriétés fondamentales*

$\forall (a,b) \epsilon IR^2, exp(a+b) = \exp a \; \times \exp b$ (1)

En effet, $\forall (a,b) \epsilon IR^2, a = \ln(\exp a) \; et \; b = \ln(\exp b)$ donc $a + b = \ln(\exp a) + \ln(\exp b)$

Soit $a + b = \ln(\exp a \; \times \exp b)$

D'où $exp(a+b) = \exp a \; \times \exp b$

En général, $\forall (a_1, a_2, \dots a_n) \epsilon IR^n, exp(\sum_{k=1}^{n} a_k) = \prod_{k=1}^{n} \exp a_k$

La fonction exp est une bijection de $IR$ sur $IR_+^*$ et $\forall (a,b) \epsilon IR^2, exp(a+b) =$ $\exp a \; \times \exp b$ donc la fonction exp est un isomorphisme de (IR, +)vers ($IR_+^*$,×)

#### *b) Conséquences*

$C_1$: $\forall \; b \; \epsilon \; IR, \exp(-b) = \dfrac{1}{\exp b}$ (2)

En effet, pour $b = -a$, (1) $devient$ $\exp 0 = \exp b \; \times \exp(-b)$ d'où $\exp(-b) = \frac{1}{\exp b}$

$C_2$: $\forall (a,b) \epsilon IR^2, exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$ (3)

### *c) Autre propriété*

$\forall (a,r)\epsilon IR \times Q, \exp(ra) = (\exp a)^r$ (4)

d) Nouvelle notation

Il résulte de (4) et de $\exp 1 = e$ que : $\forall\, r\epsilon Q, \exp r = \exp(r \times 1) = (exp1)^r = e^r$

Par convention, $\forall\, x\epsilon IR, \exp x = e^x$ . Ainsi,

- $\forall (x,y)\epsilon IR \times IR_+^*, y = e^x \leftrightarrow x = lny$
- $\forall\, x\epsilon IR, e^x \epsilon\, IR_+^*\ et\ x = \ln e^x$
- $\forall\, x\epsilon IR_+^*, e^{lnx} = x$
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $\forall\, (a,b)\epsilon IR^2, e^{a+b} = e^a \times e^b\ , e^{-b} = \frac{1}{e^b}\ , e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $a > b \leftrightarrow e^a > e^b$
- $e^a = e^b \leftrightarrow a = b$
- $\forall (a_1, a_2, \dots a_n)\epsilon IR^n,\ e^{\sum_{k=1}^n a_k} = \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{a_k}$

***Exercice1***

1) Résoudre dans IR
   a) $e^x - 7 + 10e^{-x} = 0$
   b) $e^{3x} - e^{2x+1} + e^{2x} - e^{x+1} + 2e - e^x = 0$

(On vérifiera que e en est une solution)

   c) $e^x - 4 + 3e^{-x} > 0$

2) Résoudre dans $IR^2$ : $\begin{cases} e^{2x}e^{2y} = a \\ xy = 1 \end{cases}$ ( on discutera suivant les valeurs du réel $a$)

### *3. Calcul des dérivées*

a. Dérivée de la fonction $x \to \ln x$ est derivable sur $IR_+^*$ sa fonction réciproque $x \to e^x$ est donc dérivable sur $\ln(IR_+^*) = IR$ et sa fonction dérivée est $(e^x)' = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$

D'où le théorème : la fonction $x \to e^x$ est dérivable sur IR et pout tout $x\epsilon IR$, $(e^x)' = e^x$

Conséquence : $\forall x\epsilon IR, \forall n\epsilon IN, (e^x)^{(n)} = e^x$ (dérivée d'ordre n)

b. Dérivée d'une fonction composée avec la fonction exponentielle

***Théorème*** : soit u une fonction dérivable sur un ensemble D, la fonction $x \to e^{u(x)}$ est dérivable sur D et $\forall x\epsilon D, \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

En effet, $\forall x\epsilon D, e^{u(x)} = exp[u(x)]$

Donc $\left(e^{u(x)}\right)' = (\ exp[u(x)])'$

$= exp'[u(x)]u'(x)$

$= e^{u(x)}u'(x)$

$= u'(x)e^{u(x)}$

***Exercice 2 :*** Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x^2-2}}$ b) $g(x) = e^{cosx}$ c) $h(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$ d) $l(x) = e^{-x}lnx$

### 4. *Nouvelles primitives*

***Théorème***

- Les primitives sur IR de la fonction :$x \to e^x$sont les fonctions : $x \to e^x + c, \quad c \epsilon IR$
- $u$ étant une fonction dérivable sur un ensemble D, les primitives sur D de la fonction : $x \to u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions : $x \to e^{u(x)} + c, \ c \epsilon IR$

***Exercice 3***

1) Déterminer les primitives de chacune des fonctions ci-après :
   a) $x \to (x+1)e^{x^2+2x-5} \quad sur\ IR$
   b) $x \to \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad sur\ IR_+^*$
   c) $x \to sin2xe^{cos^2 x} \quad sur\ IR$ (Intégration par parties)
   d) $x \to e^x sinx \quad sur\ IR$ (Deux intégrations par parties)
2) Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos^2 x\, dx \quad et\ B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sin^2 x\, dx$

   Calculer successivement $A + B, A - B, A\ et\ B$.

### 5. *Etude de la fonction exp : $x \to e^x$*

- ✓ La fonction exp est définie, continue et dérivable sur IR.
- ✓ Limites : A l'aide du tableau de variation de la fonction ln (insérer ledit tableau de variation) on obtient les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- ✓ Dérivée et sens de variation : $\forall\ x \epsilon IR, (e^x)' = e^x > 0$ donc la fonction exp est strictement croissante sur IR.
- ✓ Tableau de variation (insérer)
- ✓ Branches infinies :
  - Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est horizontale à la courbe de la fonction exp au voisinage de $-\infty$.
  - Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$

Au voisinage de $+\infty, x > 0$ et dans ce cas, $ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = lne^x - lnx = x - lnx = x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc la courbe de la fonction exp admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

- ✓ Représentation graphique (insérer la courbe)

RQ : dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**Autres limites dites classiques**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ en effet, posons $X = -x$ ainsi, quand $x \to -\infty, X \to +\infty$

  Ceci étant, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} -Xe^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$

  car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\gamma, alors\ \lim\limits_{x\to x_0}e^{u(x)}=e^{\gamma}$
- Si $\begin{cases} u(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\ln u(x)=\gamma \end{cases}\ alors\ \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=e^{\gamma}$

***Exercice 4***

1) Soit $f(x)=e^{\frac{x+1}{x+2}}$
   Déterminer son ensemble de définition $D_f$ et calculer les limites aux bornes de $D_f$.
2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{sin^2x}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$
   d) $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)e^{\frac{x+3}{x+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}lnx$ g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{1-cosx}$

**Indication solution**

a) NB : $\forall\, r\epsilon Q_+^*, ln\frac{e^x}{x^r}=x(1-r\frac{lnx}{x})$ on en deduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r}=+\infty$ et donc,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\frac{1}{\frac{sin^2x}{x^2}}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)e^{\frac{x+3}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{e^{\frac{x+3}{x+1}}}{\frac{x+3}{x+1}}\times(x+3)=+\infty\ car\ \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

e) Pour $x<0, ln\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=-2ln|x|+\frac{1}{x}$ ceci étant,
$\lim\limits_{x\to0^-}ln\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}-2ln|x|+\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-2xln(-x)+1}{x}=-\infty$. On en déduit que
$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}lnx=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{lnx}{x}=0$

g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{1-cosx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2}\times\frac{1}{\frac{1-cosx}{x^2}}=2$

## *II. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a, $a\in IR_+^*-\{1\}$*

### *1. Définition*

On appelle fonction exponentielle de base $a$ et on note $exp_a$ la fonction réciproque de la fonction logarithme de base $a$ définie par :
$$exp_a : IR\to IR_+^*$$
$$x\ \to\ exp_a(x)=a^x$$

***Remarque***

1) $\forall\, x\in IR, ln_a a^x=x$ et $\forall\, x\in IR_+^*, a^{ln_a(x)}=x$

2) $\forall (x,y) \epsilon IR \times IR_+^*, y = exp_a(x) \leftrightarrow x = ln_a(y)$
$\leftrightarrow x = \frac{lny}{lna}$
$\leftrightarrow xlna = lny$
$\leftrightarrow y = e^{xlna}$

3) $\forall\, a \in IR_+^*, a^x = e^{xlna}$

### 2. *Propriétés*

$\forall\, (a,b) \in {IR_+^*}^2, \forall\, (x,y) \in IR^2,$

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

***Exercice 5***: résoudre dans IR les équations

a) $2^{x+8} - 4^x = 1984$
b) $3^{x+2} + 9^{x-1} - 1458 = 0$

### 3. *Etude de la fonction* $exp_a$: $x \rightarrow e^{xlna}$, $a \in IR_+^* - \{1\}$

- ✓ Domaine de définition $D_{exp_a} = IR$
- ✓ La fonction $exp_a$ est continue et dérivable sur IR car réciproque de la fonction $x \rightarrow ln_a(x)$
- ✓ Limites
  - Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} exp_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{xlna} = 0$
    $\lim\limits_{x\to+\infty} exp_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{xlna} = +\infty$
  - Si $a < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} exp_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{xlna} = +\infty$
    $\lim\limits_{x\to+\infty} exp_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{xlna} = 0$
- ✓ Dérivée et sens de variation
- ✓ $\forall\, x \in IR, {exp'}_a(x) = (e^{xlna})' = (xlna)' e^{xlna} = (lna) e^{xlna}$
  - Si $a > 1, \forall\, x \in IR, {exp'}_a(x) > 0$ et la fonction $exp_a$ est strictement croissante sur IR
  - Si $0 < a < 1, \forall\, x \in IR, {exp'}_a(x) < 0$ et la fonction $exp_a$ est strictement décroissante sur IR
- ✓ Tableau de variation : (insérer tableau en distinguant les cas $a > 1$ et $0 < a < 1$
- ✓ Branches infinies
  - Si $a > 1$ (resp $0 < a < 1$), $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ (resp $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$) donc la droite d'équation $y = 0$ est horizontale à la courbe de la fonction $exp_a$ au voisinage de $-\infty$ (resp au voisinage de $+\infty$).

– Si $a > 1$ (resp $0 < a < 1$), $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$). Etudions $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x}$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x}$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{xlna}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{xlna}}{xlna} \times lna = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{xlna}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{xlna}}{xlna} \times lna = -\infty$

Donc la courbe de la fonction $exp_a$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

✓ Représentation graphique (insérer la courbe)

#### 4. Notation $u^v$

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de domaines de définition respectifs $D_u$ et $D_v$.

- Si $\forall\, x \in D_u, u(x) > 0$, on peut définir la fonction $u^v$ sur $D_u o D_v$ par :
  $\forall\, x \in D_u o D_v, u^v(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)lnu(x)}$
- Si de plus les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $D_u o D_v$, alors $u^v$ l'est aussi et on a :

$$\forall\, x \in D_u o D_v, (u^v)'(x) = \left(e^{v(x)lnu(x)}\right)'$$
$$= (v(x)lnu(x))' e^{v(x)lnu(x)}$$
$$= \left[v'(x)lnu(x) + v(x)\frac{u'(u)}{u(x)}\right] e^{v(x)lnu(x)}$$

***Exercice 6***: étudier et représenter graphiquement la fonction $f$ définie sur $IR_+^*$ par $f(x) = x^x$

## III. FONCTION PUISSANCE : CROISSANCE COMPAREE DES FONCTIONS PUISSANCE, EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

### 1. Fonction puissance

#### a. Définition

Soit $a \in IR^*$. On appelle fonction puissance la fonction $f_a$ definie sur $IR_+^*$ par $f_a: x \to x^a = e^{alnx}$

***Exercice 7***: comparer $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ et $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

***Solution***

On a $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}ln\sqrt{2}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}ln2}$ et

$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{3}}ln2\sqrt{2}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}(ln2+ln\sqrt{2})} = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}(ln2+\frac{1}{2}ln2)} = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{2}ln2} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}ln2}$

Donc $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

#### b. Propriétés

$\forall\, (a,b) \in IR^{*2}, \forall x, y \in IR_+^*$

- $x^{a+b} = x^a \times x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $(xy)^a = x^a \times y^a$

***Exercice 8***: simplifier $A = \left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{1+\sqrt{3}} + \left(\frac{3^{\sqrt{2}}}{3}\right)^{1+\sqrt{2}}$

### *c. Etude de la fonction $f_a: x \to x^a = e^{alnx}$*

- ✓ Domaine de définition : $D_{f_a} = IR_+^* = ]0; +\infty[$
- ✓ $f_a$ est continue et dérivable sur $IR_+^*$ car la fonction $x \to alnx$ l'est.
- ✓ Limites
  - Si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{alnx} = 0$
    $\lim\limits_{x\to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{alnx} = +\infty$
  - Si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{alnx} = +\infty$
    $\lim\limits_{x\to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{alnx} = 0$
- ✓ Dérivée et sens de variation

$\forall x, \epsilon\, IR_+^*, f'_a(x) = (e^{alnx})' = \frac{a}{x} e^{alnx} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$

Il en résulte que $\forall x, \epsilon\, IR_+^*, f'_a(x)$ est du même signe que $a$.

- ✓ Tableau de variation : (insérer tableau de variation) on distinguera les cas $a > 0$ puis $a < 0$
- ✓ Branches infinies
  - Si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a = +\infty$ étudions $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^a}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^a}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x^{a-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{(a-1)lnx} = \begin{cases} +\infty \; si \; a > 1 \\ 0 \; si \; 0 < a < 1 \end{cases}$

Donc pour $a > 1$, la courbe de la fonction $f_a$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Et pour $0 < a < 1$, la courbe de la fonction $f_a$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

  - $a < 0$, les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement asymptote verticale et horizontale à la courbe de la fonction $f_a$.
- ✓ Représentation graphique : on distinguera les cas $a > 1, 0 < a < 1$ et $a < 0$

***Exercice 9***: étudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes

a) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ b) $g(x) = (2x-1)^{\sqrt{2}}$ c) $h(x) = (x+1)^{-\sqrt{3}}$

## *2. Croissance comparée*

### *a. Fonction logarithme et puissance*

***Propriété***: $\forall\, a \in IR^*, \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^a} = 0$

***Conséquence***: $\forall\, a \in IR^*, \lim\limits_{x\to 0^+} x^a lnx = 0$ (preuve : poser $X = \frac{1}{x}$)

### *b. Fonction exponentielle et puissance*

***Propriété*** : $\forall\ a \in IR^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

En effet, $ln\frac{x^a}{e^x} = alnx - x = x\left(a\frac{lnx}{x} - 1\right)$

Ceci dit, $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\frac{x^a}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(a\frac{lnx}{x} - 1\right) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

***Conséquence*** : $\forall\ a \in IR^*,\ \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$

***Propriétés*** : $\forall\ b > 1,\ a \in IR_+^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$ $\left(\text{ind : utiliser } ln\frac{x^a}{b^x}\right)$

$\forall\ b > 1,\ a \in IR_+^*,\ \lim\limits_{x\to-\infty} (|x|^a b^x) = 0$ (ind : utiliser $ln|x|^a b^x$)

### *c. Fonction logarithme et exponentielle*

***Propriétés*** : $\forall\ b > 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{b^x} = 0$

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{b^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} \times \frac{x}{b^x} = 0$

***Exercice 10*** : calculer

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-3x}$

# Chapitre 12 Suites numériques

Planning :

Objectifs

I. Etude générale d'une suite numérique.
   1. Généralités
      a. Formules d'une suite : explicite et récurrente.
      b. Suites minorées, suites majorées ; suites bornées
      c. Suites monotones.
   2. Rappels sur les suites arithmétiques et suites géométriques
      a. Suites arithmétiques.
      b. Suites géométriques.

II. Limite et convergence d'une suite
   1. Limites des suites du type $u_n = f(n)$
      a. Activités et propriétés
      b. Propriétés de comparaison des suites
   2. Convergence d'une suite.
   3. Limites des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
   4. Quelques suites particulières : suites périodiques et suites adjacentes.
      a. Suites périodiques.
      b. Suites adjacentes.

**Objectifs :**

- Reconnaitre une suite arithmétique, une suite géométrique
- Savoir étudier les variations d'une suite, calculer les limites et étudier la convergence
- Savoir utiliser les suites pour approcher les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

## I. Etude générale d'une suite numérique.

### 1. Généralités

#### a. Définitions d'une suite : forme explicite et forme récurrente

**Définitions**

Soit $I$ un sous ensemble de $\mathbb{N}$

**D 1.** On appelle suite numérique, toute fonction de $I$ vers $\mathbb{R}$.

**D 2.** $u(n)$ ou tout simplement $u_n$ est l'image par $u$ de l'entier naturel $n$.

**D 3.** La suite $u$ est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement $(u_n)$.

**D 4.** $u_n$ est le terme général ou le terme de rang $n$.

**Définitions (**formes d'une suite**)**. Soit $I$ un sous ensemble de $\mathbb{N}$.

**D 5.** Une suite $(u_n)$ est dite **explicite** lorsque le terme général $u_n$ est une fonction de $n$ : ie $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique de la variable réelle. **Exemple** de suite sous forme explicite : $u_n = \frac{2n+3}{n^2-1}$.

**D 6.** Une suite $(u_n)$ est dite récurrente si un terme quelconque $u_p = a$ est donné ($p \in \mathbb{N}$ et $a$ un réel) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction numérique de la variable réelle.

**Exemple** de suite sous forme récurrente : $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n+3}{u_n^2-1} \end{cases}$.

**Remarque**

Dans certains cas, on peut facilement passer de la formule explicite à celle récurrente et vice versa.

**Exercice**

1) Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes. $n$ étant un entier naturel
   a) Formules explicites : $u_n = \frac{2n+1}{3n}$, $v_n = \ln(2n-3)$, $w_n = e^{3n}$.
   b) Formules récurrentes $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n+1}{3u_n} \end{cases}$, $\begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= \ln(2v_n-3) \end{cases}$, $\begin{cases} w_0 &= 0 \\ w_{n+1} &= e^{3w_n} \end{cases}$.
2) Donner la formule récurrente de $u_n = 4n-7$ et celle explicite de $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 4u_n \end{cases}$. $n \in \mathbb{N}$

### b. Suites minorées, suites majorées ; suites bornées.

**Définition.** Soit $(u_n)$ une suite numérique définie sur $I \subseteq \mathbb{N}$

**D 1.** $(u_n)$ est minorée s'il existe un réel $m$ telque $\forall n \in I,\ u_n \geq m$. On dit que $m$ est un minorant.

**D 2.** $(u_n)$ est majorée s'il existe un réel $M$ telque $\forall n \in I,\ u_n \leq M$. On dit que $M$ est un majorant.

**D 3.** $(u_n)$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée

### c. Suites monotones.

**Définition** Soit $(u_n)$ une suite numérique définie sur $I \subseteq \mathbb{N}$

**D 1.** $(u_n)$ est croissante si et seulement si $\forall n \in I, u_n \leq u_{n+1}$

**D 2.** $(u_n)$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in I, u_n \geq u_{n+1}$

**D 3.** $(u_n)$ est constante si et seulement si $\forall n \in I, u_n = u_{n+1}$.

**Définition**

Une suite est monotone lorsqu'elle garde le même sens de variation ie lorsqu'elle est soit uniquement croissante, soit uniquement décroissante.

**Remarques**

**R1.** Une suite est positive (respectivement négative), lorsque tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

**R2.** $(u_n)$ est strictement croissante si $\forall n \in I, u_n < u_{n+1}$.

**R3.** Une suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un certains rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0, u_n \leq u_{n+1}$

**R4.** Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

**Exercice**

1) Montrer que les suites $u_n = \frac{\cos n}{n}$ et $v_n = \ln(2n+1) - \ln(n+1)$ sont bornées
2) On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n+3} \end{cases}$. Montrer par récurrence que :
   a) $(u_n)$ est croissante
   b) $(u_n)$ est bornée $(-1 \leq u_n \leq 3)$
3) Etudier les variations des suites : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ; $v_n = \frac{n^n}{n!}$ ; $w_n = \frac{e^n}{n!}$.

**Solution**

## 2. Rappels sur les suites arithmétiques et suites géométriques

### a. Suites arithmétiques.

**Définition**

Une suite numérique $(u_n)$ est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si $r > 0$ alors $(u_n)$ est croissante, Si $r < 0$ alors $(u_n)$ est décroissante, Si $r = 0$ alors $(u_n)$ est constante.
- Formule explicite : $u_n = u_0 + nr$ d'une façon générale, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.
- La somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = nbre\ de\ termes\left(\frac{1ér\ terme + dernier\ terme}{2}\right) = n\left(\frac{u_0+u_{n-1}}{2}\right)$. Le nombre de termes $N = indice\ du\ dernier\ terme - indice\ du\ 1er\ terme + 1$. D'une façon générale, pour tout entier naturel $p$ on a : $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} = (n-p)\left(\frac{u_p+u_{n-1}}{2}\right)$.

**Activité** sur la moyenne arithmétique. Indications : $u_{n+1} = u_n + r$, $u_{n-1} = u_n - r$. En sommant membre à membre on obtient $u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$

**Théorème et définition**

$(u_n)$ est arithmétique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$. On dit alors que le terme $u_n$ est la moyenne arithmétique de $u_{n-1}$ et $u_{n+1}$.

**Remarque** Pour montrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n = r = cste$

**Exercice**

1) $(u_n)$ est une suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_0 + u_1 + u_2 = 9$. Calculer $\sum_{k=0}^{10} u_k$ et $\sum_{k=30}^{67} u_k$. Même questions pour $v_3 = 9\ et\ v_0 + v_1 + v_2 = 15$ ; $w_3 = 15\ et\ w_9 - w_4 - w_1 = 5$.
2) $(u_n)$ est une suite arithmétique telle que $u_{n+4} - u_n = 12$. Calculer la raison $r$.

**Solution**

### b. Suites géométriques.

**Définition**

Une suite numérique $(u_n)$ est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ appelé raison tel que $u_{n+1} = qu_n$.

- Si $q > 1$ alors $(u_n)$ est croissante ; si $0 < q < 1$ alors $(u_n)$ est décroissante ; si $q = 1$ alors $(u_n)$ est constante.
- Formule explicite d'une suite géométrique : $u_n = q^n u_0$. D'une façon générale, pour tout entier naturel $p$ on a : $u_n = q^{n-p}u_p$.
- La somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = premier\ terme \times \left(\frac{1-q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}\right) = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ ; d'une façon générale on a $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$.

**Activité** $u_n = qu_{n-1}$ et $u_{n+1} = qu_n$ en exprimant $q$ dans l'une des équations et en remplaçant dans l'autre, on obtient $u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$.

**Théorème et définition.**

Une suite $(u_n)$ est géométrique si et seulement si $u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$. On dit que $u_n$ est la moyenne géométrique de $u_{n-1}$ et $u_{n+1}$.

**Remarque**

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q = cste$.

**Exercice**

$(v_n)$ est une suite géométrique telle que $v_1 = 27$ et $v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 = 27$. Déterminer $v_0$ et $q$ puis calculer $\sum_{k=0}^{9} v_k$ et $\sum_{k=7}^{17} v_k$.

**Solution**

## II. Limite et convergence d'une suite

### 1. Limites des suites du type $u_n = f(n)$

#### a. Activités et propriétés

**Activité** Calculer les 3 premiers termes des suites suivantes $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ puis conjecturer les variations et les limites.

**Solution**

**Propriétés**

Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique. Si $f$ a une limite en $+\infty$ alors $(u_n)$ a une limite et on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)$

**Remarque :** On peut noter $= \lim \ u_n$

**Exemple** Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln(e^n - 1)$

**Propriété**

Si une suite admet une limite, alors elle est unique.

**Propriété et définition.**

Soient $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ les termes généraux de deux suites numériques.

- La somme des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est la suite de terme général $u_n + v_n$ et $\lim \ (u_n + v_n) = \lim \ \big(f(n) + g(n)\big)$
- Le produit des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est la suite de terme général $u_n \times v_n$ et $\lim \ (u_n \times v_n) = \lim \ \big(f(n) \times g(n)\big)$
- Le rapport des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ et $\lim \ \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \lim \ \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)$.

**Propriétés**

P 1. Suites géométriques ou exponentielles. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $a \leq -1$ alors $a^n$ n'a pas de limite
- Si $-1 < a < 1$ c'est-à-dire $|a| < 1$ alors $\lim \ a^n = 0$
- Si $a = 1$ alors $\lim \ a^n = 1$.
- Si $a > 1$ alors $\lim \ a^n = +\infty$

P 2. Suites puissances. Soient Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $\alpha < 0$ alors $\lim \ n^\alpha = 0$.
- Si $\alpha = 0$ alors $\lim \ n^\alpha = 1$.
- Si $\alpha > 0$ alors $\lim \ n^\alpha = +\infty$.

❖ **Croissance comparée**

**Propriétés**

- Si $\alpha > 0$ alors $\lim \ \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.
- Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim \ \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ ; Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim \ \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$
- Si $-1 < a < 1$ et $\alpha < 0$ alors $\lim \ \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

**Exercice**

Calculer les limites des suites suivantes : $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ ; $v_n = n^3 - 3^{n+1}$ : $w_n = \frac{3^n - 5^n}{7^n - 2^n}$.

**Solution**

#### b. Propriétés de comparaison des suites

**Propriétés**

P 1. S'il existe un entier naturel $n_0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Longrightarrow v_n < u_n$ et $\lim \ v_n = +\infty$ alors $\lim \ u_n = +\infty$.

P 2. De même, si $v_n > u_n$ et si $\lim \quad v_n = -\infty$ alors $\lim \quad u_n = -\infty$.

P 3. Théorème des gendarmes. Si $v_n < u_n < w_n$ et si $\lim \quad v_n = \lim \quad w_n = l$ alors, $\lim \quad u_n = l$.

P 4. Si $|u_n - l| = v_n$ et $\lim \quad v_n = 0$, alors $\lim \quad |u_n - l| = 0$ et $\lim \quad u_n = l$.

**Exemple**

Déterminer $\lim \quad \frac{n+(-1)^n \cos n}{n}$.

**Remarques**

R1. Lorsqu'une suite admet deux limites en $+\infty$, on dit qu'elle n'admet pas de limite. Exemple $u_n = (-1)^n$.

R2. Les suites $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$ n'admettent pas de limites en $+\infty$.

### 2. Convergence d'une suite.

**Définition**

Une suite est convergente si elle admet une limite finie ; elle est divergente si elle n'est pas convergente.

**Exemple**

Les suites $u_n = (-1)^n$, $w_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$, $t_n = n^2$ divergent. La suite $p_n = \frac{2n+1}{n}$ converge.

**Propriétés :**

P 1. Toute suite croissante et majorée est convergente

P 2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Propriété**

Soient $f$ une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $(u_n)$ une suite dans $\mathcal{D}_f$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

**Exercice** cf CIAM Tle C.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.
2) Etudier la convergence de la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

**Indications**

1) Utiliser l'encadrement $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ puis inverser et appliquer la somme.
2) Utiliser la comparaison $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k > 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-k} = 2 - \frac{1}{n} < 2$. On aura donc $v_n$ qui est croissante et majorée donc converge.

### 3. Limites des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. (suites définies par récurrence)

**Exercice 26 CIAM**

On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2x + 3}$.

1) Résoudre l'équation $f(x) = x$ (probable lieu de convergence ou point fixe).
2) Démontrer par récurrence que :
   a) $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 3$ ; c'est-à-dire $u_n$ est bornée.
   b) $u_n$ est croissante.
3) Déduire que $u_n$ est convergente et déterminer sa limite.

**Solution**

**Propriété**

Soit $(u_n)$ une suite dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction. Si $u_n$ converge vers $l$ et si $f$ est continue en $l$ alors $f(l) = l$.

### 4. Quelques suites particulières : suites périodiques et suites adjacentes.

#### a. Suites périodiques.

**Définition**

Une suite $(u_n)$ est dite périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+p} = u_n$. Le plus petit entier naturel $p$ vérifiant cette égalité est appelé période de la suite $(u_n)$.

**Exemple**

- La suite $u_n = (-1)^n$ est périodique de période 2
- La suite $v_n = \cos\frac{2n}{5}$ est périodique de période $5\pi$.

#### b. Suites adjacentes.

**Définition**

Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes si :

- $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ décroissante,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et
- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

**Remarque (autre définition)**

Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de la différence tend vers zéro.

**Propriété**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes telles que $v_n \leq u_n$

P 1. La suite $(w_n)$ définie par $w_n = u_n - v_n$ est décroissante.

P 2. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et ont la même limite.

**Exemple (Exercice)**

Considérons les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n\cdot n!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$.

Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites adjacentes.

# CHAPITRE : CALCUL D'INTEGRALES

## 1. OBJECTIFS

A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de :

- Appliquer les techniques du calcul des intégrales et présenter ses applications (calcul d'aire, encadrement) ;
- Exploiter sur les exemples simples, les propriétés de l'intégrale pour l'étude des fonctions.

## 2. NOTION D'INTEGRALE

### a) Activité préparatoire

1) *Trouver d'une part, la primitive $G$ de la fonction carré $f$ qui prend la valeur 1 pour $x = 2$ et d'autre part, la primitive $H$ de la fonction carré qui prend la valeur 0 pour $x = 5$*

2) *Calculer $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$ puis conclure*

**Solution**

1) Déterminons la primitive $G$ de la fonction carré $f$ telle que $G(2) = 1$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + k$ or $G(2) = 1 \Rightarrow k = -\frac{5}{3}$ d'où $\boldsymbol{G(x) = \frac{x^3-5}{3}}$

Déterminons la primitive $H$ de la fonction carré $f$ telle que $H(5) = 0$

$H(x) = \frac{x^3}{3} + k$ or $H(5) = 0 \Rightarrow k = -\frac{125}{3}$ d'où $\boldsymbol{H(x) = \frac{x^3-125}{3}}$

2) $\boldsymbol{G(1) - G(2) = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}}$

$\boldsymbol{H(1) - H(2) = -\frac{124}{3} + \frac{117}{3} = -\frac{7}{3}}$

On conclut que la différence $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$ est bien la même quel que soit la primitive **choisie**

### b) Définition

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soient $a$ et $b$ deux éléments de $I$. On suppose que $f$ admet des primitives sur $I$. Soit $F$ l'une de ces primitives. On **appelle « intégrale de (la fonction) $f$ de $a$ à $b$ »** le réel $(b) - F(a)$ . On le note : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

**Remarque :**

- le réel $\int_a^b f(t)dt$ **ne dépend pas** de la primitive choisie pour le calcul.
- $a$ à $b$ sont des bornes d'intégration ;
- La variable $t$ est appelée variable d'intégration. C'est une variable *muette* car elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre de l'alphabet puisqu'elle n'intervient pas dans le processus d'intégration.
- $\int_a^b f(t)dt$ se lit : « *intégrale de* $a$ *à* $b$, $f(t)$ *dérivée de* $t$ » ou bien « *somme de* $a$ *à* $b$, $f(t)$ *dérivée de* $t$ »

***EXERCICE D'APPLICATION***

*Calculer les intégrales suivantes :*

$A = \int_0^{\pi/2} cos^2 x dx$ *et* $B = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

**Solution**

Calculons les intégrales suivantes

- $A = \int_0^{\pi/2} cos^2 x dx$ or $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ alors $\int_0^{\pi/2} cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4}\sin 2 \times 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Donc $\boldsymbol{A = \frac{\pi}{4}}$

- $B = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

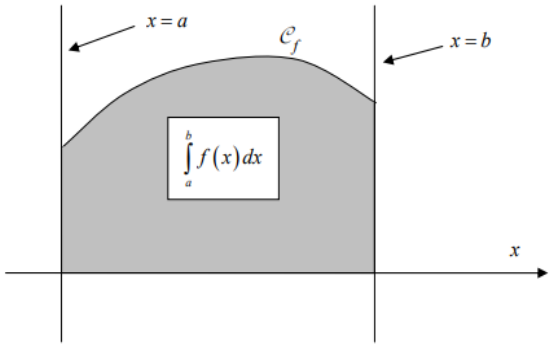
$$= \left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4$$

$$\boldsymbol{B = 2}$$

### b) Interprétation géométrique

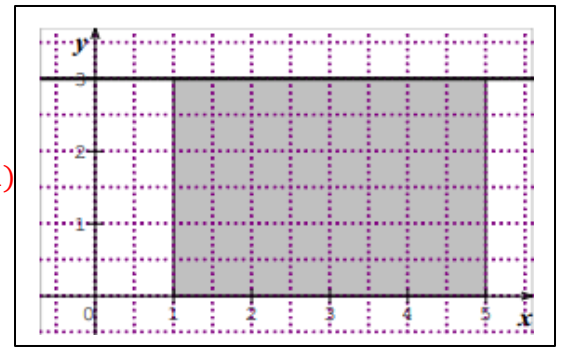
Dans le cas où :

• $a < b$ ; La fonction $f$ prend des valeurs positives sur l'intervalle $[a\,;b\,]$. L'intégrale de $f$ de $a$ à $b$ est égale à l'aire, en unité d'aire, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (voir zone grisée sur la figure ci-dessous).




## *EXERCICE D'APPLICATION*

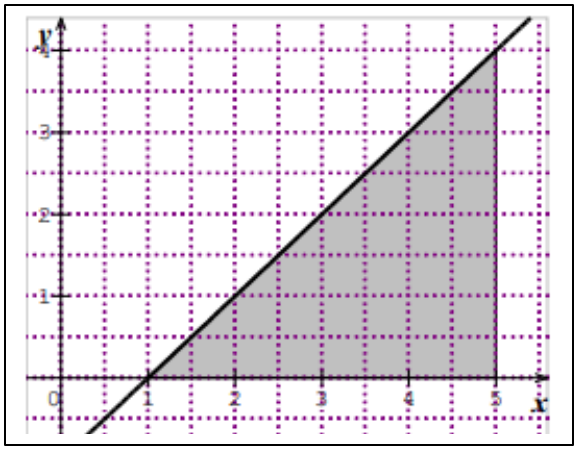
1) ***On considère la fonction $k$ définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3$ et représenté ci-contre. On cherche à déterminer l'aire du domaine grisé sur le dessin ci-contre.***



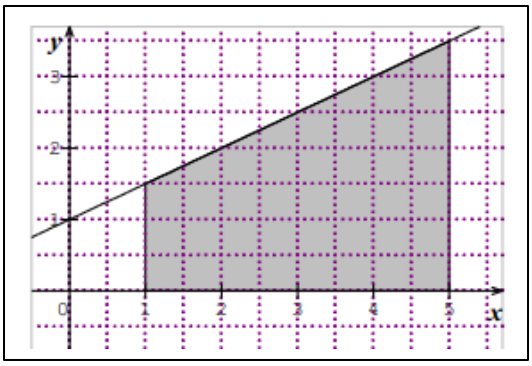

***a. Calculer cette aire en $cm^2$***

***b. Trouver une primitive $K$ de la fonction $k$ et calculer $K(5) - K(1)$***

***2) Mêmes questions pour la fonction $g$ définie par $g(x) = x - 1$ et représenté ci-contre***



***3) Recommencer les mêmes questions pour la fonction h définie par*** $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ***et représenté ci-contre***




***4) Que remarque-t-on dans les trois cas ?***

### c) Propriétés des intégrales

### Activité préparatoire

**1)** *Soient les intégrales suivantes :* $I = \int_1^2 -t^2 dt$ *et* $J = \int_1^2 3dt$

*a) Calculer* $I$ *et* $J$

*b) Calculer* $K = \int_1^2 (3 - t^2)dt$

*c) Calculer* $I + J$ *puis comparer le résultat à la valeur de de* $K$

*2) On considère les intégrales suivantes*

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3costdt\,;\; B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sintdt \text{ et } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t\, dt + 2\sin t)dt$$

*a) Calculer* $A\,;\; B\,;\; A + B\,;\; C$ *puis comparer les valeurs* $A + B$ *et* $C$

*3) Soient* $U = \int_{-2}^1 x^2 dx$ *et* $V = \int_1^{-2} x^2 dx$

*a) Calculer* $U$ *et* $V$

*b) Quelle conjecture faites-vous ?*

**Propriétés :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ soit $a$ , $b$ et $c$ trois éléments de $I$. On suppose que $f$ et $g$ admettent des primitives sur $I$. Soit $k$ un réel quelconque.

## P1 Linéarité

- $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (kf)(x)dx = \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

**Remarque :**

On aurait pu traduire la linéarité de l'intégrale en considérant deux réels $k$ et $k'$ quelconques et en écrivant :

$$\int_a^b (kf \pm k'g)(x)dx = \int_a^b \big(kf(x) \pm k'g(x)\big)dx = k\int_a^b f(x)dx \pm k'\int_a^b g(x)dx$$

## P2 Relation de CHASLES

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)dx$$

**EXERCICE D'APPLICATION**

Calculer $B = \int_{-1}^{1} |t(t-1)|dt$

| $t$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-t$ | $t$ | $t$ | |
| $t-1$ | $-t+1$ | $-t+1$ | $t-1$ | |
| $t(t-1)$ | $t^2-t$ | $-t^2+t$ | $t^2-t$ | |

$$\int_{-1}^{1} |t(t-1)|dt = \int_{-1}^{0} (t^2-t)dt + \int_{0}^{1} (-t^2+t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 1$$

**Donc $\underline{B = 1}$**

### P₃ Positivité

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ alors: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$ alors: $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

### P₄ Conservation de l'ordre d'intégration

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alor $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

**Démonstration** : Si, pour tout $x$ de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leq 0$, d'où $\int_a^b (f-g)(x)dx \leq 0$ donc : $\left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right) \leq 0$ soit $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

### P₅ Permutation des bornes

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

### P₆ Stabilité des bornes

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Ne jamais écrire que : $\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx$

## 3. INTEGRATION PAR PARTIES

### a)Utilité

C'est une technique très utilisée dans le calcul des intégrales et qu'on applique lorsqu'on a à intégrer un produit de deux fonctions de natures différentes.

### b) Théorème

On considère deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.

Alors : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

***ou bien***

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Ces deux dernières relations sont connues sous le nom de ***formules d'intégration par parties.***

**Démonstration :** On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, ainsi $uv' = (uv)' - u'v$ et en intégrant ces deux fonctions sur $[a; b]$, on obtient $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

## *EXERCICE D'APPLICATION*

A l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale suivante : $\int_0^\pi x \sin x\, dx$

**Posons :** $u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = sinx \Rightarrow v = -cosx$

Ainsi: $\int_0^\pi x \sin x\, dx = [x(-cosx]_0^\pi - \int_0^\pi (-cosx)dx$

$= [x(-cosx]_0^\pi + \int_0^\pi cosxdx$

$= [x(-cosx]_0^\pi + [sinx]_0^\pi$

$= (\pi cos\pi - (0cos0)) + (sin\pi - sin0)$

$= \pi$

D'où $\int_0^\pi x \sin x\, dx = \pi$

**N.B :** Dans le produit des fonctions à intégrer, choisir la fonction à dériver avec précaution. Dans certains cas, ce choix s'impose (voir conseils pratiques ci-dessous.

CONSEILS PRATIQUES : Comment effectuer une bonne intégration par parties (I.P.P)

**1er cas** : Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***polynôme*** × ***fonction trigo*** ou ***bien polynôme*** × ***fonction racine carrée,*** **il faudrait toujours dériver la fonction polynôme**

## *EXERCICE D'APPLICATION*

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi}(2x-1)sin(2x)dx$ ; b) $\int_0^3 2x\sqrt{x+1}\,dx$ ; c) $\int_{-8}^3 \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

**2e cas :** Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***A(x)*** × ***fonction logarithme*** avec ***A(x)*** = **fonction polynôme ou fonction rationnelle ou fonction trigo ou fonction racine carrée ou fonction exponentielle, il faudrait toujours dériver la fonction logarithme**

**3e cas :** Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***B(x)*** × ***fonction exponentielle*** avec ***B(x)*** = **fonction polynôme ou fonction rationnelle ou fonction trigo ou fonction racine carrée ou fonction exponentielle, il faudrait toujours dériver la fonction *B(x)***

## *APPLICATIONS IMMEDIATES*

***Activité 1 :***

*A l'aide de deux I.P.P, calculer les intégrales suivantes :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$

***Activité 2 :***

*On considère les intégrales suivantes :* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x cos^4 x\,dx$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 x sin^4 x\,dx$

*1) Calculer* $I + J$ *et* $I - J$

*2) En déduire les valeurs exactes de* $I$ *et* $J$

***Activité 3 :***

*On considère les intégrales suivantes :* $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\cos^2 x\,dx$ *et* $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)sin^2 x\,dx$

*1) Justifier l'existence de A et B*

*2) Calculer A+B puis A-B*

*3) Déduire les valeurs de A et B*

***Activité 4 :***

*Soit la suite d'intégrale* $I_n$ *définie par* $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

*1) calculer* $I_0$

*2) Calculer* $I_1$ *à l'aide d'une I.P.P. Etablir une relation de récurrence entre* $I_n$ *et* $I_{n-1}$

***Activité 5 :***

*Soit la suite d'intégrale* $I_n$ *définie par* $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

*1) calculer* $I_0$

*2) En intégrant par parties, établir une relation de récurrence entre* $I_n$ *et* $I_{n-1}\;\forall\, n > 1$

*3) En déduire les valeurs exactes de* $I_1$ , $I_2$ *et* $I_3$

*4) Soit* $J_n$ *l'intégrale définie par* $J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n x dx$. *En intégrant par parties, montrer que :*

$$J_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)J_{n-2}$$

## N.B : TECHNIQUES DE CALCULS D'INTEGRALES

- **Changement de variable**

Soit $f$ une fonction continue sur $I$. $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}/\forall\, t \in I, (\alpha t + \beta) \in I$. Soient $a$ et $b \in I$ pour calculer

$\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt$

On peut procéder de la manière suivante. On pose $u = \alpha t + \beta$ $du = \alpha dt \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha}du$

$$\int_{a}^{b} f(\alpha t + \beta) = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$$

***Exercice d'application***

Calculer $I = \int_2^4 e^{(-\frac{1}{2}t+1)}\mathrm{dt}$

**Posons :** $u = -\frac{1}{2}t + 1 \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dt$ **donc** $dt = -2du$

$\int_2^4 e^{(-\frac{1}{2}t+1)}\,dt = \int_0^{-1} -2e^u du$

$$I = -2\int_0^{-1} e^u\,du$$

$$= -2[e^u]_0^{-1}$$

$$\underline{I = -2(e^{-1}-1)}$$

- **Intégration d'une fonction paire, impaire, périodique**

**Propriétés :**

P₁) Soit $f$ une fonction **continue et paire** sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

P₂) Soit $f$ une fonction **continue et impaire** sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

P₃) Soit $f$ une fonction **continue sur $\mathbb{R}$ et périodique $p$** alors :

- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$
- $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ $\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

## 4. INEGALITES ET INTEGRALES

### a)Théorème de la moyenne

Ce théorème est utile pour établir les inégalités en utilisant les intégrales. C'est la forme intégrale de l'inégalité des accroissements finis (I.A.F). Il se présente sous deux formes :

**Forme 1** : soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ donc intégrable ; $m$ et $M$ deux réels.

Si $m \le f(x) \le M$ alors on a : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

**ou**

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

**Démonstration :** Si, pour tout $x$ de $[a;\ b]$, $m \le f(x) \le M$ alors $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$ Or $\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M dx = M\int_a^b dx = M(b-a)$ donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

**Forme 2** : soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $M$ un réel.

Si $|f(x)| \leq M$ (avec $M > 0$) alors on a : $\boldsymbol{\int_a^b |f(x)dx| \leq M|b-a|}$

**Démonstration :** Si, pour tout $x$ de $[a;\ b]$, $|f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M$ alors

$\int_a^b -Mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b |M|dx$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq [Mx]_a^b \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$

or $a \leq b$ alors $b-a > 0 \Rightarrow |b-a| > 0$ d'où $\int_a^b |f(x)dx| \leq M|b-a|$

### b) Notion de la valeur moyenne

On suppose $a \leq b$ . On appelle « **valeur moyenne de $f$** sur l'intervalle $[a;\ b]$ » le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

## *APPLICATIONS IMMEDIATES*

***Activité 1 :***

*1) Calculer la valeur moyenne de la fonction* $\sin x$ *sur* $[\pi/3\ ;\ \pi]$

*2) Soit* $f$ *une fonction définie sur* $[3;4]$ *par* $f(x) = \sqrt{x^2-4}$. *Donner un encadrement de* $\int_3^4 f(x)dx$

*3) On considère la fonction* $f$ *définie sur* $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ *par* $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

*a) Montrer que* $f$ *est bornée sur* $\left[0;\frac{2}{3}\right]$

*b) En déduire un encadrement de* $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx$

***Activité 2 :***

*Soit* $f$ *une fonction définie sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *par* $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$. *Montrer que* $\frac{\cos x}{1+(\pi/2)^2} \leq f(x) \leq \cos x$. *En déduire un encadrement de* $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

***Activité 3 :***

*Sans calculer les intégrales, établir les encadrements suivants :*

*a)* $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}$

*b)* $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x+x^2}}dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{5}$

*c)* $\frac{2\pi}{13} \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{10-3\sin x}dx \leq \frac{2\pi}{7}$

## 5. INTEGRALES ET AIRES (CALCULS D'AIRES)

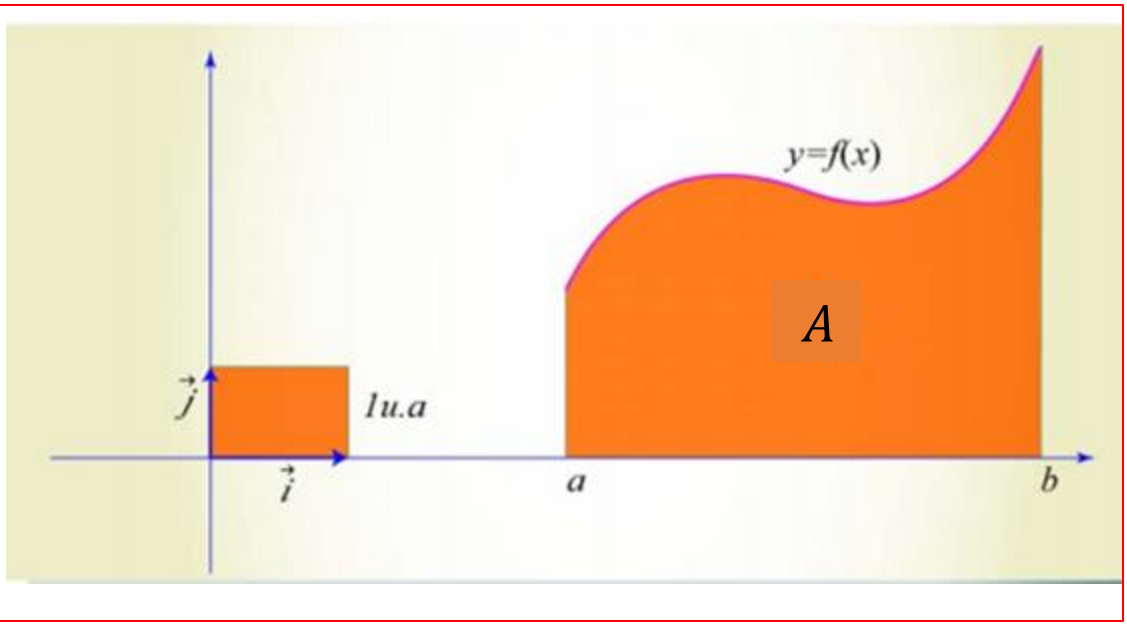
### a) Expression d'une primitive au moyen d'une intégrale

Soit $f$ une continue sur $I$ et $A \in I$. L'unique primitive de $f$ sur $I$ prenant la valeur 0 en $A$ est la primitive $F$ définie par la relation $F(x) = \int_a^b f(t)dt$

### b) Interprétation géométrique de l'intervalle

- Si $f$ une **fonction continue et positive** sur $[a;b]$ alors, **l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_f$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$** exprimée en **unités d'aire (U.A)** est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx \ (U.A)}$$

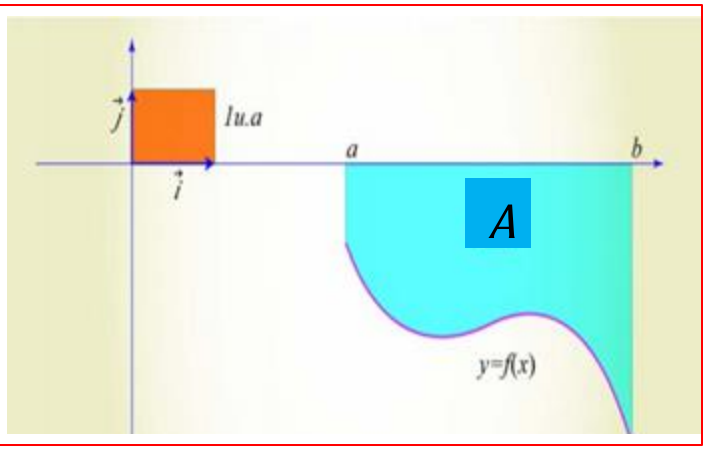


**N.B** : L'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi= $\boldsymbol{unité\ sur\ l'axe des\ abscisses \times unité\ sur\ l'axe des\ ordonnées}$

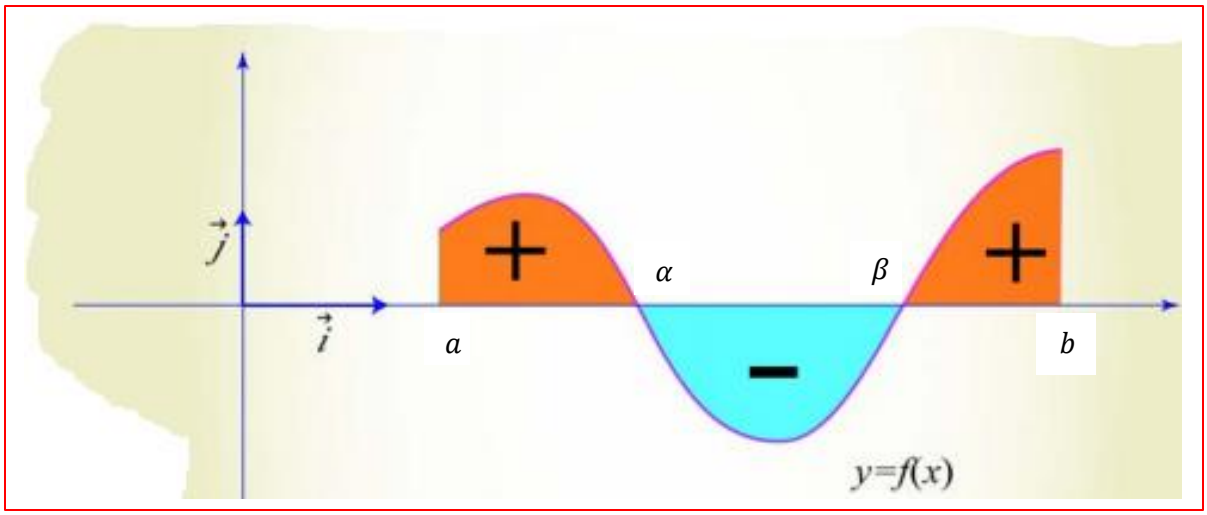
**Exemple :** Si l'unité sur **l'axe des abscisses est 2 cm** et l'unité sur **l'axe des ordonnées est 3cm** alors $\boldsymbol{U.A = 3 \times 2 = 6\ cm^2}$

- Si $f$ une **fonction continue et négative** sur $[a; b]$ alors, **l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_f$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$** exprimée en **unités d'aire (U.A)** est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{A = -\int_a^b f(x)dx\ (U.A)}$$



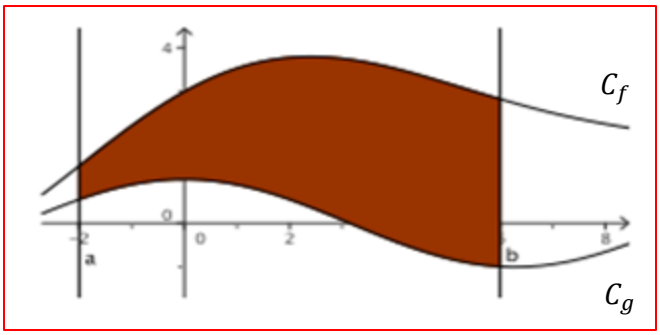

- Si $f$ est une fonction continue et ne **garde pas un signe constant** sur $[a; b]$ alors, **l'aire du domaine mesurée en unités d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses, diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses**



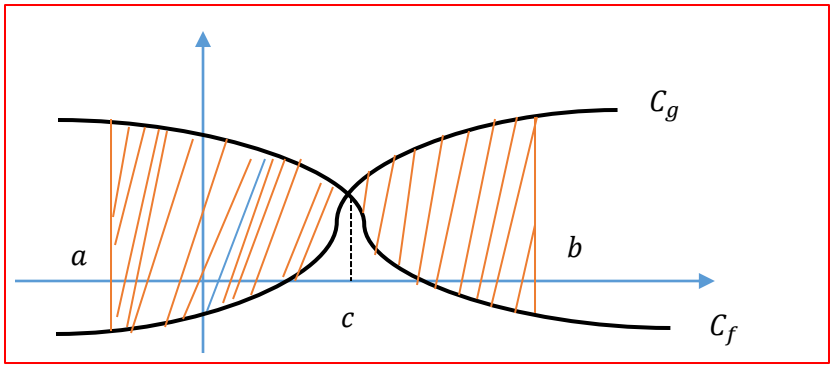
$$A = \int_{a}^{\alpha} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx \ (U.A)$$

- **Aire comprise entre deux courbes**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de courbe $C_f$ et $C_g$

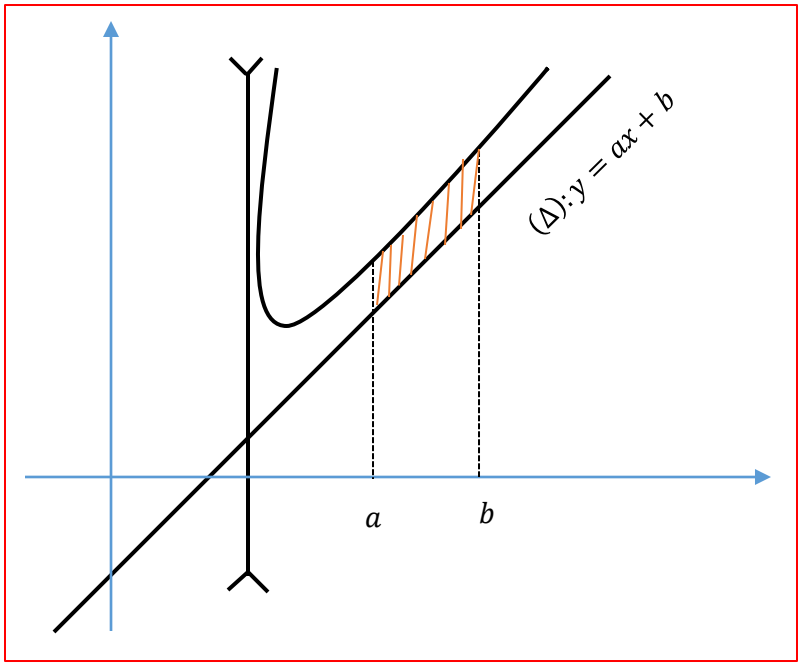



$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx\,(U.A)$$

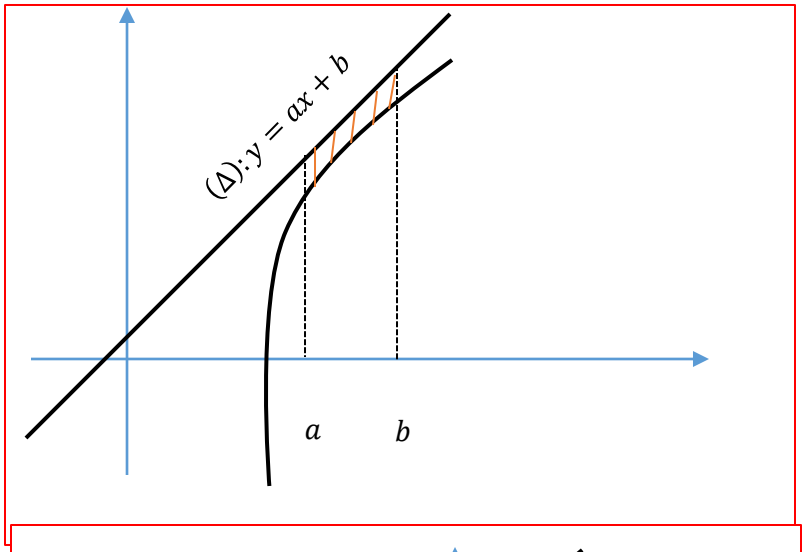



$$A = \int_{a}^{c} (f(x) - g(x))dx + \int_{c}^{b} (g(x) - f(x))(U.A)$$

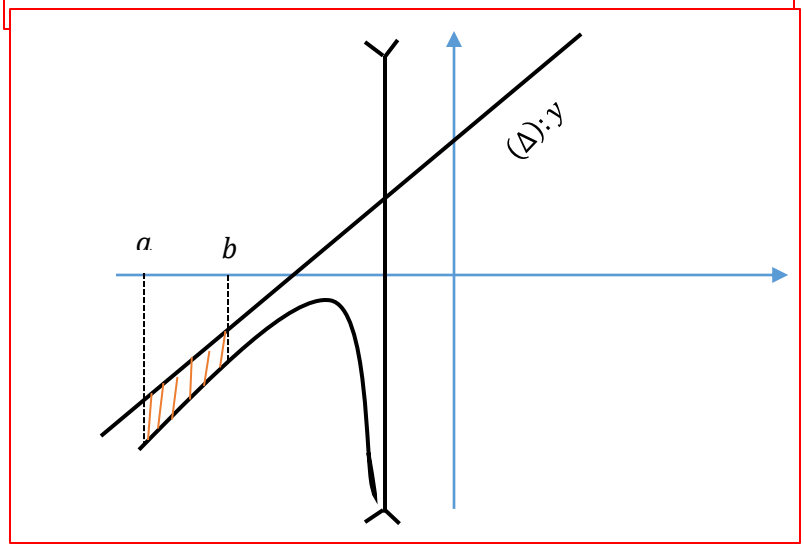
- **Cas particulier des courbes et asymptotes obliques (ce sont des cas récurrents)**




$$A = \int_a^b (f(x) - y)dx$$




$$A = \int_a^b (y - f(x))dx$$




$$A = -\int_a^b (y - f(x))dx$$

## APPLICATIONS IMMEDIATES

***Activité 1 :***

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ de courbe représentative $C_f$ d'unité graphique 0,5 cm*

*1) Représenter $C_f$*

*2) Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine limitée par les droites d'équation $x = 1, x = -1$,* l'axe des abscisses et la courbe $C_f$

***Activité 2 :***

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ de courbe représentative $C_f$ d'unité graphique 2 cm*

*1) Etudier les variations de $f$ puis dresser son tableau de variation*

*2) Montrer que $C_f$ admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne en étudiant les branches infinies en $+\infty$*

*3) Etudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote oblique*

*4) Représenter $C_f$ et son asymptote oblique*

*5) Hachurer le domaine $D_1$ défini par :* $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ *puis calculer l'aire de $D_1$ en $cm^2$*

*6) soit $\alpha$ un nombre réel tel que $\alpha > 1$. Hachurer le domaine de $D_\alpha$ limité par les droites d'équation $x = \alpha, x = 1$,* la courbe $C_f$ et l'asymptote oblique.

a) Calculer en $cm^2$ l'aire $A_\alpha$ et $D_\alpha$

b) Que peut-on dire de la limite de $A_\alpha$ quand $\alpha \to +\infty$

## 6. CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE

Figure 1

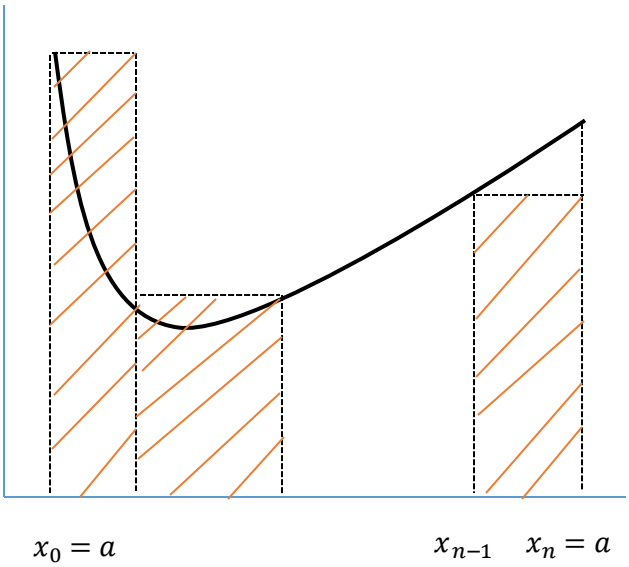
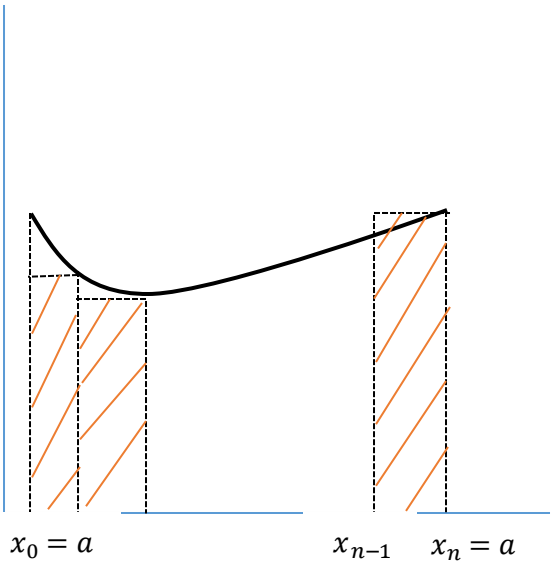



Figure 2



Méthode des rectangles

Elle consiste à diviser l'intervalle $[a;b]$ en $n$ intervalles réguliers d'extrémités $x_0 = a$....., $x_n = b$

On assimile alors l'aire $A$ à la somme des aires ou des intégrales définis par les figures $A = \int_a^b f(x)dx$

**Figure 1 :**

$$S_n = \frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_1) + \cdots \frac{b-a}{n} f(x_{n-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

**Figure 2 :**

$$S'_n = \frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \cdots \frac{b-a}{n} f(x_n)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

La précision des calculs est d'autant plus grande que $n$ est élevé.

**Propriétés :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur $[a;b]$telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\forall\, x \in [a;b]\ |f'(x)| < M$

**Alors si**

$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ ; $s'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $A = \int_a^b f(x)dx$ on a :

$$|S_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \text{ et } |S'_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

$$0 \leq |S_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to+\infty} |S_n - A| \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |S_n - A| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)dx$$

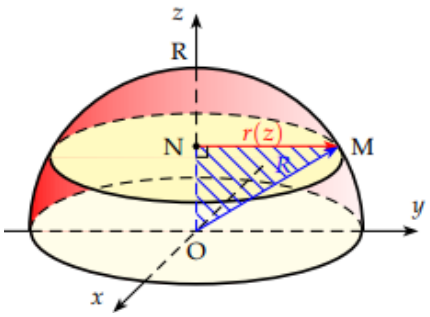
## 7. CALCUL DE VOLUME

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ On appelle unité de volume noté $u.v.$ Le nombre $||\vec{\imath}|| \times ||\vec{\jmath}|| \times ||\vec{k}||$. On considère un solide limité par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.

Pour tout $z$ tel que $b$, on note $Pz$ le plan perpendiculaire à $(Oz)$ et de cote $z$, $S(z)$ l'aire de la section du solide par le plan $Pz$. Si $S$ est une fonction continue sur $[a;\ b]$, alors le volume du solide est :

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(z)dz\ u.v}$$

- **Calcul du volume d'une sphère**




Compte tenu de la symétrie de la sphère, on calcule le volume d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2. On découpe ainsi la demi-sphère avec des plans perpendiculaires à l'axe $(Oz)$.

Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.

La surface de ces cercles $S(z)$ vaut : $\boldsymbol{S(z) = \pi r^2(z)}$

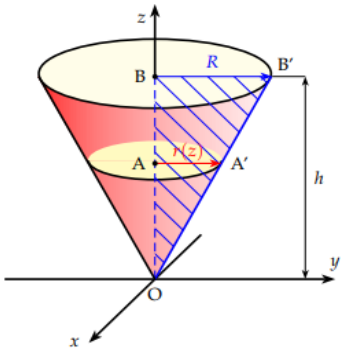
Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de $z$ à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en $N(0,0,z)$ : $r^2(z) = R^2 - z^2$

On obtient alors le demi-volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(z)\,dz = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi R^3$$

On en déduit alors le volume de la sphère que tout le monde a appris : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

- **Volume d'un cône**




On découpe le cône d'axe $(Oz)$ avec des plans perpendiculaires à l'axe $(Oz)$. Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$. Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de $z$ à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles : OBB' et OAA', on a avec $A(0,0,z)$ :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} \Leftrightarrow \frac{z}{h} = \frac{r(z)}{R} \Leftrightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

$$V = \int_0^h \pi r^2(z)dz = \int_0^h \pi \frac{R^2 z^2}{h^2} dz = \pi \frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^2\,dz = \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

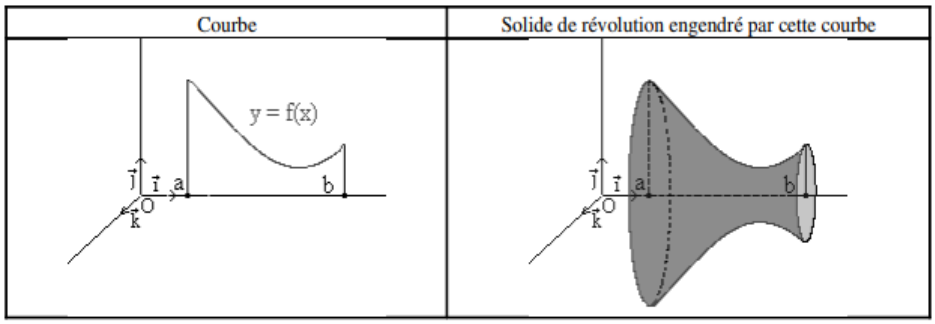
On retrouve ainsi le volume du cône que tout le monde connaît : $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$

- **Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe**

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la partie du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a, x = b$ et l'axe $(O,\vec{i})$. En tournant autour de l'axe $(O,\vec{i})$, cette partie de plan engendre un solide de résolution limité par les plans parallèles à $(O,\vec{j},\vec{k})$ d'abscisse respectives $a$ et $b$. La section $S$ du solide par le plan parallèle à $(O,\vec{j},\vec{k})$ d'abscisse $x$ est un disque de rayon $f(x)$, donc d'aire $\pi f^2(x)$ .

Le volume de ce solide est en unité de volume :

$$\int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$




***Exercice d'application***

***On considère le paraboloïde construit en faisant tourner la parabole d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$ autour de l'axe $(Oy)$. Le paraboloïde est un solide compris entre les plans d'équations $y = 0$ et $y = 1$, et la section du solide par le plan perpendiculaire à $(O; \vec{j})$ est un disque de rayon $x$, donc d'aire $\pi x^2 = \pi y$.***

Alors le volume de ce paraboloïde $(Vol) = \int_0^1 \pi y dy = \left[\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\ u.v.$

## 8. FONCTIONS DEFINIES PAR UNE INTEGRALE

**Théorème :**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit $g : I \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

$g$ est dérivable sur $I$ et on a : $g'(x) = f(x)$. En fait $g$ étant une primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

**Propriétés:**

- $g(a) = 0$
- $g(b) = \int_a^b f(t)dt = constante$
- Si $f$ est positive (resp. négative) dans un intervalle $[p;q]$ qui contient $a$,
  Si $x > a$ alors $f$ et $g$ ont même signe
  Si $x < a$ alors $f$ et $g$ ont les signes opposés
- Si $f$ est continue alors $g$ est continue et dérivable ; si $f$ est dérivable alors ' est continue et dérivable.

## EXERCICE D'APPLICATION

***Calculer la dérivée de la fonction $g$ définie de :***

$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+tan^4 t}$$

***Solution :***

*Ici* $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $a = 0 \in I$. $f : x \mapsto \frac{1}{1+tan^4 t}$

*La fonction* $f$ *est continue sur* $I$ *donc la fonction* $g$ *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et on a :*

$$g'(x) = \frac{1}{1+tan^4 x}$$

## T.A.F A LA MAISON

***Activité 1 :***

*Soit* $f$ *la fonction définie et dérivable sur* $[0;+\infty[$ *telle que* $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. *On admet que la fonction* $f$ *est positive sur* $[0;+\infty[$. *On note* $(C)$ *la courbe représentative de sur* $f$ *dans un repère orthogonal du plan représentée ci-dessous.*

*Soit la suite sur* $(I_n)$ *définie pour tout entier naturel* $n$ *par* $I_n = \int_0^n f(x)dx$ *(on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de* $I_n$ *en fonction* $n$.

*1) Montrer que la suite* $(I_n)$ *est croissante*

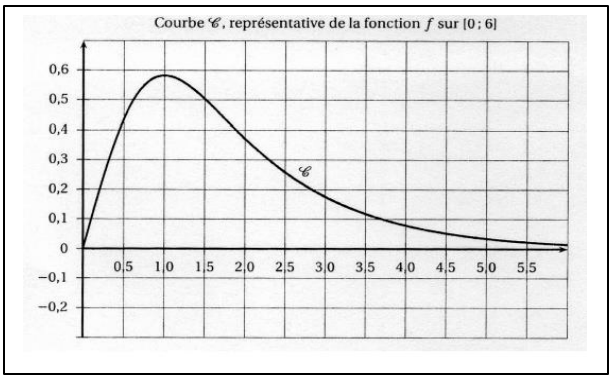
*2) On admet que pour tout réel* $x$ *de l'intervalle* $[0;+\infty[$ $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$

*a) Montrer que, pour tout entier naturel* $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$

*b) Soit* $H$ *la fonction définie et dérivable sur* $[0;+\infty[$ *telle que* $H(x) = (-x-1)e^{-x}$ *Déterminer la fonction dérivée* $H'$ *de la fonction* $H$.

*c) En déduire que, pour tout entier naturel* $n$, $I_n \leq 2$

*3) Montrer que la suite* $(I_n)$ *est convergente (on ne demande pas la valeur de sa limite)*



***Activité 2 :***

$t$ *désigne un réel positif. On suppose qu'à l'instant* $t$ *(exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par* $f(t)$ *(exprimée en degré Celsius) avec :*

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{ln5}{10}t}$$

*1a) Etudier le sens de variations de* $f$ *sur* $[0; +\infty[$

*b) Justifier que si* $t \geq 10$ *alors* $f(t) \geq 85$

*2) Soit* $\theta$ *un réel tel que* $\theta \geq 10$

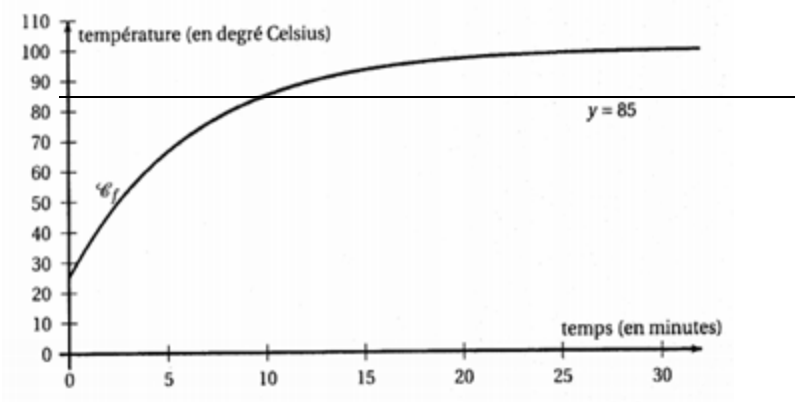
*On note* $A(\theta)$ *le domaine délimité par les droites d'équations* $t = 10, t = \theta, y = 85$ *et la courbe représentative* $(C_f)$ *de* $f$.

*On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps* $\theta$, *si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine* $A(\theta)$ *est supérieure à 80.*

a) *Justifier à l'aide du graphique donné ci-dessous que* $A(25) > 80$

b) *Justifier que pour* $\theta \geq 10$ *on a* $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{ln5}{10}t}dt$

c) *La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?*




*On considère la suite* $(u_n)$ *définie pour tout entier naturel* $n$ *par :* $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

*1a) Montrer que* $u_0 + u_1 = 1$

c) *Montrer que* $u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$ *et en déduire* $u_0$

*2a) Montrer que pour tout entier naturel* $n$, $u_n \geq 0$

*b) Montrer que pour tout entier naturel* $n$ *non nul,* $u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$

*c) En déduire que pour tout entier naturel* $n$, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

*3) Prouver que* $(u_n)$ *converge vers une limite à déterminer*

Les Grands profs de Maths

DRAFT

# Mathématiques
# Terminales scientifiques C & E
# Support de Cours sur les Coniques.

29 août 2018

# Table des matières


**1 Les coniques. 1**

1.1 Généralité . . . 1

1.1.1 **Etude géométrique d'une conique.** . . . 1

1.1.2 **Définition et Propriétés.** . . . 2

1.1.3 **Régionnement du plan par une conique.** . . . 2

1.2 Equation réduite d'une conique . . . 3

1.2.1 **Equation réduite d'une Parabole.** . . . 3

1.2.2 **Equation reduite d'une conique à centre** $(e \neq 1)$**.** . . . 5

1.3 Etude Analytique de la Parabole, de l'Ellipse et de l'Hyperpobe . . . 8

1.3.1 **Etude analytique de la parabole.** . . . 8

1.3.2 **Etude analytique de l'Ellipse.** . . . 9

1.3.3 **Etude analytique de l'Hyperbole.** . . . 12

1.3.4 **Exercices.** . . . 14

1.3.5 **Exercices d'applications.** . . . 14


DRAFT

# Les coniques.

**Objectifs pédagogiques opérationnels** :
A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :
↪ Reconnaître une conique ;
↪ Ecrire l'équation d'une parabole ;
↪ Reconnaître l'équation d'une éllipse ;
↪ Reconnaître l'équation d'une hyperbole ;
↪ déterminer la nature et les éléments caractéristiques (axe focal, foyer, directrice, sommets et paramètre) d'une conique ;
↪ Faire la représentation graphique d'une conique.

DRAFT

## 1.1 Généralité

### 1.1.1 Etude géométrique d'une conique.

**Activité résolue.**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, $F$ un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$, e un nombre réel strictement posif. Soit $M$ un point du plan, on désigne par $H$ son projété orthogonal sur (D).
Soit $(\Gamma_e)$ l'ensemble des points $M$ tels que $\frac{MF}{MH} = e$, $K$ le projété orthogonal de $F$ sur $(\mathcal{D})$ et $(\Delta)$ la droite $(FK)$.

Nous allons étudier et construire $(\Gamma_e)$ pour $e = 1$. (***Cas d'une parabole***)

**(1)** Justifions que $(\Delta)$ est un axe de symétrie de $(\Gamma_1)$. Soit $M'$ le symétique de $M$ par rapport à $(\Delta)$ $H'$ son projété orthogonal sur $(\mathcal{D})$ donc $M'F = MF$ et $M'H' = MH$ d'où $\frac{M'F}{M'H'} = \frac{MF}{MH} = 1$, $M' \in (\Gamma_1)$.

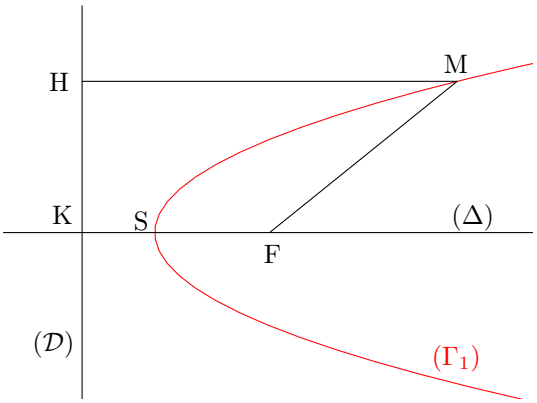
**(2)** Démontrons que le milieu S de $[FK]$ appartient à $(\Gamma_1)$.
On a $\frac{SF}{SK} = 1$ d'où $S \in \Gamma_1$

**(3)** Démontrons que tout point de $\Gamma_1$ appartient au démi-plan délimité par la droite $(T)$ passant par $S$ et parallèle à $(\mathcal{D})$.
Il suffit de justifier que $MF \leq MK$
en effet $MF = MH \leq MK$. Cqfd

**(4)** Justifions qu'un point M appartient à $(\Gamma_1)$ si et seulement si $M$ est le point de rencontre de $(MH)$ et la médiatrice de $[HE]$

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma_1) &\Leftrightarrow M \in (MF) \text{ et } MF = MH \\ &\Leftrightarrow M \in (MH) \text{ et } M \in \text{médiatrice } [HF] \\ &\Leftrightarrow M \text{ est le point de rencontre de } (MH) \text{ et la médiatrice de } [HF]\ . \end{aligned}$$

**(5)** Programme de construction de $(\Gamma_1)$.
- Choisir un point $H$ de $(\mathcal{D})$ et trace la perpendiculaire $(\Delta_H)$ à $(\mathcal{D})$ passant par $H$.
- Construire la médiatrice de $[HF]$.
- Repérer le point de rencontre de la droite $(\Delta_H)$ et la médiatrice de $[HF]$




**Conclusion**

$(\Gamma_1)$ est une parabole.
On vérifie également que :
– Si $0 < e < 1$ alors $(\Gamma_e)$ est une élipse ;
– Si $e > 1$ alors $(\Gamma_e)$ est une hyperbole.

### 1.1.2 Définition et Propriétés.

**Définition 1.1.** *Soit $(\mathcal{D})$ une droite $F$ un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$.*
*On appelle Conique de foyer $F$ de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e$ l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan telque $\frac{MF}{MF} = e$ où $H$ est le projété orthoganal de $M$ sur $(\mathcal{D})$.*

DRAFT

**Propriétés**

*Soit $(\Gamma)$ une conique de foyer $F$ de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e$.*

$(P_1)$ – *Si $e = 1$ alors $(\Gamma)$ est une parabole ;*
– *Si $0 < e < 1$ alors $(\Gamma)$ est une éllipse ;*
– *Si $e > 1$ alors $(\Gamma)$ est une hyperbole.*

$(P_2)$ *La droite $(\Delta)$ passant par $F$ et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de $(\Gamma)$*

$(P_3)$ – *Si $e = 1$ $(\Gamma)$ coupe $(\Delta)$ en un seul point $S$ milieu de $[FK]$.*
– *Si $e \neq 1$ alors $\Gamma$ coupe $(\Delta)$ en deux points distinct $A$ et $A'$.*
*Le point $S$ est appelé* **sommet** *de la parabole.*
*Les points $A$ et $A'$ sont les sommets de la conique situés sur l'axe $(\Delta)$*

**Remarque**

*Si $e \neq 1$ alors $A = bar\{(F;1),(K;e)\}$ et $A' = bar\{(F;1),(K;-e)\}$*

### 1.1.3 Régionnement du plan par une conique.

**Définition 1.2.** *Soit $(\Gamma)$ une conique de foyer $F$ de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e$.*
*Pour tout point $M$ du plan de projété orthogonal $H$ sur $(\mathcal{D})$, on a :*
– *$M$ est intérieur à $(\Gamma)$ si $MF < eMH$ ;*
– *$M$ est exterieur à $(\Gamma)$ si $MF > eMH$.*

**Remarque**

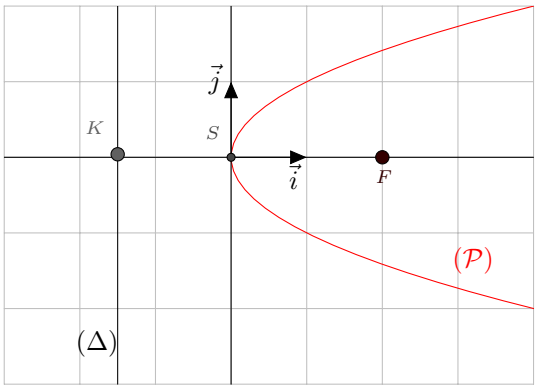
*Le foyer $F$ d'une conique est intérieur à cette conique. Tout point de la directrice $(\mathcal{D})$ d'une conique est extérieur à cette conique.*

## 1.2 Equation réduite d'une conique

### 1.2.1 Equation réduite d'une Parabole.

*Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer $F$ et de directrice $(\mathcal{D})$, $K$ le projété orthogonal de $F$ sur $(\mathcal{D})$ et $S$ milieu de $[FK]$.*

*Le plan est muni d'un répère orthonormé $(S;\vec{i},\vec{j})$ telque $\vec{i}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$.*




*Posons $P=KF$ et $F\left(\frac{P}{2};0\right)$ $(\mathcal{D}):x=-\frac{P}{2}$*
*Soit $M(x,y)$ un point du plan $H\left(-\frac{P}{2};y\right)$.*

$$\begin{aligned} M\in \Leftrightarrow\ & MF=MH \\ \Leftrightarrow\ & MF^2=MH^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \\ \Leftrightarrow\ & (\mathcal{P}):y^2=2px \end{aligned}$$

DRAFT

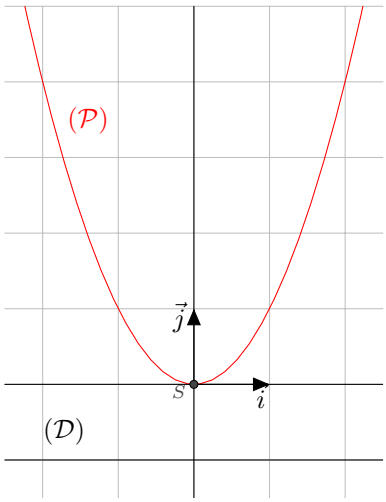
**Propriété**

*Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer $F$, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e$.*
*Dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$ telque $\vec{i}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$. $(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y^2=2px$, où $p$ est la distance de $F$ à $(\mathcal{D})$ $p$ est appélé paramètre de la parabole.*

**Remarques**

(1) *Si l'axe focal est l'axe de repère $(S;\vec{j})$ On obtient une équation de la forme $x^2=2py$.*

*Dans le repère $S;\vec{i},\vec{j}$ telque $\vec{j}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$*




*En effet posons* $P = KF$ *et* $F\left(0; \frac{P}{2}\right)$ $(\mathcal{D}) : y = -\frac{P}{2}$
*Soit* $M(x, y)$ *un point du plan* $H\left(x; -\frac{P}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} M \in & \Leftrightarrow MF = MH \\ & \Leftrightarrow MF^2 = MH^2 \\ & \Leftrightarrow (y - \frac{p}{2})^2 + x^2 = (y + \frac{p}{2})^2 \\ & \Leftrightarrow y^2 - py + \frac{p^2}{4} + x^2 = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\ & \Leftrightarrow (\mathcal{P}) : x^2 = 2py \end{aligned}$$

(2) *Dans le repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe d'équation* $y^2 = 2ax$ *est une parabole de sommet* $O$, *d'axe focal la droite de repère* $(O; \vec{i})$ *de paramètre* $|a|$ *de foyer* $F\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ *et de directrice* $(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$.

**Exemple.**

*La courbe d'équation* $y^2 = 10x$ *est une parole de sommet* $O$ *d'axe focal la droite de repère* $(O; \vec{i})$, *de paramètre* $5$ *de foyer* $F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ *et de directrice* $(\mathcal{D}) : x = -\frac{5}{2}$.

**Exercice**

*Déterminer les éléments caractéristiques (sommet ; axe focal ; foyer ; paramètre directrice) des paraboles suivants* $(\mathcal{P}_1) : y^2 + 16x = 0$ ; $(\mathcal{P}_\in) : y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

(3) *Dans le repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe d'équation* $x^2 = 2ay$ *est une parabole de sommet* $O$, *d'axe focal la droite de repère* $(O; \vec{j})$ *de paramètre* $|a|$ *de foyer* $F\left(0; \frac{a}{2}\right)$ *et de directrice* $(\mathcal{D}) : y = -\frac{a}{2}$.

**Exemple.**

*La courbe d'équation* $x^2 + 9y = 0$ *est une parole de sommet* $O$ *d'axe focal la droite de repère* $(O; \vec{j})$, *de paramètre* $\frac{9}{2}$ *de foyer* $F\left(0; -\frac{9}{4}\right)$ *et de directrice* $(\mathcal{D}) : x = \frac{9}{4}$.

**Exercice**

*Déterminer les éléments caractéristiques (sommet ; axe focal ; foyer ; paramètre directrice) des paraboles suivants* $(\mathcal{P}_1) : x^2 + 8y = 0$ ; $(\mathcal{P}_2) : x^2 - 8y + 4x + 6 = 0$.

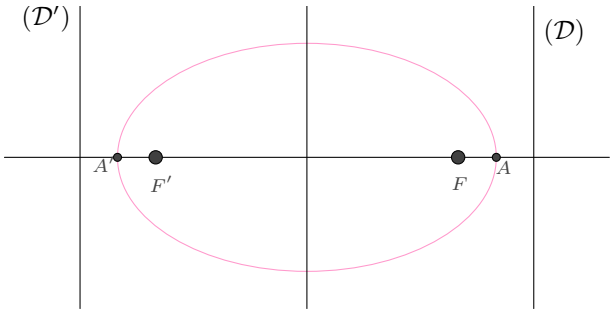
DRAFT

### 1.2.2 Equation reduite d'une conique à centre ($e \neq 1$).

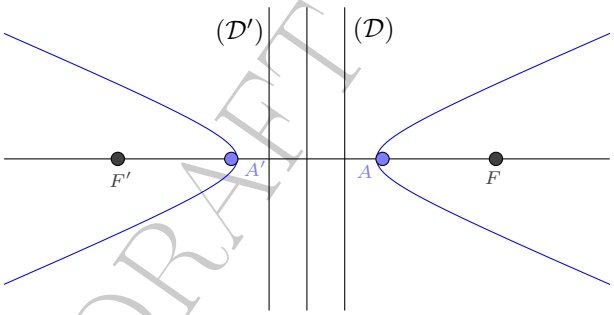
*Soit* $(\Gamma)$ *une conique de foyer* $F$*, de directrice* $(\mathcal{D})$*, d'excentricité* $e$ $(e \neq 1)$ *et d'axe* $(\Delta)$ *est l'axe focal.* $A$ *et* $A'$ *deux points de* $(\Delta)$ *appartenant à* $(\Gamma)$*.*

*Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *telque* $O$ *est le milieu de* $[AA']$ *et* $\vec{i} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$

**Cas où** $0 < e < 1$ **: Ellipse**




**Cas où** $e > 1$ **: Hyperbole**




DRAFT

*On a* $A = bar\{(F,1);(K,e)\}$ *;* $A' = bar\{(F,1);(K,-e)\}$
*En effet si* $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$ *alors pour tout point* $M$ *du plan on a la relation* $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ *c'est-à-dire*

$$\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = (1+e)\overrightarrow{MA}$$
$$\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = (1-e)\overrightarrow{MA'}$$

*Pour* $M = O$*, on a :*

$$\overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'}$$

*on en déduit que :* $\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK}$
*Posons* $a = OA$ *et* $c = OF$ *on a :* $OF = eOA$ *et* $OA = eOK$ *;on en déduit que :* $e = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$ *et* $OK = \frac{OA}{e} = \frac{a^2}{c}$*. Deplus* $F(c;0)$ *et* $(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$

*Soit $M(x;y)$ un point du plan ; $H\left(\frac{a^2}{c};y\right)$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $(\mathcal{D})$ et $H\left(\frac{a^2}{c};0\right)$ :*

$$\begin{aligned}
M\in(\Gamma) &\Leftrightarrow \frac{MF}{MH}=e\\
&\Leftrightarrow MF=eMF\\
&\Leftrightarrow MF^2=e^2MH^2\\
&\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2\\
&\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=(\frac{c}{a})^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2\\
&\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2\\
&\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2\\
&\Leftrightarrow x^2-\frac{c^2}{a^2}x^2+y^2-a^2+c^2=0\\
&\Leftrightarrow (\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2+y^2-a^2+c^2=0\\
&\Leftrightarrow (a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.
\end{aligned}$$

DRAFT

**Propriétes**

($P_1$) *Soit $(\Gamma)$ une conique de foyer $F$ de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e$ $(e\neq 1)$. On désigne par $A$ et $A'$ les sommets de $(\Gamma)$ situés sur son axe focal.*
*Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ tel que $O$ est le milieu de $[AA']$ et $\overrightarrow{i}=\frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$, $(\Gamma)$ est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ où $a=OA$ et $c=OF$.*

($P_2$) *Soit $(\Gamma)$ une conique d'excentricité $e$ $(e\neq 1)$.*
*La médiatrice de $[AA']$ est un axe de symétrie de $(\Gamma)$.*
*Le milieu $O$ de $[AA']$ est centre de symétrie de $(\Gamma)$.*

**Remarques**

**(1)** *Un échange des axes de repère $(O;\overrightarrow{i})$ et $(O;\overrightarrow{j})$ conduit à l'équation $\frac{x^2}{b^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.*
- *L'axe focal est la droite de repère $(O;\overrightarrow{j})$.*
- *Le foyer est $F(0;c)$.*
- *La directrice est $(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}$.*
- *Les sommets situés sur l'axe focal sont les points $B(0;b)$ et $B'(0;-b)$.*

**(2)** *$F'$ et $(\mathcal{D}')$ image de $F$ et $(\mathcal{D})$ par la symétrie de centre $O$ sont égaléments un foyer et une directrice de $(\Gamma)$.*
*La distance $FF'=2c$ est appélé distance focal de $(\Gamma)$.*

**(3)** – *Si $0<e<1$, alors $(\Gamma)$ est une éllipse $\Rightarrow \frac{c}{a}<1\Rightarrow c<a$*
*posons $b^2=a^2-c^2$ l'équation de $(\Gamma)$ devient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .*
– *Si $e>1$ alors $(\Gamma)$ est une hyperbole $\frac{c}{a}>1\Leftrightarrow c>a$ posons $b^2=c^2-c^2$ l'équation $(\Gamma)$ devient $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.*

**En Résumé on a le tableau recapitulatif suivant**

| *Equation* | *Nature* | $c$ | $e$ | *Foyer* | *Directrice* | *axe focal* | *sommets principaux* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ | *Ellipse* | $\sqrt{a^2-b^2}$ | $\frac{c}{a}$ | $F\binom{c}{0}$ $F'\binom{-c}{0}$ | $(\mathcal{D}):x=\frac{a^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):x=-\frac{a^2}{c}$ | *Droite de repère* $(O;\overrightarrow{i})$ | $A\binom{a}{0}$ $A'\binom{-a}{0}$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $b>a>0$ | *Ellipse* | $\sqrt{b^2-a^2}$ | $\frac{c}{b}$ | $F\binom{0}{c}$ $F'\binom{0}{-c}$ | $(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):y=-\frac{b^2}{c}$ | *Droite de repère* $(O;\overrightarrow{j})$ | $B\binom{0}{b}$ $B'\binom{0}{-b}$ |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | *Hyperbole* | $\sqrt{a^2+b^2}$ | $\frac{c}{a}$ | $F\binom{c}{0}$ $F'\binom{-c}{0}$ | $(\mathcal{D}):x=\frac{a^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):x=-\frac{a^2}{c}$ | *Droite de repère* $(O;\overrightarrow{i})$ | $A\binom{a}{0}$ $A'\binom{-a}{0}$ |
| $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | *Hyperbole* | $\sqrt{a^2+b^2}$ | $\frac{c}{b}$ | $F\binom{c}{0}$ $F'\binom{0}{-c}$ | $(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):y=-\frac{b^2}{c}$ | *Droite de repère* $(O;\overrightarrow{j})$ | $B\binom{0}{b}$ $B'\binom{0}{-b}$ |

**NB**

*Lorsque l'axe focal est la droite de repère $(O;\overrightarrow{i})$ alors le milieu $O$ de $[AA']$ est appelé centre de la conique Lorsque l'axe focal est la droite de repère $(O;\overrightarrow{j})$ alors le milieu $O$ de $[BB']$ est appelé centre de la conique.*

**Exercices d'applications**

($E_1$) *Déterminer le foyer et la directrice de la parabole* $(\mathcal{P}):x^2+4x+4y=0$

($E_2$) *Donner la nature et les éléments caractéristique des coniques suivantes :*
- $(\mathcal{E}):x^2+2y^2-2x-3=0$ ;
- $(\mathcal{H}):2x^2-y^2-4y-12=0$.

**Résolution**

($E_1$)

$$\begin{aligned} x^2+4x+4y=0 &\Leftrightarrow (x+2)^2-4+4y=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=4(1-y)\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=-4(y-1)\end{aligned}$$

*Soit* $S\binom{-2}{1}$ *; Soit* $M\binom{x}{y}$ *dans* $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ *et soit* $M\binom{X}{Y}$ *dans* $(S;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SM}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+X\\ y=1+Y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x+2=X\\ y-1=Y\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x,y)\in(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (x+2)^2=-4(y-1)\\ &\Leftrightarrow X^2=-4Y^2\end{aligned}$$

*$(\mathcal{P})$ est la parabole de sommet $S$, d'axe focal la droite de repère $(S;\overrightarrow{j})$, de directrice $(\mathcal{D}):y=1$, de foyer $F\binom{0}{-1}$ de paramètre 2.*

($E_2$)

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow x^2+2y^2-2x-3=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+2y^2-4=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1\end{aligned}$$

DRAFT

*Soit* $O'\binom{1}{0}$ *et soit* $M\binom{X}{Y}$ *dans* $(O';\vec{i},\vec{j})$ *donc* $M\in(\mathcal{E})\Leftrightarrow \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}=1$
$(\mathcal{E})$ *est l'éllipse de centre* $O'\binom{1}{0}$, *d'excentricité* $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *d'axe focal la droite de repère* $(O';\vec{i})$ *de foyer focal* $F\binom{\sqrt{2}}{0}$ *et* $F'\binom{-\sqrt{2}}{0}$ *; les sommets sont :* $A\binom{2}{0}$ *et* $A'\binom{-2}{0}$ *et de directrice* $(\mathcal{D}):x=2\sqrt{2}$ *et* $(\mathcal{D}'):x=-2\sqrt{2}$.

$(E_3)$

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\mathcal{H}) &\Leftrightarrow 2x^2-y^2-4y-12=0\\ &\Leftrightarrow 2x^2-(y+2)^2-8=0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{8}=1\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}-\frac{(y+2)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \end{aligned}$$

*Soit* $O'\binom{0}{-2}$ *et soit* $M\binom{X}{Y}$ *dans* $(O';\vec{i},\vec{j})$ *donc* $M\in(\mathcal{H})\Leftrightarrow \frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{2\sqrt{2}}=1$
$(\mathcal{H})$ *est l'hyperbole de centre* $O'\binom{0}{-2}$, *d'excentricité* $e=\sqrt{3}$, *d'axe focal la droite de repère* $(O';\vec{i})$ *de foyer focal* $F\binom{2\sqrt{3}}{0}$ *et* $F'\binom{-2\sqrt{3}}{0}$ *; les sommets sont :* $A\binom{2}{0}$ *et* $A'\binom{-2}{0}$ *et de directrice* $(\mathcal{D}):x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *et* $(\mathcal{D}'):x=-2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 1.3 Etude Analytique de la Parabole, de l'Ellipse et de l'Hyperpobe

### 1.3.1 Etude analytique de la parabole.

**Activité**

*On considère la parabole* $(\mathcal{P})$ *d'équation* $y^2=2px\ \ (p>0)$ *:*

1. *Démonter que* $(\mathcal{P})$ *est la reunoin des courbes représentative de* $(\mathcal{P}_1)$ *et* $(\mathcal{P}_2)$ *des fonctions respectives* $f_1:x\mapsto\sqrt{2px}$ *et* $f_2:x\mapsto-\sqrt{2px}$.
2. *Etudier les variations de la fonction* $f_1 x\mapsto\sqrt{2px}$ *pour tout* $x\in[0;+\infty[$
3. *Construire alors* $(\mathcal{P}_1)$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$. *puis complète* $(\mathcal{P}_2)$ *par la symétrie d'axe* $(Ox)$.

**Résolution**

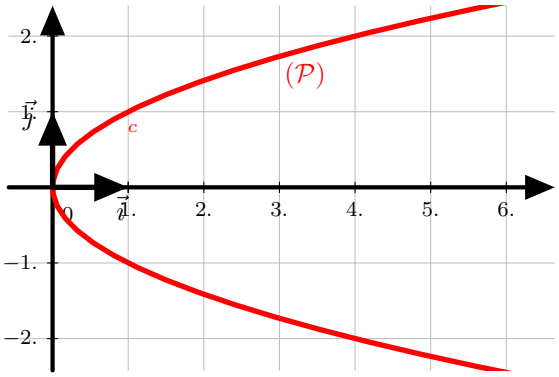
1. *Démontrons que* $(\mathcal{P})$ *est la reunion de deux courbes.*
   $y^2=2px\Leftrightarrow y=\sqrt{2ps}$ *ou* $y=-\sqrt{2px}$. *cdfd*
2. *Etudions les variations de* $f_1$ *:*$Df_1=[0;+\infty[$
   $f_1$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *on a :*$f_1'(x)=\frac{p}{\sqrt{2px}}>0$ *donc* $f_1$ *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$.

***Tableau de variation***

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $+\infty$ |
| | $0$ | | |

3. ***Courbe représentative***

DRAFT




**a) *Equation de la tangente en un point de la parabole***

**Propriété**

*Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax \quad (a \neq 0)$. La tangente en un point $M\binom{x_0}{y_0}$ de $(\mathcal{P})$ a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$.*

**Exemple**

*Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$. L'équation de la tangente au point $A\binom{-1}{-2}$ est : $-2y = 2(x-1)$ ie $x + y - 1 = 0$*

**b) *Régionnement du plan par la parabole***

*Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax (a \neq 0)$, $M\binom{x}{y}$ un point du plan, $H(-\frac{a}{2}, y)$ Le projété orthogonal de $M$ sur la directrice $(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$, $F\frac{a}{2}, 0$.*

$$\begin{aligned} M \text{ est intérieur à } (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow MF^2 < MH^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 < \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} < x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow y^2 < 2ax \end{aligned}$$

$$M \text{ est extérieur à } (\mathcal{P}) \Leftrightarrow y^2 > 2ax$$

DRAFT

### 1.3.2 Etude analytique de l'Ellipse.

**Activité**

*Soit $(\mathcal{E})$ l'éllipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0 ; b>0 \text{ et } a>b)$*

1. *Montrer que $(\mathcal{E})$ est la réunion des courbes représentatives $(\mathcal{E}_1)$ et$(\mathcal{E}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$*
2. *Vérifier que $(\mathcal{E}_1)$ et$(\mathcal{E}_2)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*
3. *Etudier la parité de de la fonction $f_1$ et dédure le domaine d'étude.*
4. *Etudier les variations de la fonction $f_1$ sur [0,a].*
5. *construis alors $(\mathcal{E})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.*

**Résolution**

1. *Montrons que* $(\mathcal{H})$ *est la réunion de deux courbes.*

$$\begin{aligned} M\binom{x}{y} \in (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \\ &\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad cqfm. \end{aligned}$$

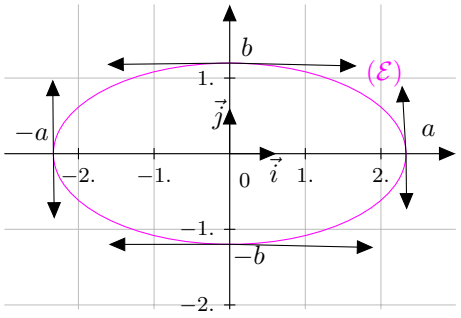
2. *Vérification : on a :* $\forall x \in [a,-a], \quad f_2(x)=-f_1(x)$ *d'où le résultat.*
3. *Etudions la parité de la fonction* $f_1$.
   *Pour tout* $x \in [a,-a], \quad -x \in [a,-a]$ *on a :*

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(-x)^2} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

   *D'où* $f_1$ *est une fonction paire et par conséquent on peut étudier* $f_1$ *sur* $[0;a]$.
4. *Etudions les variations de* $f_1$.
   $f_1$ *est dérivable sur* $[0,a[$ *et pour tout* $x \in [0,a[, \quad f_1'(x)=-\frac{a}{b}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}<0$ *donc* $f_1$ *est stritement décroissante sur* $[0,a]$. *De plus :* $\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}=\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a-x}}{x-a}\sqrt{a+x}$; *donc* $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}=-\infty$
   *donc* $(\mathcal{E}_1)$ *admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse* $x_0=a$.
   ***Tableau de variation***

| $x$ | $0$ | | $a$ |
|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $b$ | ↘ | $0$ |

5. *Construction de la courbe*




**Remarque**

– $[AA']$ *est le grand axe.*

DRAFT

- $[BB']$ *est le petit axe.*
- $\mathcal{C}(O;a)$ *le cercle de centre* $O$ *et de rayon* $a$ *est le cercle principal.*
- $\mathcal{C}(O;b)$ *le cercle de centre* $O$ *et de rayon* $b$ *est le cercle secondaire.*

**a)** ***Equation de la tangente en un point de l'Ellipse***

***Propriété***

*Soit* $(\mathcal{E})$ *l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *La tangente en un point* $A\binom{x_0}{y_0}$ *de* $(\mathcal{E})$ *a pour équation :* $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

**b)** ***Représentation paramétrique d'une éllipse***

*Soit* $(\mathcal{E})$ *l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\begin{aligned} M\tbinom{x}{y}\in(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta\in\mathbb{R},\ \frac{x}{a}=\cos\theta \text{ et } \frac{y}{b}=\sin\theta \\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta\in\mathbb{R},\ x=a\cos\theta \text{ et } y=b\sin\theta. \end{aligned}$$

*On en déduit la propriété suivante :*

***Propriété***

*L'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *a pour représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in\mathbb{R})$$

**c)** ***Image du cercle principal par une affinité***

*Soit* $(\mathcal{E})$ *une ellipse de représentation paramétrique :* $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ *Soit* $(\mathcal{C})$ *le cercle principal ie le cercle de centre* $O$ *et de rayon* $a$.

$M\binom{x}{y}\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ *Soit* $M\binom{x}{y}$ *un point du plan et* $f$ *l'affinité orthogonale d'axe* $(AA')$ *où* $A\binom{a}{0}$ *et* $A'\binom{-a}{0}$ *et de rapport* $\frac{b}{a}$ $M'\binom{x'}{y'}$ *est l'image de* $M$ *par* $f$. *On a* $\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{b}{a}y \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x'=a\cos\theta \\ y'=b\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

***Propriété***

*Soit* $(\mathcal{E})$ *l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>b>0)$, *de sommets* $A$ *et* $A'$ *situés sur l'axe focal.*$(\mathcal{E})$ *est l'image du cercle de diamètre* $[AA']$ *par l'affinité orthogonal d'axe* $(AA')$ *et de rapport* $\frac{b}{a}$.

**d)** ***Définition bifocal de l'ellipse***

***Propriété***

*Soit* $(\mathcal{E})$ *l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>b>0)$, $F$ *et* $F'$ *les foyers. L'ensemble des points* $M$ *du plan tels que* $MF+MF'=2a$ *est* $(\mathcal{E})$.

**Exercices d'applications**

1. *Déterminer l'équation de l'ellipse de représentation paramétrique suivante ainsi que ses éléments caractérisque :* $\begin{cases} x=2\cos\theta-3 \\ y=3\sin\theta+1 \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$
2. *Donner la définition bifocale de l'ellipse suivante :* $(\mathcal{E}_1):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
3. *Donner la définition bifocale de l'ellipse suivante :* $(\mathcal{E}_2):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

**Résolution**

1. *Déterminons l'équation de l'ellipse et ses éléments caractérisques :*
$\begin{cases} x=2\cos\theta-3 \\ y=3\sin\theta+1 \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=2\cos\theta \\ y-1=3\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2=4\cos^2\theta \\ (y-1)^2=9\sin^2\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}(x+3)^2=\cos^2\theta \\ \frac{1}{9}(y-1)^2=\sin^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow$

DRAFT

$\frac{(x+3)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$

*Soit* $O'\binom{-3}{1}$ *et soit* $M\binom{X}{Y}$ *dans* $(O';\vec{i},\vec{j})$ *donc* $M\in(\mathcal{H})\Leftrightarrow\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$
$(\mathcal{E})$ *est l'ellipse de centre* $O'\binom{-3}{1}$, *d'excentricité* $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, *d'axe focal la droite de repère* $(O';\vec{j})$ *de foyer focal* $F\binom{0}{\sqrt{5}}$ *et* $F'\binom{0}{-\sqrt{5}}$ *; les sommets sont :* $B\binom{0}{3}$ *et* $B'\binom{0}{-3}$ *et de directrice* $(\mathcal{D}):y=\frac{9\sqrt{5}}{5}$ *et* $(\mathcal{D}'):y=-9\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. *Donnons la définition bificale de l'ellipse suivante :* $(\mathcal{E}_1):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.
*Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *tel que* $O$ *soit milieu de* $[FF']$ *et* $\overleftarrow{j}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ *On a* $MF+MF'=2b$ *et* $FF'=2c$ *deplus* $F\binom{0}{4}$ *et* $F'\binom{0}{-4}$, $a=3$ *et* $b=5$ *donc* $c=4$
***Conclusion*** *:* $(\mathcal{E}_1)$ *est l'ensemble des points* $M$ *du plan telque* $MF+MF'=10$
3. *Donnons la définition de l'ellipse suivante* $(\mathcal{E}_2):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$
*De même que précedement* $(\mathcal{E}_2$ *est l'ensemble des points* $M$ *du plan telque* $MF+MF'=4$

**Remarques**

$R_1$ ***cas où*** $a>b>0$
$c=\sqrt{a^2-b^2}$ *;* $F\binom{c}{0}$ *et* $F'\binom{-c}{0}$. *Dans ce cas,* $(\mathcal{E}):\{M\in P:MF+MF'=2a\}$

$R_2$ ***cas où*** $b>a>0$
$c=\sqrt{b^2-a^2}$ *;* $F\binom{0}{c}$ *et* $F'\binom{0}{-c}$. *Dans ce cas,* $(\mathcal{E}):\{M\in P:MF+MF'=2b\}$

### 1.3.3 Etude analytique de l'Hyperbole

**Activité**

*Soit* $(\mathcal{H})$ *l'hyperbole d'équation* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0;b>0$ *et* $a>b)$

1. *Montrer que* $(\mathcal{H})$ *est la réunion des courbes représentatives* $(\mathcal{H}_1)$ *et*$(\mathcal{H}_2)$ *des fonctions* $f_1:x\mapsto\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ *et* $f_2:x\mapsto-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$
2. *Vérifier que* $(\mathcal{H}_1)$ *et*$(\mathcal{H}_2)$ *sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*
3. *Etudier la parité de de la fonction* $f_1$ *et dédure le domaine d'étude.*
4. *Etudier les variations de la fonction* $f_1$ *sur* $[0,+\infty[$.
5. *construis alors* $(\mathcal{H})$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**Résolution**

1. *Montrons que* $(\mathcal{H})$ *est la reunion de deux courbes.*

$$\begin{aligned}M\binom{x}{y}\in(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2\\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\\ &\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ \text{ou}\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ \ cqfm.\end{aligned}$$

2. *Vérification : on a :* $\forall x\in]-\infty;a]\cup[a;+\infty[,\quad f_2(x)=-f_1(x)$ *d'où le résultat.*
3. *Etudions la parité de la fonction* $f_1$.
*Pour tout* $x\in]-\infty;a]\cup[a;+\infty[,\quad -x\in]-\infty;a]\cup[a;+\infty[$ *on a :*

$$\begin{aligned}f_1(-x) &= \frac{b}{a}\sqrt{(-x)^2-a^2}\\ &= \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\\ &= f_1(x)\end{aligned}$$

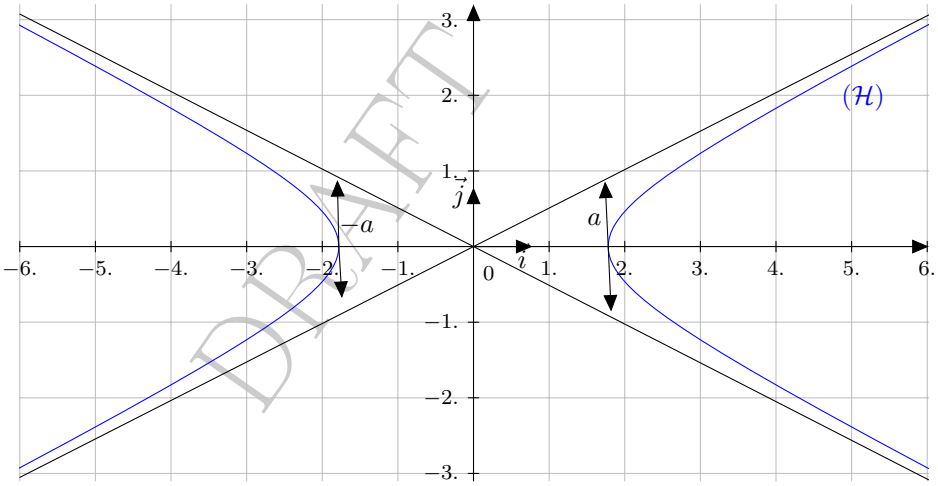
DRAFT

*D'où $f_1$ est une fonction paire et par conséquent on peut étudier $f_1$ sur $[a;+\infty[$.*

4. *Etudions les variations de $f_1$.*
   *$f_1$ est dérivable sur $]a;+\infty[$ et pour tout $x \in ]a;+\infty[$, $f_1'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} > 0$ donc $f_1$ est stritement croissante sur $[a;+\infty[$. De plus : $\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a-x}}{x-a}\sqrt{a+x}$; donc $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} = +\infty$*
   *donc $(\mathcal{H}_1)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse $x_0 = a$.*
5. *On démontre que la droite $(\Delta)$ d'équation : $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à $(\mathcal{H}_1)$ en $+\infty$.*
   ***Tableau de variation***

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f_1(x)$ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $0$ | | |

6. *Construction de la courbe*



DRAFT

**Définition 1.3.** *On appelle conique l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M\binom{x}{y}$ du plan rapporté a un repère orthonormé tel que : $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ où $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sont les réels tels que $A$ et $B$ ne sont pas tous deux nuls c'est-à-ditre $|A| + |B| \neq 0$.*

***Propriétés***

*soit la conique $\Gamma$ d'équation $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ où $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sont les réels tels que $A$ et $B$ ne sont pas tous deux nuls. On a :*

1. *Si $AB = 0$ alors $\Gamma$ est une Parabole.*
2. *Si $AB < 0$ alors $\Gamma$ est une hyperbole.*
3. *Si $AB > O$ alors $\Gamma$ est une ellipse.*

**Remarque**

- *L'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice*
- *La réunion des asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.*
- *Si $a = b$, les asymptotes sont orthogonales et $e = \sqrt{2}$ ; On dit que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole **équilatère**.*

**a) *Equation de la tangente en un point de l'hyperbole***

***Propriété***

*Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. La tangente en un point $A\binom{x_0}{y_0}$ de $(\mathcal{H})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.*

**b) *Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes***

*Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.*

*Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a}{-b}$ des vecteurs directeurs des asymptotes de $(\mathcal{H})$.*
*Soit $M\binom{x}{y}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $M\binom{X}{Y}$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}\\ x\vec{i}+y\vec{j} &= X(a\vec{i}+b\vec{j})+Y(a\vec{i}-b\vec{j})\\ &= a(X+Y)\vec{i}+b(X-Y)\vec{j}\\ \text{Donc} \quad : &\quad \begin{cases}x=a(X+Y)\\ y=b(X-Y)\end{cases}\end{aligned}$$

*Ainsi l'équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est l'expression d'une fonction homographique d'équation : $Y=\frac{1}{4X}$*

**Exercice d'application**

*Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.*
*On donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\binom{1}{\sqrt{3}}$ et $\vec{v}\binom{1}{-\sqrt{3}}$ $a=2$ et $b=\sqrt{3}$. Donnons une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O;\vec{v},\vec{v})$.*

*On a les formules de changement de repère suivant :* $\begin{cases}x=X+Y\\ y=\sqrt{3}(X-Y)\end{cases}$

*Ainsi, dans le repère $(O;\vec{v},\vec{v})$, $(\mathcal{H})$ a pour équation : $3(X+Y)^2-3(X-Y)^2=12$ en devéloppant on trouve $Y=\frac{1}{Y}$.*

**d) *Définition bifocal de l'hyperbole***

***Propriété***

*Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>b>0)$, $F$ et $F'$ les foyers. L'ensemble des points $M$ du plan tels que $|MF+MF'|=2a$ est $(\mathcal{H})$.*

### 1.3.4 Exercices.

$E_1$ *Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'hyperbole dans le repère $(O;\vec{v},\vec{v})$ telle que $\vec{u}\binom{1}{1}$ et $\vec{v}\binom{1}{-1}$.*
- $x^2-y^2+4=0$
- $x^2-y^2-6x+2y+24=0$

$E_2$ *Donner la définition bifocale de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ dans chacun des cas suivants.*
- $(\mathcal{H}_1):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$
- $(\mathcal{H}_2):-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

### 1.3.5 Exercices d'applications.

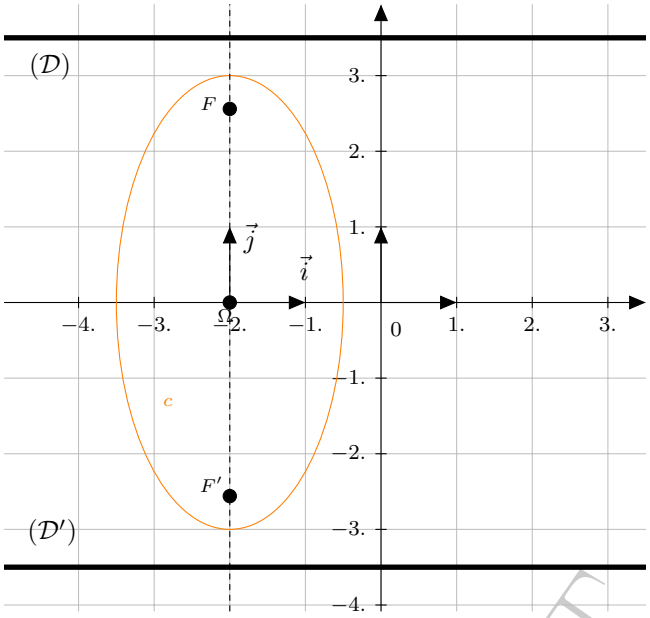
**Exercice 1.**

*Déterminer la nature de l'ensemble $(\Gamma)$ d'équation $4x^2+y^2+16x+7=0$*

***Solution*** *:a=4,b=1 $ab>0$, on pourrait avoir affaire à une ellipse.*
*On a $4x^2+y^2+16x+7=0\Leftrightarrow 4(x+2)^2+y^2=9\Leftrightarrow\frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$.*

DRAFT

*On vérifie que dans le repère* $(\Omega(-2,0);\vec{i},\vec{j})$ *l'équation* $(\Gamma)$ : $\frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$ *est l'ellipse de centre* $\Omega(-2,0)$, *des sommets* $B\binom{0}{3}$ *et* $B'\binom{0}{-3}$, *d'axe focal* $(\Omega,\vec{j})$.

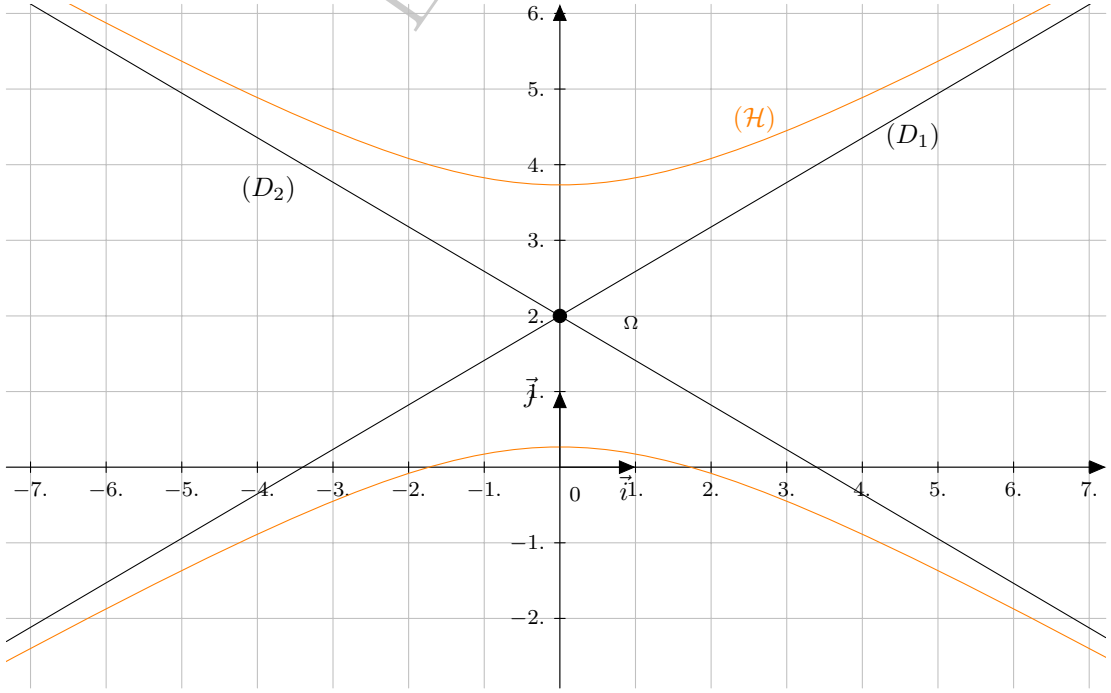



**Exercice 2.**

*Déterminer la nature de l'ensemble* $(\Gamma)$ *d'équation* $x^2-3y^2+12y-3=0$

***Solution*** *:a=1,b=-3* $ab<0$, *on pourrait avoir affaire à une hyperbole.*
*On a* $x^2-3y^2+12y-3=0\Leftrightarrow -x^2+3(y-2)^2=9\Leftrightarrow -\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$.

*On vérifie que dans le repère* $(\Omega(0,2);\vec{i},\vec{j})$ *l'équation* $(\Gamma)$ : $-\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$ *est l'hyperbole de centre* $\Omega(0,2)$, *des sommets* $B\binom{0}{\sqrt{3}}$ *et* $B'\binom{0}{-\sqrt{3}}$, *d'axe focal* $(\Omega,\vec{j})$.




**Exercice 3.**

*Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{u},\vec{v})$

DRAFT

1. *Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M$ de plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie $10z\bar{z}+3(z^2+\bar{z}^2=4)$. Indiquer ses foyers $F$ et $F'$ ainsi que que ses directrices.*
2. *Soit $f$ la composée de l'homothétie de centre $O$ et de rapport 2 et de la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation de $(E')=f(E)$.*
3. *Montrer que $(E')$ est une ellipse de foyer $f(F)$ et $f(F')$. Comparer les excentricités de $(E)$ et $(E')$.*
4. *Construire $(E)$ et $(E')$ dans le même repère.*

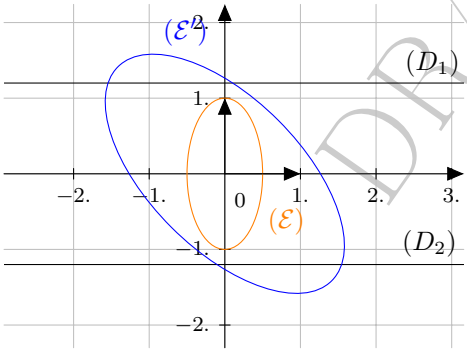
***Solution :***

1. *On vérifie aisément que : $10z\bar{z}+3(z^2+\bar{z}^2=4)\Leftrightarrow 4x^2+y^2=1\Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}+y^2=1$.*

   *$(E)$ est l'ellipse de centre $O$, de grand axe $(O,\vec{j})$ et de petit axe $(O,\vec{i})$. $b=1$ $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $F\left(\begin{smallmatrix}0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{smallmatrix}\right)$. Les directrices ont pour équations : $(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $(\mathcal{D}):y=-\frac{b^2}{c}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.*
2. *$f=hor\Leftrightarrow z'=2e^{i\frac{\pi}{4}}z\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z'$. Ensuite $\bar{z}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}'$ On remplaçons ensuite dans l'expression de départ et on a :*

$$\begin{aligned}(E'):10\Big(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z'\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{z'}\Big)+3\Big(\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}}z'^2+\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\bar{z}'^2\Big) &= 4\\ c'est\text{-}à\text{-}dire\ \ (E'):\frac{5}{2}z'\bar{z}'+\frac{3}{4}i\big(\bar{z'}^2-z'^2\big) &= 4\\ finalement\ on\ a\ :(E'):5x^2+6xy+5y^2 &= 8\end{aligned}$$

3. *C'est une conséquence des transformations du plan, elles conserves les configurations. Si $e'$ est l'excentricité de $(E')$, alors $e'=e$. En effet on a $a'=2a$ et $c'=2c$ donc $e'=\frac{c'}{a'}=\frac{2c}{2a}=e$ ;*
4. ***Construction de** $(E)$ **et** $(E')$*




DRAFT

# CHAPITRE 15 : LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I-OBJECTIFS

- Résoudre à la main les équations différentielles linéaires du premier ordre ;
- Résoudre à la main les équations différentielles linéaires du second ordre.

## II- ACTIVITES PREPARATOIRES

***Activité 1 :*** *On donne* $f(x) = 2e^{-3x}$ $g(x) = -5e^{2x} + 3e^{-2x}$. *Etablir une relation entre* $f'$ *et* $f$; $g''$ *et* $g$.

**Solution**

- $f(x) = 2e^{-3x} \Longrightarrow f'(x) = -6e^{-3x} = -3(2e^{-3x}) = -3f(x)$

$f' = -3f \Rightarrow f' + 3f = 0$

- $g(x) = -5e^{2x} + 3e^{-2x} \Longrightarrow g'(x) = -10e^{2x} - 6e^{-2x}$ $ainsi, g''(x) = -20e^{2x} + 12e^{-2x}$
$= 4(-5e^{2x} + 3e^{-2x})$
$= 4g(x)$

$Alors: g''(x) = 4g(x) \Longrightarrow g''(x) - 4g(x) = 0$

2) La fonction usuelle : $x \mapsto e^x$ est solution de (E).

***Activité 2****: on considère l'égalité suivante (E) : y'(x) = y(x). On pourra écrire cette équation sous la forme : y' = y. (l'inconnue est ici la fonction y)*

*1) Déterminer une fonction constante y qui vérifie l'équation (E).*

*2) Déterminer parmi les fonctions connues, une fonction non constante solution de (E).*

*3) Calculer la dérivée de la fonction g :* $x \mapsto y\, e^{-x}$

*4) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à :* $y'\, e^{-x} - y\, e^{-x} = 0$, *ou encore à* $(y\, e^{-x})' = 0$. *En déduire que si y est solution de (E), alors la fonction g est constante. Donner alors toutes les solutions de (E).*

**Solution**

1) En posant $y = k$ et en remplaçant dans l'équation il vient $k = 0$, la fonction nulle est donc solution de (E).

2) La fonction usuelle : $x \mapsto e^x$ est solution de (E).

3) On trouve $g'(x) = y'\, e^{-x} - y\, e^{-x}$.

4) En utilisant les résultats précédents, on a : $y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0 \Leftrightarrow y'\, e^{-x} - y\, e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (y\, e^{-x})' = 0$. La fonction g a donc une dérivée nulle, elle est donc constante. On aboutit donc à $y\, e^{-x} = C$ donc à $y = Ce^x$, où $C$ est une constante réelle.

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des fonctions de la forme : $x \mapsto Ce^x$, où $C$ est une constante réelle.

***Activité 3*** *: on considère la fonction f définie pour tout x réel par :* $f(x) = 3\, e^{2x} - x^2 + 1$.

*1) trouver deux nombres réels a et b tels que la fonction f soit une solution particulière de l'égalité (E): ay' + b. y = -2x² + 2x + 2.*
*2) en remplaçant a et b par les valeurs trouvées dans la question précédente, trouver une fonction polynôme du second degré solution de (E).*

**Solution**

1) on a $f'(x) = 6\,e^{2x} - 2x$, en remplaçant dans l'égalité, il vient : $(6a + 3b)\,e^{2x} - bx^2 - 2ax + b = -2x^2 + 2x + 2$, par indentification on aboutit au système :

$$\begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ -b = -2 \\ -2a = 2 \end{cases}$$ qui a pour solution : $a = -1$ et $b = 2$.

L'expression cherchée est donc (E) : $-y' + 2.\ y = -2x^2 + 2x + 2$
2) on cherche alors une fonction $g$ telle que $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ solution particulière de (E). On a $g'(x) = 2\alpha x + \beta$, en remplaçant dans (E) il vient : $2\,\alpha x^2 + (2\beta - 2\alpha)x + (-\beta + 2\,\gamma) = -2x^2 + 2x + 2$ ce qui conduit au système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ 2\beta - 2\alpha = 2 \\ -\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$ qui admet le triplet (-1, 0, 1) pour solution.

La fonction cherchée $g$, solution particulière de (E), est définie par $g(x) = -x^2 + 1$.

***Activité 4*** *: On considère l'égalité suivante ($E_1$) : $y''(x) - y(x) = 0$ (l'inconnue est ici la fonction y)*

*1) Déterminer, parmi les fonctions connues, une fonction f non constante solution de ($E_1$).*
*2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = e^{-x}$ est une autre solution de ($E_1$).*
*3) Vérifier que toute fonction de la forme $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ est solution de (E) ($C_1$ et $C_2$ désignent des constantes réelles).*

**Solution**

1) $f(x) = e^{x}$.

2) $g(x) = e^{-x}$, $g'(x) = g(x) = e^{-x}$,, $g''(x) = g(x) = e^{-x}$,. On a alors $g''(x) - g(x) = 0$.

3) $(C_1 f''(x) + C_2 g''(x)) - (C_1 f(x) + C_2 g(x)) = (e^{x} - g(x) = e^{-x},) - (e^{x} - g(x) = e^{-x},) = 0$.

***Activité 5*** *: On considère l'équation ($E_2$) : $y'' - 5y' + 6y = 0$*
*Afin de chercher des solutions de ($E_2$), on pose $y = e^{rx}$, où r désigne un nombre réel.*

*1) Établir que si $y = e^{rx}$ est solution de ($E_2$), alors on a : $r^2 - 5r + 6 = 0$.*
*2) Résoudre l'équation d'inconnue r précédente, on appellera $r_1$ et $r_2$ ses solutions.*
*3) Vérifier que les fonctions $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ sont des solutions de ($E_2$), $C_1$ et $C_2$ désignant des constantes réelles.*

**Solution**

1) Si $y = e^{rx}$, on a alors, $y' = r\,e^{rx}$, $y'' = r^2\,e^{rx}$.

Donc $y'' - 5y' + 6y = (r^2\,e^{rx} - 5\,r\,e^{rx} + 6\,e^{rx}) = e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0$, or $e^{rx} \neq 0$, ce qui conduit à : $r^2 - 5r + 6 = 0$.

2) L'équation : $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

3) On pose $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{3x}$, en remplaçant dans l'équation $(E_2)$ il vient :

$(4C_1\,e^{2x} + 9C_2\,e^{3x}) - 5(2C_1\,e^{2x} + 3C_2\,e^{3x}) + 6(C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{3x}) = (4 - 10 + 6)\,C_1\,e^{2x} + (9 - 15 + 6)\,C_2\,e^{3x} = 0$.

## III-GENERALITES

- Une **<u>équation différentielle</u>** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. En d'autres termes c'est une relation entre une fonction et ses dérivées successives.
- L'**<u>ordre</u>** d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation. **Exemples:**

| | | |
|---|---|---|
| $y' = 2y$ | $y^{(4)} + 3y'' - y' = y + 2x$ | $y'' + 4y = 0$ |
| $y'' = x^2$ | $y = 4y''$ | $y' = y + 2$ |

- **<u>Résoudre</u>** une équation différentielle, c'est déterminer <u>toutes les fonctions</u> qui vérifient cette équation.
- **<u>La solution générale</u>** de l'équation différentielle est la formule générale qui représente ces solutions.

**Exemple :**

$y' = x$ a pour solution générale $y = \frac{x^2}{2} + c$

**Remarques :**

- Quand on connaît les primitives d'une fonction $f(x)$, on sait résoudre l'équation différentielle suivante: ***<u>y' = f(x)</u>***
- De même *<u>y'' = f(x)</u>* *(ou* *<u>y $^{(n)}$ = f(x))</u>* peut être résolue si on sait remonter à la primitive seconde (ou n$^{ième}$) de $f(x)$.

## IV-EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

### 1. Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre à coefficients constants toute équation (E) de la forme :

***ay' + by = f(x)*** où $a$ et $b$ sont des nombres réels ($a \neq 0$), $y$ et $f$ sont des fonctions numériques de variable réelle $x$. L'équation : ***ay' + by = 0*** est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

**Remarques** : l'inconnue de cette équation est la fonction ***y***.
Une solution particulière de l'équation est une fonction $g$ qui vérifie l'équation.
La solution générale de (E) est formée par l'ensemble de toutes les fonctions solutions de (E).

### 2. Équation $y' = ay$ ($a$ réel quelconque)

La solution générale de l'équation $y' = ay$ est la fonction ***<u>y = k e$^{ax}$</u>*** où k est une constante quelconque.

**Remarque :** on peut prouver que c'est l'unique forme possible de la solution générale, mais on l'admettra seulement ici.

***Applications immédiates***

*Trouver la S.G. de l'équation différentielle dans les cas suivants :*
*a) y' = 3y*
*b) y' + 2y = 0*
*c) 2y' – y = 0*
*d) 3y' = 2y*
***NB :***

Dans la pratique, on est confronté à des équations différentielles en physique (mécanique, électricité…), mais on veut trouver une solution unique, celle qui correspond à un problème précis.

C'est possible si on connaît **les "conditions initiales"**, c'est à dire la valeur de y pour un x particulier (en général pour $x = 0$).

**Théorème :**
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution prenant la valeur $y_0$ en

**Exemples :**

Trouver la solution particulière dans les cas suivants : a) y' = 5y avec y(0) = 7 ; b) y' + 2 y =0 avec y(1) = e ; c) u(t) + 2. $10^{-3}$ u'(t) = 0 avec u(0) = 10 ; d) 3 y' = 2 y avec y(0) = 9

### 3. Résolution de l'équation sans second membre : ($E_0$) : *ay*' + *by* = 0

**Théorème :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle ($E_0$) : ***ay*' + *by* = 0, est** l'ensemble des fonctions de la forme $y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$ **où *C* est une constante**

### 4. Résolution de l'équation complète (E) : *ay*' + *by* = *f*(*x*)

**Théorème : La solution générale de l'équation différentielle (E) : *ay*' + *by* = *f*(*x*) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre *ay*' + *by* = 0 une solution particulière de (E).**

**Remarque :** la recherche de la solution particulière s'effectue à la main dans les cas simples, en s'aidant le plus souvent des conseils donnés dans l'énoncé.

## V- EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

### 1. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

#### a. Définition

On appelle équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants toute équation (E) de la forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$, où a, b et c sont des nombres réels ($a \neq 0$), y et f sont des fonctions

numériques de variable réelle x. L'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

**b. Résolution de l'équation sans second membre : ($E_0$) : $ay'' + by' + cy = 0$**

On dit que deux fonctions $y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes si aucune n'est le produit de l'autre par une constante.

Justifier que les fonctions $y_1 = sin(x)$ et $y_2 = cos(x)$ sont linéairement indépendantes.

On peut, par exemple, calculer le rapport $\frac{y_1}{y_2} = \tan x$ qui n'est pas constant.

Les fonctions $y_1 = x^2$ et $y_2 = -2x^2$ ne sont pas linéairement indépendantes car on a pour tout $x$ réel, $y_2 = -2y_1$.

Nous admettrons le théorème suivant :

**Théorème :** Si on connait deux fonctions $y_1$ et $y_2$ linéairement indépendantes, solutions de l'équation différentielle **($E_0$) : $ay'' + by' + cy = 0$,** alors l'ensemble des solutions de **($E_0$)** est formé par les fonctions de la forme $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , où $C_1$ et $C_2$ désignent des constantes réelles.

On peut commencer par vérifier que si $y_1$ et $y_2$ sont toutes deux solutions de ($E_0$), alors toute combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$ est aussi solution de ($E_0$) et admettre seulement la réciproque.

On se propose de chercher les fonctions $y_1$ et $y_2$ sous la forme $y = e^{rx}$, où $r$ est un nombre constant.

Question : Démontrer que $y = e^{rx}$ est solution de l'équation ($E_0$) si et seulement si $r$ est solution de **l'équation caractéristique:** $ar^2 + br + c = 0$.

Il suffit de calculer $y'$ et $y''$ et de remplacer dans ($E_0$).

**Définition :** On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle **($E_0$) : $ay'' + by' + cy = 0$**, l'équation du second degré d'inconnue $r$ : $\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}$.

**Résolution de l'équation caractéristique**

**1er cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac > 0$**

*Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.*

*Question 2 : En déduire deux solutions particulières $y_1$ et $y_2$ de l'équation ($E_0$).*

*Question 3 : Justifier que les solutions trouvées $y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes.*

*Question 4 : Donner la solution générale de l'équation ($E_0$).*

Réponses :

Question 1 : L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Question 2 : Les fonctions $y_1 = e^{r1x}$ et $y_2 = e^{r2x}$ sont deux solutions de ($E_0$).

Question 3 : On calcule le quotient des solutions qui donne $e^{(r_1-r_2)x}$ qui n'est pas constant car $r1$ et $r2$ sont distinctes.

Question 4 : La solution générale de ($E_0$) peut s'écrire : $y = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques.

**2e cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac = 0$**

*Question 1 : Etablir que dans ce cas, les fonctions $y_1 = e^{-\frac{b}{a}x}$ et $y_2 = xe^{-\frac{b}{a}x}$ sont deux solutions de l'équation ($E_0$) et qu'elles sont linéairement indépendantes.*

*Question 2 : Donner la solution générale de l'équation ($E_0$).*

La solution générale de l'équation différentielle ($E_0$) est $y= ( C_1x+C_2) e^{r1x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques

**3e cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac < 0$**

*Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.*

On trouve deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

*Question 2: On pose $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x} cos(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$ et $y_2 = e^{-\frac{b}{2a}x} sin(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$*
*Vérifier que les fonctions $y_1$ et $y_2$ sont solutions de l'équation ($E_0$).*
*Question 3 : Justifier que les solutions $y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes. On peut par exemple, calculer le quotient $\frac{y_2}{y_1} = tan(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$ qui n'est pas constant car $b^2 - 4ac < 0$ est donc non nul.*
*Question 4 : Donner la solution générale de l'équation ($E_0$).*

La solution générale de l'équation différentielle ($E_0$) est $y = e^{\alpha x} (C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$, $C_1$ et $C_2$ sont des constantes réelles quelconques avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

**Résumé :** Pour trouver la solution générale de l'équation différentielle **($E_0$) : $a\,.\,y'' + b\,.\,y' + c\,.\,y = 0$**,

| | Solutions de l'équation caractéristique | Solution générale de l'équation différentielle ($E_0$) |
|---|---|---|
| $\Delta>0$ | 2 solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $y = C_1 e^{r1x} + C_2 e^{r2x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques |
| $\Delta=0$ | 1 solution réelle double $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ | $y= ( C_1x+C_2) e^{r1x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques |

on écrit l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ et on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta<0$ | 2 solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$ *avec :* $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ | $y = e^{\alpha x}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques |

**2.**

**Résolution de l'équation complète (E) : *ay*" + *by*' + *cy* = *f*(*x*)**

Soit $y_0$ une solution particulière de l'équation (E), on a alors : $ay_0'' + by_0' + cy_0 = f(x)$.

Une fonction *y* est solution de l'équation (E) si et seulement si *ay*" + *by*' + *cy* = *f*(*x*) ou encore si et seulement si on a : $ay'' + by' + cy = ay_0'' + by_0' + cy_0$ soit $a(y'' - y_0'') + b(y' - y_0') + c(y - y_0) = 0$.

Cette équation différentielle est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution générale est donnée dans le résumé ci-dessus.

On trouve donc la solution générale de l'équation (E) en ajoutant à la solution générale de ($E_0$) une solution particulière $y_0$ de (E), comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

**Théorème : La solution générale de l'équation différentielle (E) : *ay*" + *by*' + *c y* = *f*(*x*) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre *a y*" + *by*' + *cy* = 0 une solution particulière de (E).**

***Exercice d'application :***

*On considère l'équation différentielle (E) : y" + y' - 2y = 2x² - 2x + 4.*

*1) Donner, à la main en détaillant les calculs, la solution générale de l'équation : y" + y' - 2y = 0.*

*2) Déterminer à la main, une solution particulière de (E) sous la forme y = a.x² + bx + c.*

*3) Déduire de ce qui précède la solution générale de (E).*

Solution :

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$. La solution générale de l'équation *y*"+ *y*'- 2*y* = 0 est donc $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques.
2) On pose $y = ax^2 + bx + c$, on a $y' = 2ax + b$ et $y'' = 2a$.

En remplaçant dans l'équation (E) : *y*" + *y*'- 2*y* = 2*x*² - 2*x* + 4, on obtient : $-2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a+b - 2c = 2x^2 - 2x + 4$.

Par identification des coefficients, on aboutit au système d'équations $\begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -2 \\ 2a + b - 2c = 4 \end{cases}$ qui a pour solutions :

$a = -1$, $b = 0$, $c = -3$.

La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto -x^2 - 3$

3) La solution générale de (E) est donnée par $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x^2 - 3$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques.

### 3. Existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales particulières données

***Exercice***

*On considère l'équation différentielle (E) $y'' + 4y' + 4y = 3e^x$.*
*1) Donner à la main la solution générale de l'équation sans second membre associée.*
*2) Chercher à la main une solution particulière f de (E) en posant $f(x) = ke^x$ (k est un nombre réel).*
*3) En déduire la solution générale de (E).*

*4) On cherche dans cette question à trouver toutes les fonctions g solutions de (E) dont la courbe représentative admet pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite d'équation* $y = -\frac{17}{3}x + \frac{10}{3}$ .
*Déduire de cette information la valeur des réels g(0) et g'(0).*
*5) En déduire qu'il existe une et une seule fonction g vérifiant les deux conditions précédentes.*

Solution :

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 4 = 0$ qui admet une solution réelle double $r_1 = r_2 = -2$.
La solution générale de l'équation $y'' + 4y' + 4y = 0$ est donc $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x}$, $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques.

2) On pose $f(x) = ke^x$, on a $f'(x) = ke^x$ et $f''(x) = ke^x$. En remplaçant dans l'équation (E), on obtient $9ke^x = 3e^x$.
La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto \frac{1}{3}e^x$

3) La solution générale de (E) est donnée par $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ , $C_1$ et $C_2$ constantes réelles quelconques.

4) La tangente et la courbe ont en commun le point d'abscisse 0 qui a pour ordonnée , $y = -\frac{17}{3}(0) +$

$\frac{10}{3}$ soit $y = \frac{10}{3}$ . On en tire donc la 1ère information $g(0) = \frac{10}{3}$ .

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $-\frac{17}{3}$ . On en déduit la seconde information :
$g'(0) = -\frac{17}{3}$ .

5) On utilise les deux informations précédentes en remplaçant dans la solution générale de l'équation (E).
On a $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ qui permet d'écrire $g(0) = C_2 + \frac{1}{3}$ d'où l'on tire l'équation (1) d'inconnue $C_2$ :

(1) : $C_2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ .

On calcule maintenant $y'$. On a $y' = C_1\,e^{-2x} + (C_1x + C_2)(-2e^{-2x}) + \frac{1}{3}e^x$ . Sachant que $g'(0) = -\frac{17}{3}$ , on en tire

l'équation (2) : $C_1 - 2C_2 + \frac{1}{3} = -\frac{17}{3}$ .

Il reste à résoudre le système d'équations formé par les équations (1) et (2) qui conduit à $C_1 = 0$ et $C_2 = 3$. On en déduit qu'il existe une unique solution $g$ vérifiant les deux conditions $g(0) = \frac{10}{3}$ et $g'(0) = -\frac{17}{3}$, la fonction $g$ définie pour tout $x$ réel par : $g(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$.

Une vérification est possible à l'aide de la calculatrice comme le montrent les écrans ci-dessous.

**4. Cas général**

Les deux conditions initiales vérifiées par une solution particulière $f$ d'une équation différentielle sont en général de la forme : $f(x_0) = d$ et $f'(x_0) = d'$, ou bien $f(x_0) = d$ et $f(x_1) = d'$, où $x_0$, $x_1$, $d$ et $d'$ sont des nombres connus.
Nous admettrons le théorème suivant :

**Théorème : Pour toute équation différentielle du second ordre, il existe une et une seule solution qui vérifie deux conditions initiales données.**

## *APPLICATIONS IMMEDIATES*

***Activité 1 :***

*Résoudre sur R les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + 2y = x^2$ $(E1)$
2. $y' + y = 2sinx$ $(E2)$
3. $y' - y = (x+1)e^x$ $(E3)$
4. $y' + y = xe^x + cosx$ $(E4)$

***Activité 2 :***

*1. Déterminer toutes les fonctions* $f : [0;1] \to R$, *dérivables, telles que* $\forall\, x \in [0;1]$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$

*2. Résoudre l'équation différentielle* $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ *sur R. Trouver la solution vérifiant* $y(0) = 3$.

*3. Résoudre l'équation différentielle* $y'sinx - ycosx + 1 = 0$ *sur* $]0;\pi[$. *Trouver la solution vérifiant* $y(\pi/4) = 1$.

***Activité 3:***

*Soit* $\lambda$ *un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle :* $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$ *avec* $f(x)$ *une fonction particulière. Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :*

1. $f(x) = a$ *avec* $a \in R^*$
2. $f(x) = \alpha e^{wx}$ *avec* $\alpha \in R*$ *et* $\omega \in R^*$

*3.* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \in R^*, b \in R$ *et* $c \in R$ *(Indication : chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$*)*

***Activité 4 :***

*1.* $y'' - 3y' + 2y = 0$

*2.* $y'' + 2y' + 2y = 0$

*3.* $y'' - 2y' + y = 0$

*4.* $y'' + y = 2cos^2x$

***Activité 5 :***

*1. On considère* $y'' - 4y' + 4y = d(x)$*. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque* $d(x) = e^{-2x}$*, puis* $d(x) = e^{2x}$*.*

*2. Résoudre sur* $]0;\pi[$ *l'équation différentielle* $y'' + y = cotanx$*, où* $cotanx = \frac{cosx}{sinx}$*.*

*3. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.*

$a.\ x^2y'' + xy' + y = 0$*, sur* $]0;+\infty[$*, en posant* $x = e^t$ ;

$b.\ (1+x^2)2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$*, sur R, en posant* $x = tant$ *(en fonction de m∈R).*

***Activité 6 :***

*On considère y la fonction définie sur IR, de la variable x, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :* $9y''(x) - y(x) = 4$.

*1. Résoudre l'équation différentielle* $(E_0)$*:* $9y''(x) - y(x) = 0$
*2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante*
*3. En déduire les solutions générales de (E).*
*4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$.

***Activité 7 :***

*On considère y la fonction définie sur IR, de la variable t, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :* $y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^t$

*1. Résoudre l'équation différentielle* $y''(t) + 2y'(t) = 0$ *(E')*
*2. Déterminer le réel A tel que* $f(t) = Ate^t$ *soit une solution particulière de (E)*
*3. En déduire les solutions générales de (E).*

***Activité 8 :***

*On considère x la fonction définie sur IR, de la variable t, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :* $x''(t) + 4x(t) = -6\ sin(t)$.

*1. Résoudre l'équation différentielle* $(E_0) : x''(t) + 4x(t) = 0$

*2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme :*
$g(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$
*3. En déduire les solutions générales de (E).*
*4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant* $x(0) = -1$ *et* $x'(0) = 0$

***Activité 9 :***
*Une voiture de masse m roulant rectilignement à la vitesse* $v_0$ *coupe son moteur et n'est plus soumise qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse :* $F = -\alpha v$ *.Ecrire la loi de la variation de la vitesse v en fonction du temps et en déduire l'équation du mouvement.*

***Activité 10 :***
*On suppose qu'à sa mort, un organisme contient une quantité* $q_0$ *d'atomes de carbone 14. Les atomes de carbone 14 vont subir des désintégrations radioactives. Le nombre de d´désintégrations N par unité de temps est proportionnel à la quantité q d'atomes de carbone 14 présents :* $N = \alpha q$
*1. Déterminer une équation régissant l'évolution de q, et la résoudre.*
*2. Déterminer α, sachant que la période de demi-vie (temps pendant lequel la moitié du carbone 14 présent se d´désintègre) est de 5730 ans.*
*3. On trouve un bois fossile qui subit 610 d´désintégrations par jour. Le même type de bois subit un taux initial de 19520 d´désintégrations par jour. Déterminer l'âge du fossile.*
*4. Sachant que le carbone 14 est absorbé par les organismes vivants par la respiration du* $CO_2$ *présent dans l'atmosphère, et que le taux de* $CO_2$ *actuel est le plus ´élevé depuis 800000 ans, pouvez-vous expliquer l'erreur commise dans le calcul de la question 3 ?*

Les Grands profs de Maths

# Mathématiques
# Terminales scientifiques C, D & E
# Support de Cours sur les Probabilités.

DRAFT

8 août 2018

# Table des matières


**1 Les probabilités. 1**

1.1 Les outils de dénombrement . . . 1
1.1.1 **Notion d'ensemble fini.** . . . 1
1.1.2 **Les différents types de dénombrement.** . . . 2
1.2 Calcul des probabilités . . . 5
1.2.1 **Langage des probabilités.** . . . 5
1.2.2 **Probabilités sur un ensemble fini.** . . . 6
1.3 Variables aléatoires . . . 7
1.3.1 **Caractéristiques d'une variable aléatoire.** . . . 8
1.3.2 **Propriétes d'une varaible aléatoire.** . . . 8
1.4 Conditionnement (pas au programme en Tle C ) . . . 8
1.4.1 **Arbres pondérés.** . . . 8
1.4.2 **Probabilité conditionnelle.** . . . 8
1.4.3 **Formule de Bayes (complément de cours, pas au programme)** . . . 9
1.5 Indépendance . . . 10
1.5.1 **Evénements indépendants.** . . . 10
1.5.2 **Indépendance de deux variables aléatoires.** . . . 10
1.5.3 **Probabilités totales.** . . . 11
1.6 Lois de probabilités . . . 11
1.6.1 **Loi de Bernoulli.** . . . 11
1.6.2 **Loi Binomiale.** . . . 12
1.7 Fonction de repartition . . . 12


DRAFT

# Les probabilités.

**Objectifs pédagogiques opérationnels** :
A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :
↪ se familiariser avec les outils de dénombrement vu en classe de Première.
↪ calculer une probabilité ;
↪ reconnaitre deux événements indépendants ;
↪ savoir utiliser un schéma de Bernoulli et la loi binomiale.
↪ calculer la probabilité conditionnelle.
↪ déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle, ses caractéristiques (variance,ecart-type, espérance mathématique) et sa fonction de repartition.
↪ Faire le lien entre les probabilités, les statistiques et certaines situations de la vie courante.

DRAFT

## 1.1 Les outils de dénombrement

### 1.1.1 Notion d'ensemble fini.

**Définition 1.1.** *Soit $E$ un ensemble non vide fini, $A$ et $B$ deux parties de $E$.(***NB :** faire un schéma pour faciliter la compréhension par des apprenants*) :*

- *On appelle* ***reunion de A et B****, noté $A \cup B$ l'ensemble $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.*
- *On appelle* ***intersection de*** *$A$* ***et*** *$B$ l'ensemble noté $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$.*
- *On appelle* ***différence de*** *$A$* ***et*** *$B$,l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à $A$ et n'appartenant pas à $B$. On note $A - B$ et se lit "$A$* **moins** *$B$".*

$$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_A^B$$

- *On appelle* ***complementaire*** *de $A$ dans $E$, l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $A$. On le note $\overline{A} = \complement_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$.*
- *On appelle* ***différence symétrique*** *de $A$ et $B$, l'ensemble noté $A\Delta B = A \cup B - A \cap B = (A-B) \cup (B-A)$.*
- *$A$ et $B$ sont* ***disjoints*** *si $A \cap B = \emptyset$.*
- *Le* ***cardinal*** *de $A$ est le nombre d'éléments de $A$. On le note $card(A)$*

**Propriété 1.1.** *Soit $E$ un ensemble fini, $A$ et $B$ deux parties de $E$, alors :*

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ ;
- $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$

*Par* ***conevention*** $card(\emptyset) = 0$.
***TAF*** *: Montrer que $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$.*

**Exemple 1.1.** *Dans une classe de 54 élèves, les élèves pratiquent aumoins le football ou le basketball. 40 partiquent le football et 30 le basketball.*

1. *Quel est le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois les deux sports.*
2. *Quel le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football ? uniquement le basketball ?*

***Solution***
*Désignons par $A$ et $B$ l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et le basketball respectivement(****faire le schéma pour illustrer****).*

1. $card(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B) = 40 + 20 - 54 = 16$
2. *Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le foot est* $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B) = 40 - 16 = 24$
   *Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket est* $card(B - A) = card(B) - card(A \cap B) = 30 - 16 = 14$

**Exercice 1.1.1.** *Dans un etablissement scolaire de* 1500 *élèves,* 3 *activités sportives sont proposées : le football, le handball et le tenis.*
580 *élèves pratiquent le football,* 490 *le handball et* 450 *le tenis.*
250 *pratiquent à la fois le football et le handball,* 210 *pratiquent à la fois le footbll et le tenis,* 180 *pratiquent à la fois le tenis et le handball et* 150 *pratiquent à la fois les trois sports.*

1. *Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent un seul sport.*
2. *Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent aumoins un sport.*
3. *Déterminer le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucun sport.*

**Définition 1.2.** *(**Partition d'un ensemble**)*
*Soit* $E$ *un ensemble non vide,* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *une suite de parties de* $E$*. On dit que la famille* $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ *forme une partition de* $E$ *si et seulement si :*

1. $\forall i = 1, \cdots, n$ ; $A_i \neq \emptyset$ ;
2. $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ;*(**les** $A_i$ **sont deux à deux disjoints**)*
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n = E$ ;

**Remarque 1.1.** *Dans ce cas,* $card(E) = card(A_1) + \cdots + card(A_n)$.

**Exemple 1.2.** *Soit* $E$ *l'ensemble des chiffres de la numération hexadécimale. Ecrire les éléments de* $E$ *et déterminer une partition de* $E$*.(**évident**)*

**Définition 1.3.** *(**Produit Cartésien**)*
*Soit* $E$ *et* $F$ *deux ensembles finis non vides.*
• ***Le produit cartésien*** *de* $E$ *par* $F$ *est l'ensemble des couples* $(a, b)$ *tels* $a \in E$ *et* $b \in F$*. On note* $E \times F$ *et on lit "**E croix F**".*
*Plus généralement, le produit cartésien de* $p$ *ensembles* $E_1, \cdots, E_p$ *est l'ensemble des éléments* $(x_1, \cdots, x_p)$ *tels que* $x_1 \in E_1$, $\cdots$, $x_p \in E_p$*. On note* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.
• *Un élément du produit cartésien de* $p$ *ensembles* $(p \geq 2)$ *est appelé* $p$***-uplet ou*** $p$***-liste***.

**Remarque 1.2.** *Pour tous ensembles finis,* $E_1, \cdots, E_p$*, on a* $card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times \cdots \times card(E_p)$.

**Exercice 1.1.2.**
1. *Le jour du baccalauréat, un candidat doit choisir un stylo, un crayon ordinaire et une règle graduée. On met à sa dispositon* 6 *stylos,* 4 *crayons ordinaires et* 5 *règles graduées. Combien de choix distincts peut-il ainsi efffectuer ? (**Rep** :* $6 \times 5 \times 4 = 120$*)*
2. *On lance un dé blanc et un dé bleu, chacun d'eux ayant* 6 *faces numerotées de* 1 *à* 6*. Le résultat d'un lancer est le couple des nombres apparaissant sur la face superieure de chaque dé.*
   (a) *Déterminer le nombre de résultats possibles.(**Rep** :* $6 \times 6 = 36$*)*
   (b) *Déterminer le nombre de résultats pour lequel la différence de la valeur absolue des deux nombres est* $\leq 3$*.(**Ind : On pourrait utiliser le tableau pour dénombrer**)*

### 1.1.2 Les différents types de dénombrement.

## A) Les p-listes ou p-uplets

**Définition 1.4.** *Soit* $E$ *un ensemble et* $p$ *un entier* $p \geq 2$*. On appelle* $p$***-uplet ou*** $p$***-liste*** *tout élément du produit cartésien* $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p\ fois}$.

**Propriété 1.2.** *;*
■ *Soit* $E$ *un ensemble fini à* $n$ *eléménts ; soit* $p \in \mathbb{N}^\star$*. Le cardinal de l'ensemble des p-listes de* $E$ *est* $n^p$*. Ainsi* $card(E^p) = [card(E)]^p = n^p$.
■ *Le nombre d'application d'un ensemble* $E$ *à* $p$ *élements vers un ensemble* $F$ *à* $n$ *éléments est* $[card(F)]^{card(E)} = n^p$.

DRAFT

**Remarque 1.3.** *Une p-liste correspond à un choix ordonné de p éléments disntincts ou non(un ou plusieurs éléments peuvent être répétés). On les utilise aussi dans les tirages successifs avec remise.*

**Exemple 1.3.**
1. *Combien existe-il de nombre entier naturel de 4 chiffres tous les chiffres étant impaires. (**Rep :** $5^4$)*
2. *Déterminer le nombre de numéro de télephone de 7 chiffres que l'on peut avoir.(**Rep :** $10^7$)*
3. *De combien de façon différentes peut-on ranger 20 dans une bibliothèque comportant 5 étagères. (**Rep :** $5^{20}$)*
4. *Déterminer le nombre de façons de composer un code de 4 symboles qui sont les lettres de l'alphabet français.(**Rep :** $26^4$)*

## B) Les arrangements

**Définition 1.5.** *Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. On appelle **arrangement sans répétition**(ou tout simplement **arrangement**) de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition ordonnée sans répétition de p de ces élémnets. On le note $A_n^p$.*

**Exemple 1.4.** $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
$(1, 3, 2)$,$(1, 4, 3)$, $(2, 1, 3)$ *sont les arrangements de 3 éléments de E.*
$(1, 1, 2)$,$(1, 4, 4)$ *et* $(3, 3, 3)$ *ne sont pas les arrangements de 3 éléments de E. Ce sont des 3-listes.*

**Remarque 1.4.**
- ► *Dans un arrangement, il y'a de l'ordre et on ne repète jamais les élements ;*
- ► *Il n'existe aucun arrangement de p-éléments de E lorsque $p > card(E)$.*
- ► *On les utilise aussi dans les tirages successifs sans remise.*
- ► *Un arrangement **avec répétition** est un **p-uplet**.*

**Propriété 1.3.** *Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$.*

- ■ $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- ■ *Le nombre d'injections d'un ensemble F à p éléments vers un ensemble E à n éléments est $A_n^p$.*

DRAFT

**Exemple 1.5.**
1. *8 chevaux prennent le départ d'une course. Combien de tiercés, de quartés et de quintés peut-on former ? (**Rep :** $A_8^3$ tiercés, $A_8^4$ quartés et $A_8^5$ quintés).*
2. *Une olympiade de maths est organisée avec 50 concurrents et attribue un premier prix, un deuxième prix et un troisième prix.*
   (a) *Quel est le nombre de résultats possibles sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ?*
   (b) *Quel est le nombre de résultats possibles sachant qu'il n'y a deux premiers ex-aequo ?*

## C) Permutation

**Définition 1.6.** *Soit E un ensemble à p éléments, on appelle **permutation**(ou **permutation sans répétition**) de E toute disposition ordonnée et sans répétition des p éléments de E.*
*Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $P_n = n! = A_n^n$.*

**Exemple 1.6.** *Les permutations de $\{a, b, c\}$ sont : abc, acb, bac, bca, cab, cba. Elles sont au nombre 6.*

**Propriété 1.4.** *Le nombre de bijections d'un ensemble fini E à n éléments dans lui-même est n!.*

**Remarque 1.5.** *Soit une collection de n éléments formés de v groupes discernables d'éléments indiscernables $\underbrace{a, a, \cdots, a}_{\alpha\ fois}, \underbrace{b, b, \cdots, b}_{\beta\ fois} \cdots \underbrace{s, s, \cdots, s}_{\lambda\ fois}$ tels que $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$.*
*On appelle **permutation avec répétition** de ces n éléments, toute disposition ordonnée de l'ensemble des n éléments.On note*
*$P'_n(\alpha, \beta, \cdots, \lambda)$ le nombre de telles permutations. On a*

$$P'_n(\alpha, \beta, \cdots, \lambda) = \frac{n!}{\alpha!\beta! \cdots \lambda!}$$

**Exemple 1.7.**
1. *De combien de façon peut-on ranger 6 livres dans 6 armoires sachant qu'une armoire ne peut contenir qu'un seul livre.(**Rep :** 6!)*

2. *Déterminer le nombre d'anagramme du mot "anticonstitutionnellement", "mathématiques".*
3. *Combien de mots peut-on former en prenant toutes les lettres du mot "coordonner" ?*
   *(**sol** :$P'_{10}(3,2,2,1,1,1)$ ) Parmi ces mots, combien*
   (a) *incluent les trois lettres "O", l'une à côté de l'autre ?*
   (b) *commencent et se terminent par un "n" ?*

***Indication solution*** *:*

**3(a)** *Les trois lettres "O" peuvent être placées l'une à côté de l'autre de 8 de façons. Pour chaque façon, il faut permuter les 7 lettres restantes aux autres positions ; soit* $8 \times \dfrac{7!}{2!2!1!1!1!} = 10080$ *mots*

**3(b)** *Les lettres "n" étant placées, il reste à permuter le 8 autres lettres dans les autres positions, soit* $\dfrac{8!}{3!2!1!1!1!} = 336$ *mots.*

## D) Les combinaisons

**Définition 1.7.** *Soit E un ensemble à n éléments et* $1 \leq p \leq n$.

■ *On appelle **combinaison sans répétition**(ou tout simplement **combinaison**) de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition non ordonnée et sans répétition de p éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble.*
*On note* $C_n^p$ *le nombre de telles combinaisons et*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)}$$

*Les p éléments de la combinaison doivent être disntincts et sont choisis parmi les n que comporte E ; donc* $p \leq n$.

■ *On appelle **combinaison avec répetition** de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition non ordonnée et avec eventuellement répétition de p de élémnets choisis parmi les n éléments de l'ensemble.*
*On le note* $C'^p_n$ *ou* $K_n^p$ *le nombre de telles combinaisons. Du fait des répétitions éventuelles, on peut avoir* $p \geq n$ *et* $C_n^p \leq C'^p_n$.

*Le nombre de telles combinaisons*

$$C_n^p = P'_{n-1+p}(n-1,p) = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!}$$

**Propriété 1.5.** *Soient* $n, p \in \mathbb{N}$, $p \in n$

► $C_n^p = C_n^{n-p}$ ;

► $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ *(trinagle de pascal) ; cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche les valeurs de* $C_n^p$*(***construire le triangle le pascal pour illustrer***).*

► $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$.

*Démonstration.* Exercice

**Remarque 1.6.** • $C_n^0 = 1$ ,$C_n^n = 1$ *et* $C_n^1 = 1$ ;

• $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)} = P'_n(n, n-p)$ ;

• $C'^p_n = C^p_{n+p-1}$ *(***vérifier en exercice***).*

**Exercice 1.1.3.** *On donne* $f(x) = (1+x)^n$, $n \geq 2$. *Calculer les sommes suivantes*

$A = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$ $\quad B = \sum_{p=0}^{n} (-1)^n C_n^p$ $\quad C = \sum_{p=0}^{n} pC_n^p$ ; $\quad D = \sum_{p=0}^{n} p(-1)^p C_n^p$

$E = \sum_{p=0}^{\alpha} C_n^{2p}$ $(\alpha = E(\frac{n}{2})$, *E fonction partie entière*$)$ $\quad F = \sum_{p=0}^{\beta} C_n^{2p+1}$, $(\beta = E(\frac{n-1}{2}))$

$G = \sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p$ $\quad H = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$ *et* $C = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p+1} C_n^p$

DRAFT

**Exercice 1.1.4.** *Une commission de 5 membres comprenant 3 economistes et 2 juristes doit être constituée à partir de 13 candidats dont 7 éonomistes et 6 juristes.*

1. *De combien de façons différentes cette commission peut- elle être constituée ?*
2. *Même question, si un économiste nommément désigné parmi les 7 économistes candidats devant absolument faire partie de la commission.*
3. *Même question, si un des 6 juristes candidats devant absolument être écarté de la commission(mais l'intéressé ne le sait pas).*
4. *Même question, si un des économistes et un des juristes, tous deux individualisés ne pouvant faire partie de la commission.*

***Indication solution***

1. *La commission peut-être constituée de* $C_7^3.C_6^2 = 525$ *façons.*
2. $C_6^2.C_6^2 = 225$
3. $C_7^3.C_5^2 = 350$
4. *On peut raisonner de deux façons :*
   • *Retrancher au nombre total de commissions, celles où les individus qui doivent être ecartés figurent ensemble :* $C_7^3.C_6^2 - C_6^2.C_5^1 = 450$ *;*
   • *Compter les commissions où les deux individus ne figurent pas esemble ; soit* $C_6^2.C_5^2 + C_6^3.C_5^1 + C_6^3.C_5^2 = 450$

## 1.2 Calcul des probabilités

### 1.2.1 Langage des probabilités.

DRAFT

**Activité 1.1.** *On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure qui s'affiche. On considère les ensembles suivants :*
*A :"Le numéro obtenu est pair" et B : "Le numéro obtenu est est impair".*

1. *Pouvons-nous déterminer avec certitude le numéro de la face supérieure qui doit s'affiche ?*
   *Puisque nous ne pouvons pas dire avec certitude le numéro de la face supérieure qui s'affiche après le lancer du dé, on dit qu'on a realisé* ***une expérience aléatoire****.*
2. *Déterminer l'ensemble* $\Omega$ *des résultats possibles que l'on peut avoir après le lancer.*
   *On appelle* $\Omega$ ***l'univers*** *associé à cet expérience.*
3. *Déterminer 2 sous-ensembles* $\Omega$ *à un seul élement, 4 éléments et 6 éléments ; conclure.*
4. *Déterminer l'intersection des ensembles A et B. Puis conclure.*

*Ce lancer du dé, le lancer d'une pièce de monnaie* $\cdots$ *sont des* ***expériences aléatoires****, car avant de l'effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard. A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé* ***univers****. Ces différents résultats sont appelés* ***éventualités*** *(****issues*** *ou* ***possibilités****). Ce sont des éléments de* $\Omega$*.*

**Définition 1.8.** ♦ *Les sous-ensembles de l'univers* $\Omega$ *sont appelés* ***événements****.*
♦ *Les événements formés d'un seul élément sont appelés* ***événements élémentaires****.*
♦ *Etant donné un univers* $\Omega$*, l'événement* $\Omega$ *est* ***l'événement certain****.*
♦ *L'ensemble vide est* ***l'événement impossible****.*
♦ *L'événement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté* $A \cap B$ *et se lit "A* **inter** *B".*
♦ *L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté* $A \cup B$ *et se lit "A* **union** *B".*
♦ *Etant donné un univers* $\Omega$ *et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé* ***événement contraire*** *de A, noté* $\overline{A}$*.*
♦ *A et B sont* ***incompatibles*** *si et seulement si* $A \cap B = \emptyset$*.*
*Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé* ***probabilité****.*

**Exemple 1.8.** *On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et noter le numéro de la face superieure puis considerer les ensembles suivants : A :"Le numéro obtenu est un multiple de 2" et B :"Le numéro obtenu est superieur à 3".*

1. *Déterminer l'univers $\Omega$ associe à cet épreuve*
2. *Déterminer tous les évenements élémenraires de $\Omega$.*
3. *Déterminer l'évenement contraire de $B$. $A$ et $B$ sont-ils incompatibles ?*

### 1.2.2 Probabilités sur un ensemble fini.

**Activité 1.2.** 1. *On jette une pièce équilibrée, combien avons-nous de chances d'avoir "pile" ?*

2. *On lance un dé non truqué ; combien avons-nous de chances d'obtenir 2 ? d'avoir un numero pair ?*
3. *Une urne contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire une boule (sans regarder !)*
   - ▶ *Combien avons-nous de chances de tirer une boule jaune ?*
   - ▶ *Combien avons-nous de chances de tirer une boule rouge ?*

***Solution***

*Pour la première question, on a une chance sur 2 d'avoir pile. On dit alors que la probabilité d'avoir pile est $1/2$. La probabilité d'un événement est un* ***nombre*** *qui traduit la* ***chance*** *que l'evenement se realise. Ce nombre peut s'ecrire :*

- ***avec une fraction****, par exemple* $\frac{1}{2}$
- ***avec un pourcentage****, par exemple* $50\%$
- ***avec un nombre decimal****, par exemple* $0,5$

**Définition 1.9.** *Soit $\Omega$ un ensemble fini. On appelle* ***probabilité*** *sur $\Omega$ l'appliaction de $\mathcal{P}(\Omega)$(ensemble des parties de $\Omega$) à valeurs dans $[0,1]$ qui à toute partie $A$ de $\Omega$, associe $p(A)$ vérifiant les conditions suivantes :*

■ *$p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$ ;*

■ *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Ainsi, si $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ alors :*

$$0 \leq p(\{x_i\}) \leq 1 \text{ et } p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{x_i\});$$

DRAFT

*On note $p_i = p(\{x_i\})$ ou parfois plus simplement $p(x_i)$ la probabilité des événements élémentaires $\{x_i\}$. Définir une* ***loi de probabilité****, c'est déterminer les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tels que, pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ; On le dispose le plus souvent dans un tableau*

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | *total* |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

**Propriété 1.6.** *Soit $p$ une probabilité sur l'univers $\Omega$, $A$ et $B$ deux événements de $\Omega$. Alors*

- ▶ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶ $p(\emptyset) = 0$ *et* $p(\Omega) = 1$
- ▶ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- ▶ *Si $A$ et $B$ sont incompatibles alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- ▶ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

**Exemple 1.9.** *On considère l'ensemble $E$ des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard. $A$ est l'événement : "le nombre est multiple de 3 " , $B$ est l'événement : "le nombre est multiple de 2 " , $C$ est l'événement : "le nombre est multiple de 6 " . Calculer $p(A)$, $p(B)$,$p(C)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup C)$ et $p(A \cap C)$.*

**Définition 1.10.** *(****Equiprobabilité****)*

*On dit qu'il y a* ***équiprobabilité*** *quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans une situation d'équiprobabilité, si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ a $n$ éléments et si $E$ est un événement composé de $m$ événements élémentaires alors :*

$$p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

*où $card(E)$ et $card(\Omega)$ désignent respectivement le nombre d'éléments de $E$ et de $\Omega$. On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas* ***favorables*** *divisé par le nombre de* ***cas possibles.***

*Dans ce cas* $p_i = p(\{x_i\}) = \dfrac{1}{n}, \forall 1 \leq i \leq n$

**Remarque 1.7.** *Les expressions suivantes : "dé équilibré ou parfait"," boule tirée de l'urne au hasard ", boules indiscernables au toucher, cartes bien battues, pièce équilibrée ou parfaite, $\cdots$ indiquent que, pour les expériences réalisées, le* **modèle associé est l'équiprobabilité**

**Exemple 1.10.** *On lance deux fois de suite un dé équilibré.*

1. *Représenter dans un tableau les* 36 *issues équi-probables .*
2. *Calculer la probabilité des événements :*
   *A : " on obtient un double "; B : "on obtient* 2 *numéros consécutifs "; C : " on obtient au moins un* 6*"; D : " la somme des numéros dépasse* 7*".*

**Exercice 1.2.1.** *On lance* 4 *fois de suite une pièce équilibrée.*

1. *Dresser la liste des issues équiprobables.*
2. *Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?*
   *A : " 2 piles et* 2 *faces "*
   *B : " 3 piles et* 1 *face ou* 3 *faces et 1 pile ".*

## 1.3 Variables aléatoires

**Activité 1.3.** *Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique puis un dé tétraédrique tous équilibrés et on note les nombres obtenus.*

1. *(a) Décrire l'univers* $\Omega$ *de cette expérience aléatoire.*
   *(**Rep :** $\Omega = \{(i,j);\ i \in \{1,2,3,4\}$ et $j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$)*
   *(b) Combien d'issues possède* $\Omega$ *? (**Rep :** $card(\Omega) = 6 \times 4 = 24$)*

   *On s'intéresse à la somme des deux nombres obtenus. Soit X l'application de* $\Omega$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à chaque issue de* $\Omega$*, associe la somme des deux nombres obtenus correspondant. En probabilité, une telle fonction se nomme* ***variable aléatoire****.*
2. *(a) A quelle valeur de* $\mathbb{R}$*, X associe t-il l'issue* $(4,3)$ *?(**Rep :** $X = 7$)*
   *(b) A quelles issues de* $\Omega$ *le nombre* 6 *est-il associé ? (**Rep :** (2,4), (4,2),(3,3), (1,5), (5,1)).*
   *(c) Quelles sont les différentes valeurs de* $\mathbb{R}$ *que peut prendre cette valeur aléatoire ?*
   *(**Rep :** $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$)*
3. *Le tableau suivant donne les probabilités d'obtenir les différentes valeurs prises X. Remplir ce tableau*

| *Valeurs prises par X, notées* $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Probabilités d'obtenir les* $x_i$*, notées* $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

   *Ce tableau est appelé* ***loi probabilité*** *de la variable aléatoire de X.*

**Définition 1.11.** *(***Variable aléatoire** *)*
*On considère une epreuve d'univers* $\Omega$*.*
■ *Une* ***variable aleatoire X*** *est une application definie sur* $\Omega$ *muni d'une probabilite p, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*
■ *L'ensemble des valeurs prises par X, c'est-à-dire* $X(\Omega)$ *est appelé* ***univers image****.*
■ *X prend les valeurs* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *avec les probabilités* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *définies par :* $p_i = p(X = x_i)$*.*
■ *L'affectation des* $p_i$ *aux* $x_i$ *permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée* $P_X$*, est appelée* ***loi de probabilité*** *(ou* ***distribution de probabilité*** *)de X.*

**Remarque 1.8.** *Lorsque* $\Omega$ *est fini, la variable aléatoire est dite* ***discrète****.*

DRAFT

### 1.3.1 Caractéristiques d'une variable aléatoire.

*On considère une épreuve d'univers $\Omega$ fini muni de la probabilité $p$. Soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$. On appelle*

- ***espérance mathématique*** *de $X$, le nombre réel défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.*
- ***varaince de X****,le nombre réel défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$*
- ***l'écart-type*** *est le nombre $\sigma$ défini par : $\sigma = \sqrt{V(X)}$.*

**Propriété 1.7.** *Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la la loi de probabuilité discrete uniforme (**équiprobabilité**). Dans ce cas les valeurs de $X$ correspondent au rang $x_i = i(\forall i \in [1, n])$*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

***Preuve : Exercice***

### 1.3.2 Propriétes d'une varaible aléatoire.

*Soient $X, Y$ deux varaibles aléatoires, $a, b \in \mathbb{R}$.*

- $E(b) = b$ *et* $V(b) = 0$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ *et* $E(aX+b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2V(X)$ *et* $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ *avec* $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

**Remarque 1.9.** *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

**Exemple 1.11.** *Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en FCFA) ; sinon il perd ce même nombre de FCFA*

1. *Si $X$ est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de $X$ et calculer son espérance mathématique et son écart-type.*
2. *Le jeu est-il favorable au joueur ?*

DRAFT

## 1.4 Conditionnement (pas au programme en Tle C )

### 1.4.1 Arbres pondérés.

***Règles de construction***

- *La somme des probabilites des branches issues d'un meme noeud est 1.*
- *La probabilité de l'évenement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des differentes branches composant ce trajet.*

**Exemple 1.12.** *On jette une pièce.*

- *Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne $P$ contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.*
- *Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne $F$ contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.*

*Répresenter l'arbre pondéré de cette expérience.*

### 1.4.2 Probabilité conditionnelle.

**Activité 1.4.** *En fin de $1^eS$, chaque élève choisit une et une seule spécialité en terminale suivant les répartitions ci -dessous :*
*Par spécialité :*

| ***Mathématiques*** | ***Sciences physiques*** | ***SVT*** |
|---|---|---|
| *40 %* | *25%* | *35 %* |

*Sexe de l'élélève selon la spécialité :*

| ***Sexe / Spécialité*** | ***Mathématiques*** | ***Sciences physiques*** | ***SVT*** |
|---|---|---|---|
| ***Fille*** | *45 %* | *24 %* | *60 %* |
| ***Garçon*** | *55 %* | *76 %* | *40%* |

*On choisit un élève au hasard :*

1. *Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.*
2. (a) *Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ? $F$ : " l'élève est une fille ", $M$ : " l'élève est en spécialité maths ".(**Rep :** $p(F) = 0,4 \times 0,45 + 0,35 \times 0,6 + 0,25 \times 0,24 = 0,45$)*
   (b) *Quelle est la probabilité que ce soit une fille ayant choisi spécialité mathématiques ?*
   (c) *Sachant que cet élève a choisi spécialité mathématiques, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (**Rep** : $p(F \cap M) = 0,45$)*
   *On appelle* **probabilité de $F$ sachant $M$ cette probabilité (conditionnelle )** *et on la note $p_M(F)$ ou $P(F/M)$*
   (d) *Quelle égalité faisant intervenir $p(F \cap M)$, $p(F)$ et $p_M(F)$ peut-on écrire ? Comparer $p(F)$ et $p_M(F)$ et en donner une interprétation.*
3. *Sachant que cet élève a choisi spécialité SVT, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?*
4. *Comparer $p_S(F)$ et $p(F)$, et en donner une interprétation.*

**Définition 1.12.** *$p$ designe une probabilite sur un univers fini $\Omega$. $A$ et $B$ etant deux evenements de $\Omega$, $B$ étant de probabilité non nulle.*

- *On appelle **probabilité conditionnelle** de l'évenement $A$ sachant que $B$ est realisé le réel noté*

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

- *Le réel $p(A/B)$ se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi **probabilité de $A$ sachant $B$**.*

**Remarque 1.10.** *Si $A$ et $B$ sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B\times)p(B) = p(B/A) \times p(A)$.*

**Exercice 1.4.1.** ***Efficacité d'un test***

*Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :*

- *Chez les individus malades, 95 des tests sont positifs et 5 négatifs.*
- *Chez les individus non malades, 1 des tests sont positifs et 99 négatifs. On choisit un individu au hasard.*

1. *Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.*
2. *Quelle est la probabilité*
   (a) *qu'il soit malade et qu'il ait un test positif.*
   (b) *qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?*
   (c) *qu'il ait un test positif ?*
   (d) *qu'il ait un test négatif ?*
3. *Calculer la probabilité*
   (a) *qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?*
   (b) *qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?*
4. *Interpréter les résultats obtenus aux questions 3a et 3b.*

### 1.4.3 Formule de Bayes (complément de cours, pas au programme)

*Cette formule est aussi appelée **Théorème de la probabilité des causes**, car elle permet de renverser le conditionnement. On l'obtient en remarquant que la d'une intersection $A \cap B$ peut s'ecrire en conditionnant $A$ par $B$, soit en conditionnnant $B$ par $A$ :*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(A) = p_A(B) \times p(B)$$

*On obtient la formule suivante :*

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})}$$

*avec $p(B)$ non nulle.*

DRAFT

**Exemple 1.13.** *Une maladie $M$ se présente sous deux formes $M_1$ et $M_2$ avec les probabilités respectives $p(M_1) = 0,2$ et $p(M_2) = 0,8$ et le symptôme $S$ apparaît dans 80% des cas de $M_1$ et dans 10% des cas $M_2$. Quelle est la probabilité pour un patient atteint de $M$ qui présente le symptôme $S$, d'être atteint de $M_1$.*
***Solution*** *:*

$$p_S(M_1) = \frac{p_{M_1}(S) \times p(M_1)}{p_{M_1}(S) \times p(M_1) + p_{M_2}(S) \times p(M_2)} = \frac{0,8 \times 0,2}{0,8 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8} = \frac{2}{3}$$

## 1.5 Indépendance

### 1.5.1 Evénements indépendants.

**Définition 1.13.** *$A$ et $B$ sont 2 événements de probabilité non nulle.*
- *$A$ et $B$ sont **independants** lorsque la realisation de l'un ne change pas la realisation de l'autre.*
- *$A$ et $B$ sont **independants** si et seulement si $p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(A)$.*

**Théorème 1.5.1.** *Deux événements $A$ et $B$ de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :*

$$p(A/B) = p(A) \text{ ou } p(B/A) = p(B) \text{ ou } p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

**Remarque 1.11.** *Ne pas confondre evenements **indépendants** et événements **incompatibles**.*
- ► *2 événements $A$ et $B$ sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ .*
- ► *2 événements $A$ et $B$ sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.*
- ► ***Lois de Morgan** : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

**Proposition 1.1.** *Soient $A$ et $B$ deux événements. Les propositions suivantes sont équivalentes*
1. *$A$ et $B$ indépendants.*
2. *$\overline{A}$ et $B$ indépendants.*
3. *$A$ et $\overline{B}$ indépendants.*
4. *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

DRAFT

*Démonstration.* Exercice **Ind** :utiliser les lois de Morgan.

**Exemple 1.14.** *Dans une classe de 40 élèves, 28 apprenent l'anglais, 16 l'allemend et 8 les deux langues. On choisit au hasard un élève de cette classe et on considère les évéments $A$ :"L'élève choisit apprnd l'anglais" et $B$ : "L'élève choisit apprend l'allemand". Calculer les probabilités des évéments $A$, $B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$*

**Exercice 1.5.1.** *On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2, et un bleu numéroté 1. On désigne respectivement par $R$, $U$ et $D$ les événements : "le jeton est rouge", "le numéro est 1 " et "le numéro est 2 ". Les événements $R$ et $U$ sont-ils indépendants ? Et les événements $R$ et $D$ ?*

### 1.5.2 Indépendance de deux variables aléatoires.

**Définition 1.14.** *$X$ et $Y$ sont deux variables définies sur l'univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire ; $X$ prend les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et $Y$ prend les valeurs $y_1, y_2, \cdots y_q$. Définir la loi du couple $(X, Y)$, c'est donner la probabilité $p_{i,j}$ de chaque événement*

$$[(X = x_i) \text{ et } (Y = y_j)].$$

**Remarque 1.12.** *Les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants si : $p[(X = x_i) et (Y = yj)] = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$*

**Exercice 1.5.2.** *On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble $E$ des issues est alors l'ensemble des 32 cartes et le fait de tirer au hasard implique que les événements élémentaires sont équiprobables.*
- *On definit sur $E$ la variable aleatoire $X$ qui, a chaque issue, associe 1 si cette issue est un valet, 2 si c'est une dame, 3 si c'est un roi, 4 si c'est un as et 0 si ce n'est pas l'une de ces figures. Les valeurs de $X$ sont donc $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.*
- *On définit sur $E$ la variable aleatoire $Y$ qui, a chaque issue, associe 1 si cette issue est un trefle ou un carreau, 2 si c'est un coeur, 3 si c'est un pique. Les valeurs de $Y$ sont $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.*

1. *Définir la loi du couple $(X,Y)$.( on pourra dresser un tableau à double entrée)*
2. *Donner les lois de $X$ et de $Y$*
3. *$X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?*

### 1.5.3 Probabilités totales.

**Définition 1.15.** *Soient $\Omega$ un univers associé a une expérience aleatoire et $n$ un entier $n \geq 2$. Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de $\Omega$ si les trois conditions suivantes sont realisées :*

- *pour tout $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, $A_i \neq 0$.*
- *pour tous $i$ et $j$ (avec $i \neq j$) de $\{1, 2, \cdots n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.*
- *$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.*

***Formule des probabilites totales***

*Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ une partition de l'univers $\Omega$ constituee d'événements de probabilités non nulles et $B$ un événement quelconque contenu dans $\Omega$. Alors :*

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \cdots p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

**Exemple 1.15.** *On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ indiscernables. $U_1$ contient 4 boules rouges et trois boules vertes, $U_2$ contient 2 boules rouges et 1 boule verte . On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Calculer la probabilité pour qu'elle soit rouge.*

**Exercice 1.5.3.** *Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :*

1. *Trois as.*
2. *Trois cartes de même valeur.*
3. *Deux coeurs et un pique.*

DRAFT

**Exercice 1.5.4.** *Une urne contient : 5 boules n°10 ; 4boules n°15 ; 3 boules n°20. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.*

1. *Déterminer les probabilités suivantes :*
   *A : « On tire au moins une boule n°15 »*
   *B : « On tire trois boules portant trois numéros différents »*
   *C : « On tire trois boules portant le même numéro »*
   *D : « Parmi les trois boules, deux portent le même numéro »*
2. *Il faut payer $51F$ pour effectuer un tirage de trois boules, et chaque tirage rapporte en francs cfa la somme des points marqués. Quelle est la probabilité d'être gagnant ?.*

## 1.6 Lois de probabilités

### 1.6.1 Loi de Bernoulli.

**Définition 1.16.** *:*

♦ ***Une alternative ou expérience de Bernoulli*** *est une épreuve à deux issues possibles :*

- *le succes, note 1, de probabilité $p$ ;*
- *l'echec, note 0, de probabilité $q = 1 - p$.*

*Sa loi de probabilité est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre $p$.*

♦ *Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à repéter $n$ fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de façon indépendante une épreuve de Bernouilli dont la probabilité du succès est $p$.*

**Exemple 1.16.** *Un dé cubique est mal equilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{7}$. On appelle succès l'événement à obtenir 6 et échec à obetnir un numero différent de 6. Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit **une loi de Bernoulli**.*
*Si on effectue cinq fois cette expérience. On est en presence d'un **schéma de Bernoulli**.*

**Théorème 1.6.1.** *Pour une loi de Bernoulli de paramètre $p$, l'espérance est $p$ et l'écart type est $\sqrt{pq}$.*

### 1.6.2 Loi Binomiale.

**Définition 1.17.** *Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de $n$ épreuves. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors : $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.*

**Notation 1.1.** *Une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^\star$ et $p$ est notée $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$.*

**Exemple 1.17.** *Dans l'exemple précédent, on appelle $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancés. On obtient les probabilités suivantes : $P_0=P(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{5}\right)^5=0,4627$. $P_1=0,3856$ ; $P_2=0,1285$ ; $P_3=0,0214$ ; $P_4=0,0018$ ; $P_5=0,0001$.*

**Exercice 1.6.1.** *Un tireur vise une cible. La probabilité qu'il touche la cible est de $0,7$. Il tire 3 fois de suite. On note $X$ le nombre de fois où il atteint la cible. Déterminer la probabilité de $X$.*

**Théorème 1.6.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$ alors :*
▶ *l'espérance de $X$ est $E(X)=np$ ;*
▶ *la variance de $X$ est $V(X)=npq$ et l'écart type est $\sigma=\sqrt{npq}$,$q=1-p$.*

**Exercice 1.6.2.** *Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux sont rouges et les autres sont bleus.*

1. *On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilités $p$ d'obtenir un jeton rouge ?*
2. *On tire successivement 6 jetons un à un, avec remise.*
   (a) *Quelle est la probabilité $P_1$ d'obtenir exactement trois jetons rouges ?*
   (b) *Quelle est la probabilité $P_2$ d'obtenir exactement un jeton rouge ou un jeton bleu ?*
   (c) *Quelle est la probabilité $P_3$ d'obtenir au moins quatre jetons rouges ?*

DRAFT

## 1.7 Fonction de repartition

**Définition 1.18.** *Soit $X$ une variable aléatoire definie sur un univers $\Omega$ de probabilité $p$.*
***La fonction de repartition*** *de $X$ est l'application $F_X$ de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ qui à, tout $x$ associe $F_X(x)=p(X\leq x)=p(X\in]-\infty,x[)$*
• *Lorsque $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1,\cdots,x_n\}$ avec $x_1<\cdots<x_n$ alors pour $x\in\mathbb{R}$*

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{k}p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{k}p_i \text{ avec } k \text{ tel que } x_k\leq x<x_{k+1}$$

*La fonction de repartition d'une variable aléatoire discrète est constante par morceaux.*
• *Lorsque $X$ est continue de densité de probabilité $f$, alors :*

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \text{ (}\textbf{\textit{Pas au programmme}}\text{)}$$

**Propriété 1.8.** *Soit $F_X$ la fonction de repartition d'une variable aléatoire discrète $X$, alors :*
• $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\leq F_X(t)\leq 1$ ;
• *$F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;*
• $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$.
• *Si $a\leq b$, $p(a\leq X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$*

**Exemple 1.18.** *On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne $2F$ pour chaque résultat " pile " et on perd $1F$ pour chaque résultat "face". On introduit $X$ la variable aléatoire egale au gain obtenu après le lancer.*

1. *Quel est l'ensemble $E$ des issues possibles ?*
2. *Quelles sont les valeurs prises par $X$.*
3. *Déterminer la loi de probabilité de $X$ et sa fonction de repartition $F_X$.*
4. *Representer graphiquement cette distribution de probabilités et fonction de repartition $F_X$.*

**Remarque 1.13.** *Dans le cas d'une variable alétoire discrète, on utilise* ***un diagramme en bâtons*** *pour visualiser la* ***distribution des probabilités*** *et une fonction en escalier pour la* ***fonction de repartition.***

**Exercice 1.7.1.** *On lance deux dés. On note $X$ la variable alétoire égale au plus grand chiffre obtenu après le lancer.*

1. *Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $X$.*
2. *Déterminer la loi des probabilités de cet expérience puis sa fonction de repartition et représenter.*

DRAFT