OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en 3e

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT-PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup de pays ont opté pour un système éducatif solide où l'apprenant participe à la construction des savoirs qui lui permettront de maitriser son environnement en faisant face à des situations de vie réelles, complexes et diversifiées, une école intégrée, soucieuse du développement durable, et prenant en compte les cultures et les réquisits locaux à la place d'une école coupée de la société. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert ses portes à l'APC qui complètera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeune enseignant soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la $6^{ème}$ en Tle sont l'œuvre de ce groupe d'enseignants dynamiques et rompus à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette $3^{ème}$ édition est le fruit de l'un de ses objectifs majeurs, conséquence de trois mois et demi de travail à parti du 27/07/2020.

Conçus pour aider le personnel enseignant ainsi que ceux qui seront dans le besoin, cette édition n'a pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être un complément d'outil de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'a connues l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, pour toutes les leçons de cette 3ème édition et dans toutes les classes, une forte corrélation est établie entre situation problème et activités d'apprentissages. L'objectif ici étant d'aider l'apprenant à dérouler lui-même les ressources de la leçon qui lui sont nécessaires à la résolution de la tâche évoquée par la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, et au premier rang ***M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien*** qui a su remobiliser les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de la rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capital, il s'agit de ***M. Ngandi Michel***. Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyé via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr,

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via whatsapp à l'un des administrateurs ci-dessous nommés:

***M. GUELA KAMDEM Pierre* (697 473 953 / 678 009 612), *M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien* (696 090 236/651 993 749), *M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson* (699 494 671) et *M. NTAKENDO Emmanuel* (676 519 464).**

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

LES AUTEURS.

LES AUTEURS.

Liste des enseignants ayant participés au projet dans l'atelier 3[ème] sous la coordination de
M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien

CHAPITRES	**NOMS ET PRENOMS**	**N° de TELEPHONE**
ARITHMÉTIQUE	TEGO FRANCLAIN	697 604 723
LES NOMBRES RATIONNELS	TAGNI FABRICE DONALD	674 453 394
LES NOMBRES REELS	DJOKO KAYE JANVIER RODRIGUE	677 290 153
CALCUL LITTERAL	NOAH BELA YANNICK **(Chef d'atelier)**	657 827 997
EQUATIONS ET INEQUATIONS DU 1[er] DEGRE	NGOUDJOB MICHEL JOSEPH	691 011 691
EQUATIONS ET INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS IR²	MONKAP JESSE	670 629 018
APPLICATIONS LINEAIRES ET APPLICATIONS AFFINES	NDI ZAMBO GABRIEL EMMANUEL	699 201 962
STATISTIQUES	DGOUMTSOP TINDO TELESPHORE	676 401 806
ANGLES INSCRITS ET POLYGONES REGULIERS	SOPTSI VOLTAIRE	696 285 506
THALES DANS LE TRIANGLE	NGAGUEN NGAMANI BENOÎT THIERRY	698 264 201
TRIGONOMETRIE DANSLE TRIANGLE RECTANGLE	SIAGO SIRONNET.	698 062 919
COORDONNEES D'UN VECTEUR	FEUDJIO JEAN JACQUES	696 649 884
MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL	TACHAGO WABO WILFRIED ANDERSON	699 494 671
EQUATIONS DE DROITE	TCHOUNANG NANA EMERENCE KAL	650 370 151
HOMOTHETIES	WAMI DAWA SERGES	673 543 702
SECTION D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CONE	TACHAGO WABO WILFRIED ANDERSON et KOUNA NDONO ARCENES	699 494 671 et 693 777 632

Module 13	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 1

ARITHMETIQUE

INTERET : L'arithmétique permet à l'élève de bien communiquer à travers les nombres ; de manipuler le PGCD et le PPCM de deux nombres entiers naturels.

MOTIVATION : L'arithmétique en troisième s'intéresse à l'étude des phénomènes périodiques par exemple déterminer les dates de coïncidence de deux marchés périodiques. Il est aussi utilisé lorsqu'on veut déterminer les dimensions d'un terrain, le nombre de carreaux ou de dalles pour le revêtement total d'une surface, le nombre de piquet nécessaire pour la clôture d'un champ…

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Utiliser l'algorithme d'Euclide, l'algorithme des soustractions pour calculer le PGCD de deux nombres entiers naturels
- Utiliser la relation entre le PPCM et le PGCD pour calculer le PGCD ou le PPCM de deux entiers naturels
- Résoudre des problèmes faisant appel au PPCM et au PGCD.

LEÇON 1

Algorithme d'Euclide, algorithme des soustractions et le plus grand commun diviseur

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Utiliser l'algorithme d'Euclide, l'algorithme des soustractions pour calculer le PGCD de deux nombres entiers naturels ;
- Résoudre des problèmes faisant appel au PGCD.

PRÉREQUIS

1) Décomposer en produit des facteurs premiers les nombres 48 et 32, puis en déduire leur PGCD

2) Effectuer la division euclidienne de 56 par 24.

Solution

1) $48 = 2^4 \times 3 \ \ et\ 32 = 2^5$; Le PGCD de 48 et 32 est $2^4 = 16$

NB : le PGCD de deux entiers naturels est le produit des facteurs communs à ces deux nombres.

2) $56 = 24 \times 2 + 8$

SITUATION PROBLÈME

Le père d'Agnès élève de la classe de troisième a le projet de carreler le sol de son salon de dimensions $4{,}62\ m\ \times 5{,}61m$ à l'aide des carreaux. Il ne voudrait pas des coupes de carreaux, ni d'espaces entre deux carreaux consécutifs posés au sol. Il fait appel à sa fille Agnès pour déterminer le nombre de carreaux minimum nécessaire pour la réalisation de ce projet. Aider Agnès à déterminer ce nombre de carreau.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Déterminer le PGCD de 462 et 561 à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.

2) **a**) Compléter le tableau ci-dessous.

a	561	462	363						
b	462		99						33
$a-b$	99	363							0

b) Comparer le dernier résultat non nul de $a - b$ au $PGCD\ de$ $561\ et\ 462$.

3) **a**) Compléter le tableau ci-dessous. r est le reste de la division de a par$b$.

a	561	462		
b	462	99		33
r				0

b) Comparer le dernier reste non nul au $PGCD\ de$ $561\ et\ 462$.

4) On pose L la longueur en cm et l la largeur en cm du salon du père de Agnès

a) Que représente le PGCD (L ; l) ?

b) Effectue les opérations : $\frac{L}{PGCD(L;l)}$ $et \frac{l}{PGCD(L;l)}$ Que représentent ces résultats respectivement pour la longueur et pour la largeur ?

c) Détermine alors le nombre de carreaux nécessaires pour carreler le salon du père d'Agnès

SOLUTION :

1) $561 = 3 \times 11 \times 17 \quad et\ 462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11\ PGCD(561\,;462) = 33$

2) **a**) Complétons le tableau

a	561	462	363	264	165	99	66	33
b	462	99	99	99	99	66	33	33
$a - b$	99	363	264	165	66	33	33	0

b) Le dernier résultat non nul de $a - b\ est$ 33 qui est égal au $PGCD\ de$ $561\ et\ 462$.

3) **a**) Complétons le tableau. r est le reste de la division de a par$b$.

a	561	462	99	66
b	462	99	66	33
r	99	66	33	0

b) Le dernier reste non nul de $a\ par\ b\ est$ 33 qui est égal au $PGCD\ de$ $561\ et\ 462$

4) **a**) Le PGCD (L ; l) représente la longueur du côté du carreau. D'où la longueur du côté des carreaux est $33\ cm$.

b) $\frac{L}{PGCD(L;l)} = \frac{561}{33} = 17 \quad et \frac{l}{PGCD(L;l)} = \frac{462}{33} = 14$. 17 représente le nombre de carreaux minimum nécessaire à utiliser dans le sens de la longueur et 14 représente le nombre de carreau minimum à utiliser dans le sens de la largeur.

c) le nombre de carreau minimal à utiliser est$17 \times 14 = 238$ carreaux.

RÉSUMÉ

Soient $a, b, q \; et \; d$ des nombres entiers naturels non nuls.

- On dit que d est un diviseur commun de a et b si d est un diviseur de a et b .
- On appelle plus grand commun diviseur de a et b on note $PGCD(a;\ b)$ le plus grand entier des diviseurs communs de a et b.
- On appelle plus petit commun multiple de a et b et on note $PPCM\ (a;\ b)$ le plus petit entier non nul des multiples communs de a et b.

Pour déterminer le $PGCD$ de deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$,on peut soit utiliser l'algorithme des soustractions successives, soit utiliser l'algorithme d'Euclide ou encore des divisions euclidiennes successives :

ALGORITHME DES SOUSTRACTIONS SUCCESSIVES

On effectue des soustractions successives de a par b comme l'indique le tableau de la question 2 de l'activité. $Le\ PGCD(a;\ b)$ est le dernier résultat non nul de $a - b$.

Exemple : Déterminons-le $PGCD\ (168\,;120)$.

$168 - 120 = 48\,;\ 120 - 48 = 72\,;\quad 72 - 48 = 24\,;\ 48 - 24 = 24$; 24−24=0. Donc $PGCD(168; 120) = 24$ car le résultat de la dernière différence non nul est 24

ALGORITHME D'EUCLIDE

On effectue les divisions euclidiennes successives de a par b comme l'indique le tableau de la question 3 de l'activité. Le $PGCD(a\,;b)$ est le dernier reste non nul. Cet algorithme est basé sur la propriété suivante : si $a = bq + r$, alors $PGCD\ (a\,;\ b) = PGCD\ (b\,;\ r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple : Déterminons le $PGCD\ (375; 2020)$.

$2020 = 5 \times 375 + 145\,;\ 375 = 2 \times 145 + 85\,;\ 145 = 1 \times 85 + 60\,;\ 85 = 1 \times 60 + 25\,;\ 60 = 2\ \times 25 + 10\,;\ 25 = 2 \times 10 + 5\,;\ 10 = 2 \times 5 + 0\quad Donc\ le\ (375; 2020) = 5$ car le dernier reste non nul des divisions est 5.

REMARQUE

- si b est un diviseur de a, alors $PGCD\ (a\,;\ b) = b$

- $PGCD\ (a\ ;\ b) = 1$ Équivaut à $\frac{a}{b}$ est irréductible et on dit que les nombres a et b sont premiers entre eux.
- $PGCD\ (a\ ;\ 1) = 1.$

EXERCICE D'APPLICATION :

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme des soustractions successives le $PGCD\ (31; 14)$.
2) Déterminer à l'aide de l'algorithme D'Euclide $le\ PGCD\ (3{,}750)$.
3) Une entreprise de fabrication des produits alimentaires a fabriqué 700 bonbons chocolat et 450 les bonbons cœurs.

a) Déterminer le nombre de paquet maximum identique contenant à la fois les deux marques de bonbons.

b) Déterminer le nombre de bonbons chocolat que contient chaque paquet.

SOLUTION

1. Déterminons le $PGCD(31\ ; 14)$ à l'aide de l'algorithme des soustractions.

a	31	17	14	11	8	5	3	2	1
b	14	14	3	3	3	3	2	1	1
$a-b$	17	3	11	8	5	2	1	1	0

$Donc\ PGCD(31; 14) = 1$

2. Déterminons le (300;75) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

a	750	300
b	300	150
r	150	0

$Donc\ (300; 750) = 150$

?

LEÇON 2

Relation entre le PGCD et le PPCM

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Utiliser la relation entre le PPCM et le $PGCD$ pour calculer le $PPCM$ de deux entiers naturels
- Résoudre des problèmes faisant appel $au\ PPCM$.

PRÉREQUIS :

Décomposer en produit des facteurs premiers les nombres 104 et 50, puis en déduire leur PPCM

Solution :

$104 = 2^3 \times 13\ et\ \ 50 = 2 \times 5^2$ Ainsi le $PPCM\ (104\ ;\ 50) = 2600$

NB : $Le\ PPCM$ de deux entiers naturels est le produit des facteurs non communs.

SITUATION PROBLEME :

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes. Sachant que $PGCD\ (36\ ;\ 30) = 6$ .y'a-t-il des moments (autre que le point de départ) ou les voitures se croisent sur la ligne de départ ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Déterminer le $PPCM(72; 30)$

2) Sachant que $PGCD(72; 30) = 6$, calculer le quotient $\frac{72\times30}{PGCD(73;30)}$, puis comparer le résultat au $PPCM\ (72; 30)$.

3) Deux athlètes partent au même moment sur la ligne de départ et font plusieurs tours d'un stade de football. La fille fait le tour en 36 minutes et le Garçon en 30 minutes.

a) Sachant que le $PGCD(36; 30) = 6$; calculer le $PPCM\ (36; 30)$.

b) Après combien de temps les deux athlètes se croisent au point de départ.

Répondre alors à question de la situation problème.

SOLUTION :

1) On a : $72 = 2^3 \times 3^2 \quad et\ 30 = 2 \times 3 \times 5$; $PPCM\ (72; 30) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

2) $\frac{72 \times 30}{PGCD(73;30)} = 360 = PPCM(72; 30)$

3) a) $PPCM(72; 30) = \frac{36 \times 30}{6} = 180$

b) Les deux athlètes se croisent sur la ligne de départ à un temps égal au $PPCM\ (36; 30) = 180$. Donc après 180 min les athlètes se croisent.

4) Oui il y'a des moments (autre que le point de départ) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ. En effet les deux voitures se croisent après chaque 180 minutes.

RESUME

- le PPCM de deux nombres entiers naturels est le produit de tous les facteurs communs affectés de leur grande puissance et des facteurs non communs dans la décomposition de ces deux nombres en produit de facteurs premiers.
- Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, alors $PPCM(a\ ;\ b) = \frac{a \times b}{PGCD(a;b)}$
- Si a et b sont premiers entre eux alors $PPCM(a; b) = a \times b$.
- Si b est un diviseur de a alors $PPCM(a; b) = a$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Sachant que $le\ PGCD\ de\ 3723\ et\ 6711$ est 3, Déterminer leur $PPCM$.

2) TAMO est un commerçant ambulant qui vend au marché A qui a lieu tous les 7 jours et au marché B qui a lieu tous les 10 jours. Les deux marchés ont coïncidés 22 septembre : Aider TAMO à trouver le prochain jour de coïncidence des deux marchés.

CHAPITRE 2

NOMBRES RATIONNELS

INTERET

Résoudre les problèmes se reportant aux opérations sur les nombres rationnels.

MOTIVATION

Les nombres rationnels constituent un élément essentiel dans la gestion des données tels que :

- Communiquer des informations comportant des nombres,
- L'objet d'ingénieries qui distinguent deux phases : un temps long pour traiter rhétoriquement une classe de problème à des fins de conceptualisation, un temps bref pour assimiler les notations.

LEÇON 1

Nombres rationnels

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres.

PRÉREQUIS

1. Cite trois nombres entiers naturels et trois nombres entiers relatifs de ton choix.

   Réponse : trois entiers naturel (0 ;2 ;7), trois entiers relatifs (-24 ; -1 ; 19)
2. Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? Donne trois exemples.

   Réponse : Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ ou a est un nombre entier relatif et b un entier relatif non nul. Exemple : $-\frac{4}{9}$; $\frac{7}{11}$; 0
3. Ecrire sous forme de fraction les nombres décimaux suivant : 0,054 ; 12,76 .

   Réponse ; $0{,}054 = \frac{54}{1000}$; $12{,}76 = \frac{1278}{100}$

SITUATION PROBLÈME

Un sondage téléphonique effectué auprès de 56 800 personnes a révélé que 2/5 des personnes préféraient le journal. La Presse tandis que 44% des personnes préféraient le journal de Montréal et le reste de personnes préfèrent un autre journal Montréal.

Combien de personnes étaient indécises ou ont choisi un autre journal ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Compléter par le nombre rationnel qui convient et donner le résultat sous forme irréductible :
   - $44\% = \frac{\cdots\cdots}{100} = \frac{11}{\cdots\cdots}$
   - $1 - \frac{2}{5} - \frac{11}{25} = \cdots$
   - $\frac{4}{25} \times 56800 = \cdots$
2) Tito a donné les $\frac{4}{11}$ de son jus de fruit à son petit frère. Quelle fraction de jus lui reste-t-il ?

3) Donner le quart du nombre $\frac{3}{11}$.
4) Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous formes de fractions irréductibles. $A=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$; $B=\frac{1}{5}-\frac{5}{3}\times\frac{7}{2}$; $C=\frac{7}{10}-5\div\frac{4}{9}$

Solution de l'activité d'apprentissage :

1) Complétons
   - $\frac{44}{100}=\frac{11}{25}$
   - $1-\frac{2}{5}-\frac{11}{25}=\frac{1\times5-1\times2}{5}-\frac{11}{25}=\frac{5-2}{5}-\frac{11}{25}=\frac{3}{5}-\frac{11}{25}=\frac{3\times25-5\times11}{5\times25}=\frac{20}{125}=\frac{4}{25}$
   - $\frac{4}{25}\times56800=\frac{4\times56800}{25}=9088$

2) La fraction de jus qui lui reste est : $1-\frac{4}{11}=\frac{1\times11-1\times4}{11}=\frac{7}{11}$

3) Le quart du nombre $\frac{3}{11}$ est $\frac{\frac{3}{11}}{4}=\frac{3}{11}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{44}$

4) Effectuons les opérations suivantes :

$A=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{4}$; $B=\frac{1}{5}-\frac{5}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{1}{5}-\frac{5\times7}{3\times2}=\frac{1}{5}-\frac{35}{6}=\frac{1\times6-5\times35}{5\times6}=\frac{6-175}{30}=-\frac{169}{30}$

$C=\frac{7}{10}-5\div\frac{4}{9}=\frac{7}{10}-\frac{5}{1}\times\frac{9}{4}=\frac{7}{10}-\frac{5\times9}{4}=\frac{7}{10}-\frac{45}{4}=\frac{7\times4-10\times45}{10\times4}=\frac{28-450}{40}=\frac{-422}{40}=-\frac{211}{20}$

Solution de la situation problème :

Nombre de personnes indécises : $\left[1-\left(\frac{2}{5}+44\%\right)\right]\times56\,800=\frac{4}{25}\times56\,800$ =9 088 pers

Réponse : $9088\ personnes\ \text{é}taient\ ind\text{é}cises.$

RESUME

Définitions

- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une virgule ou non et avec un nombre limité de chiffres après la virgule.

Exemple

1 ; 0,75 ; $\frac{4}{100}$; 22,3657.

- Lorsque le numérateur et le dénominateur sont des entiers, on parle de fraction.
- L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un nombre entier relatif et b un nombre entier relatif non nul est appelé ensemble des nombres rationnels. Cet ensemble se note $\mathbb{Q}$.

Exemple

$\frac{22}{7}$; $\frac{33}{24}$; $-\frac{2}{15}$; $-0{,}23$.

OPERATIONS SUR LES NOMBRES RATIONNELS

Les opérations sur les nombres rationnels se font comme dans le cas des fractions.

Soient $a, b, c\ et\ d$ quatre nombres entiers relatifs tels que $b \neq 0\ et\ d \neq 0$. Alors on a :

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

  Exemple

  $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2+7}{5}=\frac{9}{5}$ et $\frac{7}{11}-\frac{13}{11}=\frac{7-13}{11}=\frac{-6}{11}$

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$

  Exemple

  $\frac{3}{10}+\frac{7}{9}=\frac{3\times 9+10\times 7}{10\times 9}=\frac{27+70}{90}=\frac{97}{90}$ et $\frac{3}{7}-\frac{13}{11}=\frac{3\times 11-7\times 13}{7\times 11}=\frac{33-91}{77}=\frac{-58}{77}$

- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ et $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$; avec $c \neq 0$

  Exemple

  $\frac{11}{10}\times(-\frac{7}{9})=\frac{11\times(-7)}{10\times 9}=\frac{-77}{90}$ et

  $-\frac{3}{8}\div\frac{13}{12}=\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{13}{12}}=-\frac{3}{8}\times\frac{12}{13}=\frac{-3\times 12}{8\times 13}=\frac{-36}{104}=\frac{-9}{26}$

REGLES DE PRIORITES

Dans une suite d'opérations, l'ordre de priorité est le suivant :

- Les parenthèses : elles indiquent les calculs à effectuer en premier. On commence les calculs par ceux qui sont dans les parenthèses les plus intérieures.

- Les puissances.
- La multiplication et la division.
- L'addition et la soustraction.

EXERCICES D'APPLICATION

Calculer les nombres A, B, C, D, E, F et G suivants et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$A = \frac{12}{7} + \frac{13}{7}$; $B = \frac{53}{78} - \frac{97}{78}$; $C = \frac{32}{5} + \frac{1}{3}$; $D = \frac{6}{8} - \frac{22}{7}$; $E = \frac{6}{7} \times \frac{5}{2}$; $F = \frac{18}{11} \div \frac{12}{7}$

$G = \left(3 - \frac{5}{13} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$.

Solution de l'exercice d'application

Calculons les nombres suivants.

A $= \frac{12}{7} + \frac{13}{7}$ $= \frac{12+13}{7}$ $A = \frac{25}{7}$	B $= \frac{53}{78} - \frac{97}{78}$ $= \frac{53-97}{78}$ $= -\frac{44}{78}$ $B = -\frac{22}{39}$	$C = \frac{32}{5} + \frac{1}{3}$ $= \frac{32 \times 3 + 1 \times 5}{5 \times 3}$ $= \frac{96 + 5}{15}$ $C = \frac{101}{15}$	$D = \frac{6}{8} - \frac{22}{7}$ $= \frac{6 \times 7 - 22 \times 8}{8 \times 7}$ $= \frac{42 - 176}{56}$ $= -\frac{134}{56}$ $D = -\frac{67}{28}$	$E = \frac{6}{7} \times \frac{5}{2}$ $= \frac{3}{7} \times \frac{5}{1}$ $E = \frac{15}{7}$	$F = \frac{18}{11} \div \frac{12}{7}$ $= \frac{18}{11} \times \frac{7}{12}$ $= \frac{3}{11} \times \frac{7}{2}$ $= \frac{3 \times 7}{11 \times 2}$ $F = \frac{21}{22}$

$$G = \left(3 - \frac{5}{13} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(3 - \frac{5}{13} \times \frac{4}{25}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(3 - \frac{1}{13} \times \frac{4}{5}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(3 - \frac{1 \times 4}{13 \times 5}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(3 - \frac{4}{65}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(\frac{3 \times 65 - 4 \times 1}{65}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \left(\frac{195-4}{65}\right) + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \frac{191}{65} + \frac{7}{15} \div \frac{13}{9}$$

$$= \frac{191}{65} + \frac{7}{15} \times \frac{9}{13}$$

$$= \frac{191}{65} + \frac{7}{5} \times \frac{3}{13}$$

$$= \frac{191}{65} + \frac{7\times 3}{5\times 13}$$

$$= \frac{191}{65} + \frac{21}{65}$$

$$= \frac{191+21}{65}$$

$$G = \frac{212}{65}$$

ACTIVITE D'INTEGRATION

1) Un marchand a vendu 45% de sa marchandise le matin et le 2/3 de ce qu'il lui restait l'après-midi. Quelle fraction de sa marchandise le marchand a-t-il vendue dans la journée ?
2) Un satellite fait une fois et demie le tour de la Terre en une heure. Quelle fraction de tour de Terre fait-il en un quart d'heure ?

TAF:

CHAPITRE 3

LES NOMBRES REELS

INTERET

Les nombres réels ont pour intérêt de combler le manque laissé par l'ensemble des nombres rationnels dans la résolution de certaines situations.

MOTIVATION

Des nombreux problèmes de la vie sont modélisés grâce à la connaissance qu'on a sur les nombres réels, sur les racines carrées et des intervalles. On les utilise pour déterminer les valeurs exactes des dimensions des objets, des meubles, pour communiquer les informations.

LEÇON 1

Racines carrées

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Dans la vie quotidienne, on utilise les racines carrées pour résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie dont l'ensemble $\mathbb{Q}$ est incapable d'apporter des solutions : calculer les valeurs exactes de certaines longueurs.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Déterminer la racine carrée d'un nombre positif
- Montrer qu'un nombre positif est racine carrée d'un nombre positif
- Transformer, effectuer, réduire et écrire simplement des expressions comportant des radicaux

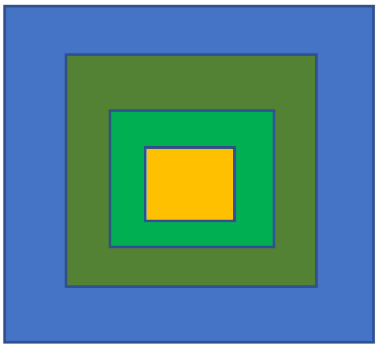
PREREQUIS

1) Calcule 13^2 ; $(-13)^2$ **Réponse** $13^2 = 169$; $(-13)^2 = 169$

2) Complète les pointillés : $\ldots..^2 = 36$ *ou encore* $\ldots..^2 = 36$ **Réponse** $6^2 = 36$ $(-6)^2 = 36$

SITUATION PROBLEME

BOGNO fait de la peinture. Il a réalisé le tableau ci-dessous constitué de carrés superposés de différentes couleurs. L'aire du grand carré est égale à 16cm². En passant d'un carré au suivant, l'aire est divisée par deux. Ainsi, l'aire du carré orange a une aire moitié de celle du carré bleu, et ainsi de suite…



Aide BOGNO à trouver le coté de chacun des carrés de sa peinture.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la peinture de BOGNO représentée ci-dessus.

1) Calcule l'aire de chacun des carrés

2) Quels sont les carrés pour lesquels il est facile de déterminer la mesure du coté ? Pourquoi ? Donne la mesure du coté pour ces carrés.

3) a) Construis un carré de côté 1cm et mesure le plus précisément possible la diagonale d de ce carré. A quoi doit être égal à d^2?

b) Calcule d² avec la valeur mesurée. Que constates-tu ? (la valeur exacte de d s'appelle la racine carrée de 2).

c) Complète les égalités suivantes :$(\sqrt{2})^2 = \cdots$ $\quad (\sqrt{8})^2 = \cdots$

d) Trouve alors les longueurs exactes des côtés des carrés orange et jaune.

RESOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) Carré bleu : aire $= 16cm^2$; Carré orange : $aire\ = 8cm^2$Carré vert : $aire\ = 4cm^2$
Carré jaune : $aire\ = 2cm^2$

2) Carré bleu : $côté\ = 4cm$; Carré vert : $côté\ = 4cm$

3) a) $d = 1{,}41\ cm\ \ et\ d^2 = 1{,}98$

b) D'après la propriété de Pythagore, $d^2 = 2$ On constate que 1,98 est assez proche de 2.

c) $(\sqrt{2})^2 = 2 \quad (\sqrt{8})^2 = 8$

d) Alors le côté exacte du carré orange est $\sqrt{8}$ et celui du carré jaune est$\sqrt{2}$.

RESUME

$\boldsymbol{R_1}$) On appelle racine carrée d'un nombre positif a , le nombre positif noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a.

Pour tout $a \geq 0, (\sqrt{a}\,)^2 = a.$

Pour tout $a \geq 0, x^2 = a\ signifie\ que\ x = \sqrt{a}\ ou\ x = -\sqrt{a}.$

Dans l'écriture $\sqrt{a}$, le symbole « $\sqrt{.}$ » s'appelle le radical et le nombre $\sqrt{a}$ se lit racine carrée de a. Les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\sqrt{a}$ sont des nombres irrationnels, ils peuvent avoir une partie décimale est illimitée.

$\boldsymbol{R_2}$) Pour tout a, $\sqrt{a^2} = a \; si \; a \geq 0 \; et \; \sqrt{a^2} = -a \; si \; a \leq 0$.

NB : La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. (Dans l'ensemble des nombres réels).

Exemple

$\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$; $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$; $\sqrt{(-6)^2} = 6$; $\sqrt{-5} \; n'existe \; pas$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer : $\sqrt{169}$, $\sqrt{4900}$, $\sqrt{0{,}16}$ et $\sqrt{0{,}0036}$
2) Calcule la longueur de la diagonale d'un carré de côté 3cm. Donne sa mesure en cm arrondie au dixième.

LEÇON 2

Opérations sur les racines carrées

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Dans la vie quotidienne, on utilise les racines carrées résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie dont l'ensemble $\mathbb{Q}$ est incapable d'apporter des solutions : calculer les valeurs exactes de certaines longueurs.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Transformer, effectuer, réduire et écrire simplement des expressions comportant des radicaux

PREREQUIS

Calcule $\sqrt{13^2} = 13.$; $\sqrt{(-13)^2} = 13$

SITUATION PROBLEME

Une table rectangulaire de cérémonie mesure $3m \times 1m$ et Bogno dispose d'une nappe circulaire de rayon 1,5m. Pourra-t-il couvrir entièrement toute la table avec cette nappe ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) Ecris sans radical :$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$; $\sqrt{\frac{9}{25}}$ Que constates-tu?

2) Ecris sans radical : $\sqrt{9} \times \sqrt{25}$; $\sqrt{9 \times 25}$ Que constates-tu ?

3) Calcule $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ et $\sqrt{9 + 16}$ Que constates tu ?

4) Ecris le nombre a^{34} sous forme de puissance de 2 puis écris sans radical le nombre $\sqrt{a^{34}}$

5) Ecris sans radical au dénominateur :$\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{5}{1+\sqrt{5}}$

6) Soit x $(x > 0)$ la longueur de la diagonale de la table définie dans la situation problème. En utilisant la propriété de Pythagore, calcule x puis compare au diamètre de la natte

RESOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3}{5}$; $\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{(\frac{3}{5})^2} = \frac{3}{5}$ On constate que $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}$

2) $\sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$; $\sqrt{9 \times 25} = \sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$. On constate que $\sqrt{9} \times \sqrt{25} = \sqrt{9 \times 25}$

3) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. On constate que $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$.

4) $a^{34} = (a^{17})^2$ $et \sqrt{a^{34}} = \sqrt{(a^{17})^2} = a^{17}$

5) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5}{1+\sqrt{5}} = \frac{5(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}))} = \frac{5(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-5(1-\sqrt{5})}{4}$

6) Soit $d = 2 \times 1{,}5m = 3m$ le diamètre de la nappe. Soit x $(x > 0)$ la longueur de la diagonale de la table. D'après la propriété de Pythagore, on a : $x^2 = 3^2 + 1^2$

$x^2 = 10, soit\ x = \sqrt{10}\ m$.Une valeur approchée de x est égale à $3{,}16m$. Il est clair que $d < x$ donc la nappe ne peut pas couvrir entièrement la table de cérémonie.

RESUME

R_1) Règles de calcul sur les radicaux.

A et B sont des nombres positifs, n un entier relatif non nul on :

- $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B}$
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$
- $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$; $\sqrt{A-B} \neq \sqrt{A} - \sqrt{B}$
- $\sqrt{A^{2n}} = A^n$; $\sqrt{A^{2n+1}} = A^n\sqrt{A}$

R_2) Ecriture d'une expression sans radical au dénominateur.

- $\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{B\sqrt{A}}{\sqrt{A}\times\sqrt{A}} = \frac{B\sqrt{A}}{A}$

  Exemple : $\sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\times\sqrt{5}}{5}$

- En utilisant l'identité remarquable suivante $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$, on déduit que les expressions $(x-y)$ et $(x+y)$sont deux expressions conjuguées.

Exemple : $1 + \sqrt{2}$ est le conjugué de $1 - \sqrt{2}$; $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$ est le conjugué de $2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

- Pour écrire une fraction sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par l'expression conjuguée de son dénominateur.

Exemple : $\frac{1}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})(2\sqrt{5}+5\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{-30} = \frac{-(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})}{30}$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Ecris avec un seul radical : $A = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$ $B = 2\sqrt{45} + \sqrt{5} - \sqrt{20}$
2) Ecris simplement $\sqrt{2^{16} \times 7^{59}}$
3) Rends le dénominateur rationnel : $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$; $\frac{3}{5+2\sqrt{3}}$

Exercice

1) Ecris le plus simplement possible : $A = 3\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{72} - 2\sqrt{128}$

$B = 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$

2) Développe et réduis : $(3 + \sqrt{5})^2$ et $(3 - 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})$

3) Factorise : $x^2 - 5$; $4x^2 - 75$

4) Rends rationnel le dénominateur : $E = \frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $F = \frac{15}{5-3\sqrt{5}}$

LEÇON 3

Ensembles des nombres réels

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Dans la vie quotidienne, on utilise les nombres réels dans les situations de vie pour déterminer les valeurs exactes des dimensions des objets, des meubles et communiquer des informations.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Consolider les acquis sur les ensembles connus.
- Reconnaitre un nombre réel.

PREREQUIS

Complète par les symboles $\in$ ou $\notin$

$3 \in . N$; $0{,}4 \dots \notin . N$; $-3 \in Z$; $0{,}4 \notin Z$; $\frac{2}{3} \notin D$; $\frac{3}{2} \in Q$

SITUATION PROBLEME

La douche de M.Bogno a une forme carrée de superficie 2 m². Son fils de la classe de 4ème curieux, souhaite trouver la longueur du côté de cette douche par calcul. Peut-il trouver aisément cette longueur au vue des ensembles qu'il a étudié en classe de 4ème ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) Trouve deux nombres dans $\mathbb{Q}$ vérifiant les relations : $x^2 = 9$ $\quad x^2 = \frac{4}{9}$
2) Peux-tu trouver dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ un nombre x tel que $x^2 = 2$? Que peut tu dire de l'ensemble $\mathbb{Q}$? Ya-t-il un autre ensemble dans lequel cette équation peut-elle admettre de solutions ?

RESOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) $x^2 = 9$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$; $x^2 = \frac{4}{9}$ équivaut à $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$
2) Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$, on ne peut pas trouver un nombre x vérifiant $x^2 = 2$. On peut dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est insuffisant pour résoudre certains de nos problèmes. On peut ainsi étendre notre raisonnement dans un nouvel ensemble dans lequel l'équation $x^2 =$

3) 2 admettra au moins une solution. Il s'agit de l'ensemble des nombres réels R. Ainsi $x^2 = 2$ équivaut à $x = \sqrt{2}\ ou\ x = -\sqrt{2}$

RESUME

$\boldsymbol{R_1}$) $les\ ensembles\ connus$: $\mathbb{N}; \mathbb{Z}; D\ et\ \mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	D	$\mathbb{Q}$
Ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N} = \{0,1,2| \dots..\}$	Ensemble des nombres entiers relatifs :$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1,0,1,2,\dots\}$	Ensemble des nombres décimaux relatifs (nombres à décimales limitées)	Ensemble des nombres rationnels (qui contient tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a\epsilon\mathbb{Z}\ et\ b \in \mathbb{Z}^*$
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$	Entiers positifs : $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$	Décimaux positifs : D^+	Fraction : une écriture du nombre x est $x = \frac{a}{b}\ ou$ $x = \frac{-a}{b}$
	Entiers négatifs $\mathbb{Z}^-$	Décimaux négatifs : D^-	Fraction équivalentes : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que $ad = bc$
Exemple :$4\ \epsilon\ \mathbb{N}$; $30\ \epsilon\ N$; $0{,}4\epsilon\mathbb{N}$	$4\epsilon\mathbb{Z};\ -3\ \epsilon\ \mathbb{Z}$	$0{,}7\ \epsilon\ D;\ \frac{3}{2}\ \epsilon\ D$	$\frac{2}{3}\epsilon\mathbb{Q};\ 0{,}7\ \epsilon\ \mathbb{Q}$

$\boldsymbol{R_2}$) Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels : Ces nombres sont appelés des nombres irrationnels. La réunion de l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels est noté $\mathbb{R}$ lire ensemble des nombres réels.

Les nombres qui contiennent le symbole $\ll \sqrt{.} \gg$appelé radical sont des nombres irrationnels

NB : π est un nombre irrationnel.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Utilise la calculatrice et donne la troncature des nombres suivants à trois décimales : $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$
2) Trouve x dans chacun des cas suivants : $\frac{x}{5} = \frac{-4}{13}$ $\quad$ $\frac{4}{3x} = \frac{11}{7}$

LEÇON 4

Comparaisons des nombres réels et principes d'encadrements

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Dans la vie quotidienne, on utilise les comparaisons et les encadrements dans les situations de vie pour prévoir les dépenses dans les opérations d'achats.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Comparer deux nombres réels
- Encadrer un nombre par deux nombres décimaux de même décimale
- Encadrer une somme de deux nombres, une différence de deux nombres par deux nombres décimaux de même décimale
- Encadrer un produit de deux nombres, un quotient de deux nombres par deux nombres décimaux de même décimale

PREREQUIS

1) Cite les entiers relatifs compris entre $-3{,}2$ et $7{,}3$
Réponse :$-2,-1,0,1,2,3,4,5,6$ $et 7$

2) Compare $1{,}7$ et $\frac{3}{2}$; 4 $et -15$. Réponse : $1{,}7 > \frac{3}{2}$; $4 > -15$

SITUATION PROBLEME

Au marché de Kai-Kai, le kilogramme de viande de mouton varie entre 2300FCFA et 2750 FCFA, le kilogramme de viande de bœuf entre 1850 FCFA et 2000 FCFA. Pour la fête de la tabaski, BOGNO souhaite ravitailler la maison de 12 kg de viande de mouton et 5kg de viande de bœuf. Entre quelles valeurs est compris le montant de sa dépense ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) a) Complete les égalités suivantes : $(2\sqrt{7})^2 = \ldots\times\ldots = \ldots$ et $(3\sqrt{3})^2 = \ldots\times\ldots = \ldots$
b) Complète par $<$; $>$ ou $=$ $(2\sqrt{7})^2 \ldots (3\sqrt{3})^2$; $2\sqrt{7}\ldots 3\sqrt{3}$

2) Compare $\frac{1}{89}$ et $\frac{1}{181}$ en comparant leurs inverses

3) On donne $a < b$ compare $a+\sqrt{3}$ et $b+\sqrt{3}$; $a-\sqrt{3}$ et $b-\sqrt{3}$; $3{,}7a$ et $3{,}7b$; $-2a$ et $-2b$

4) On donne $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ et $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ Encadre $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

$\sqrt{3}\times\sqrt{2}\ \ et\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5) Soit x le prix d'un Kg de viande de mouton, y le prix d'un Kg de viande de bœuf et d la dépense de M.Bogno Ecris d en fonction de x et y.

6) Encadre x et y puis déduire l'encadrement de d et réponds à la question de la situation problème.

RESOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) $a)\ \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 4\times 7 = 28\ \ et\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9\times 3 = 27$

$b)$ Il est clair que $28 > 27$ donc $(2\sqrt{7})^2 > \left(3\sqrt{3}\right)^2$ donc $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

2) Il est clair que $89 < 181$ donc $\frac{1}{89} > \frac{1}{181}$

3) $a < b$ il vient donc que $a+\sqrt{3} < b+\sqrt{3}$.

$a < b$ Il vient donc que $a-\sqrt{3} < b-\sqrt{3}$.

$a < b$ Il vient donc que $3{,}7\times a < 3{,}7\times b$.

$a < b$ Il vient donc que $-2\times a < -2\times b$.

4) Encadrement :

- $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8\quad et\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ on a : $1{,}7+1{,}4 < \sqrt{3}+\sqrt{2} < 1{,}8+1{,}5$ Soit $3{,}1 < \sqrt{3}+\sqrt{2} < 3{,}3$
- $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ On a :$-1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4$ ensuite $1{,}7-1{,}5 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 1{,}8-1{,}4$. Soit $0{,}2 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 0{,}4$
- $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8\quad et\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ On a : $1{,}7\times 1{,}4 < \sqrt{3}\times\sqrt{2} < 1{,}8\times 1{,}5$ Soit $2{,}38 < \sqrt{3}+\sqrt{2} < 2{,}7$
- $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ On a :$\frac{1}{1{,}5} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1{,}4}$ ensuite$1{,}7\times\frac{1}{1{,}5} < \sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}} < 1{,}8\times\frac{1}{1{,}4}$ Soit $1{,}13 < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 1{,}28$

5) Soit d la dépense de M.Bogno. $d = 12x+5y$

6) Soit x le prix d'un Kg de viande de mouton. On a :$2300 < x < 2750$. Soit y le prix d'un Kg de viande de bœuf : On a :$1850 < x < 2000$.

$d = 12x+5y$; On a : $27600 < 12x < 33000\ et\ 9250 < 5y < 10000$.

Soit $36850 < d < 43000$. La dépense de M.Bogno se trouve entre 36850F et 43000F.

RESUME

$\boldsymbol{R_1}$) A et B sont deux nombres positifs

- $A = B$ signifie que $A-B = 0$
- $A < B$ signifie que $A-B < 0$

- Si $A < B$ alors $\sqrt{A} < \sqrt{B}$
- Si $A < B$ alors $A^2 < B^2$
- $A^2 < B^2$alors $A < B$
- Si $A < B$ et C un nombre réel alors $A + C < B + C$
- Si $A < B$ et C un nombre réel positif alors $A \times C < B \times C$
- Si $A < B$ et C un nombre réel négatif alors $A \times C > B \times C$
- Si $A < B$ alors $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$

Exemple : $\sqrt{2} < \sqrt{3}\ et\ 5 + \sqrt{2} < 5 + \sqrt{3}$ $\sqrt{2} < \sqrt{3}\ et\ 5\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$

$\sqrt{2} < \sqrt{3}\ et\ -5\sqrt{2} > -5\sqrt{3}$; $\sqrt{2} < \sqrt{3}\ et\ \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{R_2}$) $a, b, c, d, x\ et\ y$ désignent des nombres réels positif tels que :

$a < x < b$ et $c < y < d$ on a les encadrements :

- La somme $x + y$: $a + c < x + y < b + d$
- L'opposé $-y$: $-d < -y < -c$
- La différence $x - y$: $a - d < x - y < b - c$
- L'inverse $\frac{1}{y}$: $\frac{1}{d} < \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$
- Le produit $x \times y$: $a \times c < x \times y < b \times d$
- Le quotient $\frac{x}{y}$: $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

Exemple : $3 < x < 5\ \ et\ \ 1{,}4 < y < 2$

$3{,}4 < x + y < 7$; $-2 < -y < -1{,}4$; $4{,}2 < xy < 10$; $0{,}5 < \frac{1}{y} < 0{,}7$;

$1{,}5 < \frac{x}{y} < 3{,}5$

EXERCICE D'APPLICATION

On donne $0{,}5 < x < 3{,}5\ \ et\ \ 2 < y < 4{,}5$ Encadre $x + 2y$; $x - y\ \ et\ \ \frac{2x}{3y}$

LEÇON 5

Intervalles, intersections et réunions de deux intervalles

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Dans la vie quotidienne, des solutions à certains problèmes de la vie sont modélisés grâce à la connaissance qu'on a des intervalles : donner une valeur approchée de la longueur d'un saut en hauteur et communiquer des informations.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Reconnaitre un intervalle.
- Traduire un intervalle sous forme d'inégalité et réciproquement.
- Déterminer la réunion et l'intersection de deux intervalles.

PREREQUIS

1) Qu'est-ce qu'une borne ?
2) Qu'est-ce qu'un intervalle ? donne un exemple.

Réponse :

Borne est une marque de séparation. Un intervalle est un ensemble des nombres compris entre deux nombres. Exemple intervalle de 2 à 10.

SITUATION PROBLEME

Dans une rubrique « insolite et exploits » le livre des records 1990 nous apprend qu'en 1981, On a fait sauter à 32,23dm le bouchon d'une bouteille de champagne.

Rapports des juges.

Un envoyé spécial sur place dévoile pour nous les rapports écrits des juges A et B qui ont mesuré séparément la longueur x du saut.

Juge A : $x \in [32{,}20; 32{,}26]$.

Juge B : $32{,}21 \leq x \leq 32{,}25$

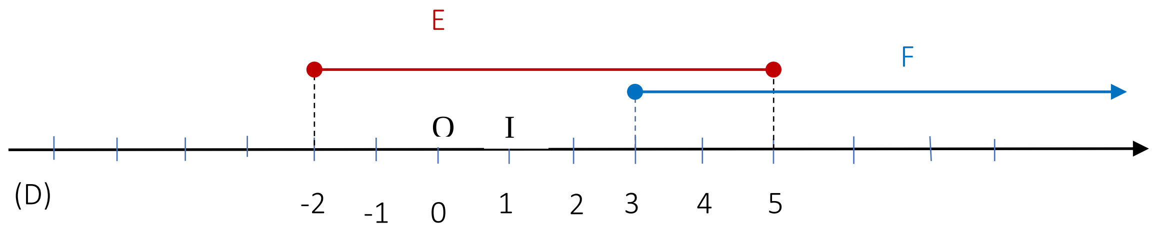
BOGNO est un nouveau élève de 3eme.Il se demande dans quel langage chacun des juges a fait son rapport et lequel des juges a été le plus précis ? Aide-le.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Trace une droite (D)graduée de repère(O, I).

1) Marque sur(D) en rouge E : l'ensemble des points dont l'abscisse se trouve entre -2 *et* 5
2) Marque sur(D) en bleu F : l'ensemble des points dont l'abscisse est supérieur ou égal à 3
3) Peux- tu traduire par une inégalité l'ensemble des points dont l'abscisse vérifie E et F à la fois.
4) Traduis par une inégalité l'ensemble des points dont l'abscisse vérifie E ou F.
5) Traduis ce que chacun des juges a dit dans le langage de l'autre « dans la situation problème ».
6) Calcule $\frac{32{,}20+32{,}26}{2}$ *et* $\frac{32{,}21+32{,}25}{2}$. Lequel des deux juges est plus précis ?

Solution de l'activité d'apprentissage



1) *et* **2**) *voir la représentation ci dessus.*

3) L'ensemble des points dont l'abscisse vérifie E et F à la fois est la portion comprise entre 2 et 5. Donc si x est un nombre de cette portion, on a $2 \leq x \leq 5$

4) L'ensemble des points dont l'abscisse vérifie E ou F correspond à la portion allant de(-2) à plus infinie. Donc si x est un nombre de cette portion, on a $x \geq -2$

5) $x \in [32{,}20; 32{,}26]$ équivaut à dire que $32{,}20 \leq x \leq 32{,}26$
$32{,}21 \leq x \leq 32{,}25$ Equivaut à dire que $x \in [32{,}21; 32{,}25]$
6) $\frac{32{,}20+32{,}26}{2} = 32{,}23$ *et* $\frac{32{,}21+32{,}25}{2} = 32{,}23$ les deux juges sont précis.

RESUME

$\boldsymbol{R_1}$) Intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux valeurs a *et* b appelés bornes de cet intervalle.

a et b Pouvant être moins l'infini(←) ou plus l'infini(→). un Intervalle s'écrit avec les crochets.

Exemple $[1; 2]$, $]-1; \rightarrow[$

R_2) Notation et représentation

Intervalle	bornes	x appartient à cet intervalle signifie que…	Représentation sur la droite des nombres réels
$[a; b]$	a et b compris	$x \in [a; b]$ ou $a \leq x \leq b$	

L'enseignant complètera le tableau avec les élèves pour les intervalles

$\left[a\,;b\right[$, $\left]a\,;b\right]$, $\left]a\,;b\right[$, $]\leftarrow; c]$, $]\leftarrow; c[$, $[c; \rightarrow[$ et $]c; \rightarrow[$

NB : Pour les intervalles de type $[a; b]$ $\left[a\,;b\right[$, $\left]a\,;b\right]$ et $\left]a\,;b\right[$, l'amplitude est égale à : $b - a$ et le centre est égal à : $\frac{a+b}{2}$

R_3) Intersection et réunion de deux intervalles

E et F Sont des intervalles de R.

- L'intersection de E et F est constitué des nombres réels qui appartiennent à la fois à E et à F. On note $E \cap F$ se lit E inter F.
- La réunion de E et F est constitué des nombres réels qui appartiennent à E ou à F. On note $E \cup F$ se lit E union F.

Exemple : On donne $E = [-2; 5]$ et $F =]0; 8]$ On a $E \cap F =]0; 5]$ et $E \cup F = [-2; 8]$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Traduis sous forme d'intervalles : $x > -2$; $x \leq 0$; $-3,5 \leq x < 1$
2) Traduis par une inégalité : $x \in [-1; 4[$; $x \in]\leftarrow; 2,5[$
3) Représente sur une même droite des nombres réels les intervalles I et J. Puis détermine leur intersection et leur réunion. On donne $I = [-4; 1[$ et $J =]-6; 0]$

CHAPITRE4

CALCUL LITTERAL

INTERET

L'intérêt de ce chapitre réside dans le fait que l'élève sera capable de calculer la valeur numérique des expressions littérales particulières (Périmètres, Aires, Volumes …). Elle va développer en l'élève le sens de l'ordre de la méthode de la rigueur et de la précision.

MOTIVATION

Dans la vie courante, nous sommes souvent confrontés aux problèmes de lecture d'écritures et d'interprétation des textes comportant les chiffres et des lettres tels que le taux de variation du PIB, taux des malades du VIH ? Taux de chômage ?

LEÇON 1

Expression Littérale

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Dans la vie courante, nous sommes souvent confrontés aux problèmes de donner :

- Le code secret de notre boite email, de la carte bancaire…
- Le matricule d'un élève, d'un fonctionnaire…
- Déverrouiller un téléphone, un ordinateur. Pour cela nous sommes appelées à utiliser les chiffres et les nombres.

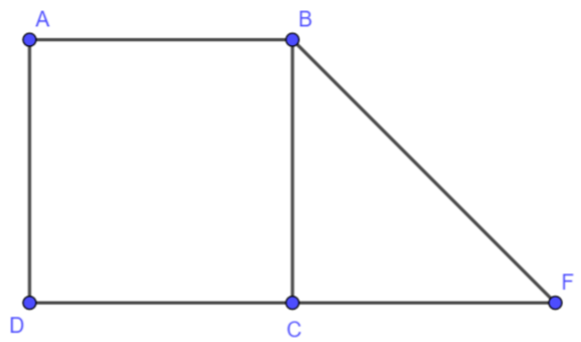
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Définir une expression littérale.
- Savoir calculer la valeur numérique d'une expression littérale.

PRÉREQUIS

- Donner les formules géométriques de quelques figures de base (carré, rectangle, triangle, trapèze, cercle…)
- Calculer le périmètre, la surface et le volume de ces figures géométries de base connaissant leurs dimensions

SITUATION PROBLÈME



Monsieur Noah veut carreler sa maison, mais il trouve des difficultés à donner la valeur exacte de la surface de sa douche trapézoïdale ayant des dimensions suivantes : Petite base x, de Grande base dépassant la petite base de 4 et d'une hauteur x. Aide Monsieur Noah à déterminer la superficie de la douche à carreler si $x = 3$

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

La figure ci-contre est formée d'un carré $ABCD$ et d'un triangle BCF

On pose $AB = AD = x \; et \; CF = 4$

1) Exprime en fonction de x l'aire A_1 du carré $ABCD$ et l'aire A_2 du triangle BCF, sachant que $A_1 = AB \times AD$ et $A_2 = \frac{BC \times CF}{2} =$
2)
   a. Déterminer l'aire totale A_T de la figure en fonction de x sachant que

   $A_T = A_1 + A_2$

   b. Comment appelle-t-on les expressions $A_1, \; A_2 \; et \; A_T$
3) Calculer la valeur numérique de l'aire totale A_T pour $x = 3$

Résolution de l'activité d'apprentissage

1) Exprimons en fonction de x l'aire $A1$ du carré $ABCD$ On sait que $A_1 = AB \times AD$

   AN: $A_1 = x \times x = x^2$ $\quad$ $A_1 = x^2$

   Et que $A_2 = \frac{BC \times CF}{2}$ $\quad$ $AN : A_2 = \frac{x \times 4}{2} = 2x$ $\quad$ $A_2 = 2x.$

2)

a. Déterminons l'aire totale A_T On sait que $A_T = A_1 + A_2$

$AN :\ \ A_T = x^2 + 2x$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{A_T = x^2 + 2x}$

b. On appelle les expressions $A_1\ et\ A_2$ et A_T les expressions littérales

3) Calcul de la valeur numérique de l'aire totale A_T pour x = 3

On sait que $\qquad A_T = x^2 + 2x$

$$A_T = 3^2 + 2(3)$$

$$A_T = 15$$

Déterminons en fonction de x l'aire de la surface du salon à carreler

On sait que la surface de La douche est : $S = \frac{(GB+PB)\times h}{2}$

D'où la Grande Base $GB = x + 4$, la Petite Base $PB = x$ et sa hauteur $h = x$

D'après la formule on a : $S = \frac{(x+4+x)x}{2} = \frac{(2x+4)x}{2} = x^2 + 2x$

$$\boldsymbol{S = x^2 + 2x}$$

Calcule la superficie de la douche de Monsieur Noah si x = 3

$S = (3)^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$

$S = 15m^2$ $\quad$ La superficie de la douche de Monsieur Noah est de $15m$

RESUME

DEFINITION

Une expression littérale est une expression qui contient une ou plusieurs lettres et parfois des nombres. Ces lettres sont appelées Variables

Exemples

- $A = x^2 + 2x$ est une expression littérale de variable x.
- $B = 2x + 7y - 5$ est une expression litterale de variables $x\ et\ y$.

LA VALEUR NUMERIQUE D'UNE EXPRESSION LITTERALE

C'est la valeur obtenue lorsqu'on remplace toutes ses variables (lettres) par des nombres donnés

Exemple

Calcule la valeur numérique des expressions suivantes

$A = x^2 + 2x$ $B = 2x + 7y - 5$

Solution

- Calcule de la valeur numérique de A pour x = 3

  $A = x^2 + 2x$ $A = (3)^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$

- Calcule valeur numérique de B pour x = 25 et y = 9

  $B = 2x + 7y - 5 = 2(25) + 7(9) - 5$ $B = 50 + 45 – 5$

  $B = 90; \boldsymbol{B} = \mathbf{9}$

EXERCICES D'APPLICATION

On considère les expressions littérales suivantes :

$A = 3x^2 - 2x + 3$; $B = 5x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2$; $C = 7y^2 - 3y + 4$

Calcule la valeur numérique de A, B, C pour $x = 2 \; et \; y = -5$

LEÇON 2

Opérations sur les expressions littérales

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

- Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel à la notion de factorisation
- Communiquer des informations comportant des nombres

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Définir monômes, polynômes ;
- Identifier un monôme dans une expression littérale ;
- Développer, réduire et ordonner une expression littérale ;
- Ranger un polynôme dans un ordre donné.

PREREQUIS

1) Soit des expressions littérales suivantes, identifiez chaque élément de ces expressions.
   - $4x^5$ est composé de 4 un chiffre, x une lettre et 5 une puissance de x
   - $y + 1$ est compose de y une lettre et 1 un chiffre
   - 8 est composé de 8 un chiffre
2) Rappel de la règle de distributivité

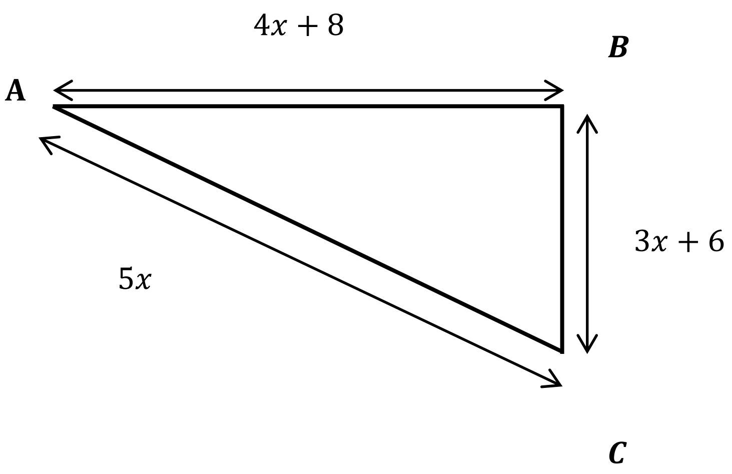
   La règle de distributivité

   - ✓ $\boldsymbol{k(a+b) = ka + kb}$
   - ✓ $\boldsymbol{k(a-b) = ka - kb}$
3) Comment ranger les nombres suivant l'ordre demandé

SITUATION PROBLEME

Alain veut fabriquer une table triangulaire ABC comme l'indique la figure ci-dessous. Ne disposant pas de mètre ruban, il se sert de 3 morceaux de bois de dimensions respectives $10cm, 8cm\ et\ 6cm$. Puis d'un lacet de longueur inconnue x ; Apres les mesures, il trouve : $AB = 4x + 8, BC = 3x + 6\ et\ \ AC = 5x + 10$

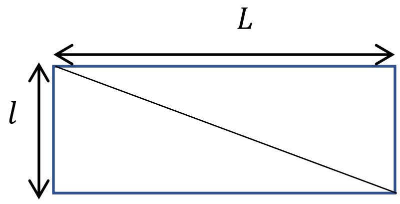
Son fils qui lui assiste dit : « Quel que soit la longueur du lacet, le triangle ABC est rectangle. » Prouve que l'affirmation de son fils est toujours vraie si $x = 10$



ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Le rectangle ci-contre a des dimensions ainsi indiquées. x est un nombre positif. Les côtes AB et BC sont représentés respectivement par des expressions littérales suivantes la largeur $l = 2x + 1$ et la longueur $L = 2x(x + 1)$

1) Cite les expressions littérales qui constituent $L = 2x(x + 1)$ et $l = 2x + 1$
   - Comment peut-on encore appeler ces expressions ?
   - Donne un nom à l'expression de la longueur L et de la largeur l
2) Calcule le demi-périmètre de ce rectangle et ordonne l'expression du demi-périmètre suivant l'ordre croissant de la variable réelle
   - Déduis le degré de l'expression du demi-périmètre.
3) Peux répondre à la question de la situation problème ?



Résolution de l'activité d'apprentissage :

1) Citons les expressions littérales qui constituent :
   - L'expression $L = 2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$ est constituée de $2x^2$ et de $2x$
   - L'expression $l = 2x + 1$ est constituée de $2x$ et de 1

   On appelle les expressions $2x^2$, $2x$ et 1 des monômes.

Les expressions de la longueur et de la largeur s'appellent les polynômes

2) Calcule du demi-périmètre de ce rectangle ;

On sait que DP= $L + l$ **AN** : $DP = 2x(x + 1) + 2x + 1$

$$= 2x^2 + 2x + 2x + 1$$

$$DP = 2x^2 + 4x + 1$$

- Ordonnons l'expression du demi-périmètre suivant l'ordre croissant de la variable réelle $DP = 1 + 4x + 2x^2$

Déduction : le degré de l'expression du demi-périmètre. C'est 2

3) Prouvons que l'affirmation de son fils est toujours vraie. Nous devons montrer que le carré du plus long coté est égal à la somme des carrés des deux autres cotés

On a : $AC = (5x + 10)^2$

$$= (5x + 10)(5x + 10)$$

$$= (5x)^2 + 2(5x)(10) + (10)^2$$

$$AC = 25x^2 + 100x + 100$$

$Et : AB^2 + BC^2 = (4x + 8)^2 + (3x + 6)^2$

$$= (4x + 8)(4x + 8) + (3x + 6)(3x + 6)$$

$$= (4x)^2 + 2(4x)(8) + (8)^2 + (3x)2 + 2(3x)(6) + (6)^2$$

$$= 16x^2 + 64x + 64 + 9x^2 + 36x + 36$$

$$AB^2 + BC^2 = 25x^2 + 100x + 100$$

Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire que le triangle ABC a toujours une forme triangulaire rectangle. D'où l'affirmation de son fils est toujours vraie

RESUME

DEFINITION 1

Un monôme : un monôme de la variable x est une expression littérale de la forme ax^n , où a est un nombre coefficient ou constance, x est appelé inconnue et n est un entier naturel appelé degré du monôme.

Exemples

$-5x^3$ est un monôme de coefficient -5, de variable x et de degré 3

8 est un monôme de coefficient 8, de variable x et de degré 0.   0 est un monôme de coefficient 0, de variable x et de degré 0.

Un polynôme est une somme algébrique de plusieurs monômes de même variable. La variable peut être n'importe quelle lettre de l'alphabet. Le degré d'un polynôme est celui de son monôme de plus haut degré.

Exemple

$P = -6t^2 + t + 3$ est un polynôme de variable t et de degré 2. On note : $d°t = 2$

DEFINITION 2

Développer un polynôme ou une expression c'est l'écrire sans parenthèse, c'est-à-dire l'écrire sous la forme d'une somme algébrique d'autres expressions plus simples (monômes).

Exemple

Développe les expressions suivantes :

$A(x) = 2x(x + 1)$; $B(x) = (\frac{1}{2}x + 3)(2x + 4)$

Solution

Développons les expressions suivantes

$A(x) = 2x(x + 1)$ $B(x) = x + 3(2x + 4)$

$A(x) = 2x^2 + 2x$ $B(x) = x^2 + 2x + 6x + 12$

Pour développer une expression littérale, on peut utiliser :

- la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction
  - $k(a + b) = ka + kb$
  - $k(a - b) = ka - kb$
  - $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
  - $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple

Développe les expressions littérales suivantes

a. $2(x + 1) = 2x + 2$

b. $3(x - 2) = 3x - 6$

c. $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

d. $(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$

➢ Les identités remarquables :

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Exemple

Développe les expressions littérales suivantes

$i. (2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 3 + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$ii. (x - 5) = (x)^2 - 2 \times (x) \times (5) + (5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$iii. (4x - 3)(4x + 3) = 16x^2 - 9$

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec moins de termes. Pour cela, on regroupe les termes semblables afin d'effectuer les opérations appropriées visant à réduire les différentes expressions.

Exemple

Réduis l'expression suivante : $A(x) = 2xy + 3y^2 + x^2 + 4xy$

Solution

Réduisons l'expression $A\ (x)$ suivante

$$\boldsymbol{A(x) = 6xy + 3y^2 + x^2.}$$

Ordonner un polynôme revient à le ranger du monôme le plus haut degré à celui du plus petit degré (suivant les puissances décroissantes) ou alors du monôme au plus petit degré à celui au plus haut degré (suivant les puissances croissantes).

Remarque 1

Quand on a un (+) devant la parenthèse, on supprime les parenthèses sans rien faire d'autre.

Quand on a un (-) devant la parenthèse, on supprime les parenthèses mais en changeant tous les signes des monômes qui se trouvent à l'intérieur des parenthèses en leur opposé.

Exemple

$-(2x^2 - x + 1) = -2x^2 + x - 1$

$+(1 - b + 3b) = 1 - b + 3b$

Remarque 2

Dans un développement d'une expression littérale, l'ordre de priorité est le suivant :

- L'élévation à une puissance ;
- Les opérations entre parenthèses ;
- La multiplication ou la division ;
- L'addition ou la soustraction.

EXERCICES D'APPLICATION

Soit l'expression littérale $P(x) = (x - 1)^2 + (x - 1)(x + 2)$

1. Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant la puissance décroissante de x

2. Donne le degré de P

LEÇON 3

Factorisation

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

- Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel à la notion de factorisation
- Communiquer des informations comportant des nombres

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Ecrire une expression littérale en produits de facteurs du premier degré à l'aide d'un facteur commun, d'une identité remarquable ou des deux éléments.

PRE-REQUIS

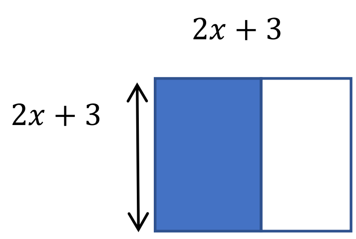
- Factoriser les expressions suivantes $\boldsymbol{2x^2+4}$, $\boldsymbol{x^2+x}$
- Initier les techniques pour écrire certaines expressions littérales en produit de facteurs du premier degré

SITUATION PROBLEME

François possède un terrain de forme carré de côté $(2x + 3)$. L'aire de la partie non hachurée est $(4x + 7)(2x + 3)$. Il veut vendre la partie hachurée pour cela, il décide de connaitre l'aire de cette partie.

Il trouve que l'aire de la partie hachurée est :

$A_1\,(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x + 7)(2x + 3).$

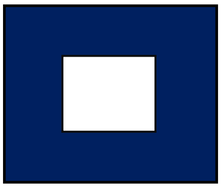


Mais l'acheteur arrive et trouve plutôt que :

$A_1(x) = -2(2x + 3)(x + 2)$ *ou* $A_1(x) = -4x^2 - 14x - 12$

Les deux ont-ils raisons ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE



On considère la figure ci-dessous où ABCD est un carré de côté x et EFGH le petit carré de côté $x-2$.

a) Ecrire l'aire A_1 de ABCD et l'aire A_2de EFGH en fonction de x.

b) On note A_3 l'aire de la partie hachurée et on note $A_3 = A_1 - 16$. Ecris A_3 sous forme de produits de facteurs premiers

c) Peux-tu apporter les éléments de réponse à la situation problème ?

Résolution de l'activité d'apprentissage

a) Ecrivons l'aireA_1 de ABCD et de l'aire A_2 de EFGH en fonction de x $A_1 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2$; $A_2 = (\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}) = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}$ $A_2 = x^2 - 4x + 4$

b) Ecrivons l'aire A_3de produit de facteur premier $A_3 = A_1 - \mathbf{16} = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{16} = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}^2$;

$A_3 = (x-4)(x+4)$ $A_3 = (x-4)(x+4)$

c) Vérifions si François et l'acheteur ont raison

$A_1(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x+7)(2x+3) = (2x+3)^2 - (4x+7)(2x+3) = (2x+3)(2x+3) - (4x+7)(2x+7) = (2x+3)((2x+3) - (4x+7)) = (2x+3)(2x+3-4x-7) = (2x+3)(-2x-4)$

$A_1(x) = -2(2x+3)(x+2)$ D'où les deux ont raison.

RESUME

DEFINITION

Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs. b) Méthodes de factorisation Utilisation des identités remarquables.

On a: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple

Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2 + 4x + 4$ $B = x^2 - 6x + 9$

$C = x^2 - 121$ $D = (x-1)^2 - 25$

Solution

Factorisons les expressions suivantes

A = $x^2 + 4x + 4$

$A = (x)^2 + 2(x)(2) + (2)^2$

A = $(x + 2)^2$

A = $(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})$

$C = x^2 - 121$

$C = x^2 - (11)^2$

C= $(\boldsymbol{x} - \mathbf{11})(\boldsymbol{x} + \mathbf{11})$

$B = x^2 - 6x + 9$

$B = (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2$

B = $(x - 3)^2$

B= $(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})$

$D = (x - 1)^2 - 25$

$D = (x - 1)^2 - (5)^2$

D= $(x - 1 - 5)(x - 1 + 5)$

D= $(\boldsymbol{x} - \mathbf{6})(\boldsymbol{x} - \mathbf{4})$

UTILISATION DES FACTEURS COMMUNS

Exemple

Factoriser les expressions suivantes : $A = 4x + 8$; $B = 2x^2 + x$;

$C = (x + 5)(-x + 2) - (x + 3)(x + 5)$

Solution

Factorisons les expressions suivantes

$A = 4x + 8$

$A = 4 \times x + 4 \times 2$

$A = 4(x + 2)$

$B = 2x + x$

$B = 2 \times x \times x + x$

$B = x(2x + 1)$

$C = (x + 5)(-x + 2) - (x + 3)(x + 5)$

$C = (x + 5)[(-x + 2) - (x + 3)]$

$C = (x + 5)(-x + 2 - x - 3)$

$C = (x + 5)(-2x - 1)$

UTILISATION DU FACTEUR COMMUN ET DE L'IDENTITE REMARQUABLE

Exemple

Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2 + 10x + 25 - (x + 5)(2x - 3);$ $B = 4x^2 - 9 + (2x + 3)2^2$

Solution

Factorisons les expressions suivantes

$A = x^2 + 10x + 25 - (x+5)(2x-3)$

$A = x^2 + 2(x)(5) + 5 - (x+5)(2x-3)$

$A = (x+5)(x+5) - (x+5)(2x-3)$

$A = (x+5)[(x+5) - (2x-3)]$

$A = (x+5)(x+5-2x+3)$

$A = (x+5)(-x+8)$

$B = (2x)^2 - (3)^2 + (2x+3)^2$

$B = (2x-3)(2x+3) + (2x+3)(2x+3)$

$B = (2x+3)[(2x-3) + (2x+3)]$

$B = (2x+3)(2x-3+2x+3)$

$B = (2x+3)(4x)$

$B = 4x(2x+3)$

LEÇON 4

Fractions rationnelles

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

- Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à la situation de vie faisant appel à la notion de factorisation
- Communiquer des informations comportant des nombres

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Déterminer les conditions d'existence d'une fraction rationnelle ;
- Simplifier une fraction.

PRE-REQUIS

- Une division est une opération de la forme$\frac{a}{b}$ $ou\ a \in \mathbb{Z}\ et\ b \in \mathbb{Z}$
- Reconnaitre que le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$est toujours diffèrent de 0 ($b \neq 0$)
- $ab = 0$ équivaut à $a = 0\ ou\ b = 0$
- $ab \neq 0$ équivaut à $a \neq 0\ ou\ b \neq 0$
- $\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}$ avec $k \neq 0$

SITUATION PROBLEME

L'oncle de Yannick avant sa naissance, avait acheté un terrain de forme carré de côté x mètre. Lors de l'arrangement, il avait offert $25m2$ à son voisin. Aujourd'hui ce terrain est équivalent à un terrain rectangulaire de largeur $x - 5\ mètres$. Aide Yannick à déterminer l'expression de la longueur de ce terrain aujourd'hui si le côté et la largeur ont un même diviseur commun.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On donne : $f(x) = 2x(x - 3) - (x - 3)(x + 2)$;

$$g(x) = x^2 - 9$$

a) Ecris la fraction $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Détermine les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

c) Calcule les valeurs numériques de $K\ pour\ x = 3\ et\ x = -3$.

d) A quelle condition de x peut-on calculer la valeur numérique de K ?

e) Ecris K avec un dénominateur et un numérateur sous forme factorisée.

f) Identifie le facteur commun du numérateur et du dénominateur, puis écris K sans ce facteur.

g) Peux-tu aider Yannick à déterminer l'expression de la longueur du terrain aujourd'hui défini dans la situation problème

Résolution de l'activité d'apprentissage

a) Ecrivons la fraction $K(x)$. $K(x) = \frac{2x(x-3)-(x-3)(x+2)}{x^2-9}$

b) Déterminons les valeurs de x qui annulent le dénominateur

K (x) = 0 $donc$ $x^2 - 9 = 0$ équivaut à $x = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

c) Calculons les valeurs numériques de K

Pour x=3, $K = \frac{0}{0}$ (Impossible)

Pour $x = -3, K = \frac{48}{0}$(Impossible)

d) On peut dont calculer la valeur de numérique de K si $x \neq 3$ et $x \neq -3$

e) Ecrivons $K(x)$ avec un dénominateur et numérateur sous forme factorisée

$$K(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}$$

f) Le facteur commun est $\boldsymbol{x - 3}$;

$$K(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

g) Aidons Yannick à déterminer l'expression de la longueur de ce terrain aujourd'hui.

L'aire du terrain de Yannick

Avant la naissance : A= $(C \times C) - 25$ donc A= x^2–25

Aujourd'hui : A= $L \times l = x^2$–25 Or $l = (x - 5)$ $L = \frac{x^2-25}{x-5} = x + 5$

Donc $L = x + 5\ mètres$

RESUME

DEFINITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Exemple

$R(x) = \frac{x^2-2x+3}{(1-x)(2+x)}$ $\quad Q(a) = \frac{a+1}{a}$

CONDITION D'EXISTENCE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Comme toute fraction, l'écriture d'une fraction rationnelle n'est possible que lorsque son dénominateur est différent de zéro : c'est la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

Pour déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique d'une fraction rationnelle, on peut d'abord et si possible factoriser le dénominateur et ensuite utiliser la propriété $ab \neq 0$, signifie que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Exemple

Donne la condition d'existence de la fraction rationnelle suivante $A(x) = \frac{x^2-x+2}{3x-1}$

$A(x)$ existe si et seulement si $3x - 1 \neq 0$ équivaut à $3x \neq 1$ soit $x \neq \frac{1}{3}$

SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

i. Simplifier une fraction rationnelle c'est la rendre sous la forme la plus simple possible. Pour cela, On factorise le numérateur et le dénominateur si cela est nécessaire ;
ii. On détermine la condition d'existence ;
iii. On élimine les facteurs communs qui apparaissent au numérateur et au dénominateur ;
iv. Ecrire l'expression simplifiée précédée de la condition d'existence.

Exemple

Simplifie la fraction rationnelle suivante $B(x) = \frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x+2)-2(x-3)(x-1)}$

a. Factorise :
   - Le numérateur $x^2 - 6x + 9 = (x)^2 - 2 \times (x) \times (3) + (3)^2$
     - $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)2$

- Le dénominateur $(x-3)(x+2)-2(x-3)(x-1)=(x-3)[(x-3)-2(x-1)=(x-3)(x-3-2x+2)$

$$(x-3)(x+2)-2(x-3)(x-1)=-(x-3)(x+1)$$

b. La condition d'existence de $B(x)$ $B(x)$ existe si et seulement si

$-(x-3)(x+1)\neq 0$ *Equivaut* à $-(x-3)\neq 0$ *et* $(x+1)\neq 0$

Ou encore $-x+3\neq 0$ *et* $x+1\neq 0$

Soit $x\neq -3$ *et* $x\neq -1$

c. Le facteur commun au numérateur et au dénominateur est $(\mathbf{x-3})$

$$B(x)=\frac{(x-3)(x-3)}{-(x-3)(x+1)}$$

d. numérique pour $x=\sqrt{3}$ Ecris l'expression simplifiée de $B(x)$ $B(x)=\frac{-x+3}{x+1}$

EXERCICE D'APPLICATION

On pose $P(x)=(2x+3)(2x+7)+4x^2-9$ *et* $Q(x)=4x^2-9$

1. Développe, réduis et ordonne $P(x)$suivant les puissances croissantes de x
2. En déduis le degré du polynôme de $P(x)$
3. Factorise $Q(x)$ et en déduis une factorisation de $P(x)$
4. On pose $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$
5. Donne la condition d'existence de $R(x)$
6. Simplifie $R(x)$ puis détermine sa valeur numérique pour $x=\sqrt{3}$

CHAPITRE 5

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS ℝ

INTÉRÊT

Les équations et les inéquations permettent de retrouver des valeurs inconnues dans une situation de vie donnée.

MOTIVATION

Dans la vie, nous sommes tous les jours confrontés à de nombreux problèmes qui sont souvent modélisés par les équations et les inéquations du 1er degré dans IR permettant leurs résolutions.

LEÇON 1

Equations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Durée : 100 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR

- ▪ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du type: $\boldsymbol{ax + b = cx + d}$
- ▪ Résoudre les équations du type $(\boldsymbol{ax + b})(\boldsymbol{cx + d}) = \mathbf{0}$
- ▪ Résoudre les problèmes de vie conduisant aux équations de premier degré dans IR.

PRE REQUIS

Résous dans IR les équations suivantes :
a) $\boldsymbol{x + 3 = 0}$
b) $\boldsymbol{x - 2 = 5}$
c) $\boldsymbol{2x = 6}$
d) $\boldsymbol{3x + 5 = -4}$

Solution :

a) $x + 3 = 0$ *équivaut* à $x = -3$

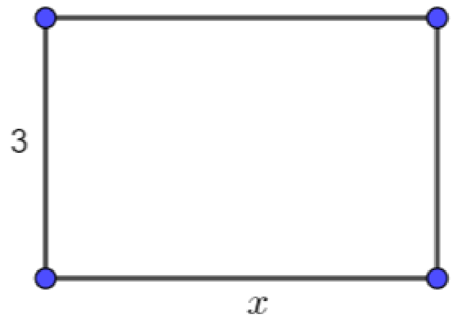
b) $x - 2 = 5$ *équivaut* à $x = 5 + 2$

équivaut à $x = 7$

SITUATION PROBLEME

Le périmètre d'un champ rectangulaire de largeur **3m** est égal à son aire augmentée de **1m**. Trouver la longueur de ce champ.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



1) Le champ de monsieur NTOUMBA a une forme rectangulaire de longueur $\boldsymbol{x}$ et de largeur **3m** comme l'indique le schéma ci-contre :
   a. Exprime le périmètre et l'aire de ce champ en fonction de $\boldsymbol{x}$.
   b. Traduis à l'aide d'une égalité dépendant de $\boldsymbol{x}$, la phrase suivante : le périmètre est égal l'aire augmentée de **1.**
   c. Détermine la valeur de $\boldsymbol{x}$ puis en déduire la longueur du champ.

   Répondez à la question de la situation problème.

2) En utilisant le **produit nul (** $\boldsymbol{a \times b = 0}$ **é**$\boldsymbol{quivaut}$ à $\boldsymbol{a = 0\ ou\ b = 0}$ **)**, résous $\boldsymbol{(2x-6)(x+2) = 0}$**.**

Solution

1- a) $P = (x+3) \times 2 = 2x+6 \qquad A = x \times 3 = 3x$

b) $\boldsymbol{P = A + 1}$ $équivaut$ à $2x + 6 = 3x + 1$

c) On a $2x + 6 = 3x + 1$ $équivaut$ à $2x - 3x = 1 - 6$

$équivaut$ à $-x = -5$

$équivaut$ à $x = \dfrac{-5}{-1}$

$équivaut$ à $x = 5.$

La longueur de ce champ est de **5m**.

2- $\underbrace{(2x-6)}_{a}\underbrace{(x+2)}_{b} = 0$ $équivaut$ à $(2x-6) = 0\ ou\ (x+2) = 0$

$équivaut$ à $2x = 6\ ou\ x = -2$

$équivaut$ à $x = \frac{6}{3}\ ou\ x = -2$

$équivaut$ à $x = 2\ ou\ x = -2$

RESUME

Définition

- Une équation de premier degré dans ***IR*** est une égalité entre deux polynômes du premier degré une seule inconnue ou alors entre un polynôme de premier degré et 0.
- Résoudre une équation de premier degré dans **IR** revient déterminer les valeurs pouvant être prises par l'inconnu et les regrouper dans un ensemble appelé **ensemble solution** et généralement noté ***S***.
- Dans une équation, lorsqu'un terme change de membre (**traverse l'égalité**), alors le signe de ce terme change aussi : $\boldsymbol{x}$ + $\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{équivaut}$ à $\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ – $\boldsymbol{a}$. On a $S = \{\boldsymbol{b-a}\}$

Exemple

Résous dans IR $\boldsymbol{x}$ + 4= **7** ; $\boldsymbol{x-3}$ = **10**

Solution

$x + 4 = 7$ $équivaut$ à $x = 7 - 4$

$équivautà$ $x = 3.$ $\qquad \boldsymbol{S = \{3\}}$.

$x - 3 = 10$ $équivaut$ à $x = 10 + 3$

$équivautà$ $x = 13.$ $\qquad \boldsymbol{S = \{13\}}$

- Pour deux réels donnés $\boldsymbol{a\ et\ b}$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$; l'équation $\boldsymbol{ax}$ + $\boldsymbol{b}$ = **0 équivaut à** $= \boldsymbol{\frac{-b}{a}}$**.**

On a $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{\frac{-b}{a}}\right\}$**.**

Exemple

Résous dans IR $\boldsymbol{-x-3}$ = **0** ; $\boldsymbol{4x}$ + **5** = **2**

<u>**Solution**</u> **:** * $-x - 3 = 0$ $équivaut$ à $-x = 3$

$$équivautà \ \ x=\frac{3}{-1}=-3 \qquad \boldsymbol{S}=\{-\mathbf{3}\}$$

$$* \ 4x+5=2 \ équivaut \text{ à } \ 4x=2-5$$
$$équivautà \ \ 4x=-3$$
$$équivaut \text{ à } x=\frac{-3}{4} \qquad \boldsymbol{S}=\left\{\frac{-\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right\}$$

EQUATION DU TYPE $\boldsymbol{ax+b=cx+d}$

Pour résoudre une telle équation,

- On regroupe d'abord les termes contenant l'inconnue d'un côté de l'égalité (de préférence du côté gauche) et les termes constants (sans inconnue) dans l'autre côté de l'égalité en prenant soin de changer le signe des termes qui traversent l'égalité.
- On réduit ensuite l'équation obtenue, jusqu'à obtenir une équation de la forme $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$. Ainsi, $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ $\ \ et\ on\ a\ \ \boldsymbol{S}=\left\{\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}\right\}$.

Exemple

Résous dans IR 2$\boldsymbol{x}$ **− 4** = **4**$\boldsymbol{x}$ **+ 7** ; **-6**$\boldsymbol{x}$ **− 9** =$\boldsymbol{x}$ – **6**

Solution

$$2x-4=4x+7 \ équivaut \text{ à } \ 2x-4x=7+4$$
$$équivautà \ -2x=11$$
$$équivaut \text{ à } x=\frac{11}{-2}=\frac{-11}{2} \qquad \boldsymbol{S}=\left\{\frac{-\mathbf{11}}{\mathbf{2}}\right\}$$
$$-6x-9=x-6 \ équivaut \text{ à } \ -6x-x=-6+9$$
$$équivautà \ -7x=3$$
$$équivaut \text{ à } x=\frac{3}{-7}=\frac{-3}{7} \qquad \boldsymbol{S}=\left\{\frac{-\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\right\}$$

Remarque

Lors de la résolution, si on obtient

- **0=0**, on conclut que le système admet une infinité de solution : $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{IR}$
- **0=B** ($\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$)**,** on conclut que le système n'admet pas de solution :
  $\boldsymbol{S}=\{\}$ ou $\boldsymbol{S}=\emptyset$ **(ensemble vide).**

Exemple

Résous dans IR $\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{6}}{\mathbf{2}}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}$; $-\boldsymbol{x}+\mathbf{4}=\mathbf{3}-\boldsymbol{x}$.

Solution

$$\frac{4x-6}{2}=2x-3 \ équivaut \text{ à } 4x-6=2(2x-3)$$
$$équivaut \text{ à } 4x-6=4x-6$$
$$équivaut \text{ à } 4x-4x=6-6$$
$$équivaut \text{ à } 0=0 \qquad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{IR}$$
$$-\boldsymbol{x}+\mathbf{4}=\mathbf{3}-\boldsymbol{x} \ équivaut \text{ à } -x+x=3-4$$

$\acute{e}quivaut$ à $0 = -1$ $\qquad$ $\boldsymbol{S} = \emptyset$

EQUATION DE LA FORME $(\boldsymbol{ax+b})(\boldsymbol{cx+d}) = \boldsymbol{0}$

Pour résoudre une telle équation, on utilise le **produit nul :**

$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \quad \acute{e}quivaut \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0})$.

Ainsi $(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$ équivaut à $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$.

On obtient $= \frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$. $\quad \boldsymbol{S} = \left\{\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}; \frac{-\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}\right\}$.

Exemple

Résous dans IR $(\boldsymbol{2x} + \boldsymbol{1})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{4}) = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{5}) = \boldsymbol{0}$

Solution

$(2x + 1)(x - 4) = 0\ \acute{e}quivaut$ à $2x + 1 = 0\ ou\ x - 4 = 0$
$\acute{e}quivaut$ à $2x = -1\ ou\ x = 4$
$\acute{e}quivaut$ à $x = \frac{-1}{2}\ ou\ x = 4$ $\qquad \boldsymbol{S} = \left\{\frac{-1}{2}; 4\right\}$
$x(-x + 5) = 0\ \acute{e}quivaut$ à $x = 0\ ou - x + 5 = 0$
$\acute{e}quivaut$ à $x = 0\ ou - x = -5$
$\acute{e}quivaut$ à $x = 0\ ou\ x = \frac{-5}{-1} = 5$. $\qquad \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{0}; \boldsymbol{5}\}$

PROBLEMES CONDUISANT AUX EQUATIONS DE PREMIER DEGRE DANS IR

Il s'agit des problèmes dont les solutions sont celles des équations de premier degré dans IR.

Pour les résoudre, on passe généralement par des mises en équations tout en faisant toujours le choix de l'inconnue.

Exemple1

Le double d'un nombre diminué de 5 est égal à ce nombre augmenté de 7. Quel est ce nombre ?

Solution

Soit x ce nombre.

$le\ double\ d'un nombre\ (2x) diminu\acute{e}\ (-) de\ 5\ est\ \acute{e}gal\ (=)$ à $ce\ nombre\ (x) augment\acute{e}(+) de\ 7$

On a donc : $2x - 5 = x + 7\ \acute{e}quivaut$ à $2x - x = 7 + 5$

$\acute{e}quivaut$ à $x = 12$. $\quad \boldsymbol{Ce\ nombre\ est\ 12}$

Exemple 2

M Tamo a un jardin de forme rectangulaire dont il a oublié les dimensions. Il se rappelle que le périmètre du jardin est de 10m et que ce périmètre est égal au double de la longueur augmenté de 4. Aide M Tamo à retrouver les dimensions de son jardin.

Solution

Soit x la longueur de ce jardin. En traduisant de la même manière qu'à l'exemple1,

On a : $10 = 2x + 4$ *équivaut* à $2x = 10 - 4$

équivaut à $2x = 6$

équivaut à $x = \frac{6}{2} = 3$. ***La longueur est 3m.***

De plus $P = (L + l) \times 2 = 2L + 2l$ *équivaut* à $10 = 2 \times 3 + 2l$

équivaut à $10 = 6 + 2l$

équivaut à $2l = 10 - 6$

équivaut à $2l = 4$

équivaut à $l = \frac{4}{2} = 2$. ***La largeur est 2m.***

Exemple 3 :

Une chambre a la forme d'un carré de coté $(\boldsymbol{x - 4})\boldsymbol{m}$. La surface de cette chambre est égale au triple de son côté.

a) Détermine la valeur de $\boldsymbol{x}$ sachant que $\boldsymbol{x}$ est supérieure à **5m**.
b) Quelle est la longueur du côté de cette chambre ?

Solution

$A = c \times c = (x - 4)(x - 4)$.

De plus $A = 3c$ *équivaut* à $(x - 4)(x - 4) = 3(x - 4)$

équivaut à $(x - 4)(x - 4) - 3(x - 4) = 0$

équivaut à $(x - 4)[(x - 4) - 3] = 0$

équivaut à $(x - 4)(x - 7) = 0$

équivaut à $x - 4 = 0$ *ou* $x - 7 = 0$

$équivaut$ à $x = 4$ ou $x = 7$

a) $comme\ x\ est\ supérieure$ à 5 $alors$ $\boldsymbol{x = 7}$

b) La longueur du côté de cette chambre est $x - 4 = 7 - 4 = 3$. $soit$ $\boldsymbol{3m}$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

   $-5x + 2 = 3x + 5$; $\frac{2x-5}{3} = \frac{x+1}{2}$; $x(x^2 - 9) = 0$

2) Les trois quarts du prix d'un article est égal au prix de cet article diminué de 150f.

   Quel est le prix de cet article

LEÇON 2

Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Durée : 50 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR :

- Résoudre une inéquation du 1er degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble solution sous la forme d'intervalles,
- Résoudre les problèmes de la vie conduisant aux inéquations de 1er degré dans $\mathbb{R}$, les résoudre puis interpréter les résultats.

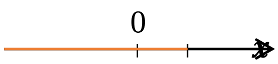
PRE REQUIS

a) Rappels sur les intervalles : Ecrire sous forme d'intervalle puis représenter graphiquement les inégalités suivantes : $\boldsymbol{x < 2}$; $\boldsymbol{x > -3}$; $\boldsymbol{x \leq 0}$; $\boldsymbol{x \geq 5}$; $\boldsymbol{2 < x \leq 7}$

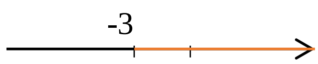
b) Résoudre les inéquations suivantes : $\boldsymbol{4x + 7 < 0}$; $\boldsymbol{-2x - 6 > 8}$; $\boldsymbol{3x \geq 4}$

Solution

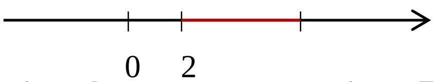
a) $\boldsymbol{x < 2}$: $x \in]\leftarrow; 2[$



$\boldsymbol{x > -3}$: $x \in]-3; \rightarrow[$



$\boldsymbol{2 < x \leq 7}$: $x \in]2; 7]$



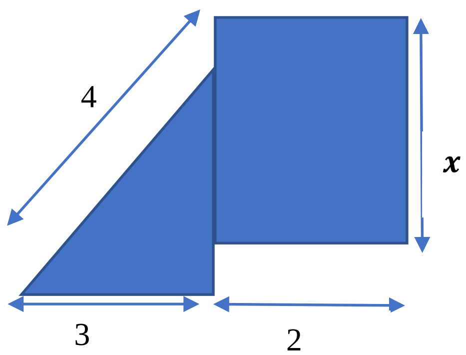
b) $4x + 7 < 0$ équivaut à $4x < 7$

équivaut à $x < \frac{7}{4}$

équivaut à $x \in \left]\leftarrow; \frac{7}{4}\right[$

SITUATION PROBLEME

Le schéma ci-contre représente celui d'un champ lequel la partie rectangulaire est réservé culture du manioc et la partie triangulaire culture du macabo.



Déterminer les entiers naturels $\boldsymbol{x(en\ m)}$ pour lesquels le Périmètre du rectangle est inférieur à celui du triangle.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Reprendre le schéma précédent.

1) Exprimer en fonction de $\boldsymbol{x}$ le périmètre P_1 de la partie rectangulaire.
2) Exprimer en fonction de $\boldsymbol{x}$ le périmètre P_2 de la partie triangulaire.

3) Traduire à l'aide d'une inégalité : **le périmètre de la partie rectangulaire est inférieur à celui de la partie triangulaire.**
4) Déterminer toutes les valeurs possibles de $\boldsymbol{x}$.
5) Répondez à la question de la situation problème ?

Solution

$P_1 = (x+2) \times 2 = 2x + 4$

1) $P_2 = x + 4 + 3 = x + 7$
2) $P_1 \leq P_2$ *équivaut* à $2x + 4 \leq x + 7$
3) $2x + 4 \leq x + 7$ *équivaut* à $2x - x \leq 7 - 4$

   équivaut à $x \leq 3$

   Les valeurs possibles de x *sont* $1; 2$ *et* 3.

RESUME :

Définition

- Une inéquation de premier degré dans ***IR*** est une inégalité entre deux polynômes du premier degré une seule inconnue ou alors entre un polynôme de premier degré et 0.
- Résoudre dans IR une inéquation de premier degré c'est déterminer l'ensemble de tous les nombres qui vérifient cette inéquation. Cet ensemble est appelé **ensemble solution** noté **S** et est très souvent **un intervalle ou une réunion d'intervalles.**

INEQUATIONS DU TYPE $+\boldsymbol{b} < \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d}$.

$L'inégalité < peut\ être\ remplacer\ par\ > ou \leq ou \geq$

Pour résoudre ces types d'équations, on renvoi les termes en $\boldsymbol{x}$ d'un côté de l'inégalité (de préférence du celui de gauche) et les termes constants de l'autre côté.

Rappel :

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre réel négatif non nul, l'inégalité change de sens.

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre réel positif non nul, l'inégalité ne change pas de sens.

Exemple

Résoudre dans IR $\boldsymbol{5x+3 < 2x-6}$; $\boldsymbol{2x-1 \geq x+2}$; $\boldsymbol{x+6 \leq 3x}$;$\boldsymbol{-2x+5 > x-1}$.

Solution

$5x + 3 < 2x - 6$ *équivaut* à $5x - 2x < -6 - 3$

$$\text{équivaut à } 3x < -9$$
$$\text{équivaut à } \frac{3x}{3} < \frac{-9}{3}$$
$$\text{équivaut à } x < -3. \qquad \boldsymbol{S} =]\leftarrow; -3[$$

$$x + 6 \leq 3x \text{ équivaut à } x - 3x \leq -6$$
$$\text{équivaut à } -2x \leq -6$$
$$\text{équivaut à } \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-6}{-2}$$
$$\text{équivaut à } x \geq 3. \qquad \boldsymbol{S} = [3; \rightarrow[$$

SYSTEME D'INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS IR

Il s'agit d'un groupe de plusieurs inéquations ayant la même inconnue.

Pour résoudre un tel système, on résout séparément chaque inéquation puis on fait l'intersection de leurs différents ensembles solutions pour obtenir la solution du système.

Exemple

Résoudre dans IR, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + 1 < x + 3} \\ \boldsymbol{3x + 2 < 5x + 4} \end{cases} ; \begin{cases} \boldsymbol{x + 2 > 3} \\ \boldsymbol{x - 2 \leq 4} \end{cases}$$

Solution

$$\begin{cases} 2x + 1 < x + 3 \\ 3x + 2 < 5x + 4 \end{cases} \text{équivaut à} \begin{cases} 2x - x < 3 - 1 \\ 3x - 5x < 4 - 2 \end{cases}$$

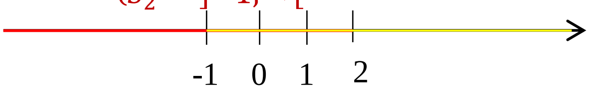
$$\text{équivaut à } \begin{cases} x < 2 \\ -2x < 2 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2} \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} S_1 =]\leftarrow; 2[\\ S_2 =]-1; \rightarrow[\end{cases}$$

$\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2}$



$\boldsymbol{S =]-1; 2[}$

PROBLEMES CONDUISANT AUX INEQUATIONS DE PREMIER DEGRE DANS IR

Le raisonnement reste le même que celui des problèmes conduisant aux équations de premier degré dans IR.

Exemple

Madame AYA, riche femme qu'elle est, a passé la commande des véhicules dont elle a oublié le nombre. Elle se rappelle tout de même que le double des véhicules augmenté de 5 est strictement supérieur au triple des véhicules diminué de 1, et que le nombre de véhicules est strictement supérieur à 4. Aider madame AYA à retrouver le nombre de véhicules qu'elle a commandé.

Solution

Soit x le nombre de véhicules que Madame AYA a commandé.

Le double des véhicules $(2x)$ augmenté$(+)$ de 5 est strictement supérieur $(>)$ au triple des véhicules $(3x)$ diminué de **1 c'est-à-dire** $2x + 5 > 3x - 1$.

On a : $2x + 5 > 3x - 1$ $équivaut$ à $2x - 3x > -1 - 5$

$équivaut$ à $-x > -6$

$équivaut$ à $x < 6$.

De plus, le nombre de véhicules est strictement supérieur à 4 **c'est-à-dire** $x > 4$

On a alors $4 < x < 6$ $donc$ $\boldsymbol{x = 5}$. Madame AYA a commandé **5 véhicules.**

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans IR les inéquations suivantes : $-x + 7 \leq 3 + x; 5x + 8 > 2x - 1$
2) Résoudre dans IR les systèmes d'inéquations suivants :
   $\begin{cases} x + 3 < 2x - 5 \\ 3x < x + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -x - 4 \geq 0 \\ 7x + 5 > -9 \end{cases}$
3) Simon dit : le double de mon âge diminué de 7ans est strictement inférieur à mon âge augmenté de 5ans. De plus, j'ai plus de 10ans. Quel est l'âge de Simon ?

CHAPITRE 6

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU 1er DEGRE DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

INTERET

Les équations et inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ont un intérêt dans la résolution des problèmes d'achats, de vente, de détermination de longueurs…

MOTIVATION

Pour résoudre de nombreux problèmes dans la vie on a parfois une infinité de possibilités. Dans certains cas, on souhaite qu'ils remplissent deux ou plusieurs conditions. Comment retrouver les solutions pouvant remplir ces conditions ?

..

LEÇON 1

Equation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Donner des couples solutions d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Vérifier si un couple de nombres réels est solution d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

PRÉREQUIS

- Vérifier que le point A(-2 ;3) appartient à la droite d'équation $(D) : 3x - 4y + 18 = 0$. (Rappel : en remplaçant x et y par les coordonnées du point A, l'égalité doit être vraie).
- Représenter dans un repère orthonormé la droite $(D) : 3x - 4y + 18 = 0$

SITUATION PROBLÈME

M. MONKAP achète dans une librairie 10 articles constitués de stylos vendus à 150frs et des cahiers vendus à 200frs. Il dépense 2300 frs. Combien de stylos et de cahiers a-t-il acheté ?

Résolution

Après avoir laissé les enfants chercher et proposer leurs solutions, l'enseignant passera à l'activité d'apprentissage qui résous cette situation problème étape par étape.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) **Choix des inconnues**
   On désigne par x le nombre de stylos et par y le nombre de cahiers.
2) **Mise en équation**
   a. Ecrire en fonction de x et y une équation traduisant le nombre d'articles achetés

      Solution : $x + y = 10$

   b. Ecrire en fonction de x et y une équation traduisant la dépense de M. Monkap

      Solution : $150x + 200y = 2300$
3) **Résolution**
   On considère les deux équations ci-dessous

$$\begin{cases} x + y = 10 \ \ (1) \\ 150x + 200y = 2300 \ (2) \end{cases}$$

a. Exprime dans l'équation (1) y en fonction de x et appelle l'équation obtenue (3)

b. Remplace dans l'équation (2) y par sa valeur obtenue dans l'équation (3) puis résoudre pour trouver la valeur de l'inconnue x

c. Remplace maintenant x par sa valeur trouvée ci-dessus dans l'équation (3) et détermine la valeur de l'inconnue y

d. Le couple (x ;y) ainsi obtenu est la solution commune aux deux équations ci-dessus.

Solution : (-6 ;16)

RESUME

Dans un problème faisant appel à deux choses dont on veut déterminer les valeurs, on peut procéder par les étapes suivantes :

1) **Choisir les inconnues**
2) **Mettre en équation :** il s'agit d'utiliser les informations de l'énoncé pour écrire des équations les traduisant
3) **Rechercher les solutions :** Il existe à ce niveau plusieurs façons de procéder (méthode par combinaison, méthode graphique, méthode par substitution). Nous nous intéresserons à la méthode par substitution

METHODE PAR SUBSTITUTION

On procède comme suit :

- Dans l'une des équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de la deuxième
- On remplace dans l'autre équation cette inconnue par son expression déterminée plus haut, puis on résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de la deuxième inconnue.
- On remplace cette deuxième inconnue par sa valeur dans l'expression de la première afin de trouver aussi la valeur de la première inconnue.

NB : l'enseignant ajoutera au besoin des exemples ou alors utilisera les cas de l'exercice d'application

EXERCICES D'APPLICATION

Résoudre par substitution les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$S_1 = \{(1,4)\}$ $S_1 = \{(1,4)\}$

LEÇON 2

Inéquations et systèmes d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

PRE-REQUIS

Toute droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$ divise le plan en deux parties :

- Les points dont les coordonnées $(x\,; y)$ vérifient $ax + by + c < 0$
- Les points dont les coordonnées $(x\,; y)$ vérifient $ax + by + c > 0$

Représente dans un repère orthonormé (O, I, J) la droite d'équation $15x + 20y = 230$

SITUATION PROBLEME :

M. Monkap achète dans une librairie des articles constitués de stylos vendus à 150frs et des cahiers vendus à 200frs. Quelles possibilités d'achats de stylos et de cahiers a-t-il s'il veut au moins 10 articles en dépensant au maximum 2300frs ?

Résolution :

Après avoir laissé les enfants chercher et proposer leurs solutions, l'enseignant passera à l'activité d'apprentissage qui résous cette situation problème

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

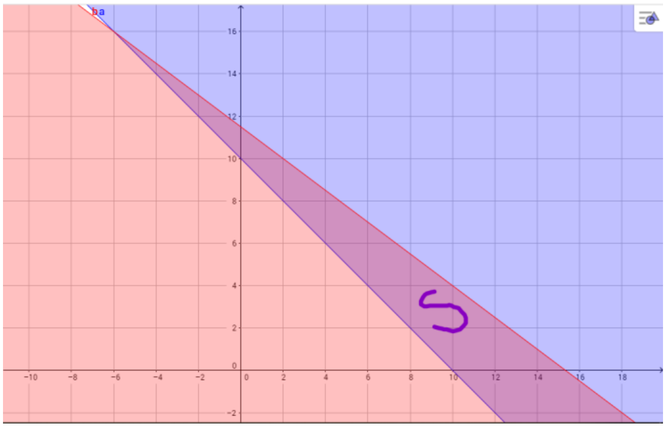
On considère les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \ (I_1) \\ 15x + 20y \leq 230 \ (I_2) \end{cases}$$

1) Représente dans un repère orthonormé les droites d'équations $(\boldsymbol{D_1})$: $\boldsymbol{x + y = 10}$ et $\boldsymbol{D_2}$: $\boldsymbol{15x + 20y = 230}$
   Solution *: A(5 ;5) ;B(6 ;4) ; C(5 ;7) ; D(;5,5)*

2) Hachure la partie du plan représentant les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation $\boldsymbol{x + y \geq 10}$
3) Achure d'une autre couleur la partie du plan représentant les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation $\boldsymbol{15x + 20y \leq 230}$
4) Indique la partie du plan où tu retrouves les achures dans les deux couleurs

Solution



RESUME

Une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une inéquation de la forme
$\boldsymbol{ax + by + c < 0}$; $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$; $\boldsymbol{ax + by + c \leq 0}$ ***ou*** $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$

1) Pour représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'une inéquation du 1er degré dans IR×IR, on procède comme suit :
   - On trace la droite dont l'équation est associée à l'inéquation
   - On hachure la partie du plan vérifiant l'inégalité
2) Pour représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'un système d'inéquations du 1er degré dans IR×IR, on procède comme suit :
   - On représente d'une couleur l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de la première inéquation
   - On représente d'une autre couleur l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de la deuxième inéquation
   - L'ensemble solution du système d'inéquation est la partie du plan où l'on retrouve les hachures des deux couleurs

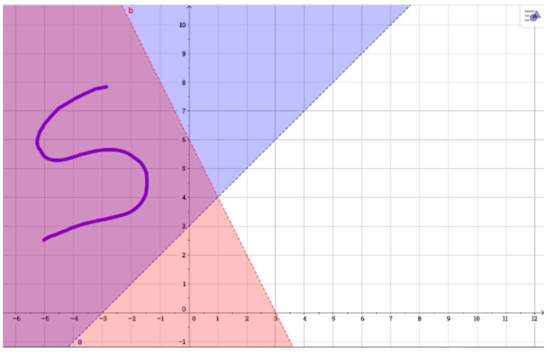
Remarque

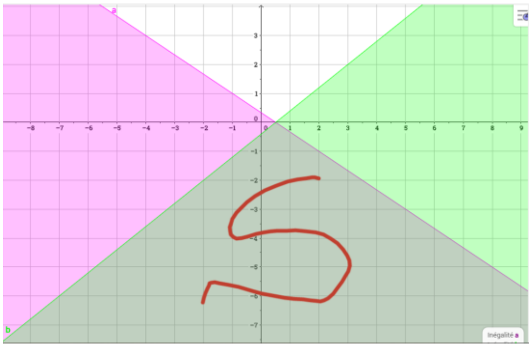
La résolution d'une inéquation ou d'un système d'inéquation se fait par méthode graphique

NB : l'enseignant ajoutera au besoin des exemples ou alors utilisera les cas de l'exercice d'application

EXERCICES D'APPLICATION

Résoudre graphiquement les systèmes suivants : $\begin{cases} 2x + y - 6 < 0 \\ x - y + 3 < 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + 3y - 1 \leq 0 \\ 4x - 5y - 2 \geq 0 \end{cases}$





Module 14	ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

CHAPITRE 7

APPLICATIONS LINEAIRES ET APPLICATIONS AFFINES

INTERET

- Résoudre un problème concret se rapportant à une situation de proportionnalité ou se rapportant à une application linéaire ou affine ; Utiliser le signe du coefficient directeur pour donner le sens de variation d'une application linéaire ou affine ;
- Calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre réel ; interpréter le graphique d'une application linéaire ou affine.

MOTIVATION

- Déplacements quotidiens.
- Usage de médicaments.
- Pratique d'une activité de loisir ou sportive.
- Achat ou vente d'un bien de consommation.
- Planification de repas, d'activités agricoles ou commerciales.
- Participation à une activité de formation à l'école ou en milieu de travail.
- Prévisions d'augmentation ou de diminution de prix d'un produit..

LEÇON

Applications linéaires et applications affines

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Définir une application affine, une application linéaire
- Calculer une image, un antécédent par une application affine ou linéaire.
- Déterminer le sens de variation d'une application affine ou linéaire.
- Représenter une application affine ou application linéaire.

PRÉREQUIS

1. Lequel de ces deux tableaux suivants traduit une situation de proportionnalité ? Justifie ta rép

Grandeur A	0	10	20	30
GrandeurB	0	5	10	15

Grandeur C	0	10	20	30
Grandeur D	0	5	15	20

2. A cause de l'augmentation du prix un article qui coûtait 3100 francs a subi une augmentation de 18% calculer cette augmentation.
3. Calculer la valeur numérique des expressions littérales suivantes : $A = 2x + 3$; $B = x - 1$ pour $x = 1$,

SITUATION PROBLÈME

Max voudrait louer une voiture pour aller passer un weekend dans son village situé à des centaines de kilomètres de la ville de Yaoundé pour cela il se renseigne auprès de deux agences de location de voitures afin de se faire une idée:

Voici les tarifs de deux agences de location de voitures (pour un même modèle) :

AGENCE A : Forfait 45000F et 400F par km parcouru

AGENCE B : 700F par km parcouru

Aider Max à choisir le tarif le plus avantageux qui lui permettra de parcourir un grand nombre de kilomètres.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

A l'occasion de la semaine de la jeunesse, la coopérative du lycée Bilingue d'Akono se propose de louer une chaine musicale pour les activités culturelles ; le discothécaire lui propose deux modes de payement :

Mode A : Elle doit payer 500 frs pour toute journée commencée, et verser au préalable un taux forfaitaire de 5000frs.

Mode B : Elle doit payer 1500frs pour toute journée commencée

1) Compléter les tableaux suivants :

Mode A

Nbre de journées	2	5		8		n
Somme totale payée			8000		9500	500n+5000

Mode B

Nbre de journées	2	5		8		n
Somme totale payée			9000		13500	1500n

2) Chaque mode de payement : Quelle serait la somme à payer pour deux jours de location ? Cinq jours ? Huit jours ? (Expliquer aux camarades comment on a procédé.)
3) Mode A : Le procédé de la correspondance entre les nombres de la première ligne et ceux de la seconde peut s'exprimer ainsi « Je multiplie par…… puis j'ajoute ….. » On traduit un tel procédé en disant qu'il s'agit d'une **application affine**. Ici, cette application f sera notée : $x \to 500x + 5000$; L'image x notée $f(x) = 500x + 5000$

   Compléter : $f(2) = \cdots$ $\quad f(5) = \cdots$ $\quad f(\ldots) = 8000$ $\quad f(\ldots) = 9500$

4) Mode B : Le procédé de la correspondance entre les nombres de la première ligne et ceux de la seconde peut s'exprimer ainsi « Je multiplie par.. » On traduit un tel

procédé en disant qu'il s'agit d'une application linéaire. Ici, cette application g sera notée : $x \to 1500x$; l'image x notée : $g(x) = 1500x$

Compléter : $g(2) = \cdots \qquad g(5) = \cdots \qquad g(\ldots) = 9000$

5) On considère les droites $(D1): y = 500x + 5000 \quad (D2): y = 1500x$
   a. Représenter sur un même repère orthonormé (O, I, J) les droites $(D1)$ et $(D2)$.
   b. Laquelle passe par l''origine des axes ?
6) Soient les applications f et g définies par $f(x) = 500x + 5000$;

$g(x) = 1500x$

   a. Déterminer l'abscisse x pour que les applications f et g soient équivalentes.
   b. La coopérative souhaiterait passer un grand nombre de jours quelle sera la proposition la plus avantageuse dans ce cas ?

Solution de l'activité d'apprentissage

1) Complétons les tableaux

Nbre de journées	2	5	**6**	8	**9**	n
Somme totale payée	**6000**	**7500**	8000	**9000**	9500	500n+5000

Mode B

Nbre de journées	2	5	**6**	8	**9**	n
Somme totale payée	**3000**	**7500**	9000	12000	13500	1500n

2) Mode A : Somme à payer : 2 jours : 500*2+5000=6000

   5 jours : 500*5+5000=7500

   8 jours : 500*8+5000=9000

   Mode B : Somme à payer : 2 jours : 1500*2=3000 5jours : 1500*5=7500 8jours : 1500*8=12000

3) Mode A Je multiplie par 500 puis j'ajoute 5000

$f(2) = \mathbf{3000}$ $f(5) = \mathbf{7500}$ $f(\mathbf{6}) = 8000$ $f(\mathbf{9}) = 9500$ Ce procédé est traduit par l'application affine $f: x \to 500x + 5000$ l'image de x est notée par $f(x) = 500x + 5000$ donc 2 a pour image $f(2) = 6000$ et $f(2)$ a pour antécédent 2

4) Mode B : Je multiplie par $\mathbf{1500}$

Complétons$g(2) = \mathbf{3000}$ $g(5) = \mathbf{7500}$ $g(\mathbf{6}) = 9000$. Ce procédé est traduit par l'application linéaire $g: x \to 1500x$ l'image de x est notée par $g(x) = 1500x$ donc 5 a pour image $g(5) = 7500$.

Et $g(5)$ a pour antécédent 5.

5) On considère les droites $(D1): y = 500x + 5000$ $(D2): y = 1500x$
   a. Construction dans un même repère orthonormé (O, I, J) les droites $(D1)\ et\ (D2)$
   b. La droite $(D2)$ passe par l'origine des axes.

6)
   a. Les droites $(D1)$ et $(D2)$ sont équivalentes si et seulement si $500x + 5000 = 1500x$

   Equivaut à $-1000x = -5000$ $x = \frac{-5000}{-1000}$ donc $x = 5$

   Lorsque $x = 5$: $f(5) = 500 * 5 + 5000 = 7500$

   et $g(5) = 1500 * 5 = 7500$

   b. Déterminons la proposition la plus avantageuse

   Soit le nombre de jours : L'application affine associée au mode A $f(x) = 500x + 5000$ et celle associée au mode B $g(x) = 1500x$

   Supposons le mode B comme étant le plus avantageux on a $gx) < f(x)$ équivaut à $1500x < 500x + 5000$

   Equivaut à $x < 5$

   Conclusion : Pour moins de 5 jours le mode B est avantageux ; mais pour plus de 5jours le mode A est plus avantageux la coopérative souhaitant un grand nombre de jours donc le mode A est le meilleur choix

Solution de la situation problème

Aidons Max à faire un choix parmi les deux agences de location de voitures.

Agence A : Taux forfaitaire 45000frs auxquels on ajoute 400frs par Km parcouru

Agence B : 700frs par Km parcouru

Soit x le nombre Km parcouru par Max au cours de son voyage

L'application affine associée à la proposition de l'agence A est $f(x) = 45000 + 400x$

L'application affine associée à la proposition de l'agence B est $g(x) = 700x$

Considérons la proposition de l'agence B comme étant la plus avantageuse

on a $g(x) \leq f(x)$ équivaut à : $700x \leq 45000 + 400x$

équivaut à $300x \leq 45000$

équivaut à $x \leq 150$ alors $x < 150\ Km$

la proposition de l'agence B est plus avantageuse et pour

$x > 150\ Km$ la proposition de l'agence A est plus avantageuse

Conclusion : En parcourant des centaines de KM Max devra choisir la proposition de l'agence A.

RESUME

DEFINITIONS

Application : On appelle application de l'ensemble A dans un ensemble B, toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un élément et un seul de B.

Bijection : On appelle bijection de l'ensemble A dans l'ensemble B, toute application f de l'ensemble A dans l'ensemble B telle que chaque élément de B est l'image par f d'un élément de A et d'un seul.

Application affine : Etant donné deux nombres a et b, le procédé qui à tout nombre x fait correspondre le nombre $ax + b$ s'appelle une application affine. On note : $\boldsymbol{x \rightarrow ax + b}$.

Si f désigne l'application, on note l'image de x : $f(x) = ax + b$

Cas particuliers

si $\boldsymbol{b = 0}$, l'application devient : $\boldsymbol{x \rightarrow ax}$. est une application linéaire

Si $\boldsymbol{a = 0}$, l'application devient : $\boldsymbol{x \rightarrow b}$.est une application constante.

Application Linéaire : Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre donné.

Le procédé qui à tout nombre x fait correspondre le produit $\boldsymbol{ax}$ s'appelle l'application linéaire de coefficient a : On note cette application :$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{ax}$.

IMAGE, ANTECEDENT.

Soit l'application affine définit par : $f(x) = ax + b$

$\boldsymbol{x}$ est appelé $\boldsymbol{ant\acute{e}c\acute{e}dent}$ de $f(x)$ et $f(x)$ est appelé $\boldsymbol{image}$ de x par $\boldsymbol{f}$.

Exemple

On donne l'application affine $f(x) = -3x + 1$ L'image de -4 par f est $f(-4) = 12 + 1 = 13$
L'image de 0 par $f$est $f(0) = 0 + 1 = 1$ L'image de 2 par $f$est $f(2) = -6 + 1 = -5$

L'antécédent de 1 est :$f\ (x) = 1 \Leftrightarrow -3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc l'antécédent de 1 par $f$est 0.
L'antécédent de 3 est $f(x) = 3 \Leftrightarrow -3x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = -2$

SENS DE VARIATION D'UNE APPLICATION LINEAIRE OU AFFINE

Soit f une application définie par $f\ (x) = ax + b$.

- -Si $a > 0$, alors $\boldsymbol{f}$ est une application croissante.
- -Si $a < 0$, alors $\boldsymbol{f}$ est une application décroissante.
- -Si $a = 0$, alors $\boldsymbol{f}$ est une application constante. (La droite de $\boldsymbol{f}$ est parallèle à l'axe des abscisses).

Exemple

a. On donne les applications suivantes définies par $f(x) = 2x + 1\ \ g(x) = -\frac{1}{2}x$ .Précise si $f$et g sont croissantes, constantes ou décroissantes :
b. f est l'application affine telle que : $f(-3) = 2$ et $f(1) = 5$. f est-elle croissante ou décroissante ?

EXEMPLE CONCRET D'APPLICATION AFFINE PAR INTERVALLE

On donne f l'application définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 2 & si\ \ 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -x & si\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Donne le sens de variation de $\boldsymbol{f}$ dans chacun des intervalles suivants
$[-1; 1]$, $[1; 2\,]$; $[2,4]$

PROPRIETES DES APPLICATIONS LINEAIRES

Soit $\boldsymbol{f}$ une application linéaire de la forme$f(x) = \boldsymbol{ax}$. Pour tous nombres réels u, v et k, on a :

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $f(ku) = kf(u)$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

1) Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -3x + 7$.

   Calcule les images par f de chacun des nombres suivants : -10 ; 7

   3 ; 0 ; 2 ;
2) Calcule les antécédents par f des nombres suivants : 4 ; 0 ; -2.
3) Quel est le sens de variation de cette application ?
4) Construire dans un repère orthonormé l'application f.

Exercice 2

Pour établir les factures afférentes à la consommation d'énergie de ses abonnés, la société d'électricité Energy of Cameroun SA (ENEO) utilise les tarifs suivants :

Tranches (kwh)	Du 1erau 110	Du 111^{e}au 400	Au-delà 401^{e}
Prix du kwh	50 Frs	70 Frs	90 Frs

On désigne par g l'application qui à la quantité x d'énergie en kwh consommée par un abonné d'ENEO, associe le prix $g(x)$ à payer (hors taxe).

Déterminer $g(x)$ le prix à payer selon que x appartienne à $[0; 110]$; $]110; 400]$; $]400; \rightarrow[$

Solution 2

1) $x \in [0; 110]$. Toute consommation est facturée en 1ère tranche : $g(x) = 50x$ donc pour $x \in [0; 110]$ $g(x) = 50x$.
2) $x \in]110; 400]$ 110 kwh sont facturés en la première tranche.$(x - 110)$ kwh en deuxième tranche ; $g(x) = 50 \times 110 + (x - 110) \times 70$ donc pour $x \in]110; 400]$ $g(x) = 70x - 2200$.
3) $x \in]400; \rightarrow[$ 110 kwh sont facturées à la première tranche, 290kwh à la deuxième tranche et $(x - 400)$ en troisième tranche $g(x) = 50 \times 110 + 70 \times 290 + (x - 400) \times 90$ donc pour $x \in]400; \rightarrow[$ $g(x) = 90x - 10200$

DEVOIR A FAIRE A LA MAISON

Exercice 1

Parmi les applications suivantes définies de R dans R : $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = 5x$; $h(x) = -x + 1$; $i(x) = -x\sqrt{2}$; $j(x) = -8$:

1) Trouve celles qui sont des applications linéaires.
2) Trouve le sens de variation des applications f, g, h, i et j.
3) Lorsque $x = -2$; $x = 1$ calculer les images par f et par j

4) Calculer l'antécédent x lorsque $f(x) = 2$ $g(x) = -10$.

Exercice 2

1) Quelles fonctions linéaires peut-on associer aux expressions :
   a. « Augmenter les prix de 20% » ?
   b. « Diminuer les prix de 20% » ?
2) Après une diminution de 20% ; le prix d'une voiture est de 8272000 francs. Quel était le prix initial de la voiture.

Exercice 3

Le gérant d'une salle de cinéma propose deux options aux spectateurs :

OPTION A : Le spectateur paie 6.50 francs par séance.

OPTION B : Le spectateur paie un abonnement de 28 francs, puis 3 francs par séance.

Déterminer graphiquement, en fonction de x de séances, l'option la plus avantageuse pour un spectateur.

CHAPITRE 8

STATISTIQUES

INTÉRÊT

Les statistiques constituent un élément essentiel de la prise de décisions. A ce titre elles peuvent jouer un rôle indirect dans la vie de nombreuses personnes.

MOTIVATION

Les statistiques ont beaucoup d'applications dans les domaines variés :

- en démographie pour étudier les populations ;
- -en géophysique pour les prévisions météorologiques, la climatologie, la pollution ;
- -en sciences économiques et sociales et en économétrie l'étude du comportement d'un groupe de population ou d'un secteur économique s'appuie sur des statistiques ;
- -en sociologie : les sources statistiques constituent des matériaux d'enquête ;
- -en marketing le sondage d'opinion devient un outil pour la décision ou l'investissement ;
- -dans les jeux de hasard et les paris pour prévoir les résultats ;
- -en physique : l'étude de la mécanique statistique et de la thermodynamique statistique permet de déduire le comportement des particules ;
- -en métrologie, pour tout ce qui concerne les systèmes de mesure et les mesures elles-mêmes ;

.

LEÇON 1

REGROUPEMENTS EN CLASSE (D'EGALES AMPLITUDES)

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Regrouper une population en classes d'égales amplitudes ;
- Déterminer la (ou les) classe(s) modales(s) d'une série statistique ;
- Calculer la moyenne d'une série statistique regroupée en classes.

PRÉREQUIS

- Savoir comparer des nombres
- Savoir additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres réels

SITUATION PROBLÈME

Le professeur de mathématiques d'une classe de troisième a relevé les résultats d'un contrôle et a obtenu le tableau suivant :

11	13,5	07	02,5	06,5	19	01,5	07,5	15	06,5
08,5	14	12	02	06	16	01	09	15	17
00	13	07	18	16.5	11	06	04	01,5	07
12	17	18	13	08	05	00	12	05	17
08	03	09	18	19	01	02	02	06	08
11	16	17	15	15	15	01	00	02	05
03	07	05	07	06	09	03	08	07	04
04	02	03	04	00	00	03	07	04	01
10	10	05	04	09	06	04	03	07	06

Il souhaite grouper ces notes par intervalles d'amplitude 5 et obtenir la moyenne générale de la classe. Comment va-t-il procéder selon toi?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Recopie et complète le tableau suivant :

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	Total
Effectif					
Fréquence					
Centre					
Effectif×Centre					
Amplitude					

Chacun de ces intervalles est appelé classe.

2) Quels sont les objets ou personnes observés dans cette étude ? Quel est le critère étudié ? Quelle est la première note ? et la dernière ?
3) Quelle est la classe contenant le plus d'élèves ? Quelle est sa proportion par rapport à l'ensemble des notes ?
4) Quelle est la moyenne de cette classe ? (Calculer la moyenne en divisant la somme de la ligne Effectif × Centre par l'effectif total).

Solution

1) Recopions et complétons :

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	Total
Effectif	30	31	12	17	90
Fréquence	33,33	34,45	13,33	18,89	100
Centre	2,5	7,5	12,5	17,5	
Effectif×Centre	75	232,5	150	297,5	755
Amplitude	5	5	5	5	

2) Les personnes observées sont les élèves.

   Caractère étudié : notes

   La première note est : 19

   La dernière note est : 00

3) La classe [5 ; 10[est la classe contenant le plus d'élèves. Sa proportion est de 34,45%.
4) Divisons la somme de la ligne Effectif × Centre par l'effectif total : $\frac{755}{90} = 08{,}39$. Le nombre obtenu : 08,39 est la moyenne des notes.

Solution situation problème

L'intervalle qui contient le plus d'élèves est [5 ; 10[.

La moyenne générale de la classe est 08,39/20.

RESUME

- Lorsqu'une série statistique est regroupée en intervalles, on dit qu'elle est regroupée en classes ; et chacun de ces intervalles est appelé une classe.

  Exemple

  la série statistique ci-dessus est regroupée en classes.
- La classe modale est la classe ayant le plus grand effectif.

  Exemple

  Dans l'activité précédente, la classe modale est la classe [5 ; 10[.
- Pour une classe $[a, b[$:
  - L'amplitude est le nombre $b - a$
  - Le centre est le nombre $\frac{b+a}{2}$

  Exemple

  Pour la classe $[10, 15[$, l'amplitude est $15 - 10 = 5$

  le centre est $\frac{15+10}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$
- La fréquence en pourcentage d'une classe est donnée par la formule :

  Fréquence de la classe $[a, b[= \frac{effectif\ de\ la\ classe\ [a,b[}{effectif\ total} \times 100.$

  Exemple

  la fréquence de la classe $[5, 10[$ est :

$$fréquence\ de\ [5, 10[= \frac{effectif\ de\ la\ classe\ [5, 10[}{effectif\ total} \times 100 = \frac{31}{90} \times 100 = 34{,}45\%$$

Remarque

la somme de toutes les fréquences en pourcentage est toujours égale à 100.

- La moyenne d'une série statistique regroupée en classes est donnée par la formule :

  $$Moyenne = \frac{somme\ des\ produits\ des\ centres\ des\ classes\ par\ les\ effectifs\ des\ classes}{effectif\ total}$$

EXERCICES D'APPLICATION

Dans un club de football, les dirigeants ont relevé l'âge des joueurs :

Âge	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de personnes	8	4	3	9	7	14	17	6	8	5	7	11	8	9

a. Calcule la moyenne pondérée des âges des joueurs.

b. Recopie et complète le tableau suivant :

Âge	[5 ; 8]	] 8 ; 12]	] 12 ; 15]	] 15 ; 18]
Nombre de joueurs				

c. Calcule la moyenne par classe des âges.

d. Comment expliques-tu la différence entre les deux calculs de moyenne ?

LEÇON 2

Diagrammes

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

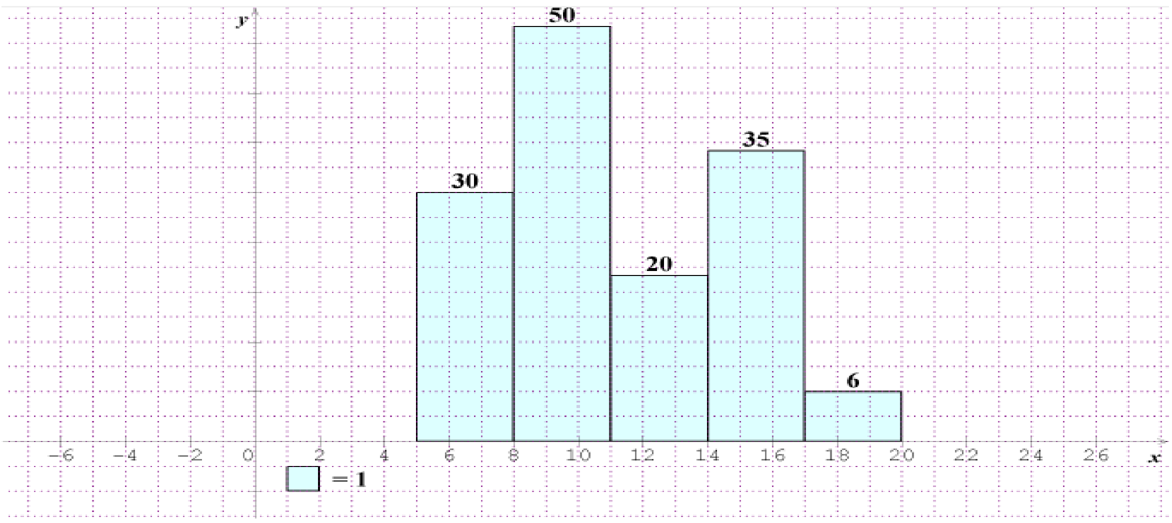
- Représenter ou interpréter un diagramme.

PRÉREQUIS

- Savoir placer un point donné dans un repère du plan
- Savoir construire un cercle, un segment, un rectangle.
- Savoir lire et construire un angle.

SITUATION PROBLÈME

Dans une école, la directrice s'intéresse à l'âge des enfants. Elle a créé le graphique suivant :



Elle veut calculer l'âge moyen des élèves dans cette école et construire le diagramme circulaire représentant ces données.

Peux-tu l'aider ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Ressortir le tableau des modalités regroupées en classes et des effectifs
2) Calculer l'âge moyen de ces élèves

3) Dans le tableau des effectifs, compléter une ligne (mesure de l'angle au centre) en utilisant la formule : $mesure = \frac{Effectif\ de\ la\ modalité}{Effectif\ total} \times 360^{\circ}$

4) A l'aide de la ligne ajoutée ci-dessus, construire le diagramme circulaire de cette série.

Solution

Tableau des modalités regroupées en classes et des effectifs :

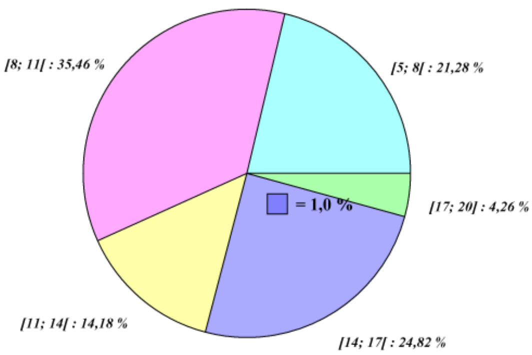
Age	[5 ; 8[	[8 ; 11[	[11 ;14[	[14 ;17[	[17 ;20]	Totaux
Effectif	30	50	20	35	6	141
Centre	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5	[redacted]
Effectif×centre	195	475	250	542,5	111	1573,5
Mesure	76,60	127,66	51,06	89,36	15,32	360

Calcul de l'âge moyen

Age moyen=$\frac{somme\ des\ produits\ des\ centres\ des\ classes\ par\ les\ effectifs\ des\ classes}{effectif\ total} = \frac{1573,5}{141} = 11,16$

Voir tableau des effectifs.

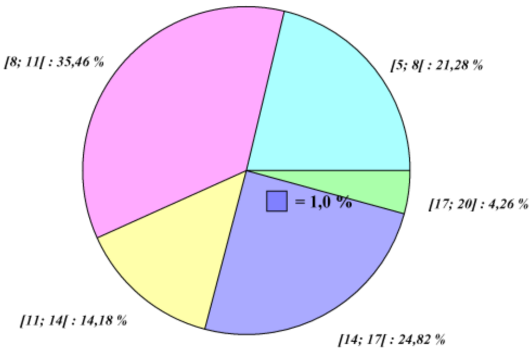
Diagramme circulaire de cette série :



SOLUTION SITUATION PROBLEME

L'âge moyen des élèves est de 11,16 ans

- Le diagramme circulaire représentant cette série est :



RESUME

LE DIAGRAMME A BANDES.

Il est construit de telle manière qu'un grand tuyau rectangulaire est divisé en bandes de longueurs proportionnelles à l'effectif ou la fréquence de la modalité représentée.

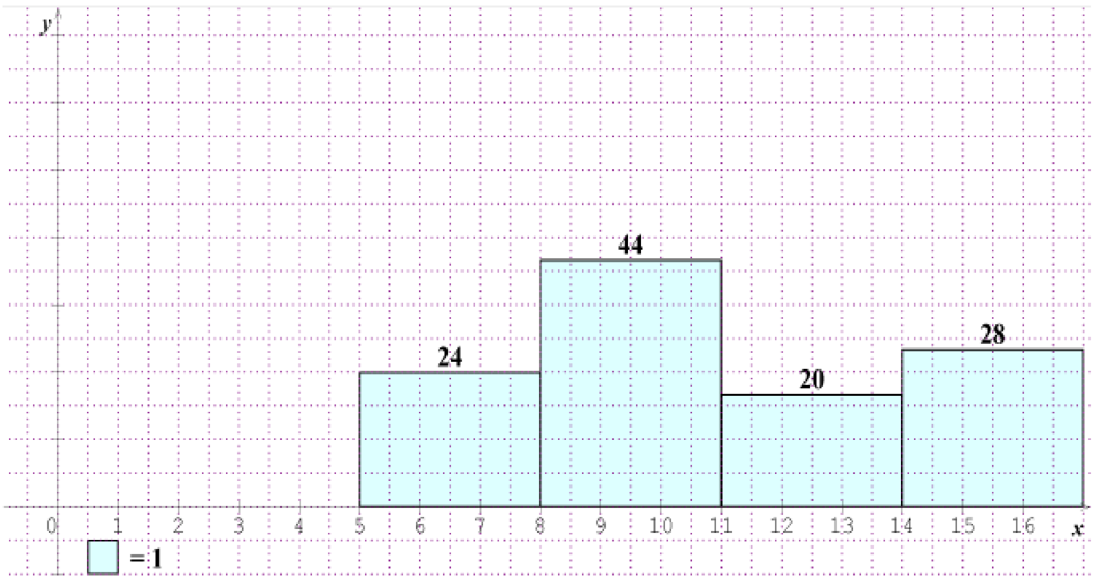
Exemple

Dans un club de football, les dirigeants ont relevé l'âge des joueurs :

Âge	[5 ; 8]	] 8 ; 11]	] 11 ; 14]	] 14 ; 17]
Nombre de joueurs	24	44	20	28

Construire le diagramme à bandes de cette série.

Solution



LE DIAGRAMME CIRCULAIRE OU PAR SECTEUR.

Lors de la construction du diagramme circulaire, chaque secteur du cercle représente une modalité du caractère ou variable. L'angle au centre est déterminé par la formule : $mesure = \frac{Effectif\ de\ la\ modalité}{Effectif\ total} \times 360^\circ$ ou encore par la formule : $mesure = fréquence \times 360^\circ$.

Exemple :

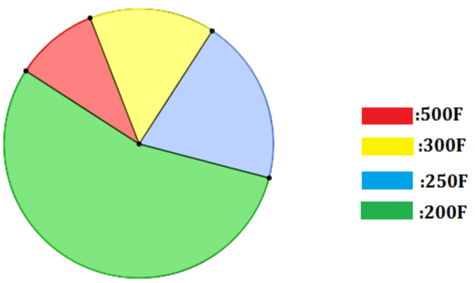
Le tableau statistique suivant donne les effectifs en fonctions de l'argent de poche journalier des élèves d'un lycée :

Montant(Fcfa)	200	250	300	500	Total
Effectif	363	132	99	66	

Construire le diagramme circulaire de cette série statistique.

Solution :

Montant(Fcfa)	200	250	300	500	Total
Effectif	363	132	99	66	660
Mesure	198	72	54	36	360



LE DIAGRAMME SEMI-CIRCULAIRE

Pour construire le diagramme semi-circulaire d'une série statistique, on procède comme pour la construction du diagramme circulaire, mais en utilisant la formule :

$$\boldsymbol{mesure = \frac{Effectif\ de\ la\ modalité}{Effectif\ total} \times 180^\circ}$$ ou encore

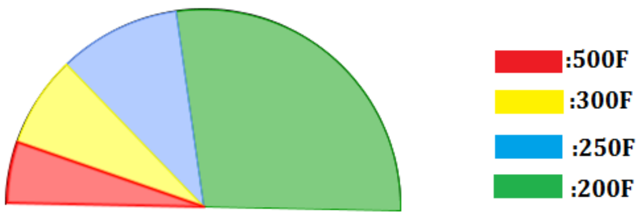
$$\boldsymbol{mesure = fréquence \times 180^\circ}.$$

Exemple

Construisons le diagramme semi-circulaire de la série statistique précédente.

Solution

Montant(Fcfa)	200	250	300	500	Total
Effectif	363	132	99	66	660
Mesure	99	36	27	18	180



LE DIAGRAMME A BATONS.

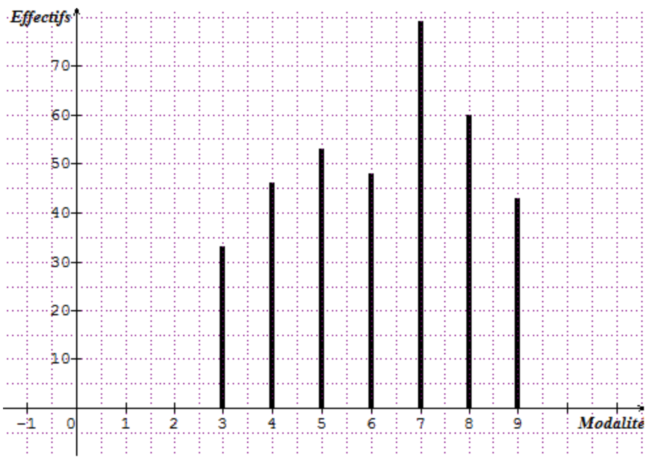
Il est construit dans un repère. Les valeurs de la variable statistique sont portées en abscisse, à partir de chaque valeur, on trace un segment de droite vertical et dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif correspondant. On peut retenir indifféremment une échelle qui explicite les effectifs ou les fréquences.

Exemple

Construisons le diagramme à bâtons de la série statistique suivante :

Modalité	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	33	46	53	48	79	60	43

Solution



LE DIAGRAMME A LIGNES BRISEES.

Les diagrammes à lignes brisées qu'on appelle aussi diagrammes linéaires et aussi diagrammes à courbes sont utilisés pour illustrer la progression ou la régression de données enregistrées dans le temps.

Pour construire un diagramme à lignes brisées :

On construit un repère orthogonal, puis on place en abscisse les modalités (le temps) et en ordonnée les effectifs.

On place les points correspondant à chaque couple de valeurs.

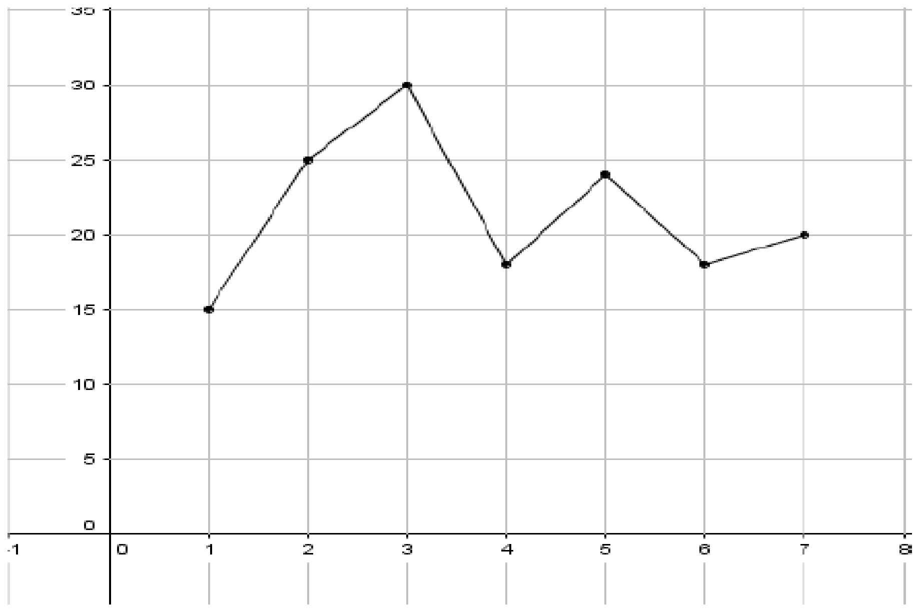
On relie par un segment, chaque point à son successeur.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de température dans la ville de kribi, durant les 10 premiers jours de janvier.

Jour	1	2	3	4	5	6	7
Température	15	25	30	18	24	18	20

Construisons le diagramme à ligne brisées associé à cette série statistique.



EXERCICES D'APPLICATION

Soit la série suivante portant sur l'âge des élèves de la troisième espagnole1 du lycée de Kakatare-Maroua :

Âges	12	13	14	15	16	17	Total
Effectifs	3	6	13	9	3	1	35

Travail à faire

Faites la représentation graphique en bande, circulaire, semi-circulaire, à bâtons et à lignes brisées.

Module 15	CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRE 9

ANGLES INSCRITS ET POLYGONES REGULIERS

LEÇON 1

Angles inscrits

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Reconnaitre dans un cercle un angle inscrit, un angle au centre et un arc intercepté.
- Connaître et utiliser la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.
- Connaître et utiliser la relation entre deux angles inscrits sur un même cercle interceptant le même arc.

MOTIVATION

Utiliser les propriétés d'angles inscrits dans la vie quotidienne pour délimiter un terrain, schématiser une pièce mécanique, confectionner un vêtement etc.

PRE –REQUIS

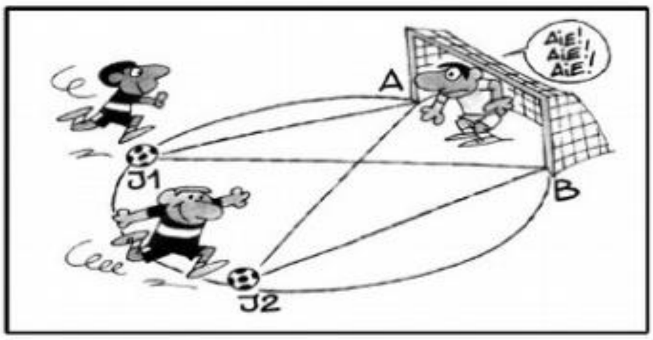
1) Définir arc de cercle.
2) Combien d'angles contient un triangle? Donner une relation entre les mesures des angles d'un triangle.

Solution:

1) un arc de cercle est un morceau d'un cercle.
2) Un triangle a trois angles et la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

SITUATION PROBLEME

JEAN et **PAUL** sont respectivement deux joueurs $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{J_2}$ d'une même équipe de football. Lors d'une séance d'entraînement de tirs au but, **JEAN**, **PAUL** et les pieds de poteaux **A** et **B** sont sur un même cercle comme le montre la figure ci-dessous.



L’entraîneur voudrait savoir si **JEAN** et **PAUL** ont les mêmes chances de marquer un but.

Aide-le à répondre à sa préoccupation.

ACTIVITE D’APPRENTISSAGE

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon $3cm$.

1) Construire (C) et placer les points A, B et C sur (C) tel que le centre O soit dans le triangle ABC.
2) Démontrer que les triangles ABO, ACO sont tous isocèles.
3) a) Donner une relation entre $mes(\widehat{AOB})$ et $mes(\widehat{BAO})$.

   b) Donner la relation entre $mes(\widehat{AOC})$ et $mes(\widehat{CAO})$.

   c) Donner une relation entre $mes(\widehat{BAC})$, $mes(\widehat{BAO})$ et $mes(\widehat{CAO})$.

   d) Donner une relation entre $mes(\widehat{BOC})$, $mes(\widehat{AOB})$ et $mes(\widehat{AOC})$.
4) En utilisant la question **3)**, donner une relation entre $mes(\widehat{BAC})$ et $mes(\widehat{BOC})$.

RESUME

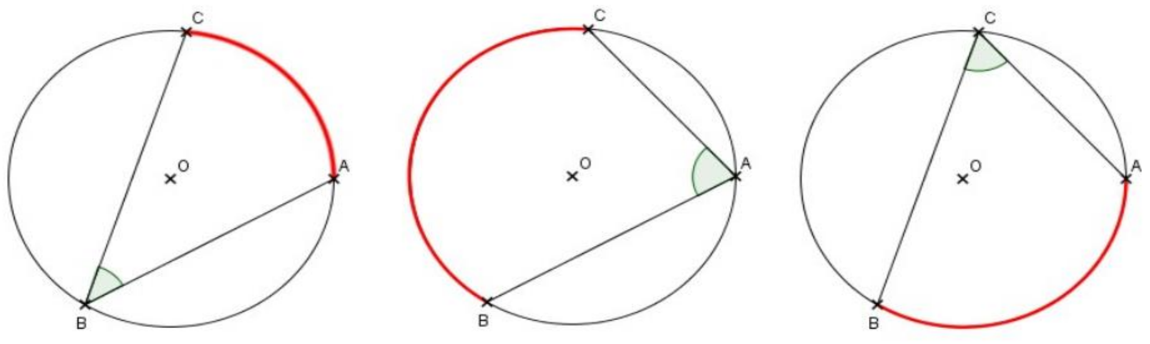
DEFINITIONS-VOCABULAIRE

Définition 1 : Angle inscrit

Dans un cercle, un **angle inscrit** est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les cotés coupent le cercle en deux points distincts.

Exemple 1 :

- Voici quelques exemples d'angles inscrits :



(1) (2) (3)

(1) : L'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{AC}$.

(2) : L'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.

(3) : L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{AB}$.

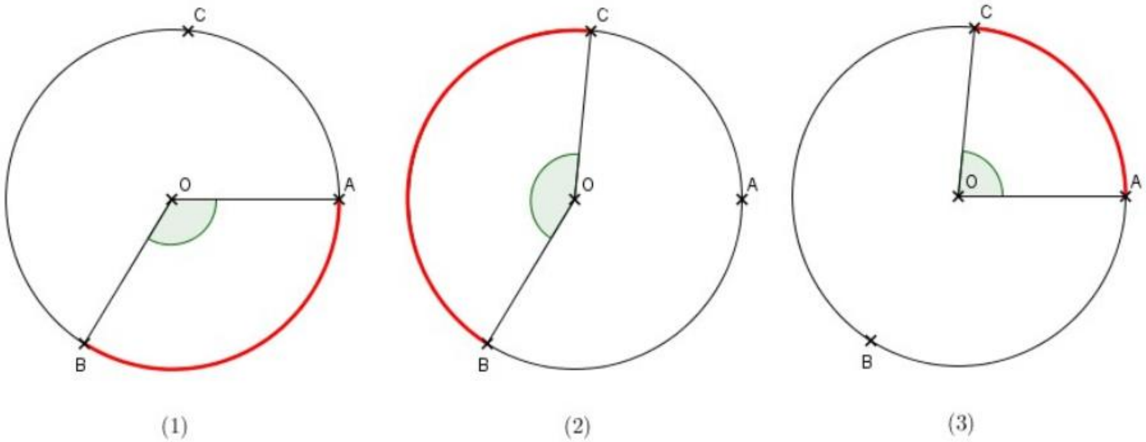
- Dans l'activité introductive, les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont des angles inscrits.

Définition 2 : Angle au centre

Dans un cercle, un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre d'un cercle.

Exemple 2 :

- voici quelques exemples d'angles au centre :



(1) : L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{AB}$.

(2) : L'angle $\widehat{BOC}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.

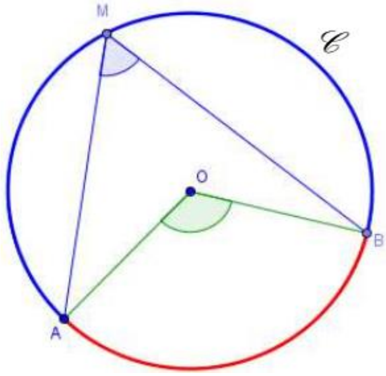
(3) : L'angle $\widehat{AOC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle $\widehat{AC}$.

- Dans l'activité introductive, les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOC}$ sont des angles au centre

Vocabulaire :

(C) désigne un cercle de centre O. A, M et B sont 3 points distincts du cercle (C) tel que $M \notin \widehat{AB}$. l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte le même arc $\widehat{AB}$ que l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

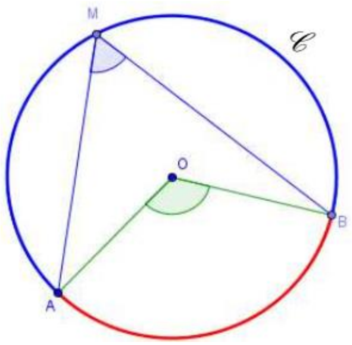
On dit que l'angle $\widehat{AOB}$ est **l'angle au centre associé** à *l'angle inscrit* $\widehat{AMB}$.



PROPRIETES D'ANGLES INSCRITS

Propriété 1 :

Dans un cercle, si un angle inscrit intercepte le même arc (petit arc) qu'un angle au centre, alors la mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre.

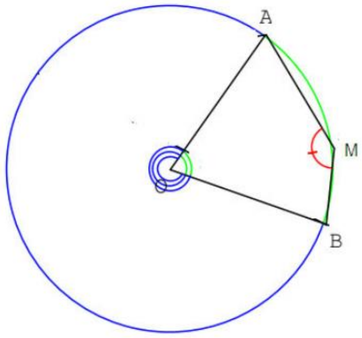


$$\boldsymbol{mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}}$$

Exemple 3 : Dans l'activité introductive, $mes\ \widehat{BAC} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{BOC}$

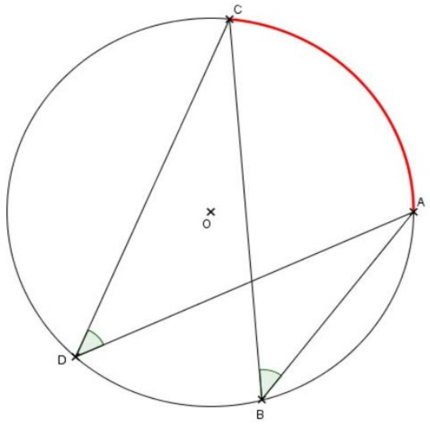
Propriété 2 :

Dans un cercle, si un angle inscrit intercepte le grand arc alors son angle au centre associé est un angle rentrant et on a la relation :



$\boldsymbol{mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}}$ **ou encore** $\boldsymbol{mes\ \widehat{AMB} = 180^\circ - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}}$

Propriété 3 :

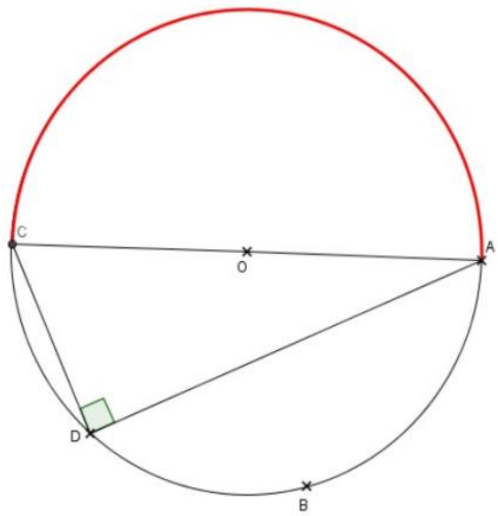


Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

$$\boldsymbol{mes\ \widehat{ABC} = mes\ \widehat{ADC}}$$

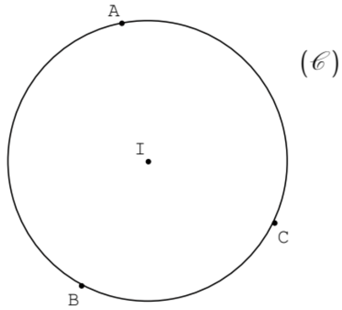
Propriété 4 :

Soit $[AC]$ un diamètre du cercle et D un point de ce cercle distinct des points A et C. Alors le triangle ADC est rectangle en D.



EXERCICES D'APPLICATION

I- Dans la figure ci-dessous, les points *A*, *B* et *C* sont sur le cercle de centre *I*.



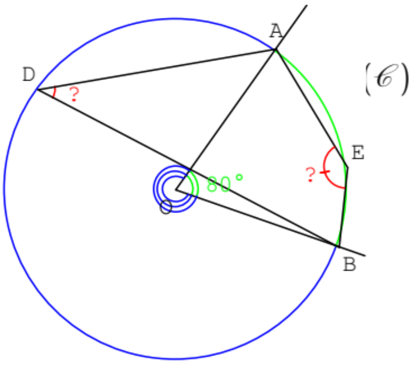
1) Reproduire la figure.

2) a) Colorer en rouge l'arc de cercle intercepté par l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

b) Marquer en bleu l'angle au centre qui intercepte le même arc de cercle que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

3) Sachant que $mes\ \widehat{BIC} = 130^\circ$, déterminer en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

II- Dans la figure ci-dessous, les points A, E, B et D appartiennent au cercle de centre O tel que $mes\,\widehat{BOA} = 80^{\circ}$.



1) Déterminer en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$.

2) Déterminer en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.

1) puis déduire celle du carré EFGH.

LEÇON 2

Polygones réguliers

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Reconnaitre un polygone régulier.
- Construire un polygone régulier connaissant la mesure de l'angle au centre et le rayon de son cercle circonscrit.
- Savoir calculer pour un polygone régulier la mesure de ses angles et celle de l'angle au centre qui intercepte chaque côté du polygone.

MOTIVATION

Décrire des formes planes dans un décor, identifier l'objet décrit par une personne, détecter la répétition d'un motif dans une peinture, sur un tissu, sur un objet d'art graphique….

Dessiner un motif de tissu.

PRE REQUIS

1) Définir un polygone et citer quelques exemples.
2) Comment appelle-t-on le cercle qui passe par les sommets d'un polygone ?

Solution

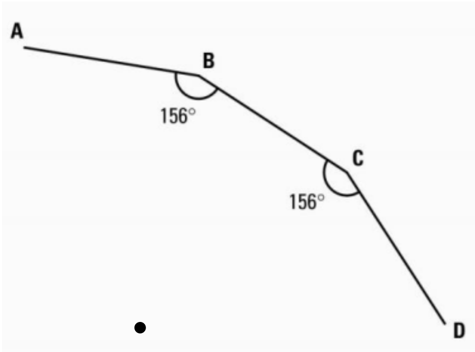
1) Un polygone est une figure géométrique qui a au moins trois côtés.

   Exemple : un triangle, un rectangle, un trapèze, un parallélogramme, un losange, …

2) La cercle qui passe par les sommets d'un polygone est appelé cercle circonscrit au polygone

SITUATION PROBLEME

Dans le cadre de la semaine des sciences, Olivier veut déterminer le nombre de cotés et le périmètre d'un polygone régulier dans la cour arrière de l'école. Tous les segments déjà tracés mesurent 2 m et forment un angle de 156° entre eux. Olivier est embarrassé, aide le à résoudre son problème.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon $3cm$.

2) Placer deux points A et B sur le cercle (C) tel que $mes(\widehat{AOB}) = 72^{\circ}$.

3) Tracer le segment $[AB]$ puis à l'aide du compas, reporter la longueur de ce segment le long du cercle (C) pour obtenir les points C, D et E et enfin relier les points du polygone $ABCDE$.

4) Combien de cotés possède ce polygone ? comment l'appelle-t-on ?

5) Justifier que les cotés consécutifs de ce polygone ont même longueur et que ses angles sont de même mesure.

6) En déduire la nature exacte de ce polygone.

RESUME

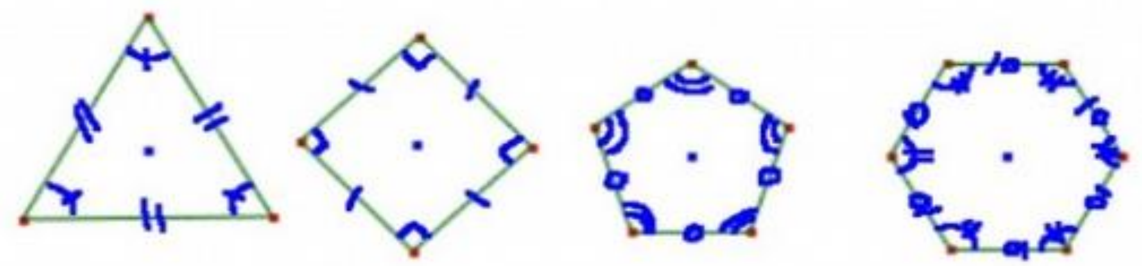
Définition :

Un **polygone régulier** est un polygone dont tous ses cotés ont la même longueur et tous ses angles formés par deux cotés consécutifs sont de même mesure.

Exemple 1:

Voici quelques polygones réguliers bien connus :

Un triangle équilatéral, un carré, un pentagone régulier et un hexagone régulier.



Exemple 2 :

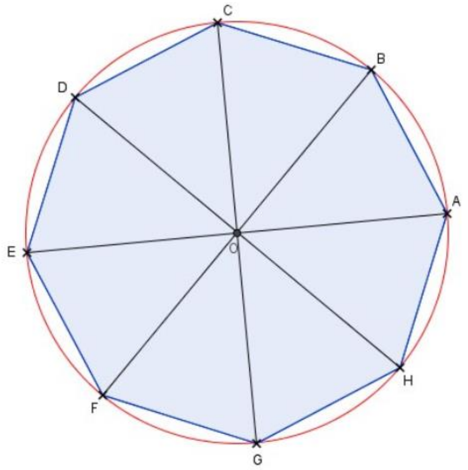
Nombre de cotés	Polygone régulier
3	Triangle équilatéral
4	Carré
5	Pentagone régulier
6	Hexagone régulier
7	Heptagone régulier
8	Octogone régulier
9	Ennéagone régulier
10	Décagone régulier

PROPRIETES :

Propriété 1 :

Si un polygone est **régulier**, alors il est **inscriptible** dans un cercle.

Le centre de ce cercle est appelé **centre du polygone régulier**.

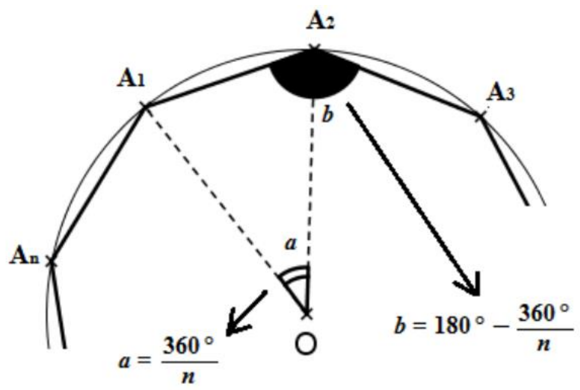


Exemple 3:

- Un octogone régulier est inscriptible dans un cercle.
- Dans l'activité introductive, le pentagone régulier $ABCDE$ de centre O est inscriptible dans un cercle.

Propriété 2 :

- Si un polygone régulier a n côtés, alors l'angle au centre qui intercepte chaque côté mesure $\frac{360^\circ}{n}$
- Si un polygone régulier a n côtés, alors l'angle formé par deux côtés consécutifs est $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$



.

Exercice d'application

1) a) Construire un hexagone régulier $ABCDEF$.

   b) En déduire 3 rectangles et 3 losanges.

2) a) Construire un décagone régulier $ABCDEFGHIJ$.

   b) En déduire 2 pentagones réguliers.

   c) En vous servant de la question a) réalisez une étoile.

CHAPITRE 10

THALES DANS LE TRIANGLE

INTERET

L'intérêt de ce cours réside sur le fait que nous pouvons être appelé à calculer certaines longueurs ou distances dans un triangle, démontrer à partir des valeurs numériques le parallélisme de deux droites.

MOTIVATION

Dans notre vie de tous les jours, nous faisons face à des problèmes comme l'inclinaison du toit de notre future maison, l'instabilité d'une table à repasser ou encore sur comment déterminer certaines longueurs telles que : la hauteur d'un mur, la hauteur d'un mât de drapeau. Cette leçon donne des outils permettant de répondre à ces préoccupations.

LEÇON 1

Propriété directe de THALES

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Reconnaître une configuration de Thalès et utiliser la propriété directe de Thalès pour calculer des longueurs.

PREREQUIS

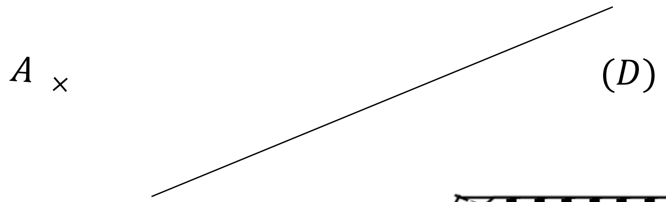
1) Détermine la longueur du segment sachant que :

a) $\frac{AB}{3} = 7$ b) $\frac{CD}{15} = \frac{7}{3}$ c) $\frac{3}{4} = \frac{EF}{16}$

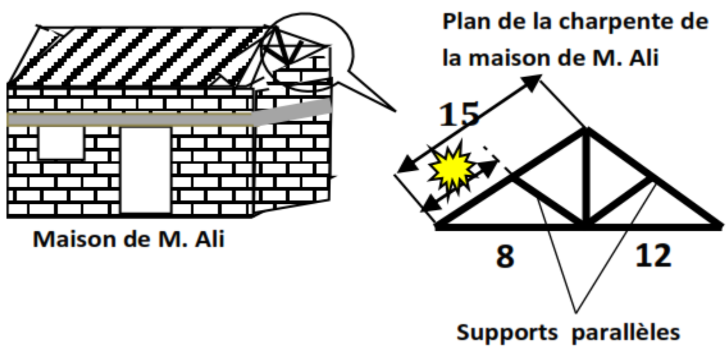
d) $\frac{8}{GH} = \frac{2}{5}$ e) $\frac{IJ}{4{,}2} = \frac{4{,}2}{3{,}6}$ f) $\frac{85}{KL} = \frac{17}{3}$

g) $\frac{MN - 5}{3} = 8$ h) $\frac{OP + 2}{28} = \frac{3}{12}$

2) Trace une droite (D') parallèle à (D) passant par A



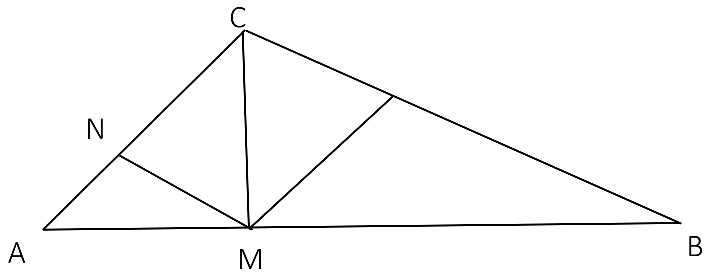
SITUATION PROBLEME



Les figures ci-contre représentent respectivement la maison de M. Ali et le plan de la charpente de cette maison. Ce dernier veut se rassurer si les techniciens ont respecté le plan de la charpente. Malheureusement pour lui une des mesures a été effacée par une tache. Retrouver cette mesure par calcul

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

La figure ci-dessous représente le plan de charpente d'une maison. AB=2O m, AM=8m et AC=15m.



1) En considérant que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et qu'on a l'égalité $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{AN}{AC}$ calculer la distance AN.
2) Quelle est la valeur de la mesure effacée sur la charpente de M.Ali ?

SOLUTION

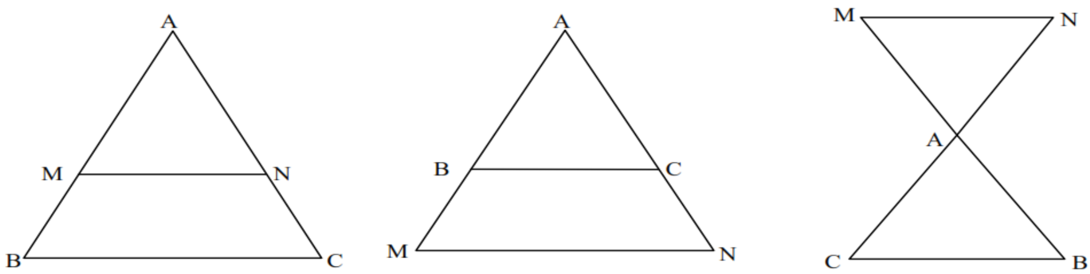
1) $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{AN}{AC}$ ce qui entraîne que $\text{AN} \times \text{AB} = \text{AM} \times \text{AC}$ donc $\text{AN} = \frac{\text{AM}\times\text{AC}}{\text{AB}}. = \frac{8\times15}{20} = 6$ donc **AN=6**
2) La mesure effacée sur la charpente de M.Ali est de 6 cm

RESUME

Propriété directe de Thalès :

Soit ABC un triangle, M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC) tel que A, M

et B soient alignés dans le même ordre que A, N et C ; si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors on a : $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

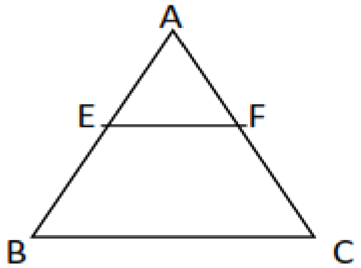


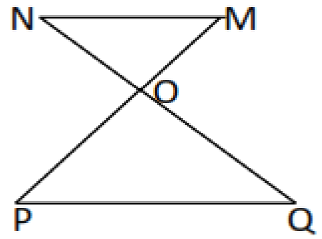
NB : - Cette propriété permet de calculer les longueurs

- **Les figures ci-dessus sont appelées configurations de Thalès**

Exemple

Examine les figures. (EF)//(BC) et (MN)//(PQ)





1) On donne AB=6, AE=2, AC=9. Détermine AF
2) On donne OQ=4, ON=2, OM=3. Détermine OP

Solution

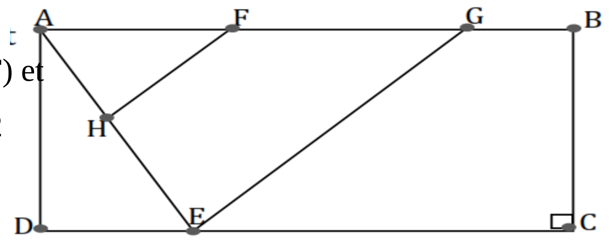
1) (EF)//(BC) donc d'après la propriété de Thalès $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ on a $AF \times AB = AE \times AC$ donc $AF = \frac{AE \times AC}{AB}$. AN : $AF = \frac{2 \times 9}{6} = 3$ donc **AF=3**

2) (MN)//(PQ) donc d'après la propriété de Thalès $\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OC}$ on a $OP \times ON = OM \times OC$ donc $OP = \frac{OM \times OQ}{ON}$. AN : $OP = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ donc **OP=6**

EXERCICE D'APPLICATION

Sur la figure ci-contre ABCD est un rectangle ; les droites (HF) et (EG) sont parallèles. On donne AG=7, DE=3 ; AD=4 et AH=2

a) Montrer que AE=5

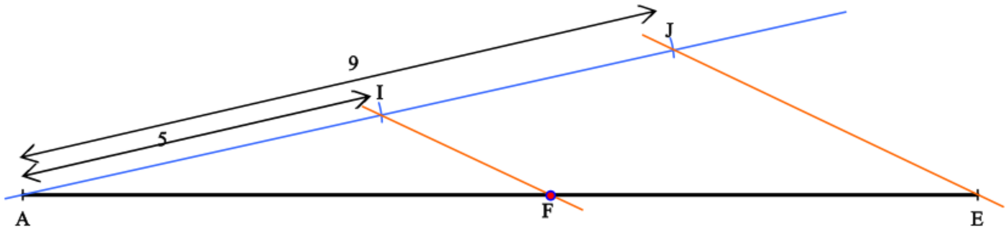


Exercice résolu : Placer un point connaissant un rapport de distances

Tracer un segment [AE] de 13 cm de longueur.

1. Construire le point F de ce segment qui est tel que $\frac{AF}{AE} = \frac{5}{9}$
2. Expliquer votre construction (programme de construction)
3. Justifier votre construction à l'aide de la propriété de Thalès. (Pourquoi le point F que vous avez construit est-il bien celui attendu ?)

Solution



Programme de construction :

Etape 1 : on trace un segment [AE] de longueur 13 cm

Etape 2 : on trace une demi-droite [Ax) distincte de [AE)

Etape 3 : et à l'aide d'un compas (ou d'une règle) on marque sur [Ax) les points I et J tels que AI=5cm et AJ=9cm

Etape 4 : On trace le segment [JE]

Etape 5 : Le point F est le point d'intersection de la parallèle à (JE) passant par I

Justification

Le programme de construction fait apparaître deux triangles (AIF et AJE) qui forment une configuration de Thalès.

D'après la propriété directe de Thalès, on a : $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AJ}}$ c'està dire $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}} = \frac{5}{9}$

LEÇON 2

Réciproque de propriété directe de THALES

Durée : 100 minutes

OBJECTIF PEDAGOGIQUE

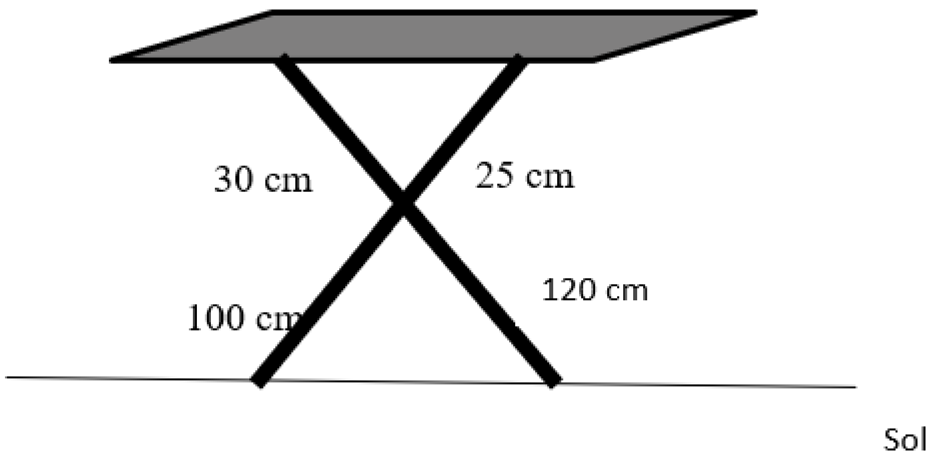
Utiliser la propriété réciproque de Thalès pour justifier le parallélisme de deux droites.

PRE REQUIS

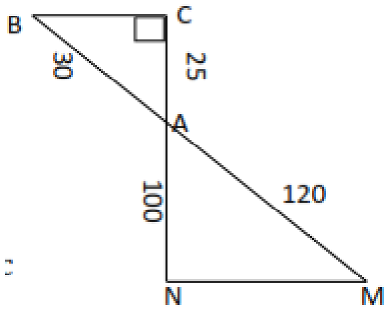
1) Construis un triangle ABC. Place les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
2) Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

SITUATION PROBLEME

Paul est un bricoleur.Il souhaite se fabriquer une planche à repasser et veut se rassurer que la planche sera bien parallèle au Sol.Il monte sa pièce suivant le modèle ci-dessous.Aide Paul à vérifier si la planche est parallèle au sol.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE



On considère la figure ci-contre

1-a) Calcule $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

1-b) Compare $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

2) Que peut-on dire des droites (MN) et (BC) ?

3) La planche à repasser de Paul est-elle parallèle au sol ?

SOLUTION

1-a) $\frac{AM}{AB} = \frac{120}{30} = 4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{100}{25} = 4$

1-b) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

2) En vérifiant avec l'équerre on affirme que les droites (MN) et (BC) sont parallèles car elles admettent une perpendiculaire commune qui est la droite (NC)

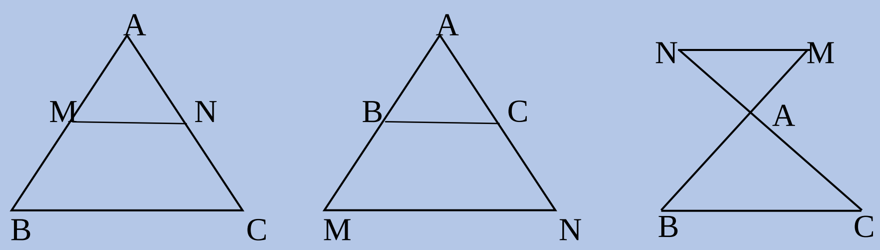
3) La planche à repasser de Paul est parallèle au sol.

RESUME

Soit ABC un triangle et N deux points du plan tels que

- M ∈ à la droite (AB) et N ∈ à la droite (AC)
- Les points A, M et B sont alignés dans le
  Le même ordre que les points A, N et C.

$Si\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles



Réciproque de la Propriété de Thalès

Exemple

Examine les figures. On donne AB=6, AE=2, AC=9, AF=3

OQ=4, ON=2, OM=3 et OP=5

1) Montrer que (EF)//(BC)

2) Peut-on dire que (MN)//(PQ) ?

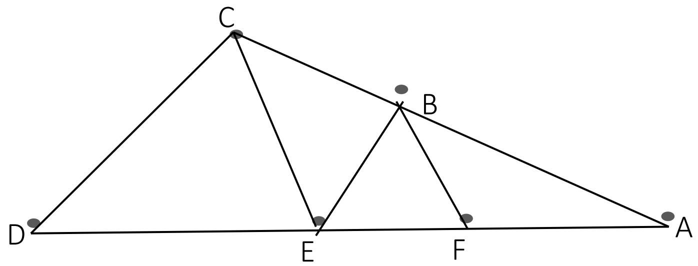
Solution

1) $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ ainsi d'après la réciproque de la propriété de Thalès on a (EF)//(BC)

2) $\frac{OM}{OP} = \frac{3}{5}$ et $\frac{ON}{OQ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OM}{OP} \neq \frac{ON}{OQ}$ ainsi d'après la contraposée de la propriété de Thalès (MN) et (PQ) sont non parallèles.

EXERCICE D'APPLICATION

On cobsidère la figure ci-dessous. AB=5m, BC=4m ; AF=3,5m, FE=2,8m ; (CD)//(BE)



a) Montrer que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

b) Calcule la distance AD

<u>SOLUTION</u>

a) $\frac{AF}{AE} = \frac{3,5}{6,3} = 0,55$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{9} = 0,55$ ainsi d'après la réciproque de la propriété de Thalès on a (CE)//(BF)

b) (CD)//(BE) donc d'après la propriété de Thalès $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ on a $AD \times AB = AE \times AC$ donc $AD = \frac{AE \times AC}{AB}$. AN : $AD = \frac{6,3 \times 9}{5} = 11,34$ donc AD=11,34

DEVOIRS

<u>EXERCICE 1</u>

Construire un triangle MNP tel que : MN = 8 cm, MP = 10 cm et NP = 7 cm. Placer le point Q du

segment [MN] tel que MQ = 3,2 cm. La parallèle à (NP) passant par Q coupe (MP) en R.

1. Calculer MR. En déduire PR.

2. Placer le point S du segment [NP] tel que PS = 4,2 cm.

3. Montrer que les droites (RS) et (MN) sont parallèles.

<u>EXERCICE 2</u>

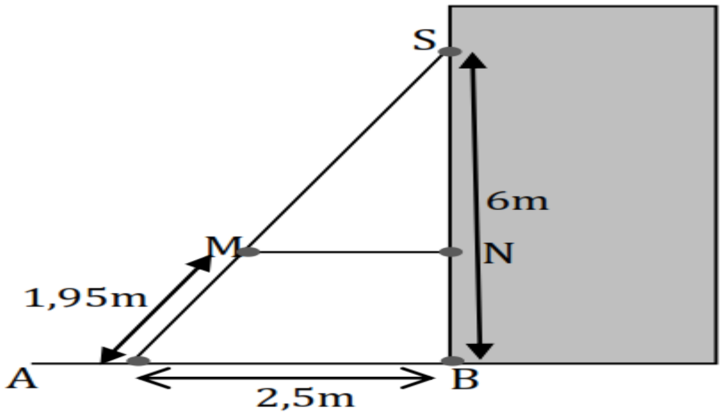
Pour consolider un bâtiment, on a construit un contrefort en bois (dessin ci-contre).

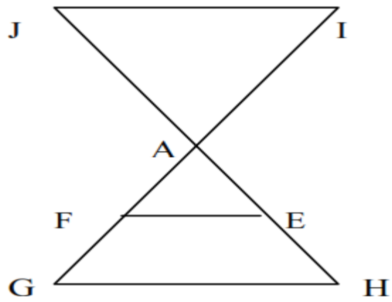
On donne: BS=6m; BN=1,8m; AM=1,95m; AB=2,5m.

a) En considérant que le montant [BS] est perpendiculaire au sol, calculer la longueur AS.

b) Calculer les longueurs SM et SN.

c) Démontrer que la traverse [MN] est bien parallèle au sol.





On considère la figure ci-contre
Les droites (EF) et (HG) sont parallèles.
On donne : AE=3cm, AF= 4cm, AH=7cm et EF=6cm
a) Calculer AG et HG
b) AI=6cm et AJ=4,5cm
Les droites (IJ) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

CHAPITRE 11

TRIGONOMETRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

INTERET

La trigonométrie a pour intérêt de mettre en relation les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et la mesure des angles aux sommets

MOTIVATION

La trigonométrie a beaucoup d'application dans les domaines variés : navigation, construction de bâtiment, cartographie, astronomie…

LEÇON 1

Sinus d'un angle dans un triangle

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Déterminer la mesure d'un angle ou la longueur d'un côté dans un triangle rectangle en utilisant le sinus.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Trouver à l'aide d'une calculatrice le sinus d'un angle aigu de mesure donnée.
- Trouver à l'aide d'une calculatrice la mesure en degrés (ou un encadrement de cette mesure) d'un angle aigu dont on connait le sinus.
- Calculer le sinus, d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Utiliser le sinus pour calculer une longueur dans un triangle rectangle.

PRÉREQUIS

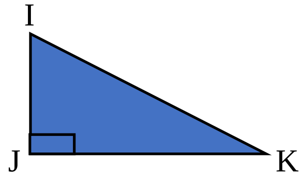
1) Triangle rectangle (propriété de Pythagore)
   a. Construire un triangle rectangle IJK est un triangle tel que : IJ = 6 cm ; JK = 8 cm et IK = 10 cm.
   b. Quelle coté représente l'hypoténuse ?
   c. Montrer que ce triangle est rectangle ?
2) Relation de proportionnalité (déterminer la 4ème proportionnalité)

   Déterminer x dans chaque cas en donnant le résultat avec l'arrondi à 0,1 près

   a) $\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$ b) $3x = \frac{15}{2}$ c) $\frac{21}{8} = \frac{6}{x}$
3) Utilisation de la calculatrice
4) Donner quelques angles aigus

Solution

1)
   a. Construction du triangle



   b. Le coté qui représente l'hypoténuse est le côté IK
   c. $IJ^2 = 6^2 = 36$; $JK^2 = 8^2 = 64$ et $IK^2 = 10^2 = 100$

   Comme $64 + 36 = 100$ alors le triangle IJK est rectangle en J
2)

a) $x = \frac{7\times2}{4}$ équivaut à $x = \frac{7}{2}$;

b) $3x = \frac{15}{2}$ équivaut à $x = \frac{15}{6}$ équivaut à $x = \frac{5}{2}$

c) $\frac{21}{8} = \frac{6}{x}$ équivaut à $21 \times x = 8 \times 6$ équivaut à $x = \frac{16}{7}$

3) Utilisation de la calculatrice

Identifier la touche **sin**, de votre calculatrice

Identifier la touche **shift** et appuyer sur **shift** et sur la touche ***sin***……

Qu'observez-vous à l'écran ? (Voir calculatrice)

4) Donner quelques exemples d'angles aigus (20° ; 30° ; 42,5°…)

SITUATION PROBLÈME

Monsieur Kamga possède un terrain qui a la forme d'un triangle ABC rectangle en A. ce terrain est partagé en deux parcelles HAC et AHB comme l'indique la figure 1 ci-contre. Monsieur Kamga veut connaitre la longueur du cotés $[AH]$.

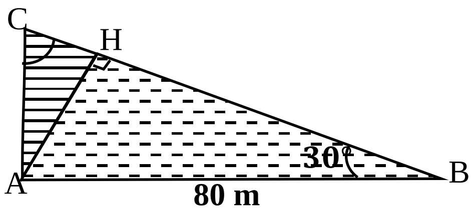
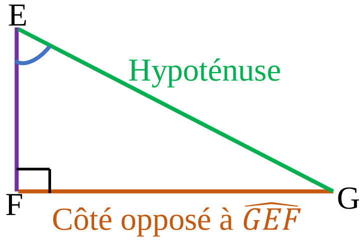


Figure 1

Aider monsieur Kamga à retrouver la longueur du coté $[AH]$

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

L'unité est le mètre

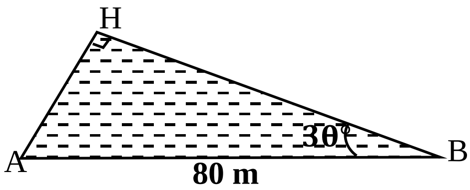


On considère les deux triangles rectangles **EFG** et **ABH** tel que :

EF = 4 ; $FG = 4\sqrt{3}$; $EG = 8$ et mesure $\widehat{GEF} = 60°$

1) Calcule le rapport $\frac{FG}{EG}$.

2) A l'aide de ta calculatrice scientifique, utilise la touche sin pour calculer sinus de 60°noté : $\sin 60°$ et compare avec la question 1).



3) En te servant de la figure, propose une définition pour $\sin \widehat{GEF}$

4) Quelle est la longueur du coté $[AH]$ dans le triangle ABH ?

Résolution de l'activité d'apprentissage

1) Calcule le rapport $\frac{FG}{EG}$. Réponse : $\frac{FG}{EG} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2) Avec la calculatrice : $\sin 60° = 0{,}866025403 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; comparaison : $\sin 60° = \frac{FG}{EG}$
3) Proposons une définition pour $\sin \widehat{GEF}$: $sin\ \widehat{GEF} = \frac{coté\ opposé\ à\ \widehat{GEF}}{hypothénuse} = \frac{FG}{EG}$
4) Dans la parcelle AHB, $\sin 30° = \frac{AH}{AB}$ équivaut à $0{,}5 = \frac{AH}{80}$

   équivaut à $AH = 0{,}5 \times 80$.

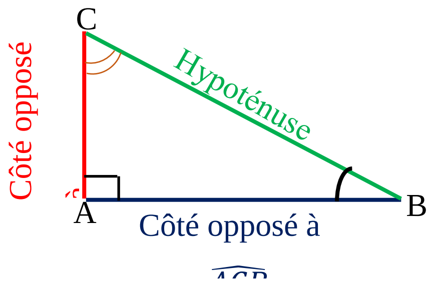
   D'où $AH = 40\ m$

RESUME

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A , on définit le sinus, de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

➢ $sin\ \widehat{ABC} = \frac{coté\ opposé\ à\ \widehat{ABC}}{hypothénuse} = \frac{AC}{BC}$



Remarque

le sinus, d'un angle n'a pas d'unité.

Propriétés

➢ Le sinus d'un angle aigu est strictement plus grand que 0 et strictement plus petit que 1

➢ Lorsqu'on connait le sinus, d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant respectivement les touches **shift et sin** pour activer la touche $\boldsymbol{sin^{-1}}$ de la calculatrice scientifique.

Exemple 1

On donne :

$\sin \widehat{ABC} = 0{,}8$. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en degré au centième (à 0,01) près.

Solution

Shift *et* sin (0,8) = $sin^{-1}(0{,}8) = 53{,}13010235$ .... D'où mes $\widehat{ABC} = 53{,}13°$

Exemple 2

On donne :

$\sin\widehat{ABC} = 0{,}4$. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au degré près.

Solution

Shift et sin (0,4) = $sin^{-1}(0{,}4)$ =23,578178…..... D'où mes $\widehat{ABC} = 23°$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 : utilisation de la calculatrice

A l'aide la calculatrice, calcule la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

sinus	0,4	0,32	0,9
Mesure de l'angle			

Exercice 2 : détermination d'un angle dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et BC = 7.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,01 près.

Exercice 3 : détermination d'une distance

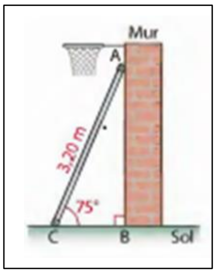
L'unité est le centimètre.

DEF est un triangle rectangle en D tel que mes $\widehat{DEF} = 30°$ et DF = 5. Calculer la mesure du segment $[EF]$

Exercice 4 : détermination d'une distance

Une échelle de longueur AC = 3,20m est appuyée contre un mur. Pour la sécurité, l'échelle doit faire un angle de 75° avec le sol.

A quelle distance AB du point B, doit se placer le sommet A de l'échelle ?



LEÇON 2

Cosinus d'un angle dans un triangle

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Déterminer la mesure d'un angle ou la longueur d'un côté dans un triangle rectangle en utilisant le cosinus.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

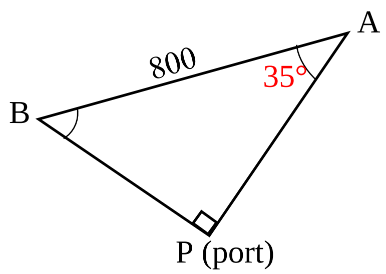
- Trouver à l'aide d'une calculatrice le cosinus d'un angle aigu de mesure donnée.
- Trouver à l'aide d'une calculatrice la mesure en degrés (ou un encadrement de cette mesure) d'un angle aigu dont on connait le cosinus.
- Calculer le cosinus, d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Utiliser le cosinus pour calculer une longueur dans un triangle rectangle.

PRE-REQUIS

Utilisation de la calculatrice

- Identifier la touche **cos**, de votre calculatrice
- Identifier la touche **shift** puis appuyer sur **shift** et sur la touche $\boldsymbol{cos}$.......
- Qu'observez-vous à l'écran ? (Voir calculatrice)

SITUATION PROBLÈME



Deux bateaux sont au large du port de Douala et souhaitent le rejoindre pour y passer la nuit. On peut schématiser leurs positions par les points A et B. Les deux bateaux sont séparés de AB = 800 m. le bateau A voit le port sous l'angle $\widehat{PAB}$ de mesure 35° et le bateau B voit le port sous l'angle $\widehat{PBA}$ tels que le triangle PAB soit rectangle en P.

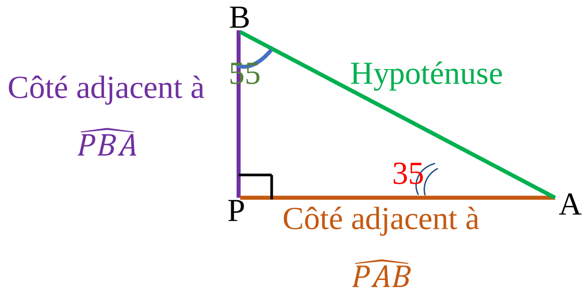
Quelle distance (à l'unité près) sépare le bateau A du port ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

L'unité est le mètre.

APB est un triangle tel que : $\boldsymbol{AB = 800\ m}$;

$\boldsymbol{BP = 459\ m}$.



1) Calcule le rapport $\frac{BP}{AB}$
2) A l'aide de ta calculatrice scientifique, utilise la touche cos pour calculer cosinus de 55°noté : $\cos 55°$ et compare avec la question 1).
3) En te servant de la figure, propose une définition pour $\cos \widehat{PBA}$
4) Quelle est la distance AP ? (à l'unité près)

Résolution de l'activité d'apprentissage

1) 1)Réponse : $\frac{BP}{AB} = \frac{459}{800} = 0{,}57375$
2) Avec la calculatrice : $\cos 55° \approx 0{,}573564$; comparaison :$\cos 55° \approx \frac{BP}{AB}$
3) Définition pour $\cos \widehat{PBA}$: $cos\ \widehat{PBA} = \frac{coté\ adjacent\ à\ \widehat{PBA}}{hypoténuse} = \frac{BP}{AB}$
4) Distance AP.

   Le triangle APB étant rectangle en P, $\cos \widehat{BAP} = \frac{AP}{AB}$

   Soit : $\cos 35° = \frac{AP}{800}$

   Soit :$AP = 800 \times \cos 35°$

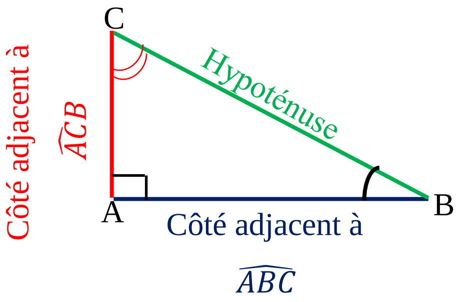
   Soit ; $AP \approx 655\ m$

RESUME

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A , on définit le cosinus d'un angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

➢ $cos\ \widehat{ABC} = \frac{coté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}{hypothénuse} = \frac{AB}{BC}$



Remarque

Le cosinus d'un angle n'a pas d'unité.

Propriétés

- Le cosinus d'un angle aigu est strictement plus grand que 0 et strictement plus petit que 1
- Lorsqu'on connait le cosinus, d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant respectivement les touches **shift et** $\boldsymbol{cos}$ pour activer la touche $\boldsymbol{cos^{-1}}$ de la calculatrice scientifique.

Exemple 1

On donne :

$\cos \widehat{ABC} = 0{,}8$. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en degré au centième (à 0,01) près.

Solution

Shift et cos (0,8) = $cos^{-1}(0{,}8)$ = 36,869897 .... D'où mes $\widehat{ABC} = 36{,}87°$

Exemple 2

On donne :

$\cos \widehat{ABC} = 0{,}5$. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au degré près.

Solution

Shift et cos (0,5) = $cos^{-1}(0{,}5)$ = 60,00000 ….. D'où mes $\widehat{ABC} = 60°$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 : utilisation de la calculatrice

A l'aide la calculatrice, calcule la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

cosinus	0,4	0,32	0,9
Mesure de l'angle			

Exercice 2 : détermination d'un angle dans le triangle rectangle

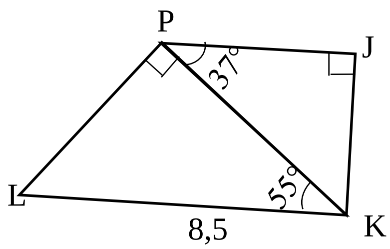
EFG est un triangle rectangle en F tel que : EF = 4 cm et EG = 7.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ au degré près.

Exercice 3 : détermination d'une distance

L'unité est le mètre

Calculer les longueurs des cotes PK et PJ. .



LEÇON 3

Tangente d'un angle aigu dans un triangle

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Déterminer la mesure d'un angle ou la longueur d'un côté dans un triangle rectangle en utilisant la tangente.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Trouver à l'aide d'une calculatrice la tangente d'un angle aigu de mesure donnée.
- Trouver à l'aide d'une calculatrice la mesure en degrés (ou un encadrement de cette mesure) d'un angle aigu dont on connait la tangente.
- Calculer la tangente, d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Utiliser la tangente pour calculer une longueur dans un triangle rectangle.

PRE-REQUIS

Identifier la touche tan, de votre calculatrice

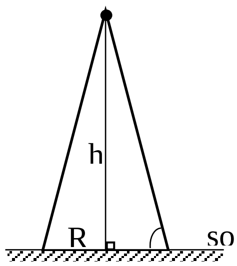
Identifier la touche shift touches puis appuyer sur shift et sur la touche $\boldsymbol{tan}$…….

Qu'observez-vous à l'écran ? (Voir calculatrice)

SITUATION PROBLEME

Devant la maison familiale de monsieur NONO, se trouve un lampadaire de hauteur h = 2,50 m. Ce lampadaire dessine dans la nuit, un disque de rayon R = 95cm **(figure 2).**

Quelle est la mesure de l'angle α, arrondie au degré, formé par le cône de la lumière avec le sol ?



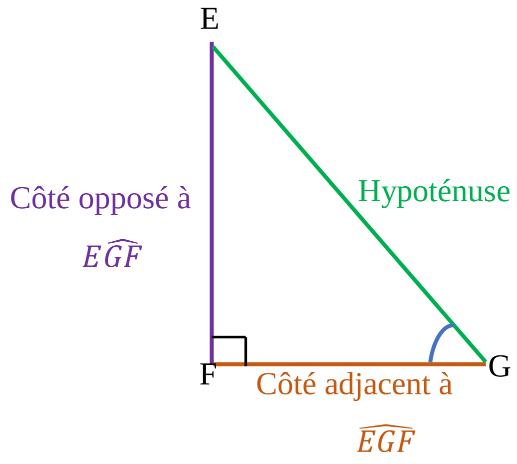
Figure

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

L'unité est le mètre.

EFG est un triangle tel que : $\boldsymbol{EF = 2,55\ m}$ et $\boldsymbol{FG = 0,95\ m}$

1) Calcule le rapport $\frac{FE}{FG}$ et donne le résultat au 10ème près
2) A l'aide de ta calculatrice scientifique, utilise la touche tan pour calculer tangente de 70° au 10ème près, noté : tan 70° et compare avec la question (1).
3) En te servant de la figure, propose une définition pour tan $\widehat{GEF}$
4) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{GEF}$, arrondie au degré ?



Résolution de l'activité d'apprentissage

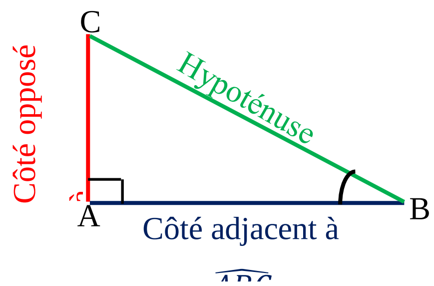
1) Calcule le rapport $\frac{FG}{FE}$. Réponse : $\frac{FG}{FE} = \frac{2,55}{0,95} \approx 2,7$
2) Avec la calculatrice : tan 70° $= 2,74747741 \ldots \ldots \approx 2,7$. Comparaison : tan 70° $= \frac{FG}{FE}$
3) Définition pour tan $\widehat{GEF}$: tan $\widehat{GEF} = \frac{coté\ opposé\ à\ \widehat{GEF}}{coté\ adjacent\ à\ \widehat{GEF}} = \frac{FG}{FE}$
4) La mesure de l'angle $\widehat{GEF}$, arrondie au degré, formé par le cône de la lumière avec le sol est 70°

RESUME

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A , on définit le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

- $tan\ \widehat{ABC} = \frac{coté\ opposé\ à\ \widehat{ABC}}{coté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$



<u>*Remarque :*</u> la tangente d'un angle n'a pas d'unité.

Propriété

Lorsqu'on connait la tangente, d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant respectivement les touches **shift et** $\boldsymbol{tan}$ pour activer la touche $\boldsymbol{tan^{-1}}$ de la calculatrice scientifique.

Exemple 1

On donne :

tan $\widehat{ABC} = 0,5$. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en degré au centième (à 0,01) près.

Solution

Shift et tan (0,5) = $tan^{-1}(0,5) = 26,565051$ .... D'où mes $\widehat{ABC} = 26,57°$

Exemple 2

On donne : $\tan\widehat{ABC} = 1,5$.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au degré près.

Solution

Shift et tan (1,5) = $tan^{-1}(1,5) = 56,309932$ .... D'où mes $\widehat{ABC} = 56°$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 : Utilisation de la calculatrice

A l'aide la calculatrice, calcule la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

Tangente	0,28	1,5	2,3
Mesure de l'angle			

Exercice 2 : détermination d'un angle dans un triangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et AC = 7.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,01 près.

LEÇON 4

Utilisation des formules trigonométriques

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Utiliser les formules trigonométriques pour déterminer la mesure des angles aigus

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Utiliser les formules trigonométriques pour trouver

PRE-REQUIS

Déterminer x

a)$x^2 - 3 = 1$; b) $x^2 + y^2 = 1$ avec $y = 0{,}4$

Solution

a) $x^2 - 3 = 1$ équivaut à $x^2 = 4$ équivaut à $x = \sqrt{4}$ ou $x = -\sqrt{4}$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$

b) $x^2 + y^2 = 1$ équivaut à $x^2 = 1 - y^2$

équivaut à $x^2 = 1 - (0{,}4)^2$

équivaut à $x^2 = 1 - (\frac{4}{10})^2$

équivaut à $x^2 = 1 - \frac{16}{100}$

équivaut à $x^2 = \frac{100-16}{100}$

équivaut à $x^2 = 0{,}84$

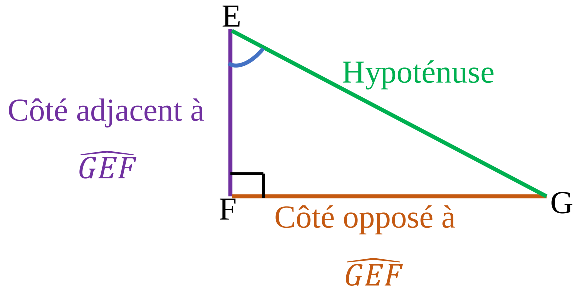
D'où $x = \sqrt{0{,}84}$ ou $x = -\sqrt{0{,}84}$ *

SITUATION PROBLEME

Soit x la mesure d'un angle aigue tel que $cosx = 0{,}8$.

Quelle est la valeur exacte de $\tan x$?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE



EFG est un triangle rectangle en F (voir figure) tel que :

$\left(\cos\widehat{GEF}\right) = 0{,}8$; $\left(\sin\widehat{GEF}\right) = 0{,}6$ et $\tan\widehat{GEF} = 0{,}75$

1) Vérifie que $\left(\cos\widehat{GEF}\right)^2 + \left(\sin\widehat{GEF}\right)^2 = 1$
2) Calculer $\frac{\sin\widehat{GEF}}{\cos\widehat{GEF}}$ et conclure.

Résolution de l'activité d'apprentissage

1) $\left(\cos\widehat{GEF}\right)^2 + \left(\sin\widehat{GEF}\right)^2 = (0{,}8)^2 + (0{,}6)^2$

$$= \frac{64}{100} + \frac{36}{100}$$
$$= 1$$

2) $\frac{\text{Sin}\,\widehat{GEF}}{\cos\widehat{GEF}} = \frac{0{,}6}{0{,}8}$

$$= \frac{6}{8}$$
$$= \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Conclusion :

$$tan\,\widehat{GEF} = \frac{\text{Sin}\,\widehat{GEF}}{\cos\widehat{GEF}}$$

RESUME

Si α(alpha) est un angle aigu on a :

- $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

COSINUS, SINUS DES ANGLES PARTICULIERS : 0°, 30°, 45°, 60°, 90°ET TANGENTE DESDITS ANGLES SAUF POUR 90°.

Mesure de l'angle α	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

EXERCICE D'APPLICATION

Soit a la mesure d'un angle aigue tel que $\sin a = 0{,}4$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin a$
2) En déduire la valeur exacte de $\tan a$

CHAPITRE 12

COORDONNEES D'UN VECTEUR

INTERET

Les vecteurs sont grandement utilisés ; ils permettent de modéliser des grandeurs comme une force, une vitesse, une accélération ou la quantité de mouvement.

MOTIVATION

Pour résoudre de nombreux problèmes de la vie, on utilise les vecteurs : ils nous permettent de reconnaitre des formes planes dans un décor, déterminer les mesures et positions et aussi déployer des raisonnements mathématiques afin de résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie en aviation par exemple.

..

LEÇON 1

Calcul des coordonnées d'un point

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Déployer des raisonnements mathématiques, résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et communiquer des informations.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Calcul des coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des points A et B ;
- Calcul des coordonnées d'un des points A et B connaissant les coordonnées de l'autre point et ceux du vecteur ;
- Calculer les coordonnées du vecteur somme et vecteur produit.

PREREQUIS

1- Place les points A (2 ;-1) ; B (4 ; 2) dans un repère orthonormé, puis calculer $\boldsymbol{x_B - x_A}$ et $\boldsymbol{y_B - y_A}$.

$$\boldsymbol{x_B - x_A = 4 - 2 = 2} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{y_B - y_A = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3}$$

2- Définir vecteurs égaux et opposés vecteurs.

Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Deux vecteurs sont dits opposés s'ils ont la même direction, la même norme mais de sens contraire.

SITUATION PROBLEME

Sur une carte d'une ville, le maire identifie les trois points suivants : lycée, marché et sa maison. Suite à la demande des habitants, Il désire placer un salon de coiffure (C) aligné avec la maison et le lycée et situé à égale distance. De même entre le lycée et le marché, le maire voudrait placer un poste de police (P) toujours aligné et à égale distance.

Préciser par les positions le lieu précis où le salon de coiffure et le poste de police doivent être placés en précisant leurs coordonnées géographiques.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Dans un repère orthonormé (O, I, J).

1- Place les points A (2 ; -1) ; B (4 ; 2) et C (4 ; -1)

2- On se propose d'aller du point A au point B en ne faisant au maximum que deux déplacements horizontal et vertical.

a) Cite un chemin que tu peux emprunter.

b) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OI}$?exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.

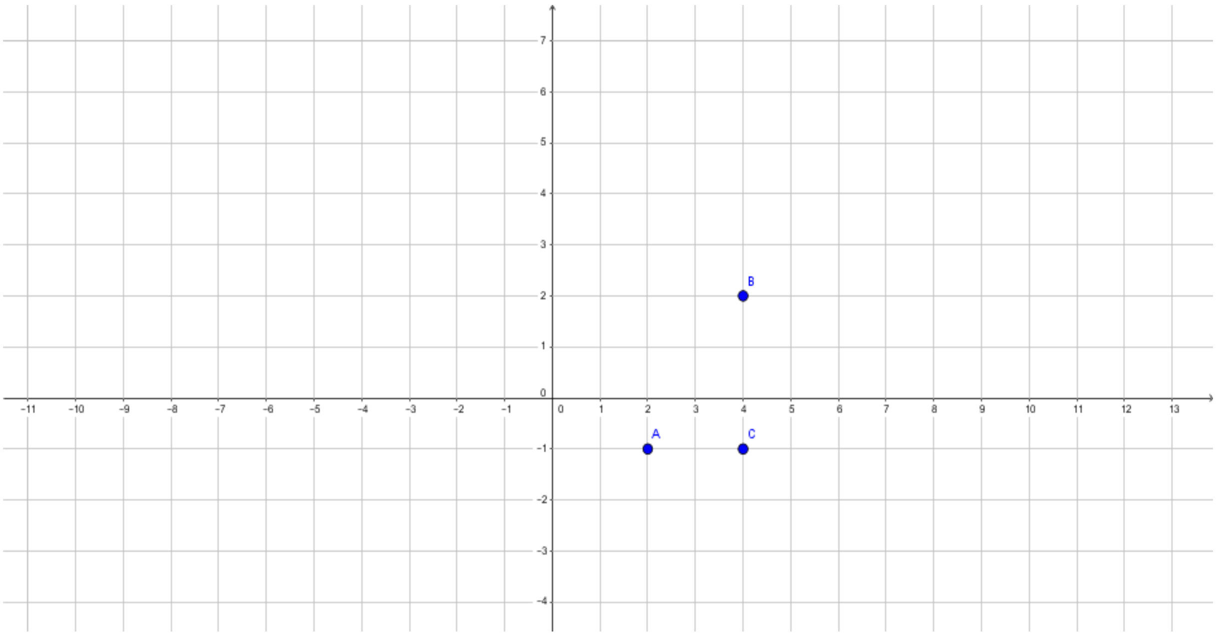
c) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OJ}$?exprime $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$.

d) Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

3) Soit E milieu de segment $[AB]$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{OE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

4) Préciser par les positions le lieu précis où le salon de coiffure et le poste de police doivent être placés en donnant leurs coordonnées géographiques.

SOLUTION :



2 a) A→C→B

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont colinéaires et on a : $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OI}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires et on a : $\overrightarrow{CB} = 3\,\overrightarrow{OJ}$

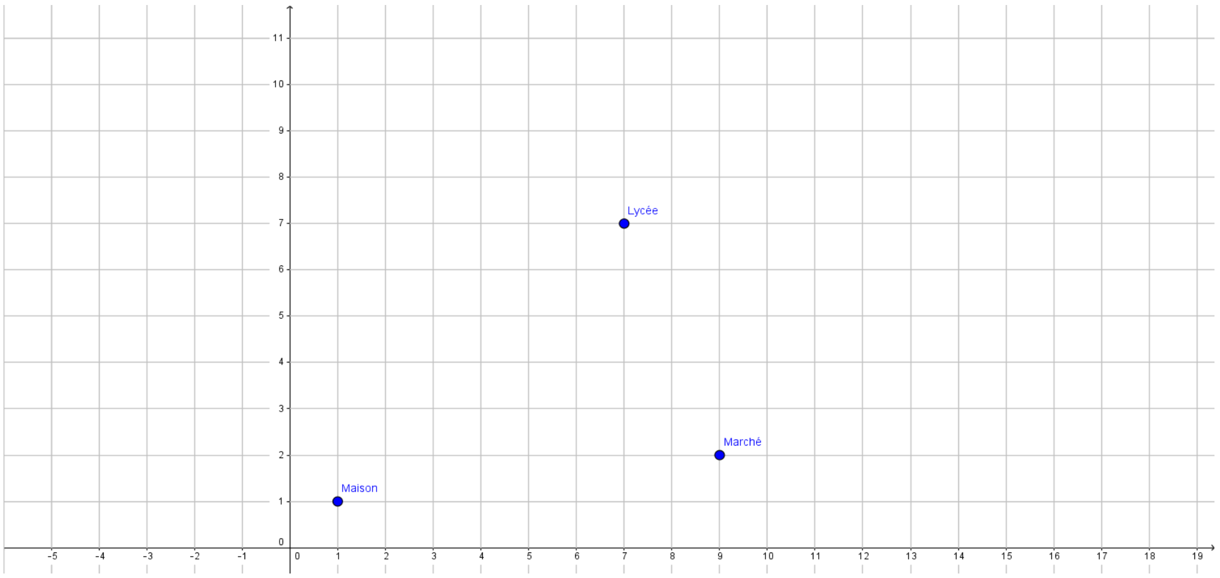
d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{OI} + 3\,\overrightarrow{OJ}$

3) $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

4) On placera les points C et P tels que P soit à égale distance du marché et du lycée (soit au milieu) puis C soit à égale distance de la maison et du lycée (soit au milieu).

On aura alors P (8 ; 4,5) et

C (4 ;4).



RESUME

➢ Notion de vecteurs

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a pour *origine* le point A, pour *extrémité* le point B et est caractérisé par :

- **Direction** : celle de la droite (AB).
- **Sens** : de A vers B.
- **Longueur** : la longueur du segment [AB].

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$ est le vecteur nul, on note $\vec{0}$.

- ➢ Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont la même direction, même longueur, mais de sens différents ;
  le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on le note encore $-\overrightarrow{AB}$
- ➢ Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, et la même longueur.
- ➢ On appelle **repère du plan**, tout triplet (O ; I ; J) de points non alignés.
  Le point O est appelé **origine** du repère ; la droite (OI) axe des abscisses et la droite (OJ) axe des ordonnées.
- ➢ Dans un repère (O; I; J), pour tout point M, il existe un couple unique (x, y) de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM}$ = x $\overrightarrow{OI}$ + y $\overrightarrow{OJ}$. **Le couple (x, y) est appelé couple de coordonnées** de M dans le repère (O; I; J) et on note M (x ; y) ou M $\binom{x}{y}$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M.
- ➢ Dans un repère (O; I; J)), pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, il existe un couple unique $(x; y)$ de réels appelé coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$.

On note $\overrightarrow{AB}(x; y)$ ou $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$. x est l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ et y est l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$.

➢ Calcul des coordonnées d'un vecteur connaissant ceux de ses extrémités

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B)
L'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à la différence des abscisses des points B et A.

L'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à la différence des ordonnées des points B et A. On dira donc que **le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$.**

On notera $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\,; y_B - y_A)$ ou $\overrightarrow{AB}\ \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

Le point I **milieu du segment $[AB]$** a pour coordonnées I $\begin{pmatrix}\frac{x_A + x_B}{2}\\ \frac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix}$.

Exemple

Soient A (2 ; 5) et B (8 ; 3) deux points du plan dans un repère orthonormé

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AB}\ \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{8-2}{3-5} = \binom{6}{-2}$

- **Calcul des coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées d'un point et celui du vecteur**

Deux vecteurs sont dits **égaux ou identiques** lorsque leurs coordonnées sont les mêmes.

Si les points $A(x_A\,;y_A)$ $B(x_B\,;y_B)$; $C(x_C\,;y_C)$ et $D(x_D\,;y_D)$ permettent de définir deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\ \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ et $\overrightarrow{CD}\ \binom{x_D - x_C}{y_D - y_C}$ alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$ ***si et seulement si***

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_B - x_A = x_D - x_C} \\ \boldsymbol{y_B - y_A = y_D - y_C} \end{cases}$$

- **Calcul des coordonnées de la somme de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un reel**

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J)

Soient A, B, C et D quatre points du plan et k un nombre réel.

- Si $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{CD}\ \binom{x'}{y'}$ alors le vecteur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\binom{x+x'}{y+y'}$
- Si $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ alors le vecteur $k\,\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère (O; I; J) .On donne $\overrightarrow{AB}\ \binom{-2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\ \binom{6}{4}$ et $k = -2$

Calculons les coordonnées de :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \binom{-2}{1} + \binom{6}{4} = \binom{-2+6}{1+4} = \binom{4}{5}$

b) $k\,\overrightarrow{AB} = -2\binom{-2}{1} = \binom{-2\times -2}{-2\times 1} = \binom{4}{-2}$

c) $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-3\overrightarrow{CD}) = \binom{-2}{1} + \binom{-3\times 6}{-3\times 4} = \binom{-2}{1} + \binom{-18}{-12} = \binom{-20}{-11}$

EXERCICE D'APPLICATION

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J)

Soient A , B, C et D quatre points du plan tels que $A\binom{2}{3}$ $B\binom{4}{9}$ $C\binom{3}{1}$ et $D\binom{2}{-3}$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Calcule les coordonnées des vecteurs somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$ -$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.
3) En supposant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$, déterminer les coordonnées du point E

LEÇON 2

Vecteur colinéaires et orthogonaux

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Déployer des raisonnements mathématiques, résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et communiquer des informations.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

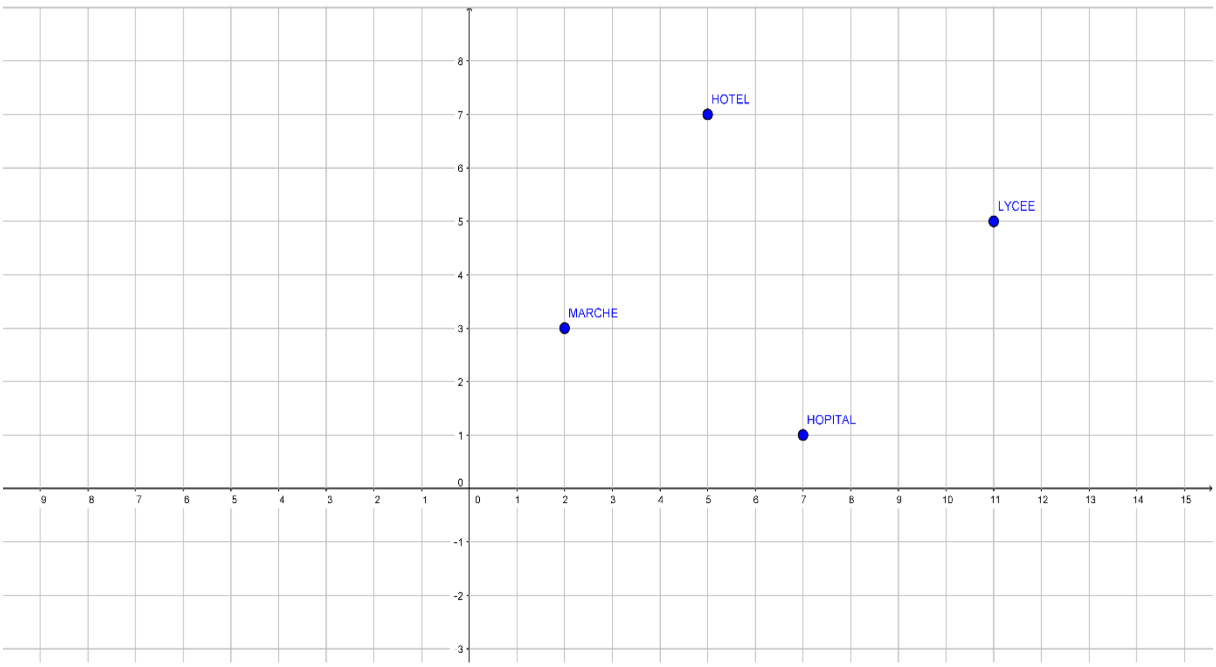
- Justifier par leurs coordonnées le fait que deux vecteurs donnés soient colinéaires ou orthogonaux
- Montrer le parallélisme ou l'orthogonalité des droits
- Montrer l'alignement des points et déterminer les coordonnées d'un point sachant la relation de colinéarité et d'orthogonalité.

PREREQUIS

Donne les définitions de vecteurs colinéaires et orthogonaux.

SITUATION PROBLEME

Sur la figure ci-dessous, l'on a représenté sur le graphique des points précis de la ville



Le problème ici est de savoir si les routes reliant (marché-hôtel) puis (hôpital-lycée) gardent la même direction

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J)
Soient A ,B, C et D quatre points du plan tels que A$\binom{-2}{3}$ B$\binom{-2}{0}$ C$\binom{2}{0}$ et D$\binom{6}{-6}$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$
2) Donner une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$
3) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ d'une part et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ d'autre part.
4) Les routes reliant (marché-hôtel) et (hôpital-lycée) ont-elles la même direction ?

SOLUTION

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D-x_B \\ y_D-y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ -6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$
2) $\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AC}$
3) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
4) Déterminons les coordonnées des points M (marché), H (hôtel), L(lycée) et P (hôpital) puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{PL}$ ne sont pas colinéaires.
   M$\binom{2}{3}$; P$\binom{7}{1}$; H$\binom{5}{7}$ et L$\binom{11}{5}$. On a : $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-7 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{PL}\begin{pmatrix} x_D-x_B \\ y_D-y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-7 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
   On constate qu'il n'existe pas de relation pouvant liée $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{PL}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{PL}$ ne sont colinéaires.
   Ainsi, les routes n'ont pas la même direction.

RESUME

VECTEURS COLINEAIRES

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction ou encore lorsqu'ils existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
- Le plan étant muni d'un repère (O; I; J). Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan
  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si et seulement si $\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$

NB : Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = 2\,\vec{u}$ ou encore parce que 2(-6)- 4(-3)= -12+12=0.

Remarques

1. On peut **utiliser la colinéarité** **pour montrer que des droites sont parallèles** en utilisant la propriété suivante : *les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*
2. On peut utiliser la colinéarité **pour montrer que les points sont alignés** en utilisant la propriété suivante : *A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

VECTEURS ORTHOGONAUX

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque leurs supports sont des droites perpendiculaires.

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J). Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

Remarques :

On peut utiliser l'orthogonalité pour montrer que des droites sont perpendiculaires en utilisant la propriété suivante :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.*

EXERCICE D'APPLICATION

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).
On considère les vecteurs $\vec{u}(1;1)$ et $\vec{v}(2;m)$ ou m est un réel
Comment faut-il choisir m pour que les droites dirigées respectivement par $\vec{u}$ et par $\vec{v}$ soient :
a) perpendiculaires **b)** parallèles ?

LEÇON 3

Norme d'un vecteur et distance entre deux points

Durée : 50 minutes

MOTIVATION

Déployer des raisonnements mathématiques, résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et communiquer des informations.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

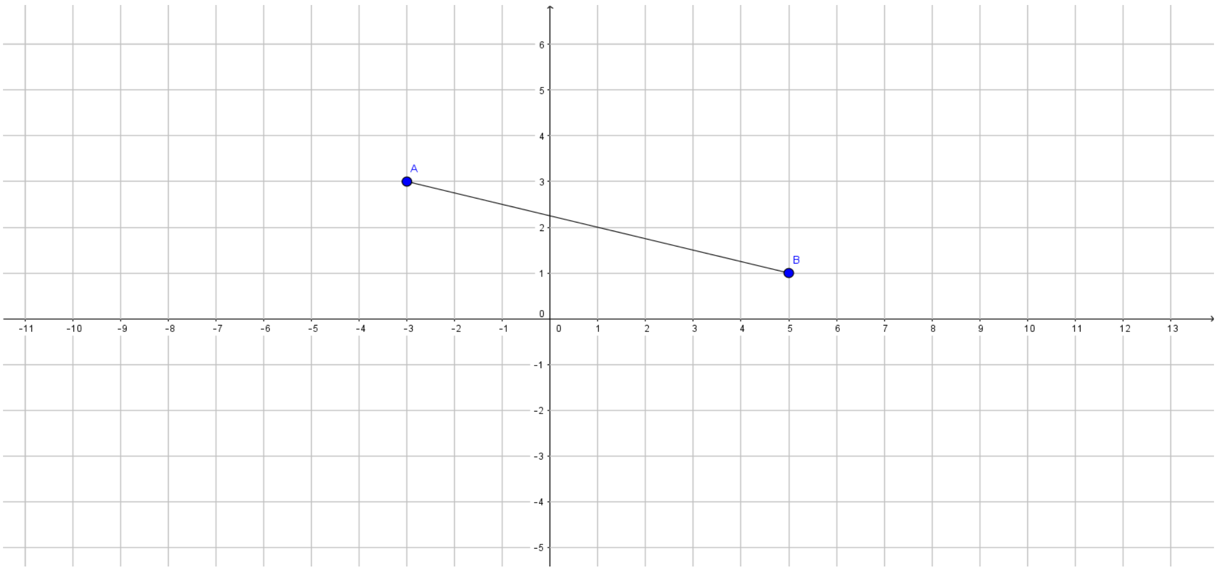
Calculer la distance entre deux points donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé

PREREQUIS

On donne deux points A (2 ; 3) , B (5 ; 6) du plan ; détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SITUATION PROBLEME



Deux villes sur une carte graphique dans un repère sont représentées par les points A et B Comme sur le graphique ci-dessus. L'unité était le km, déterminer la distance entre ces deux villes.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On donne deux points A (-3 ; 3), B (5 ; 1), C (-3 ; 1) du plan

1- Calculer la quantité $\sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2}$.
2- a) Place les points A, B et C dans le repère (O ; I ; J) et donne la nature du triangle ABC.
   b) On donne $BC = 8$ et $AC = 2$. Calcule AC.
   c) Que constate-tu ?

SOLUTION

1- $\sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2} = \sqrt{(\mathbf{5} - (-\mathbf{3}))^2 + (\mathbf{1} - \mathbf{3})^2} = \sqrt{\mathbf{64} + \mathbf{4}} = \sqrt{\mathbf{68}}$
2- a) ABC est un triangle rectangle en C.
   b) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\mathbf{64} + \mathbf{4}} = \sqrt{\mathbf{68}}$
   c) $AB = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2}$

RESUME

NORME D'UN VECTEUR

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction ou encore lorsqu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
Le plan étant muni d'un Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J). On considère le vecteur $\vec{u}$ qui a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ alors **la norme** du vecteur $\vec{u}$ encore appelée **longueur** du vecteur $\vec{u}$ et notée $\|\vec{u}\|$ est égale **à** $\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$.

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS DU PLAN

Si les coordonnées de deux points d'un repère orthonormé sont connues, alors il est possible de calculer la longueur du segment qu'ils définissent ; en d'autres termes on peut calculer la distance qui les sépare.

Si les coordonnées des points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont connues alors **la distance AB** entre ces deux points est donnée par la relation **AB** =$\sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2}$**.**

EXERCICE D'APPLICATION

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), l'unité étant le centimètre
On donne les points A (2 ; 3) , B (5 ; 6) , C (7 ; 4) et D (4 ; 1) et $\vec{u} = (2; 1)$

1 – Placer les points A ; B ;C et D

2- Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$

3 – Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

4 – Calcule les distances AB, AC et BD

5- Détermine les coordonnées du point I milieu du segment [AB].

CHAPITRE 13

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL

INTERET

Les vecteurs, objet généralisant plusieurs notions provenant de la géométrie, de l'algèbre ou de la physique

MOTIVATION

- Utiliser les propriétés sur les vecteurs pour résoudre les problèmes de vie tel que la modélisation des grandeurs comme les forces, une vitesse ou encore une quantité de mouvement ;
- Effectuer des opérations d'addition et de multiplication par un nombre.

..

LEÇON

Multiplication d'un vecteur par un réel

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

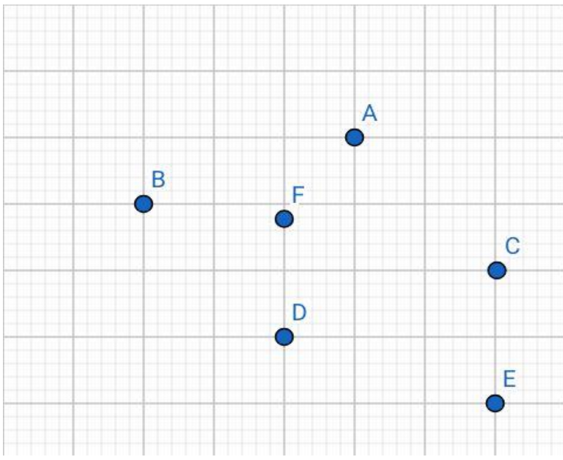
- Construire le vecteur $\mu\vec{n}$ connaissant $\vec{n}$ et μ.
- Utiliser une égalité vectorielle pour justifier l'alignement de trois points et le parallélisme de deux droites

PRÉREQUIS

Vérifier la notion de somme, égalité et opposition de vecteur des points vu en 4e

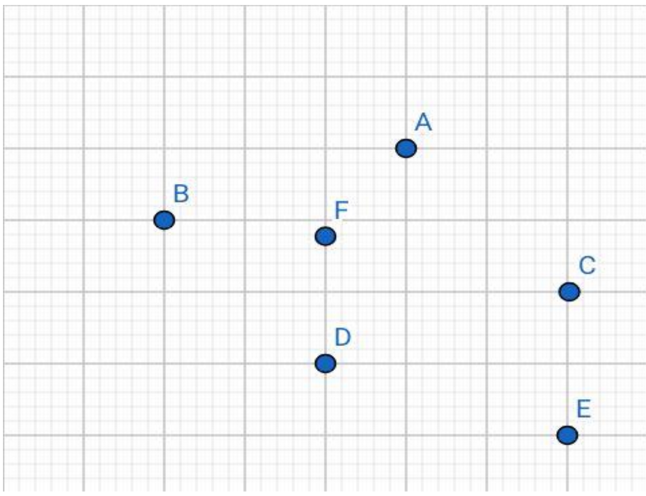
SITUATION PROBLÈME

Un entraineur de football voudrait recruter un défenseur central rapide. Tongo et Ekoto sont candidats à ce poste. Pour les départager, l'entraineur souhaite qu'ils fassent une course de vitesse en même temps sur un parcours identique sans être cote à cote. Ainsi, Tongo partira de façon rectiligne du point de corner A pour l'extrémité C de la ligne médiane. En utilisant les points de la figure ci-après, quel parcours similaire pourrait être celui d'Ekoto ? Pourquoi ?

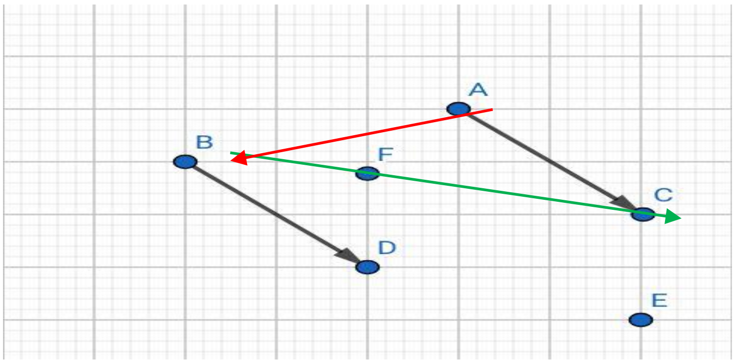


ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) En observant la figure suivante construis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$
2) Trouver un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.
3) Que peux-tu suggerer à Ekoto ?



Solution



Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Je suggèrerai à Ekoto de courir de façon rectiligne du point B au point D.

RESUME

NOTION DE VECTEUR

Définition

Un vecteur est un segment de droite orienté ayant une origine et une extrémité et caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

Si A et B sont deux points du plan, les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

- Une direction : c'est la droite (AB)
- Un sens : de A vers B
- Une longueur : la longueur du segment $[AB]$

Remarques

- La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$

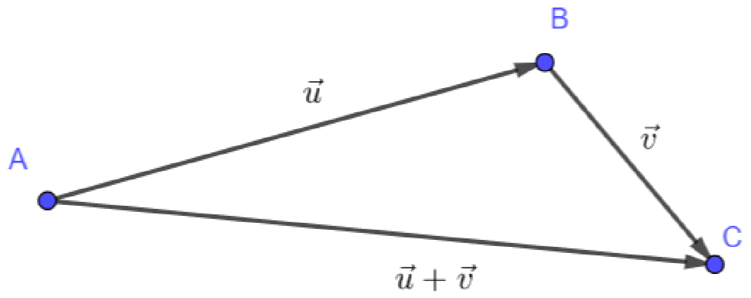
OPERATION SUR LES VECTEURS.

Sommes de deux vecteurs

Le composé de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$.

Dans la figure suivante, on transforme le point A en un point B par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Puis, le point B en un point C par la translation de vecteur $\vec{v}$. Donc, le point C est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Une Relation de Chasles est $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Produit d'un vecteur par un réel

$\vec{u}$ est un vecteur et k un réel quelconque. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ et défini par :

- Si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$
- Si $k \neq 0$ alors le vecteur $k\vec{u}$ a même direction que le vecteur $\vec{u}$.
- Si $k\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $k > 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont : même direction, même sens et $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $k < 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont : même direction, sens contraires et $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$

Exemple

$\vec{u}$ est un vecteur donné. Les points A, B, C, D, E et F sont tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{CD} = 3\vec{u}$; $\overrightarrow{EF} = -2\vec{u}$.

$\vec{u}, 3\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont même direction (celle de $\vec{u}$). $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont de sens contraires.

$\|3\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$ donc $CD = 3AB$ et $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$ donc $EF = 2AB$.

Propriété

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les reels k et k' :

- $\|k\vec{u}\| = \vec{0}$ équivaut a $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$;
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$.

Exemple

- $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} = (3 + 2)\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AB}$
- $\frac{1}{5}\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ équivaut a $\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ équivaut a $C = M$.

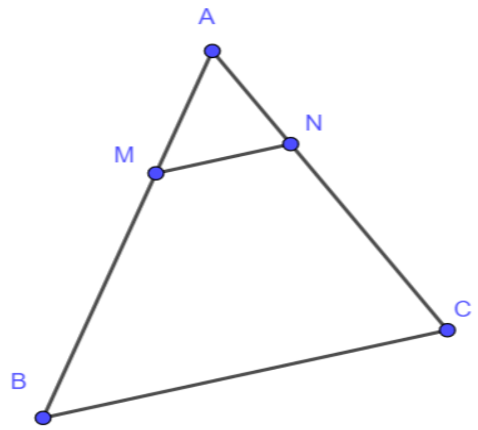
VECTEURS COLINEAIRES

On considère quatre points non alignés A, B, C et D.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si on peut trouver un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Dans ce cas, on a : $(AB) // (CD)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires *si et seulement si* les points A, B et C sont alignés.



Exemple

ABC est un triangle. M et N sont tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrons que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

D'où les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

EXERCICES D'APPLICATION

Dans la figure ci-contre :

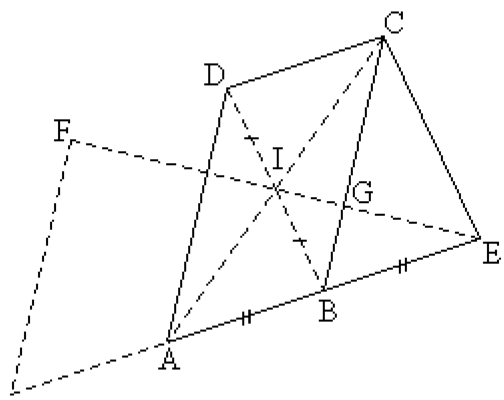
ABCD est un parallélogramme de centre I,

B est le milieu du segment [AE],

G est le centre de gravité du triangle ACE, et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

Déterminer les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.

Calculer $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montrer que E, G et F sont alignes.



CHAPITRE 14

ÉQUATIONS DE DROITE

INTÉRÊT

Les équations de droite dans la vie courante permettent de résoudre les problèmes d'alignement, d'inclinaison, …

MOTIVATION

En géométrie affine les équations de droite permettent de décrire l'ensemble des points appartenant à une droite. Dans la vie courante nous sommes appelés à utiliser les droites et en n'en construire. Ceci pour permettent d'aligner les plantes dans un jardin, d'ajuster l'inclinaison des escaliers d'un immeuble, le plan incliné d'une route, ...

.

LEÇON 1

Equations cartésiennes d'une droite

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Définir une droite par son équation.
- Déterminer le vecteur directeur d'une droite donnée connaissant son équation cartésienne.
- Déterminer le coefficient directeur d'une droite connaissant son équation réduite.

MOTIVATION

La nation de droite va s'étoffer en du cadre géométrique a une caractérisation algébrique : son équation.

PRÉREQUIS

Considérons l'équation suivante (E): $3x - y + 2 = 0$ où x et y sont des inconnues.

a) Détermine la valeur de l'inconnue pour $x = 0$ et pour $x = 3$.

R. $y = 2 \; et \; y = 5$

b) Détermine la valeur de l'inconnue pour $y = -1$ et pour $y = 0$.

R : $x = -1 \; et \; x = -\frac{2}{3}$

c) On donne : $A\ (2\ ;\ 1), B\ (1\ ;\ 5), C\ (-2\ ;\ 3), D\ (-2\ ;\ -4)$ lesquels de ces points sont solution de (E) ? justifie

R : $B\ (1\ ;\ 5)\ et\ D\ (-2\ ;\ -4)$

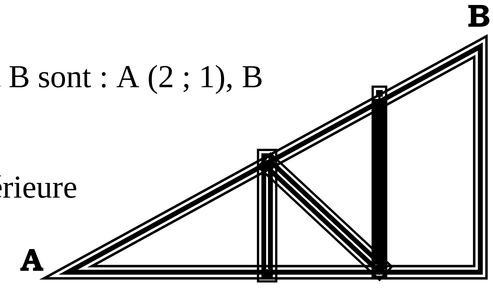
d) Place dans un repère orthonormé les points dont les coordonnées sont solutions de (E).

SITUATION PROBLÈME

Abdou construit une charpente quittant d'un point A à un point B, comme l'indique la figure ci-contre.

Repérer avec exactitude les coordonnées des points A et B sont : A (2 ; 1), B (5 ; 3).

Sachant que dans la région la norme exige une pente inférieure ou égale à **40** % cette charpente respect-elle la norme ?



ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

On donne : A (2 ; 1), B (5 ; 3) , $M(x\ ;\ y\ )$

a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$

c) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à : $\ldots\ldots \times (x - 2) - \ldots\ldots \times (y - 1) = 0$

$$: \ \ldots.\ldots x + \ldots\ldots y - \ldots\ldots. = 0$$

$$: y = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} x - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

d) Calcule la pente p de la charpente construite par Abdou définit par : $p = \frac{\boldsymbol{y_B - y_A}}{\boldsymbol{x_B - x_A}}$, .

e) Comparer la pente p à la pente recommandée dans la région

f) La charpente construite par Abdou respect-elle la norme ?

Solution

a) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à : $(\,\mathbf{2}\,) \times (\boldsymbol{x - 2}) - (\,\mathbf{3}\,) \times (\boldsymbol{y - 1}) = \mathbf{0}$

$$: \ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

$$: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

d) Calculons le nombre p : $\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{3-1}}{\mathbf{5-2}} \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

La pente de la charpente d'Abdou est : $p = \frac{2}{3}$

e) $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$; Nous avons : $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

f) La charpente construite par Abdou ne respecte pas la norme.

RÉSUMÉ

Définition

On appelle équation cartésienne d'une droite toute égalité de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ où **a**, **b** et **c** sont des réels avec $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ (a *et* $\boldsymbol{b}$ *n'étant pas tous nuls*).

ÉQUATION REDUITE D'UNE DROITE

Soit une droite (D) : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

Si la droite (D)est non parallèle à l'axe des ordonnées **($b \neq 0$),** alors une équation cartésienne de (D) peut se mettre sous la forme **:** $\boldsymbol{y \ = \ px + q}$

- La forme $\boldsymbol{y \ = \ px + q}$ **est la forme réduite ou équation réduite** de la droite (D).
- Un **vecteur directeur** de (D) a pour coordonnées (**1**;p)
- **p** est le coefficient directeur ou pente de la droite (D).
- **q** est l'ordonnée à l'origine de la droite (D).

Exemple

Soit la droite (D) d'équation cartésienne: $\boldsymbol{4x - 2y + 10 = 0}$.

- Son équation réduite $\boldsymbol{y = -2x - 2}$
- Le coefficient directeur de la droite (D) est **p = −2**
- L'ordonnée à l'origine de la droite (D) est **q = −3**.

VECTEUR DIRECTEUR ET COEFFICIENT DIRECTEUR

Soit une droite (D) : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D) a pour coordonnées $\vec{u}(-b\,;a)$.

Exemple

Soit une droite (D) d'équation cartésienne : $\boldsymbol{4x - 2y + 10 = 0}$.

Son vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(2\,;4)$

Remarques

- La droite (L_1) : $y \ = \ 5$ a pour : vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;0)$; coefficient directeur est **0** et ordonnée à l'origine est 5.
- La droite (L_2) : $x \ = 3$ a pour : vecteur directeur est $\vec{u}(0\,;1)$; le **coefficient directeur** et **l'ordonnée à l'origine n'existe** pas.

Propriété

Soient (D): $\boldsymbol{y \ = \ px + q}$ l'équation d'une droite, $(x_A\,; y_A)$ et $(x_B\,; y_B)$ deux points distincts appartenant à (D)avec $x_A \ \neq \ x_B$ alors :

- Un vecteur directeur de la droite (D) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le coefficient directeur ou pente de la droite (D) est le nombre $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple

On considère les points A **(– 2 ; 3)** et **B (3 ; – 4).** Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ ainsi que Le coefficient directeur p de la droite(AB).

Remarques

- Une droite a plusieurs vecteurs directeurs
- Mais lorsqu'il existe Une droite n'a qu'un seul coefficient directeur et une seule ordonnée à l'origine.
- La forme $\boldsymbol{y = px + q}$ est appelée équation réduite de la droite $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{ax + by + c = 0}$

POINT APPARTENANT A UNE DROITE

Un point de coordonnées $(\boldsymbol{x_0} ; \boldsymbol{y_0})$ appartient à une droite $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{ax + by + c = 0}$ ou $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{y = px + q}$ Lorsque $\boldsymbol{ax_0 + by_0 + c = 0}$ ou lorsque $\boldsymbol{y_0 = px_0 + q}$

Exemple

Soit une droite $(\boldsymbol{D})$ d'équation cartésienne : $\boldsymbol{4x - 2y + 10 = 0}$

- Le point **P (0 ; 5)** est un point de la droite $(\boldsymbol{D})$ **car** $4 \text{ x } (0) - 2 \text{ x } (5) + 10 = 0$
- Le point **Q (1 ; 1)** n'est un point de la droite $(\boldsymbol{D})$ **car** $4 \text{ x } (1) - 2 \text{ x } (1) + 10 = 12 \neq 0$

(*Montrer également en utilisant la forme réduite*)

EXERCICE D'APPLICATION

Considérons les équations de droites suivantes

$(D_1) : 3x + 9 = 0$; $(D_2) : x - 2y + 5 = -1$; $(D_3) : -2y = -5$.

Détermine pour chacune de ces droites :

a) Les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$
b) Le coefficient directeur et l'ordonnées à l'origine respectives s'ils existent.
c) L'équation réduite
d) Calculer a et b pour que les points A (a ; 1) et B (0 ; b) appartiennent à la droite

LEÇON 2

Ecriture d'une équation cartésienne d'une droite

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Écrire une équation cartésienne d'une droite passant par deux points.
- Écrire une équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur.
- Écrire une équation cartésienne d'une droite définie par un point et le coefficient directeur.
- Écrire une équation cartésienne d'une droite définie par un point et une droite qui lui est parallèle.
- Écrire une équation cartésienne d'une droite définie par un point et une droite qui lui est perpendiculaire.

MOTIVATION

Les problèmes conduisant à un système d'équations sont modélisés grâce à la connaissance qu'on a des équations de droites.

PRÉREQUIS

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

On donne : A (1 ; 2), B (0 ; 2) , $\vec{u}(x\,;\ y\ )$ et $\vec{v}(x'\,;y')$

a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

rep: $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;0)$

b) Donne la condition pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

rep : $xx' + yy' = 0$

c) Donne la condition pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

rep : $xy' - yx' = 0$

SITUATION PROBLÈME

Kenfack, Fatimatou et Atangana sont trois élèves qui fréquentent respectivement dans les établissements **K, F** et **A**. repérés sur une carte les coordonnées de leurs établissements sont :

K (2 ; 2), F (4 ; –2), A (3 ; 0). Ils souhaitent connaitre l'ensemble de tous les établissements alignes ensemble avec leurs trois établissements. Aide ces élèves.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Soient **A (3 ; 0)**, **F (4 ; –2)** et **K (2 ; 2)** trois points du plan. On définit un point M (x ; y) quelconque du plan.

a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KF}$.
b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
c. Donner une relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{KF}$ soient colinéaires.
d. Comment appelle-t-on cette égalité obtenue ?
e. Utiliser cette équation pour exprimer $\boldsymbol{y}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$.
f. Comment la nomme-t-on la nouvelle égalité trouvée ?
g. En déduire l'ensemble de tous les établissements alignes avec ceux de ces trois élèves

Solution

a- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KF}$: $\overrightarrow{KF}\binom{2}{-4}$

b- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM}\binom{x-3}{y-0}$

c- Relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{KF}$ soient colinéaires.

d- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{KF}$ sont colinéaires si et seulement si : $\boldsymbol{(-4)\ x\ (x-3)-(2)\ x\ (y-0)\ =\ 0}$

$\boldsymbol{:\ -4x\ -2y\ +12\ =0}$

e- L'égalité obtenue est appelée **équation cartésienne de la droite (KF)**

f- Exprimer $\boldsymbol{y}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y=\frac{-4}{2}x\ +\ \frac{12}{2}=\ -2x+6}$

g- La nouvelle égalité trouvée est appelée **forme réduite ou équation réduite de la droite (KF)**

h- L'ensemble de tous les établissements alignes ensemble avec leur trois établissements est la droite d'équation : $\boldsymbol{-4x\ -2y\ +12\ =0}$ **ou** $\boldsymbol{y=\ -2x+6}$

RÉSUMÉ

ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS

Pour Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) passant par les points A et B, on procède comme suit :

- On choisit un point **M (x ; y)** quelconque du plan;
- On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$;
- On cherche une relation entre x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires
- L'égalité obtenue est l'équation cartésienne de la droite (AB) demandée.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

Soient **A (2 ; 3)** et **B (4 ; −1)** deux points du plan. Déterminons une équation de la droite **(AB)**

Solution

Soit M (x ; y) un point du plan.

M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$M \in (AB), \quad Alors : (-4) \text{ x } (x-2) - 2 \text{ x } (y-3) = 0$$

$$-4x + 8 - 2y + 6 = 0$$

$$-4x - 2y + 14 = 0$$

D'où, $(\boldsymbol{AB})$: $\boldsymbol{-4x - 2y + 14 = 0}$ est l'équation cartésienne de la droite (AB).

ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET DE VECTEUR DIRECTEUR DONNE

Pour Déterminer une l'équation cartésienne de la droite (D) passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, on procède comme suit :

- On choisit un point **M (x ; y)** quelconque du plan;
- On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CM}$;
- On cherche une relation entre x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires
- L'égalité obtenue est l'équation cartésienne de la droite (D) demandée.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par C (2 ; −4) et de vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{4} ; \boldsymbol{3})$.

Solution

Soit M (x ; y) un point du plan.

M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{\boldsymbol{CM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M \in (D)$, $\quad$ *Alors* : $3 \text{ x } (x-2) - 4 \text{ x } (y-3) = 0$

$$3x - 6 - 4y + 12 = 0$$

$$3x - 4y + 6 = 0$$

D'où, $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{3x - 4y + 6 = 0}$ est l'équation cartésienne de la droite (D).

ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET DE COEFFICIENT DIRECTEUR DONNE

Pour Déterminer une l'équation cartésienne de la droite (D) passant par B et de coefficient directeur $\frac{2}{3}$, on procède comme suit :

- On écrit une équation de la droite (D) sous la forme : $\boldsymbol{y = px + q}$;
- On remplace le coefficient directeur est $\boldsymbol{p}$ par sa valeur $\frac{2}{3}$;
- On cherche alors $\boldsymbol{q}$ en résolvant l'équation : $\boldsymbol{y_B = \frac{2}{3} x_B + q}$
- On remplace $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ par leur valeur dans : $y = px + q$;
- L'égalité obtenue est l'équation cartésienne de la droite (D) demandée.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

Déterminons l'équation de la droite (D) passant par B (1 ; 5) et de coefficient directeur $\frac{2}{3}$.

Solution

La droite (D) a une équation de la forme $y = px + q$.

Comme le coefficient directeur est $p = \frac{2}{3}$, ainsi $(D) = \frac{2}{3} x + q$

Cherchons q; $B \in (D)$, $\quad$ *Alors* : $y_B = \frac{2}{3} x_B + q$

$$(5) = \frac{2}{3} \text{ x } (1) + q$$

$$q = \frac{13}{3}$$

D'où, $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{y = \frac{2}{3} x + \frac{13}{3}}$ ***ou*** $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{2x - 3y + 13 = 0}$ est l'équation cartésienne de la droite (D).

ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PARALLELE A UNE DROITE DONNEE

Pour Déterminer une équation cartésienne de la droite (L_1) passant par E et parallèle à la droite $(\boldsymbol{D})$, on procède comme suit :

- On choisit un point **M (x ; y)** quelconque du plan ;
- On détermine un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de ($\boldsymbol{D}$) ;
- On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EM}$;
- On cherche une relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires
- L'égalité obtenue est l'équation cartésienne de la droite (L_1) demandée.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

Déterminons une équation cartésienne de la droite (L_1) passant par E $(4; -2)$ et parallèle à la droite ($\boldsymbol{D}$) : $3x - 4y + 6 = 0$.

Solution

Soit M $(x\ ;\ y)$ un point du plan.

La droite (D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(4\ ;3)$.

M appartient à (L_1) équivaut à $\overrightarrow{\boldsymbol{EM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M \in (D)$, $\quad$ $Alors$: $3 \times (x-4) - 4 \times (y+2) = 0$

$$3x - 12 - 4y - 8 = 0$$

$$3x - 4y - 20 = 0$$

D'où, $(\boldsymbol{L_1})$: $\boldsymbol{3x - 4y - 20 = 0}$ est l'équation cartésienne de la droite (L_1).

ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNEE

Pour Déterminer une équation cartésienne de la droite (L_2) passant par G et parallèle à la droite ($\boldsymbol{D}$), on procède comme suit :

- On choisit un point **M (x ; y)** quelconque du plan ;
- On détermine un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de ($\boldsymbol{D}$) ;
- On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$;
- On cherche une relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient orthogonaux
- L'égalité obtenue est l'équation cartésienne de la droite (L_2) demandée.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

Déterminons une équation de la droite (L_2) passant par G (3 ; −1) et perpendiculaire à la droite $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{2x - 3y + 13 = 0}$.

Solution

Soit M $(x\ ;\ y)$ un point du plan.

La droite (D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$(3 ; 2).

M appartient à (L_2) équivaut à $\overrightarrow{\boldsymbol{GM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ sont orthogonaux.

Or $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$M \in (D)$, $\quad Alors$: $3 \times (x-3) + 2 \times (y+1) = 0$

$$3x - 9 + 2y + 2 = 0$$

$$3x + 2y - 7 = 0$$

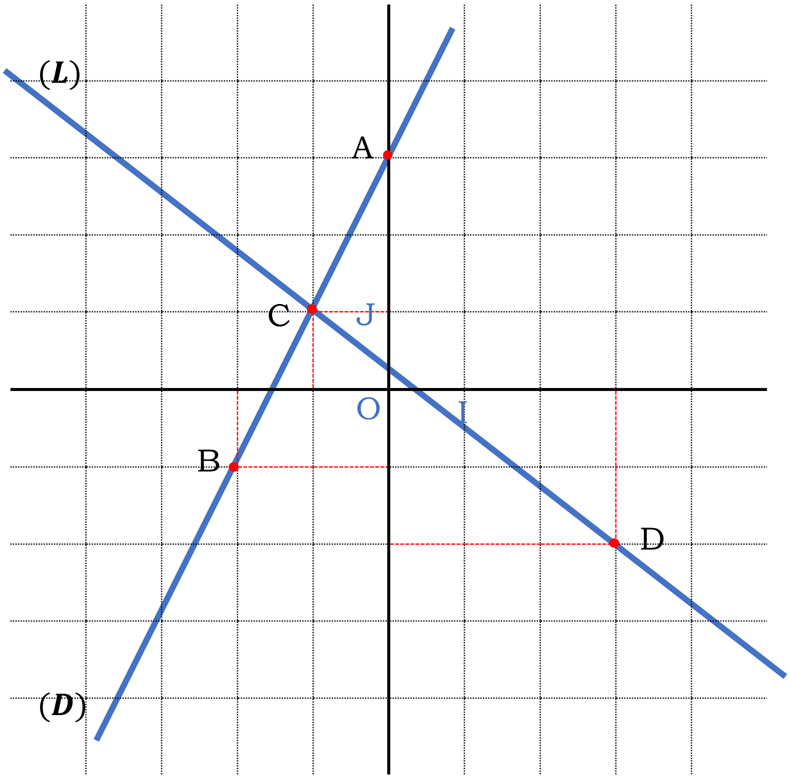
D'où, $(\boldsymbol{L_1})$: $\boldsymbol{3x + 2y - 7 = 0}$ est l'équation cartésienne de la droite (L_2).

EXERCICES D'APPLICATION

1) On donne les points A (−3 ; 2), B (1 ; 5) et C (2 ; −4)
   a. Écris l'équation cartésienne de la droite (AB) puis celle de (AC).
   b. En déduire l'expression de la forme réduite associée à chacune de ces droites.
2) Écris l'équation cartésienne de la droite (D) passant par **A** $(\boldsymbol{3}\ ;\ \boldsymbol{-1})$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{3}\ ;\boldsymbol{2})$
3) Écris l'équation de la droite (D) passant par le point **C** $(\boldsymbol{2}\ ;\ \boldsymbol{-4})$ et de coefficient directeur 3.
4) Écris l'équation de la droite (D') passant par le point **F** $(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})$ et parallèle à la droite $(D) : -4x - y + 5 = 0$.
5) Écris l'équation de la droite (D') passant par le point **H** $(\boldsymbol{2}\ ;\ \boldsymbol{2})$ et perpendiculaire à la droite $(D) : 3x - 5y + 5 = 0$.

Devoir

Détermine une équation cartésienne des droites (D) et (L) représentées ci-dessous.



LEÇON 3

Représentation graphique d'une droite

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne.
- Tracer une droite passant par un point et un vecteur directeur donné.
- Tracer une droite passant par un point et le coefficient directeur donné.

MOTIVATION

Les problèmes conduisant à un système d'équations sont modélisés grâce à la connaissance qu'on a des équations de droites.

PRÉREQUIS

Le plan est muni du repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$

On donne : A (1 ; -2), B (0 ; 1) , $\vec{u}(-2\,;\ 6\,)$ et $\vec{v}(3\,;1)$

a) Représente les points A et B puis tracer la droite passant par ces deux points.

b) Exprime $\vec{u}$ en fonction $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ **rep** : $\vec{u} = -2\,\overrightarrow{OI} + 6\,\overrightarrow{OJ}$

c) Exprime $\vec{v}$ en fonction $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ **rep** : $\vec{v} = 3\,\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

d) Représente $\vec{u}$ et $\vec{v}$

SITUATION PROBLÈME

Kenfack, Fatimatou et Atangana sont trois élèves qui fréquentent respectivement dans les établissements **K, F** et **A**. repérés sur une carte les coordonnées de leurs établissements sont : **K (2 ; 2), F (4 ; –2), A (3 ; 0).** Ils souhaitent connaitre sans faire de calculs si leurs trois établissements sont alignes. Aide ces élèves.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni d'un repère orthonormé **(O, I, J)**

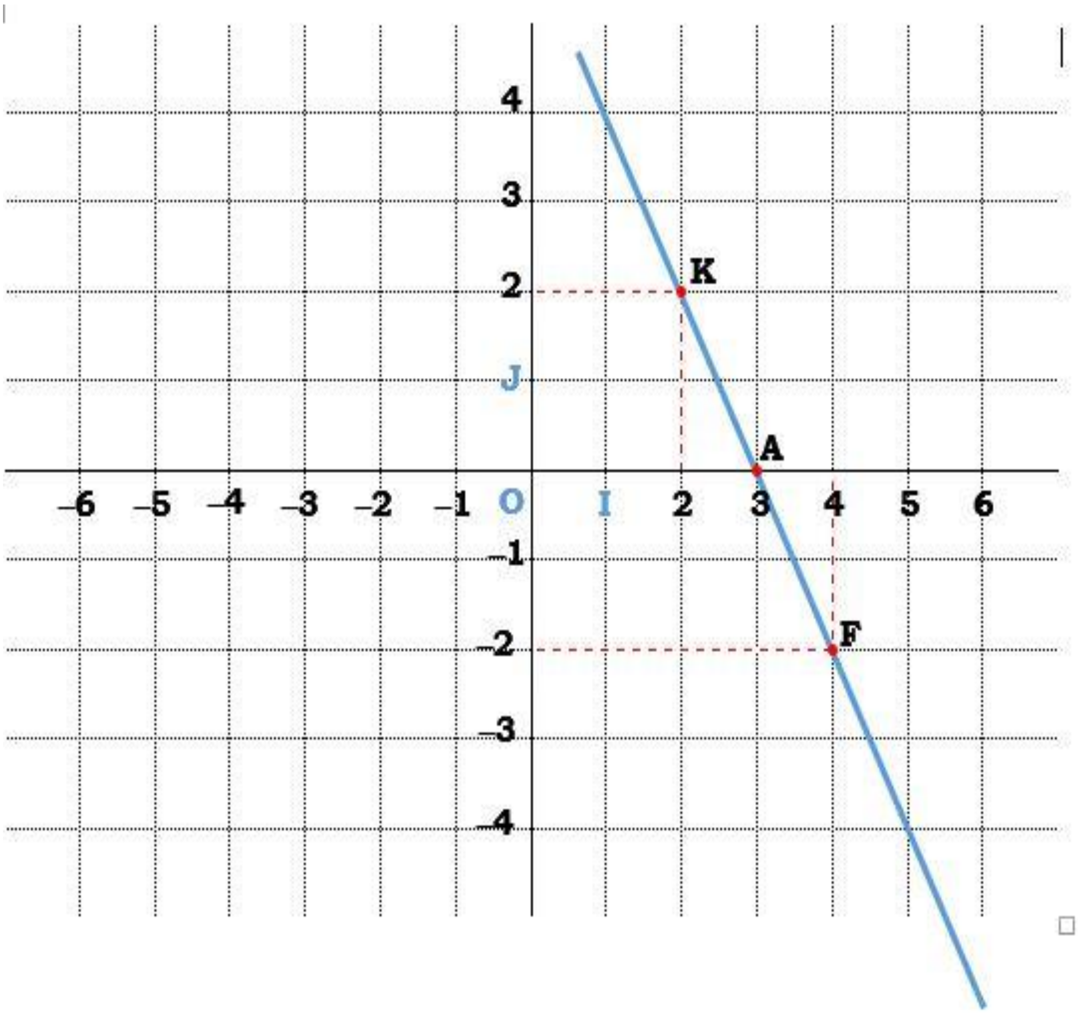
Soient **A (3 ; 0)** et **K (2 ; 2)** deux points du plan.

a- Représente les points **A** et **K** et trace la droite passant par ces deux points**.**

b- Représente le point **F (4 ; –2)**.

c- Que peux-tu dire des établissements de ces trois élèves représentés par les points **A, K** et **F** ?

Solution



- Les points **A, K** et **F** sont alignés donc Ces trois établissements sont alignés.

RESUME

CAS D'UNE DROITE D'EQUATION CARTESIENNE CONNUE

Pour construire dans un repère une droite d'équation cartésienne donnée, on procède comme suit :

- On trace un tableau où seront déterminés les couples de coordonnées de deux points distincts.
- On les place dans le repère, puis on trace la droite qui passe par ces deux points.

Exemple

Construisons la droite $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}$

Solution

Si $\boldsymbol{x = -1}$ alors

$$(-1) - 2y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-2}{-2}$$

$\boldsymbol{y}$ prendra la valeur **1**

Si $\boldsymbol{y = 0}$ alors

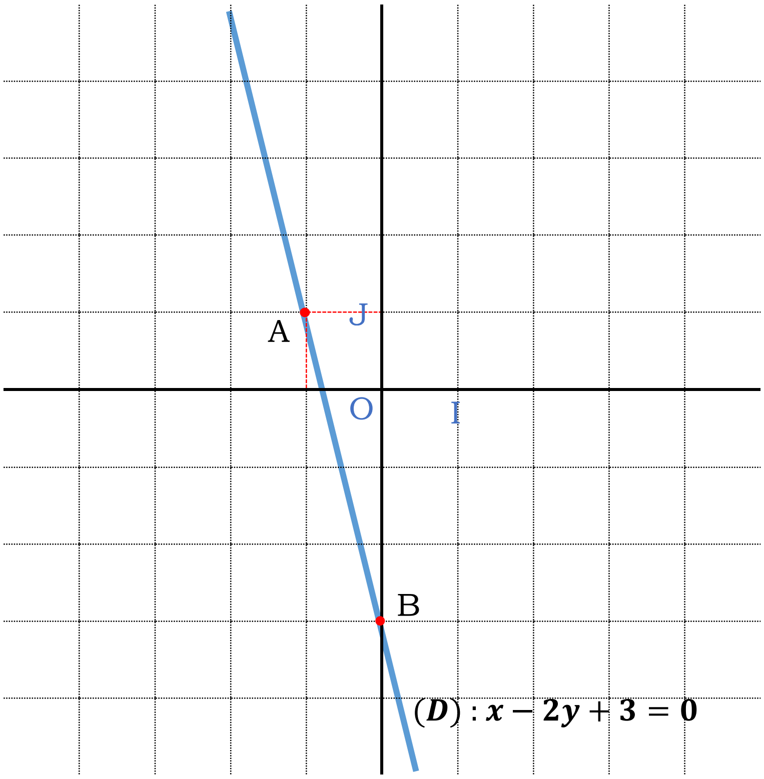
$$x - 2(0) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{1}$$

$\boldsymbol{x}$ prendra la valeur $\boldsymbol{-3}$

On a le tableau suivant :

	A	B
x	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-3}$
y	**1**	**0**



CAS D'UNE DROITE CONNAISSANT UN DE CES POINTS ET SON VECTEUR DIRECTEUR

Pour construire dans un repère orthonormé une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par un point A on procède comme suit :

- On construit le vecteur $\vec{u}$ dans ce repère ;
- On place le point A dans le même repère ;
- On place le point M $(x ; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{\boldsymbol{u}}$
- On trace la droite (AM) : c'est la droite (D) demandé.

Exemple

Construisons la droite (L) passant par un point A (3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 2)$

Solution

Soit M (x ; y) un point du plan.

M appartient à (L) équivaut à

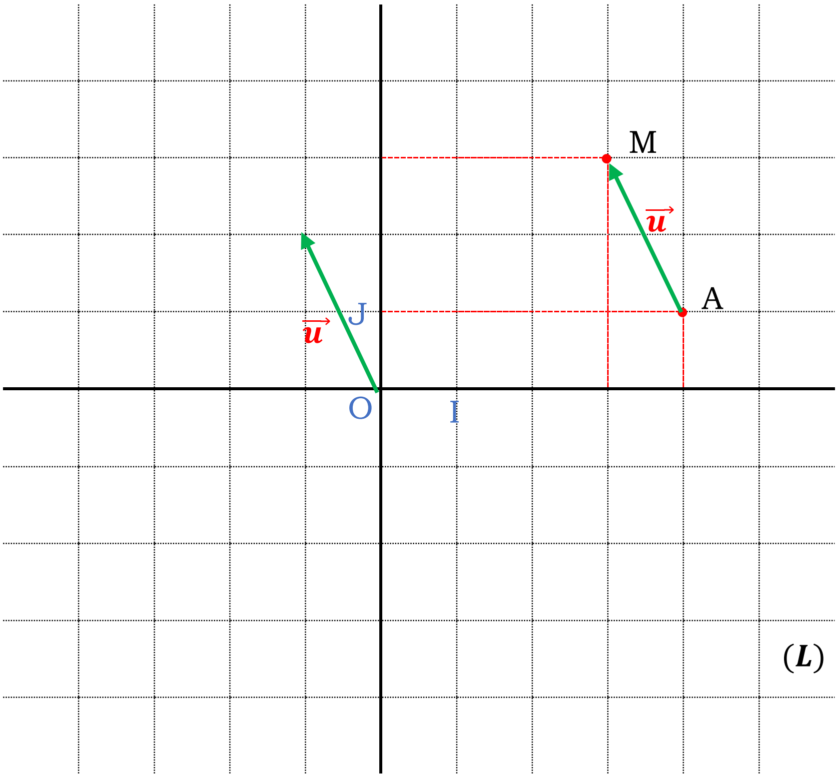
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, Alors$

: $\begin{cases} x - 3 = -1 \\ y - 1 = 2 \end{cases}$

: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$



CAS D'UNE DROITE CONNAISSANT UN DE CES POINTS ET SON COEFFICIENT DIRECTEUR

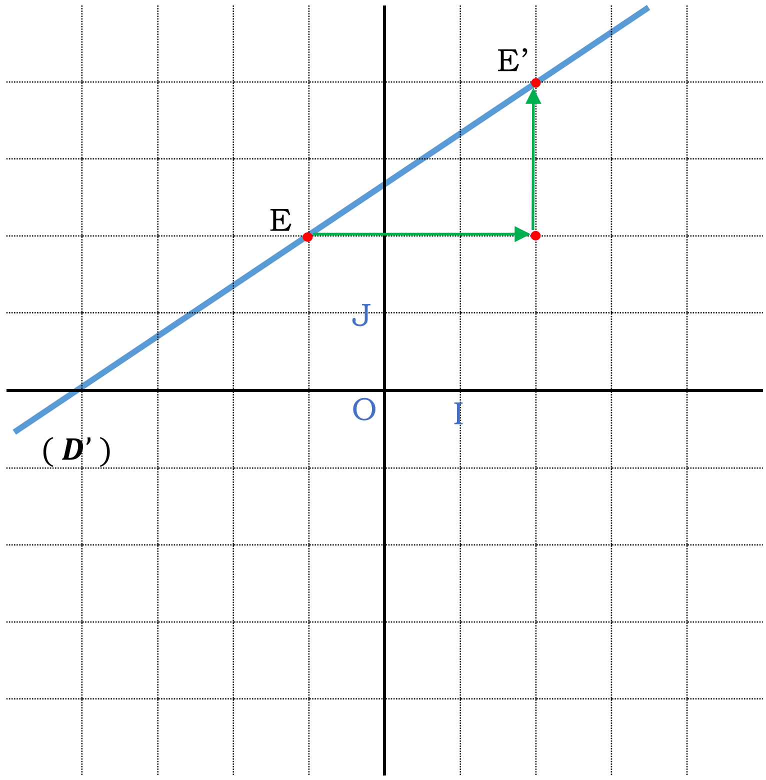
Pour construire dans un repère orthonormé une droite (D) passant par un point E et de coefficient directeur $\frac{2}{3}$, on procède comme suit :

- On place le point E (−1 ; 2) dans le même repère
- À partir du point E, on décale de 3 unités vers la droite et on monte de 2 unités
- on obtient un point $E'(2\ ;\ 4)$
- On trace la droite (EE') : c'est la droite (D) demandé.

Exemple

Construisons la droite (D') passant par le point E (−1 ; 2) et ayant pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$

Solution



Remarque

Dans un repère du plan,

- Toute droite donc l'équation cartésienne est de la forme $\boldsymbol{x = a}$, est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Toute droite donc l'équation cartésienne est de la forme $\boldsymbol{y = b}$, est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE D'APPLICATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé **(O, I, J)**

Trace dans un même repère les droites **:**

a) (L) passant par C $(-2\,;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BE}(3\,;1)$

b) $(D) : 3x - y + 2 = 0$

c) $(L') : -y + 2 = 0$

d) $(D') : 3x + 6 = 0$

Exercice résolu

Le plan est muni d'un repère orthonormé **(O, I, J)**

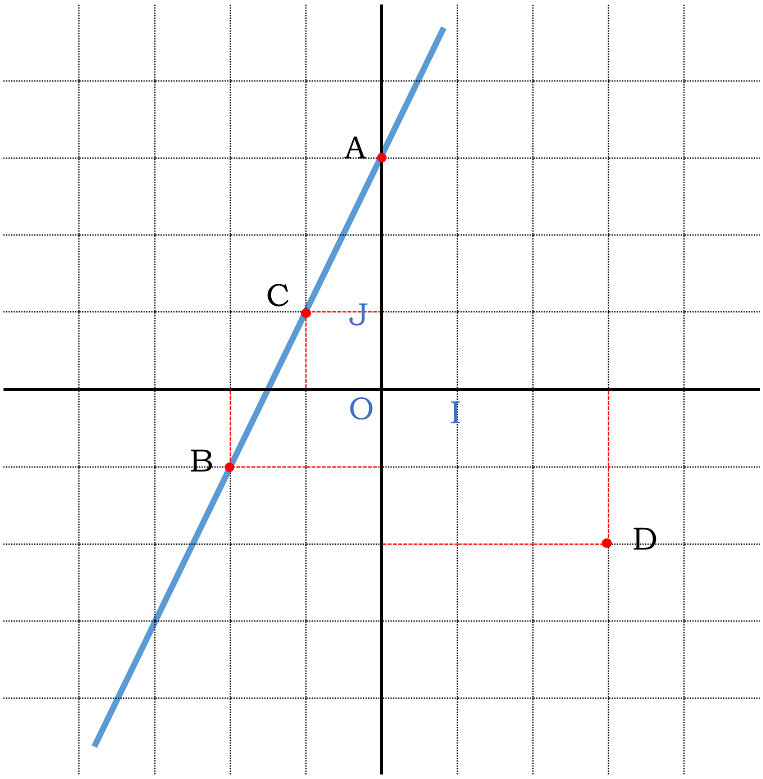
Soient **A (0 ; 3)** et **B (−2 ; −1)** deux points du plan.

a- Représente les points **A** et **B** et trace la droite passant par ces deux points**.**

b- Représente le point **C** $(-1\ ;\ 1)$. Que peux-tu dire des points **A, B** et **C** ?

c- Représente le point **D** $(3\ ;\ -2)$. Que peux-tu dire des points **A, B** et **D** ?

Solution



- Les points **A, B** et **C** sont alignés
- Les points **A, B** et **D** ne sont pas alignés

Devoirs

1) Construis la droite $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{2} = \mathbf{0}$

2) Construis la droite (D_1) passant par $\boldsymbol{R}\ (-\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{1})$ et de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\ (\mathbf{4}\ ;\ -\mathbf{2})$

Construis la droite (D_2) passant par $\boldsymbol{T}\ (-\ \mathbf{4}\ ;\ \mathbf{2})$ et de coefficient directeur **– 3**

LEÇON 4

Position relative de deux droites

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Justifier que deux droites sont parallèles
- Justifier que deux droites sont perpendiculaires

MOTIVATION

En menuiserie et dans le génie civil en générale nous faisons des meubles et des ponts qui font appel aux parallélismes et l'orthogonalité de deux droites.

PRÉREQUIS

1) Dans un repère orthonormé (O, I, J), représente les droites :
   $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{2x - y + 1 = 0}$; $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{2x - y - 3 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_3}) : \boldsymbol{-x - 2y + 5 = 0}$
2) Que peux-tu dire des droites $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_2})$? rep : $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_2})$ $sont\ parallèles$
3) Que peux-tu dire des droites $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_3})$ rep : $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_3})$ sont perpendiculaires.

SITUATION PROBLÈME

Après avoir fini de manger ses beignets le matin Votre voisin qui fait même classe que vous mais ne comprend pas bien les mathématiques voit sur l'emballage l'exercice suivant :

Considérons les droites suivantes : $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}$; $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{2x + y + 5 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_3}) : \boldsymbol{-x + 2y + 12 = 0}$. Comment sont disposées ces droites dans un repère orthonormé ? et cours demander ton aide. Aide ton voisin à répondre au problème pose.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni d'un repère orthonormé **(O, I, J)**

On considère les droites :

$(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}$; $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{2x + y + 5 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_3}) : \boldsymbol{-x + 2y + 12 = 0}$.

1) Détermine $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ les vecteurs directeurs respectifs de $(\boldsymbol{D_1})$; $(\boldsymbol{D_2})$et $(\boldsymbol{D_3})$ sont colinéaires.
2) Que peux-tu dire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$?
3) Que peux-tu dire de $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$?

4) Que peux-tu dire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_3}$?

5) En déduire Comment sont disposées ces droites dans un repère orthonormé

Solution

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$

1) $\overrightarrow{u_1}(\mathbf{2}\,;\mathbf{1})$; $\overrightarrow{u_2}(\mathbf{-1}\,;\mathbf{2})$ et $\overrightarrow{u_3}(\mathbf{-2}\,;\mathbf{-1})$

2) $\overrightarrow{u_1}(\mathbf{2}\,;\mathbf{1})$ et $\overrightarrow{u_2}(\mathbf{-1}\,;\mathbf{2})$ on a **:**

$2\times\ 2-1\times\ (-1\ )=\ 4+1\ =\ 5\neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

$2\times\ (-1\ )+1\times\ 2\ =\ -2+2\ =\ 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux.

3) $\overrightarrow{u_2}(\mathbf{-1}\,;\mathbf{2})$ et $\overrightarrow{u_3}(\mathbf{-2}\,;\mathbf{-1})$ on a **:**

$(-1)\times(-1)-2\times\ (-2\ )=\ 1+4\ =\ 5\neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ ne sont pas colinéaires.

(-1) x $(-2)+2$ x $(-1)=\ 2-2\ =\ 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont orthogonaux.

4) $\overrightarrow{u_1}(\mathbf{2}\,;\mathbf{1})$ et $\overrightarrow{u_3}(\mathbf{-2}\,;\mathbf{-1})$ on a**:**

2 x $(-1)-1$ x $(-2)=\ -2+2\ =\ 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont colinéaires.

5) Les droites : $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_3})$ sont parallèles ; $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_2})$ sont perpendiculaires ; $(\boldsymbol{D_2})$ et $(\boldsymbol{D_3})$ sont perpendiculaires.

RÉSUMÉ

Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u\,'}$

- (D) et (D') sont **parallèles** équivaut à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u\,'}$ sont **colinéaires**

Dans un repère orthonormé**,**

- (D) et (D') sont **perpendiculaires** équivaut à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u\,'}$ sont **orthogonaux**

Exemples

Dans un repère orthonormé,

- La droite $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{-3x+2y+10=0}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\mathbf{-2}\,;\mathbf{-3})$ et la droite $(\boldsymbol{D'}) : \boldsymbol{3x-2y-2=0}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(\mathbf{2}\,;\mathbf{3})$ et de plus

$(-2) \times 3 - 2 \times (-3) = -6 + 6 = 0$; Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ $\boldsymbol{et}$ $\overrightarrow{u'}$ sont **colinéaires**. Par suite, les droites $(\boldsymbol{D})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{D'})$ sont **parallèles**.

- La droite $(\boldsymbol{L}) : \boldsymbol{x + 3y + 2 = 0}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-3\,;1)$ et la droite $(\boldsymbol{L'}) : \boldsymbol{3x - y + 1 = 0}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(1\,;3)$ et de plus $(-3) \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$; Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ $\boldsymbol{et}$ $\overrightarrow{u'}$ sont **orthogonaux**. Par suite, les droites $(\boldsymbol{L})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{L'})$ sont **perpendiculaires**.

Propriétés

Soient deux droites $(D) : \boldsymbol{y = ax + b}$ et $(D') : \boldsymbol{y = a'x + b'}$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a'}$ sont les coefficients directeurs respectifs de (D) et (D').

- (D) et (D') sont **parallèles** équivaut à $\boldsymbol{a = a'}$

Dans un repère orthonormé**,**

- (D) et (D') sont **perpendiculaires** équivaut à $\boldsymbol{a \times a' = -1}$

Exemples

Dans un repère orthonormé,

- Les droites $(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$ et $(\boldsymbol{D'}) : \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 3}$ ont le même coefficient directeur $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$: donc elles sont parallèles.
- Les droites $(\boldsymbol{L}) : \boldsymbol{y = 2x - 2}$ et $(\boldsymbol{L'}) : \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$ ont respectivement pour coefficient directeur $\boldsymbol{2}$ et $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ **; on a :** $\boldsymbol{2} \times \left(\boldsymbol{-\frac{1}{2}}\right) = \boldsymbol{-1}$**.** donc elles sont perpendiculaires

EXERCICE D'APPLICATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé **(O, I, J)**

Dire en justifiant dans chacun des cas suivant si les droites $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_2})$ sont parallèles ou perpendiculaires.

a) $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{2x - 3y + 1 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{-4x + 6y - 3 = 0}$

b) $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{x - 3y + 2 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{3x + y - 3 = 0}$

c) $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{y = 2x - 3}$ et $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{8y = 2x + 1}$

d) $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{y = 3x - 1}$ et $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + 2}$

e) $(\boldsymbol{D_1}) : \boldsymbol{3x - y + 2 = 0}$ et $(\boldsymbol{D_2}) : \boldsymbol{y = 2x + 2}$

CHAPITRE 15

HOMOTHETIES

INTERET

L'homothétie a pour intérêt de construire une image à partir d'une autre.

MOTIVATION

- Agrandir ou réduire l'image d'un objet de décoration, d'ornement….
- Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre les problèmes relatifs à des situations de vie faisant appel aux homothéties.

LEÇON

Homothéties

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

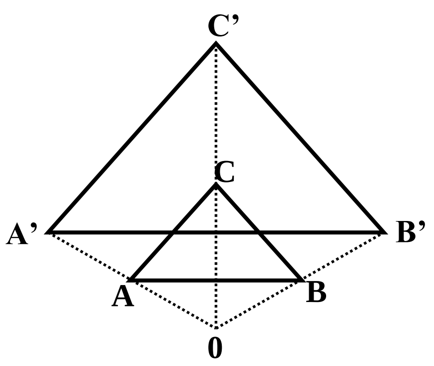
- Définir et caractériser une homothétie
- Construire l'image d'un point, d'une figure par une homothétie
- Appliquer les propriétés sur les homothéties

PRÉREQUIS

En rentrant de l'école, deux élèves de troisième s'arrêtent devant un portail par curiosité pour observer un ornement constitué de 2 triangles semblables comme l'indique la figure ci-dessous. L'un d'eux affirme qu'il existe une relation géométrique entre ces deux triangles. A-t-il raison ?

SITUATION PROBLÈME

Un sondage téléphonique effectué auprès de 56 800 personnes a révélé que 2/5 des personnes préféraient le journal. La Presse tandis que 44% des personnes préféraient le journal de Montréal et le reste de personnes préfèrent un autre journal Montréal.
Combien de personnes étaient indécises ou ont choisi un autre journal ?



ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Sur la figure de la situation problème ci-dessus, on admet que les points A, B et C sont respectivement des milieux des segments [OA'] ; [OB'] et [OC'].

1) Exprimer $\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ respectivement en fonction de $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

2) On suppose que (AC) // (A'C') ; (AB) // (A'B') ; (BC) // (B'C') en utilisant la règle graduée calculer les rapports $\frac{A'C'}{AC}$; $\frac{A'B'}{AB}$; $\frac{B'C'}{BC}$

3) Donner la solution à la situation problème en précisant la relation géométrique entre les triangles A'B'C' et ABC.

Solution

1) Exprimons $\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ respectivement en fonction de $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA'} = 2\ \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = 2\ \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC'} = 2\ \overrightarrow{OC}$

2) Calculons les rapports $\frac{A'C'}{AC}$; $\frac{A'B'}{AB}$; $\frac{B'C'}{BC}$

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{B'C'}{BC} = \frac{4}{2} = 2$

3) Solution à la situation problème :

Le Triangle A'B'C' est l'image de ABC par l'homothétie de centre O et rapport 2.

RESUME

DEFINITION ET NOTATION

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul positif, on appelle homothétie h de centre O et de rapport k notée h $_{(O\ ;\ k)}$ l'application du plan dans le plan qui à chaque point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}$.

On note h $_{(O\ ;\ k)}$ (M)= M'et on lit « A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O et rapport k »

Exemple

si $\overrightarrow{OA'} = 2\ \overrightarrow{OA}$ alors A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Remarque :

- Une homothétie est caractérisée par son centre et son rapport k
- L'image de O par l'homothétie de centre O est O (lui-même).

IMAGE D'UN POINT PAR UNE HOMOTHETIE

M et O sont deux points et k un nombre réel non nul positif. Pour construire le point M', image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, on construit le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}$

Exemple1

Soit O et P deux points du plan. Construis le point P' image de P par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{3}$

Exemple 2

Soit I et F deux points du plan tel que IF= 2cm. Construis le point G image de F par l'homothétie de centre I et de rapport 2

IMAGE D'UNE FIGURE PAR UNE HOMOTHETIE

Pour construire l'image d'une figure par une homothétie, on construit l'image de ses points caractéristiques.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de côté 4cm. Construis le triangle A'B'C' image de ABC par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

NB :

Selon la valeur du rapport k (r réel positif) , l'image d'une figure par une homothétie s'agrandit ou se réduit :

- Si $k > 1$, il y'a **agrandissement**
- Si $k < 1$, il y'a **réduction**

PROPRIETE

Soit A'B'C' l'image d'une figure ABC par l'homothétie de rapport k, on a :

- **A'B'=** k **AB**
- $\mathbf{Aire_{A'B'C'} = k^2\ Aire_{ABC}}$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

1) Traduire par une égalité vectorielle la phrase suivante : « P est l'image du point Q par l'homothétie h de centre E et de rapport 2,5 »
2) Les points M, N, P sont des points tels que $\overrightarrow{PN} = 2\,\overrightarrow{PM}$. Traduire cette égalité par une phrase en utilisant les mots **<u>image</u>** et **<u>homothétie.</u>**

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

A (1 ;-2) est l'image de B (3 ; 2) par l'homothétie de centre C et de rapport 2.

Déterminer les coordonnées de C.

Exercice 3 :

ABCD est un carré de côté 3 cm et I un point extérieur à ce carré.

2) Construire l'image EFGH de ABCD par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
3) Calculer l'aire du carré ABCD puis déduire celle du carré EFGH.

Module 16	SOLIDES DE L’ESPACE

CHAPITRE 16

SECTION D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CONE DE REVOLUTION PAR UN PLAN PARALLELE A SA BASE

INTERET

Cette notion aidera dans la conception et la réalisation de certaines structures architecturales, et des objets technologiques autour de nous.

MOTIVATION

Dans notre environnement, beaucoup d'objets ont la forme d'une pyramide, d'un cône de révolution, d'un tronc de pyramide ou de cône. On peut citer entre autres les seaux, le cornet de glace, … Ce chapitre nous permet de manipuler et de construire ces objets.

LEÇON 1

Section d'une pyramide, d'un cône

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Réaliser un objet à partir d'un devis ou d'une maquette.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Ressortir à partir d'une pyramide ou d'un cône, une section par un plan parallèle.

PREREQUIS

1- Calculer le volume, en cm^3 d'une pyramide à base carrée de côté 5cm, et de hauteur 18 cm.

$$V = 5 \times 5 \times 18 = 450$$

2- RSTU est un carré dont le périmètre est donné par : $P = 2X$. Calcule P lorsque $X = \frac{1}{2}$,

$$P = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

3- Donne la nature exacte des figures suivantes :

TRIANGLE **CERCLE** **CARRE** **DISQUE**

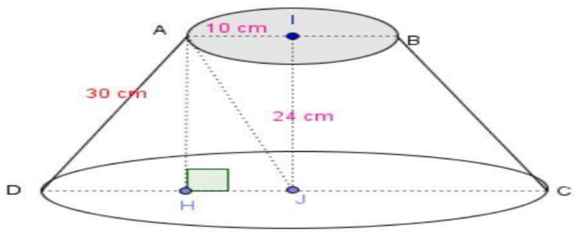
SITUATION PROBLEME :

Monsieur ONANA, grand commerçant vend des récipients en plastique ayant la forme d'un tronc de cône de révolution dont les rayons de base sont respectivement 10 cm et 28 cm, et de hauteur 24 cm. Ce tronc de cône est issu d'un cône dont la hauteur h vaut $\frac{112}{3}\ cm$ cm. Madame ADA souhaite acheter dans la boutique de monsieur ONANA un seau d'au moins 80 litres. Après plusieurs tentatives, monsieur ONANA ne réussit pas à trouver le volume d'un de ses seaux.

Madame ADA doit-elle acheter un seau chez monsieur ONANA ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

L'entreprise SEAUCAM fabrique des sceaux en plastique ayant la forme d'un tronc de cône comme le montre la figure ci-dessous. On donne AD = 30cm ; IJ = 24cm et AI = 10cm.



1- Montre que DH = 18cm.
2- Calcule le rayon du cercle de la base du tronc de cône et la hauteur h' du petit cône tronqué.
3- Monsieur ONANA reconnait que SEAUCAM est l'entreprise qui lui livre tous les seaux qu'il commercialise. Calcule le volume d'un seau vendu par monsieur ONANA.
4- Madame ADA doit-elle acheter un seau chez monsieur ONANA ?

Solution

1) Montrons que $AD\ = 8cm.$

En appliquant la propriété de Pythagore sur le triangle rectangle ADH, on a :

$AD^2 = DH^2 + HA^2$ donc$DH = \sqrt{AD^2 - HA^2} = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18.$

D'où AD = 18cm

2) Rayon DJ du cercle de base.
DJ = DH + HJ = 18cm + 10cm = 28cm.

Hauteur h' du petit cône tronqué

En appliquant la propriété directe de Thales, on a : $\frac{h'}{h} = \frac{AI}{DJ}$ donc $h' = \frac{AI \times h}{DJ} =$

$13{,}33cm$.

3) Volume d'un seau vendu par monsieur ONANA

V	= Volume du cône de base DC – Volume du cône AI
	$=h \times 3{,}14 \times DJ^2 - h' \times 3{,}14 \times AI^2$
	$\frac{112}{3} \times 3{,}14 \times 28^2 - \frac{40}{3} \times 3{,}14 \times 10^2$
	$= 87\ 719\ cm^2$

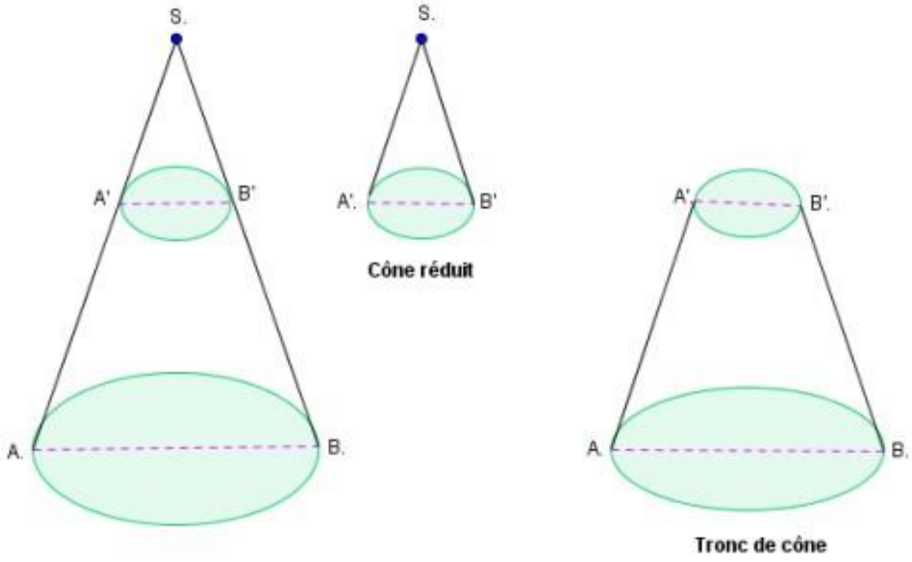
Le volume d'un seau vendu par monsieur ONANA est $V = 87{,}719$ litres.

4) Le volume d'un seau vendu par monsieur ONANA est $V = 87{,}719$ litres qui est supérieure à 80 litres. Madame ADA doit acheter un seau chez monsieur ONANA.

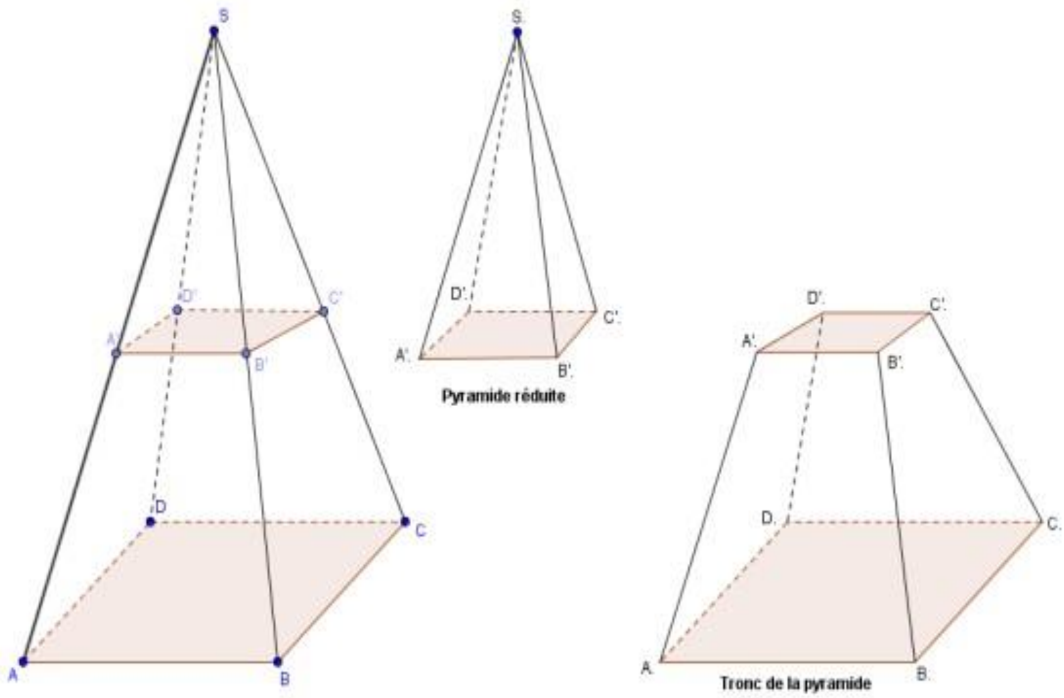
RESUME

Définition

- La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base, est un cercle ou un disque dont le centre est situé sur l'axe du cône.



- La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que celui de la base de la pyramide.



Propriétés de réduction

Rappel

Lorsqu'on coupe un cône ou une pyramide par un plan parallèle à sa base, on obtient une réduction du cône ou de la pyramide. Ces deux solides ont la même forme, si bien qu'on peut calculer le coefficient $k = \frac{longueur\ finale}{longueur\ initiale}$. Par suite,

- Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement
- Si $k < 1$, il s'agit d'une réduction

Ce qui permet d'établir les propriétés suivantes :

Propriétés

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k,

- Les longueurs sont multipliées par k
- Les aires sont multipliées par k^2
- Les volumes sont multipliés par k^3

Remarque

On considère une pyramide ou un cône de révolution de volume V. Si on coupe cette pyramide ou ce cône, on obtient une pyramide réduite ou un cône réduit ayant les mêmes caractéristiques que le solide de départ. Le volume V_t du tronc de cône (ou du tronc de la pyramide) est : $V_t = V - V'$

Exemple

Calculer le volume V d'une pyramide qui a été coupée à mi-hauteur par un plan parallèle à sa base, et dont la pyramide réduite a pour volume $V' = 125\ cm^3$.

Solution

Calcule V

On sait que : $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ donc $V = 8V' = 1000\ cm^3$.

EXERCICE D'APPLICATION

On considère un cône de révolution de rayon de base $R = 4$cm et dont la hauteur H vaut 12cm. On coupe ce cône par un plan parallèle à la base tel que la hauteur h du cône réduit vaut 4cm.

1) Calcule le volume V de ce cône.
2) Détermine le coefficient k, puis en-déduire le volume V' du cône réduit.

LEÇON 2

Les éléments métriques

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Réaliser un objet à partir d'un devis ou d'une maquette.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

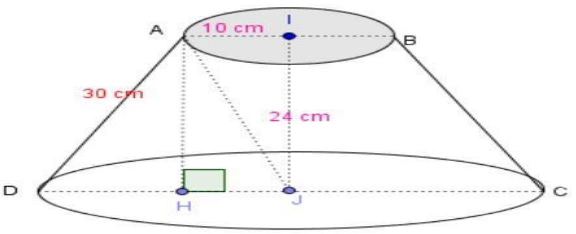
Calculer les aires latérales et totales d'une pyramide ou d'un cône de révolution.

PREREQUIS

1) Calcule l'aire d'un disque de rayon. **R** : $A = \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times 3{,}14 = 31{,}4\ cm^2$
2) Donne les formules des aires d'un carré de longueur de cote x et d'un triangle de base b et de hauteur h. **R** : $Aire_{carré} = x \times x$ et $Aire_{triangle} = \frac{b \times x}{2}$

SITUATION PROBLEME

Madame ZEBAZE souhaite changer les tôles de la maison de sa grand-mère. Pour cela, elle

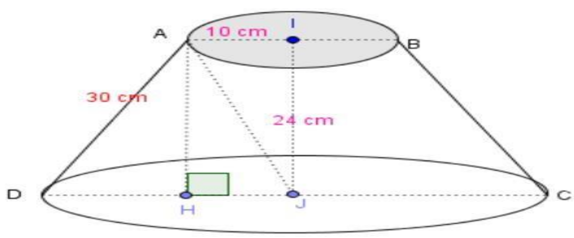


fait appel a un ingénieur qui lui délivre le plan suivant :

L'ingénieur LATIFA lui demande 10 tôles de $20m^2$ chacune. Madame ZEBAZE doit-elle faire confiance à l'ingénieur ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

SABCD est une pyramide de sommet S et de base un carré de longueur de cote 6m. Les faces latérales sont des triangles équilatéraux de longueur de cote 6m.



1) Calcule les aires des faces latérales de cette pyramide.
2) Calcule l'aire de la base ABCD, puis déduire l'aire totale de cette pyramide.
3) Combien de tôles de 20$m2$ faut-il pour refaire la toiture de la grand-mère de madame ZEBAZE.
4) Madame ZEBAZE doit-elle faire confiance à l'ingénieur ?

Solution

1) Les aires des triangles SAB, SBC, SCD et SAD sont égales. Donc

$$Aire\ (SAB) = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}cm^2.$$

Ce qui est valable pour les trois autres triangles.

2) L'aire de base : $Aire(ABCD)\ = 6cm\ \times\ 6cm\ =\ 36cm^2$

   L'aire totale = $Aire(ABCD) + 4 \times Aire(SAB)\ =\ 36cm^2 + 4 \times 18\sqrt{3}cm2 =$ $160{,}70cm2$
3) Le nombre de tôles est N=160,70/20=8,035. Donc il faut 9 tôles.
4) Le nombre de tôles demandé par l'ingénieur est largement supérieur au nombre de tôles nécessaires. D'où Madame ZEBAZE ne doit pas faire confiance à l'ingénieur LATIFA.

RESUME

Définitions

- L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de toutes les faces latérales.
- L'aire latérale d'un cône se donne par la formule : πra où r est le rayon de la base et a la génératrice.
- L'aire totale d'un cône ou d'une pyramide est la somme des aires latérale et totale

Exemple

On considère un cône de révolution de rayon de base R=2cm, de hauteur SO= 4cm et de génératrice SA= 10cm. Calculer l'aire totale de cette pyramide.

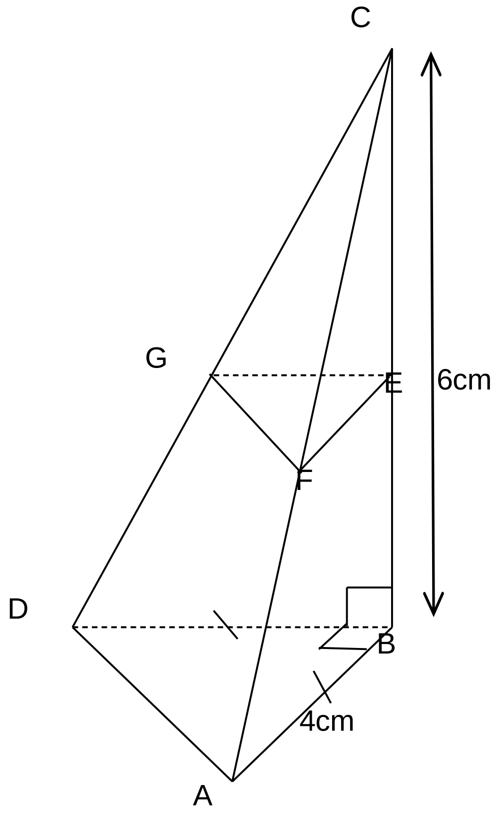
Solution

- -L'aire de base : Aire (base)=$\pi R2$ = 3.14×4= 12.56 cm^2
- -L'aire latérale : πRa = 3.14 × 2 × 10 = 62.8cm^2

➤ -L'aire totale=$\pi R2 + \pi Ra = 12.56 + 62.8 = 75.36 cm^2$

EXERCICE D'APPLICATION

Les faces CBA et CBD de la pyramide sont des triangles rectangles en B et la base DBA est un triangle rectangle et isocèle en B. On donne : CB = 6 cm et AB = 4 cm.



1) Calculer :
   - L'aire du triangle DBA;
   - Le volume de la pyramide CDAB.
2) On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point E tel que CE= 3 cm.
   La pyramide CGFE est une réduction de la pyramide CDAB.
   Calculer :
   - Le coefficient de réduction ;
   - L'aire du triangle GEF;
   - Le volume de la pyramide CGFE