REPUBLIQUE DE GUINEE

Travail-Justice-Solidarité

Collection Planète

EXERCICES ET PROBLEMES DE

MATHEMATIQUES

Programme : TSM

M DAOUDA BANGOURA

Professeur de Mathématiques

Contacts : 655 75 14 66

662 08 90 42

INFORMATIONS DE L'ELEVE

Nom : ………………………………………………………………………….

Prénoms : ……………………………………………………………………

Établissement : ……………………………………………………………

Contacts : ……………………………………………………………………..

Avant propos

Ce manuel s'adresse à tous les élèves de la Terminale Sciences Mathématiques soucieux de ne pas laisser le hasard décider de leur réussite au Baccalauréat

Nous avons essayé dans ce manuel de réaliser un triple objectif :

- √ Permettre l'assimilation du cours grâce à la présence de ce résumé concis et d'exercices qui en sont applications immédiates
- √ Faire le tour des méthodes de résolution attenant à chaque centre d'intérêt
- √ Eveiller la curiosité de l'élève en livrant à sa réflexion des sujets plus difficiles, dont l'approfondissement le dotera de bases solides pour affronter des études supérieures

C'est pour quoi nous pensons que ce manuel de Mathématiques sera utile aussi à de nombreux élèves de la Terminale. Le mode d'emploi de plus rentable consiste , pour tous les chapitres à apprendre parfaitement les « rappels des cours » avant de se lancer dans la recherche.

L'élève devra alors s'imposer la discipline de ne pas se reporter à la solution avant une réflexion de quelques minutes par questions. Mais qu'il en vienne à bout , ou que ses efforts s'avèrent infructueux (et c'est normal pour de nombreux exercices, difficiles), l'élève doit se penser attentivement sur la solution détaillée qui l'attend enfin de chaque leçon, afin d'en comprendre et assimiler le mécanisme de raisonnement

Nous souhaitons à tous ses lecteurs une utilisation plus bénéfique de ce présent manuel.

L'auteur

662-089-042 / 655-751-466

daoudabgra2016@gmail. com

SOMMAIRE

ARITHMETIQUE

++++++++++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++++

Le raisonnement par récurrence :

Soit P(n) une proposition ou assertion d'entiers naturels n. Pour montrer que P(n) est vraie, on procède par 3 étapes :

●On vérifie pour certaines valeurs de n que P(n) est vraie

●On suppose que P(n) est vraie dans le rang de n

●On démontre qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1

Multiple et diviseur d'un entier relatif :

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un multiple de b s'il existe un réel k tel que $\boldsymbol{a = bk}$

Si $b \neq 0$ alors on dit que b est un diviseur de a

Congruence modulo n :

Soit n un entier naturel non nul, $a\ et\ b$ deux entiers relatifs

On dit que a est congrue à b modulo n si et seulement si $a - b$ est un multiple de n , on note ($a \equiv b[n]\ où\ a \equiv b(mod\ n)$)

●Si $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ a' \equiv b'[n] \end{cases}$ alors $\begin{cases} a + a' \equiv b + b'[n] \\ a \times a' \equiv b \times b'[n] \end{cases}$ ● $\exists k \in \mathbb{N}\ \ tel\ que\ \begin{cases} ak \equiv bk[n] \\ a^k \equiv b^k[n] \end{cases}$

●Si d divise $a, b\ et\ n$ alors on a : $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}\left[\frac{n}{d}\right]$

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$:

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs avec $b \neq 0$; $\exists(q; r) \in Z^2$ tels que : $a = b \times q + r\ \ \ avec\ \ \ 0 \leq r < |b|$

q est le quotient ; r le reste ; a le dividende et b le diviseur

Nombres premiers :

Un nombre entier p est premier si et seulement s'il n'admet que deux diviseurs dans $\mathbb{N}$ $(1; p)$ et quatre diviseurs dans $\mathbb{Z}$ $(1;\ -1;\ p;\ -p)$

●Il existe une infinité de nombres premiers

●Un nombre p est premier si et seulement si aucun nombre premier inferieur où égal a $E\left(\sqrt{p}\right)$ ne le divise

●Ensemble des diviseurs d'un nombre :

Soit $P = {P_0}^{\alpha_0} \times {P_1}^{\alpha_1} \times {P_2}^{\alpha_2} \times \cdots \times {P_n}^{\alpha_n}$ un entier naturel où les P_i sont les nombres premiers

× **Le nombre de diviseurs positifs est :** $d(P) = (\alpha_0 + 1) \times (\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_n + 1)$

× Les diviseurs se déterminent par deux méthodes:

1ère méthode : $D(P) =$
$\left(1; P_0;\ {P_0}^2; \cdots;\ {P_0}^{\alpha_0}\right)\left(1; P_1;\ {P_1}^2; \cdots;\ {P_1}^{\alpha_1}\right)\cdots\left(1; P_n;\ {P_n}^2; \cdots;\ {P_n}^{\alpha_n}\right)$

2ème méthode : Schéma d'arbre

×La somme des diviseurs se calcule comme suit :

$$S_{D(P)} = \frac{1-{P_0}^{\alpha_0+1}}{1-P_0} \times \frac{1-{P_1}^{\alpha_1+1}}{1-P_1} \times \cdots \times \frac{1-{P_n}^{\alpha_n+1}}{1-P_n}$$

PGCD(Plus Grand Commun Diviseur) et PPCM(Plus Petit Commun Multiple) :

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs non nuls.

●On appelle plus grand commun diviseur de $a\ et\ b$ le plus grand élément de $D(a;b)$. On note $PGCD(a,b) où\ \Delta(a,b)$

ALGORITHME D'EUCLIDE

Pour déterminer le $PGCD(a,b)$ on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$a = b \times q + r_0 \qquad b = r_0 \times q_1 + r_1 \qquad r_0 = r_1 \times q_2 + r_2 \cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \times q_{n-1} + r_n$$

On continue jusqu'au dernier reste non nul r_n alors on dira que le $PGCD(a,b) = r_n$

$\times \mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,a) \qquad \mathrm{PGCD}(ka,kb) = k \times \mathrm{PGCD}(a,b)$

$$\mathrm{PGCD}(a,b,c) = \mathrm{PGCD}\big(a, \mathrm{PGCD}(b,c)\big)$$

Théorème :

Si $PGCD(a,b) = d\ \ alors\ \ \exists(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\begin{cases} a = dx \\ b = dy \end{cases}$ avec $\Delta(x,y) = 1$

●On appelle plus petit commun multiple de $a\ et\ b$ le plus petit élément positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. On note $PPCM(a,b)\ ou\ \nabla(a,b)$; $a\nabla b$

$\times PPCM(a,b) = PPCM(b,a) \qquad PPCM(ka,kb) = k \times PPCM(a,b)$

$$PPCM(a,b,c) = PPCM\big(a, PGCD(b,c)\big)$$

Théorème : $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = |a| \times |b|$

●Théorème de Bézout :

Si $PGCD(a,b) = d\ \ alors\ \ \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2\ tels\ que:\ \ au + bv = d$

● Théorème de Gauss :

Si a/bc et si $a\ et\ b$ sont premiers entre eux alors a/c

$Si\ a/n\ et\ b/n$ avec $a\ et\ b$ sont premiers entre eux alors ab/n

Equations entières :

Toute équation (E) qui s'écrit sous la forme $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ avec $(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{Z}^{*2}$

1er cas : Si $c = 0$ on a $ax + by = 0 \Rightarrow ax = -by \Rightarrow \frac{x}{b} = -\frac{y}{a} = k \Longrightarrow$

$$x = bk\ \ et\ y = -ak$$

2ème cas : Si $c \neq 0$ on a $ax + by = c$, pour résoudre cette équation on vérifie l'existence de solution :

On détermine le $PGCD(a, b) = d$, (E) admet de solutions si et seulement d/c et on procède comme suit :

●On divise l'équation (E) par, on a $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \Rightarrow a'x + b'y = c'$

1ère méthode : utilisation de la congruence modulo-n

●On élimine y: $a'x \equiv c'[b']$

●On remplace x par son expression dans l'équation (E) puis on détermine y

2ème méthode : Algorithme d'Euclide

On détermine une solution particulière $(x_0;\ y_0)$ et on procède comme suit : $\begin{cases} a'(x_0) + b'(y_0) = c' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ on pose $c' = c' \Rightarrow a'(x_0) + b'(y_0) = a'x + b'y \Rightarrow$

$$a'(x - x_0) = b'(y - y_0) \Rightarrow \frac{x - x_0}{b'} = \frac{y - y_0}{a'} \text{ d'après Gauss on a:}$$

$$\frac{x - x_0}{b'} = \frac{y - y_0}{a'} = k \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = b'k \\ y - y_0 = a'k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + b'k \\ y = y_0 + a'k \end{cases}$$

Système de numération

Définition :

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2

Tout nombre entier naturel non nul A s'écrit de feçon unique sous la forme : $A = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0$ avec $a_{n-1} \neq 0$

$a_i \in \{0; 1; \dots; b-1\}$

L'écriture de A en base b est : $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}^{b}$

NB : Pour écrire un nombre en base b, on fait les divisions successives de ce nombre par b jusqu'à un quotient inférieur à b puis on prend inversement les restes pour trouver ce nombre

Système binaire :

On appelle système binaire, tout système de base b=2 et qui prend les chiffres :$\{0; 1\}$

Exemples :

$$2 = \overline{10}^2;\ 3 = \overline{11}^2;\ 4 = \overline{100}^2;\ 5 = \overline{101}^2;\ 6 = \overline{110}^2;\ 7 = \overline{111}^2;$$
$$8 = \overline{1000}^2;\ 9 = \overline{1001}^2;\ 10 = \overline{1010}^2$$

Passage d'un système de base b à un système de base b^n :

Pour passer d'un système de base b à un système de base b^n ; on groupe les chiffres par n chiffres de la droite vers la gauche puis on les écrit en base 10 pour l'obtenir en base b^n

Exemple : Ecivons le nombre $A = \overline{101101101011}^2$ en base 4 et 8

-En base 4 ; on a : $4 = 2^2$ alors on groupe par deux chiffres de la droite vers la gauche $A = \overline{101101101011}^2 = \overline{231223}^4$ alors $A = \overline{231223}^4$

-En base 8 ; on a : $8 = 2^3$ alors on groupe par trois chiffres de la droite vers la gauche $A = \overline{101101101011}^2 = \overline{5553}^8$ alors $A = \overline{5553}^8$

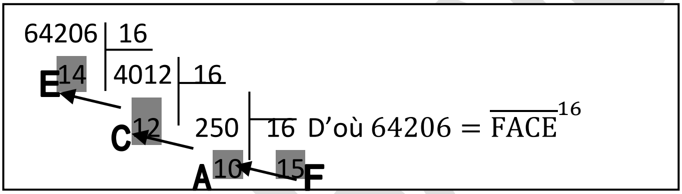
<u>Système décimal :</u>

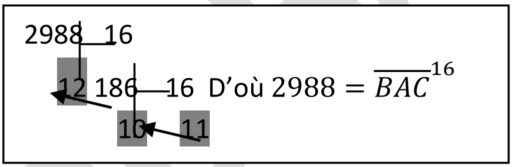
On appelle système décimal, tout système de base b=10 et qui prend les chiffres :$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

<u>Système hexadécimal :</u>

On appelle système décimal, tout système de base b=16 et qui prend les chiffres :$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E\ et\ F\}$ où $A; B; C; D; E\ et\ F$ prenent las valeurs respectives : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 et 15

<u>Exemple :</u> Ecrivons les nombres suivants 64206 et 2988 en base seize





++++++++++++++++++BONUS COURS+++++++++++++++++

1- Comment lire un nombre de plusieurs chiffres

Pour lire un nombre de plusieurs chiffres, on procède comme suit :

			Trillion			Billiard			Billion			Milliard			Million			Mille					
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

			Septillion						Sextillion						Quintillion						Quatrillion		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

			Undécillion						Décillion						Nonillion						Octillion		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

			Quindécillion						Quattuordécillion						Tredécillion						Duodécillion		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	U

			Novemdécillion						Octodécillion						Septendécillion						Sexdécillion		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

<u>EXEMPLE :</u> le nombre suivant se lit comme suit :

415.213.458.105.846.795.214.468.320.987.012.545.665.324.014.962.333.841.753.653.775.205.120

415.213 Décillions 458.105 Nonillions 846.795 Octillions 214.468 Septillions 320.987Sextillions 12.545Quintillions 665.324 Quatrillions 14.962 Trillions 333.841Billiards 753 Billions 653 Milliards 775 Millions 205Mille120

2- FONCTION D'EULER :

Définition : Pour tout entier naturel $n \geq 2$, On appelle indicateur d'Euler de n, et on note $\varphi(n)$, le cardinal de l'ensemble des entiers premiers avec n compris entre 0 et n-1, c'est-à-dire le cardinal du groupe G_n des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exemple : Le cardinal de quelques groupes G_n et leurs indicateurs d'Euler :

$$G_2 = \{\overline{1}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(2) = 1$$
$$G_3 = \{\overline{1};\ \overline{2}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(3) = 2$$
$$G_4 = \{\overline{1}; \overline{3}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(4) = 2$$
$$G_5 = \{\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(5) = 4$$
$$G_8 = \{\overline{1}; \overline{3}; \overline{5}; \overline{7}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(8) = 4$$

Remarque :

■Si n est un nombre premier alors il est premier avec le cardinal de son groupe $G_n = \{\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \dots; \overline{n-1}\}$ et on a : $\varphi(n) = n - 1$

Exemple : $G_3 = \{\overline{1};\ \overline{2}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(3) = 3 - 1 = 2$

$$G_5 = \{\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\} \quad \text{alors} \quad \varphi(5) = 5 - 1 = 4$$

■Si n est le produit de deux ou plusieurs facteurs premiers alors son indicateur se détermine comme suit :

$$n = \alpha \times \beta \times \gamma \times \dots \times \mu \ \text{ alors } \ \varphi(n) = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\dots(\mu - 1)$$

Exemple :

a- comme $6 = 2 \times 3$; $G_6 = \{\overline{1};\ \overline{5}\}$ alors $\varphi(6) = (2-1)(3-1) = 2$

b- comme $10 = 2 \times 5$; $G_{10} = \{\overline{1}; \overline{3}; \overline{7}; \overline{9}\}$ alors $\varphi(10) = (2-1)(5-1) = 4$

c- comme $30 = 2 \times 3 \times 5$; $G_{30} = \{\overline{1}; \overline{7}; \overline{11}; \overline{13}; \overline{17}; \overline{19};\ \overline{23};\ \overline{29}\}$ alors

$$\varphi(30) = (2-1)(3-1)(5-1) = 8$$

■Si n est un carré parfait alors son indicateur se détermine comme suit :

$n = \alpha^2$ alors $\varphi(n) = \alpha(\alpha - 1)$ si α est un nombre premier

$n = \alpha^2 \times \beta^2$ alors $\varphi(n) = \alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)$ si α et β sont des nombres premiers

Exemple : a − comme $4 = 2^2$; $G_4 = \{\overline{1};\ \overline{3}\}$ alors $\varphi(4) = 2(2-1) = 2$

b − comme $9 = 3^2$; $G_9 = \{\overline{1}; \overline{2}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{7}; \overline{8}\}$ alors $\varphi(9) = 3(3-1) = 6$

c − comme $36 = 2^2 \times 3^2$; $G_{36} = \{\overline{1}; \overline{5}; \overline{7}; \overline{11}; \overline{13}; \overline{17}; \overline{19}; \overline{23}; \overline{25}; \overline{29}; \overline{31}; \overline{35}\}$ alors

$$\varphi(36) = 2(2-1)3(3-1) = 12$$

Application à la période modulo-n d'un entier a premier avec n :

Soit n un entier naturel $n \geq 2$ et a un entier relatif premier avec n. On a la relation : $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$; la période d de a est un diviseur de $\varphi(n)$

Exercice :

1- Calculons dans chacun des cas suivants $\varphi(n)$

a- $n = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$ alors $\varphi(120) = 2 \times 2(2-1)(3-1)(5-1) = 4 \times 1 \times 2 \times 4 = 32$

b- $n = 85 = 5 \times 17$ alors $\varphi(85) = (5-1)(17-1) = 4 \times 16 = 64$

2- Trouvons quatre entiers n tels que : $\varphi(n) = 24$

$$Comme\ \ 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \times 1 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$$

$$n_1 = (4+1)(6+1) = 5 \times 7 = 35 \qquad n_2 = (2+1)(12+1) = 3 \times 13 = 39$$

$$n_1 = 2(4+1)(6+1) = 2 \times 5 \times 7 = 70 \qquad n_2 = 2(2+1)(12+1) = 2 \times 3 \times 13 = 78$$

$$\boldsymbol{n} = \{\mathbf{35}; \mathbf{39}; \mathbf{70}; \mathbf{78}\}$$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$ e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

f) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$; g) $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Démontrons par récurrence les propositions suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{k} = \frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \mathbf{k} = \mathbf{1+2+3+\cdots+n} = \frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que la relation est vraie :

$$n = 1 \Rightarrow 1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1 \ \ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

●Démontrons que cette relation reste toujours vraie dans le rang de n+1 :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \ \ \boldsymbol{cqfd}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la relation est toujours vraie

$$\textbf{b)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{k^2} = \frac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}} \Rightarrow \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2} = \frac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}}$$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$Pour\ n = 1\ on\ a, 1^2 = 1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1\ \ alors\ \ 1 = 1\ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2+(n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Mais $2n^2+7n+6=2\left(n^2+\frac{7}{2}n+3\right)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+2)=(n+2)(2n+3)$

$$\boxed{\frac{(\mathbf{n+1})(\mathbf{2n^2+7n+6})}{\mathbf{6}}=\frac{(\mathbf{n+1})(\mathbf{n+2})(\mathbf{2n+3})}{\mathbf{6}}\quad \boldsymbol{cqfd}}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

c) $$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k^3}=\frac{\mathbf{n^2(n+1)^2}}{\mathbf{4}} \Longrightarrow \mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}=\frac{\mathbf{n^2(n+1)^2}}{\mathbf{4}}$$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$Pour\ n=1\ on\ a, 1^3=1 \overset{?}{=} \frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1\ \ alors\ \ 1=1\ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 \overset{?}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{n^{2(n+1)2}+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^{2(n^2+4(n+1))}}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{(n+1)^2(n+2)^2}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{(n+1)^2(n+2)^2}}{\mathbf{4}}\quad \boldsymbol{cqfd}}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

d) $$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{2k-1}}{\mathbf{2^k}}=\mathbf{3}-\frac{\mathbf{3+2n}}{\mathbf{2^n}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}+\cdots+\frac{\mathbf{2n-1}}{\mathbf{2^n}}=\mathbf{3}-\frac{\mathbf{3+2n}}{\mathbf{2^n}}$$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$Pour\ n=1\ on\ a,\ \ \frac{1}{2} \overset{?}{=} 3-\frac{3+2}{2}=3-\frac{5}{2}=\frac{6-5}{2}=\frac{1}{2}\ \ alors\ \ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{3+2n}{2^n}$$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}} \overset{?}{=} 3-\frac{5+2n}{2^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$3-\frac{3+2n}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}=3-\frac{6+4n}{2^{n+1}}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}=3-\frac{6+4n-2n-1}{2^{n+1}}$$
$$=3-\frac{5+2n}{2^{n+1}}\Longrightarrow$$

$\boxed{\mathbf{3-\frac{5+2n}{2^{n+1}}=3-\frac{5+2n}{2^{n+1}}}\ \ \boldsymbol{cqfd}}$ D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

e) $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\Rightarrow 2+6+12+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$Pour\ n=1\ on\ a,\ \ 2\overset{?}{=}\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=2\ \ alors\ \ 2=2\ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$2+6+12+\cdots+\mathrm{n(n+1)}=\frac{\mathrm{n(n+1)(n+2)}}{3}$$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$2+6+12+\cdots+\mathrm{n(n+1)+(n+1)(n+2)}\overset{?}{=}\frac{\mathrm{(n+1)(n+2)(n+3)}}{3}\Longrightarrow$$
$$\frac{\mathrm{n(n+1)(n+2)}}{3}+\mathrm{(n+1)(n+2)}=\frac{\mathrm{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}}{3}$$
$$=\frac{\mathrm{(n+1)(n+2)(n+3)}}{3}$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathbf{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}}\ \ \boldsymbol{cqfd}$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

f) $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\Rightarrow 6+24+\cdots+n(n+1)(n+2)}$

$$\mathbf{=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

●Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$Pour\ n=1\ on\ a,\ \ 6\overset{?}{=}\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}=6\ \ alors\ \ 6=6\ vraie$$

●Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$6+24+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$6+24+\cdots+\mathrm{n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)(n+3)}\overset{?}{=}\frac{\mathrm{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{4}$$
$$\frac{\mathrm{n(n+1)(n+2)(n+3)}}{4}+\mathrm{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{\mathrm{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(n+1)(n+2)(n+3)}}{4}$$
$$\Rightarrow\boxed{\mathbf{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}}}\ \ \boldsymbol{cqfd}$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

g) $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

•Vérifions que cette relation est vraie pour certaines valeurs de n :

Pour n=1 ; on a : $1 = (1-1)2^1 + 1 = 1$ $alors$ $1 = 1$ $vraie$

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :

$$1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

•Démontrons que cette relation est toujours vraie dans le rang de n+1 :

$1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} + (n+1)2^n = n2^{n+1} + 1$ d'après l'étape précédente

on a : $(n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = (n+1+n-1)2^n + 1 = 2n2^n + 1 = n2^{n+1} + 1$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1 \quad cqfd\,;}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cette relation est toujours vraie

++

EXERCICE 2 :

La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r.

++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Déterminons les valeurs possibles de b et r

$900 = 14b + r \quad et \quad 0 \le r < b \Rightarrow r = 900 - 14b \;\; on\ a:$

$$0 \le 900 - 14b < b \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 900 - 14b \\ 900 - 14b < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14b \le 900 \\ 15b > 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \le 64{,}28 \\ b > 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$b \in]60; 64{,}28]$ D'où $\mathbf{b} = \{\mathbf{61}; \mathbf{62}; \mathbf{63}; \mathbf{64}\}$

●Pour $b = 61$ $alors$ $r = 900 - 14 \times 61 = 46 \Rightarrow r = 46$

$$d'où \quad (\mathbf{b}; \mathbf{r}) = (\mathbf{61}; \mathbf{46})$$

●Pour $b = 62$ $alors$ $r = 900 - 14 \times 62 = 32 \Rightarrow r = 32$

$$d'où \quad (\mathbf{b}; \mathbf{r}) = (\mathbf{62}; \mathbf{32})$$

●Pour $b = 63$ $alors$ $r = 900 - 14 \times 63 = 18 \Rightarrow r = 18$

$$d'où \quad (\mathbf{b}; \mathbf{r}) = (\mathbf{63}; \mathbf{18})$$

●Pour $b = 64$ $alors$ $r = 900 - 14 \times 64 = 4 \quad \Rightarrow r = 4$

$$d'où \quad (\mathbf{b}; \mathbf{r}) = (\mathbf{64}; \mathbf{4})$$

++

EXERCICE 3 :

Déterminer l'entier naturel n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Déterminons l'entier naturel n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient

$$n = 16q + r \quad avec \ \ 0 \leq r < 16 \quad et \ \ r = q^2 \Rightarrow \ 0 \leq q^2 < 16 \Rightarrow 0 \leq q < 4 \Rightarrow q = \{0; 1; 2; 3\}$$

●Pour $q = 0 \ \ alors \ \ r = 0 \Rightarrow n = 0$

●Pour $q = 1 \ \ alors \ \ r = 1^2 = 1 \ \Rightarrow n = 16 + 1 = 17$

●Pour $q = 2 \ \ alors \ \ r = 2^2 = 4 \Rightarrow n = 16 \times 2 + 4 = 36$

●Pour $q = 3 \ \ alors \ \ r = 3^2 = 9 \ \Rightarrow n = 16 \times 3 + 9 = 57$

D'où $n = \{0; 17; 36; 57\}$

+++

EXERCICE 4 :

Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b.

Sachant que a+b+r=3025 et q=50 ; rétablir la division

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b.

Sachant que a+b+r=3025 et q=50 ; rétablissons la division.

$$\begin{cases} a = 50b + r \\ 0 \leq r < b \\ a + b + r = 3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 50b + r & ❶ \\ 0 \leq r < b & ❷ \\ a = 3025 - b - r & ❸ \end{cases} \Rightarrow a = a \Rightarrow 50b + r = 3025 - b - r$$

$$\Rightarrow 2r = 3025 - 51b \Rightarrow$$

Dans ❷ on a : $0 \leq r < b \ \Rightarrow 0 \leq 2r < 2b \Rightarrow 0 \leq 3025 - 51b < 2b \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq 3025 - 51b \\ 3025 - 51b < 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \leq 59{,}31 \\ b > 57{,}07 \end{cases}$$

$d'où \quad b = \{58; 59\}$;

●Pour b=58, on a $2r = 3025 - 51 \times 58 = 67 \ \ à \, rejeter$

●Pour b=59, on a $2r = 3025 - 51 \times 59 = 16 \ \ \Rightarrow r = 8 \ \ alors \begin{cases} a = 50 \times 59 + 8 = 2958 \\ a = 3025 - 59 - 8 = 2958 \end{cases}$

$$d'où \quad \mathbf{a = 2958 \quad b = 59 \quad\ q = 50 \quad et \quad r = 8}$$

+++

EXERCICE 5 :

Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre $n = 43x57y$ soit divisible par 15 et 2

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Déterminons les chiffres x et y pour que le nombre n=43x57y soit divisible par 15 et 2

● n est divisible par 15 si et seulement s'il est divisible à la fois par 3 et 5, on a :

× n est divisible par 5 si et seulement si : $y = \{0; 5\}$

×n est divisible par 2 si et seulement si : $y = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ alors $y = 0$

× Pour $y = 0$ *on a* $n = 43x570 \equiv 0[3] \Rightarrow 4 + 3 + x + 5 + 7 + 0 \equiv 0[3] \Rightarrow$
$19 + x \equiv 0[3]$ *mais* $19 \equiv 1[3]$

alors $x + 1 \equiv 0[3] \Rightarrow x \equiv -1[3] \Rightarrow x \equiv 2[3] \Rightarrow x = 3k + 2$ mais $0 \leq x \leq 9$

$$\Rightarrow 0 \leq 3k + 2 \leq 9 \Rightarrow -2 \leq 3k \leq 7 \Rightarrow -0{,}6 \leq k \leq 2{,}3 \Rightarrow k = \{0; 1; 2\}$$

$$Pour\ k = 0\ alors\ x = 2 \Rightarrow \boldsymbol{n = 432570};$$

$$Pour\ k = 1\ alors\ x = 5 \Rightarrow \boldsymbol{n = 435570}$$

$$Pour\ k = 2\ alors\ x = 8 \Rightarrow \boldsymbol{n = 438570}\quad d'où$$

$$\boxed{\boldsymbol{n = \{432570;\ 435570;\ 438570\}}}$$

++

EXERCICE 6 :

Trouver dans le système décimal un entier$N = abcd$ divisible par 45 et tels que le couple (b; c) soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Trouvons dans le système décimal un entier$\boldsymbol{N = abcd}$ divisible par 45 et tels que le couple (b; c) soit solution de l'équation : $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 24}$

$(b;\ c)$ est solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$ si et seulement si

$$\mathrm{b}^2 - \mathrm{c}^2 = 24 \Rightarrow (\mathrm{b} + \mathrm{c})(\mathrm{b} - \mathrm{c}) = 24 \times 1 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$$

■ $\begin{cases} \mathrm{b + c = 24} \\ \mathrm{b - c = 1} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{2b = 25}$ à rejeter ; ■ $\begin{cases} \mathrm{b + c = 8} \\ \mathrm{b - c = 3} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{2b = 11}$ à rejeter

■ $\begin{cases} \mathrm{b + c = 12} \\ \mathrm{b - c = 2} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{2b = 14 \Rightarrow b = 7}$ alors $\mathrm{c = 12 - b = 12 - 7 = 5 \Rightarrow c = 5}$

$$\text{alors } (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{7}; \mathbf{5})$$

■ $\begin{cases} \mathrm{b + c = 6} \\ \mathrm{b - c = 4} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{2b = 10 \Rightarrow b = 5}$ alors $\mathrm{c = 6 - b = 6 - 5 = 1 \Rightarrow c = 1}$

$$alors\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\mathbf{5}; \mathbf{1})$$

Pour $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\mathbf{7}; \mathbf{5})$ on a $\mathrm{N = a75d}$ et $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\mathbf{5}; \mathbf{1})$ on a $\mathrm{N = a51d}$

N est divisible par 45 si et seulement s'il est divisible à la fois par 9 et 5

●$N \equiv 0[5]$ si et seulement si $d = \{0; 5\}$

○ Pour $y = 0$ *on a* $\begin{cases} a750 \equiv 0[9] \\ a510 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 7 + 5 + 0 \equiv 0[9] \\ a + 5 + 1 + 0 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a + 12 \equiv 0[9] \\ a + 6 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3 \equiv 0[9] \\ a + 6 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv -3[9] \\ a \equiv -6[9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \equiv 6[9] \\ a \equiv 3[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 + 9k \\ a = 3 + 9k \end{cases} pour\ \ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 3 \end{cases} alors\ \begin{cases} N = 6750 \\ N = 3510 \end{cases}$$

○ Pour $y = 5$ *on a* $\begin{cases} a755 \equiv 0[9] \\ a515 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 7 + 5 + 5 \equiv 0[9] \\ a + 5 + 1 + 5 \equiv 0[9] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 17 \equiv 0[9] \\ a + 11 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 8 \equiv 0[9] \\ a + 2 \equiv 0[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv -8[9] \\ a \equiv -2[9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \equiv 1[9] \\ a \equiv 7[9] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 + 9k \\ a = 7 + 9k \end{cases} \; pour \;\; k = 0 \; \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 7 \end{cases} alors \;\; \begin{cases} N = 1755 \\ N = 7515 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\mathbf{N = \{6750; 3510; 1755; 7515\}}}$

+++

EXERCICE 7 :

Un entier naturel s'écrit xy7 dans le système décimal et y00x dans le système a base 8

a)Sachant que y=x-4 ; Déterminer x et y

b) Ecrire ce nombre en système décimal ; binaire ; octa décimal et hexa décimal

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Un entier naturel s'écrit xy7 dans le système décimal et y00x dans le système a base 8

a) Sachant que y=x-4 ; Déterminons x et y

Soit N ce nombre : $N = \overline{xy7} = 100x + 10y + 7 \;\; et$

$$N = \overline{y00x}^{8} = y \times 8^3 + x = 512y + x \; avec \;\; x < 8 \; et \; y < 8$$

On pose N=N on a $100x + 10y + 7 = 512y + x \Longrightarrow 99x - 502y + 7 = 0$ mais $y = x - 4$ alors on a: $99x - 502(x - 4) + 7 = 0 \Longrightarrow 99x - 502x + 2008 + 7 = 0$

$$\Longrightarrow 403x = 2015 \Longrightarrow x = 5 \;\; et \;\; y = 5 - 4 = 1$$

D'où $(x;\; y) = (5; 1)$

b) Ecrivons ce nombre en système décimal ; binaire ; octa-décimal et hexa décimal

En décimal : $N = 517$ **En binaire** : $N = 1000000101$

En octa-décimal : $N = 1005$ **En hexa-décimal** : $N = 205$

+++

EXERCICE 8 :

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7.

2) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de division euclidienne de 11^n par 7.

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7.

$11^{1999} \equiv r[7]; \;\; comme \;\; 11 \equiv 4[7]$ alors déterminons les puissances de 4

•$4 \equiv 4[7] \;\; ; \;\; 4^2 \equiv 2[7] \;\; ; \;\; 4^3 \equiv 2 \times 4[7] \Longrightarrow 4^3 \equiv 8[7] \Longrightarrow 4^3 \equiv 1[7] \Longrightarrow p = 3$

$$et\ on\ a{:}\ 1999 = 3 \times 666 + 1$$

Alors $11 \equiv 4[7] \Longrightarrow 11^{1999} \equiv 4^{1999}[7] \Longrightarrow 11^{1999} \equiv 4^{3\times666+1}[7] \Longrightarrow \; 11^{1999} \equiv 4^{3\times666} \times 4[7]$

$\Longrightarrow \; 11^{1999} \equiv 4[7] \Longrightarrow \; D'où \;\; r = 4$

2) Déterminons suivant les valeurs de n, le reste de division euclidienne de 11^n par 7

$11^n \equiv R[7]$; $comme\ \ 11 \equiv 4[7]$ alors déterminons les puissances de 4

$\bullet 4 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 2 \times 4[7] \Longrightarrow 4^3 \equiv 8[7] \Longrightarrow 4^3 \equiv 1[7] \Longrightarrow p = 3\ et\ on\ a$:

$n = 3k + r\ \ avec\ 0 \leq r < 3$ Alors $11 \equiv 4[7] \Longrightarrow 11^n \equiv 4^n[7] \Longrightarrow$

$$11^n \equiv 4^{3k+r}[7] \Longrightarrow\ 11^n \equiv 4^{3k} \times 4^r[7] \Longrightarrow 11^n \equiv 4^r[7]$$

$$* \text{ Pour r} = 0 \text{ alors } 11^{\mathrm{n}} \equiv 4^0[7] \Longrightarrow 11^{\mathrm{n}} \equiv 1[7] \Longrightarrow \mathbf{R = 1}$$

$$* \text{ Pour r} = 1 \text{ alors } 11^{\mathrm{n}} \equiv 4^1[7] \Longrightarrow 11^{\mathrm{n}} \equiv 4[7] \Longrightarrow \mathbf{R = 4}$$

$$* \text{ Pour r} = 2 \text{ alors } 11^{\mathrm{n}} \equiv 4^2[7] \Longrightarrow 11^{\mathrm{n}} \equiv 2[7] \Longrightarrow \mathbf{R = 2}$$

++

EXERCICE 9 :

1) On considère l'entier naturel A qui s'écrit 53x4 dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :

a)A soit divisible par 7.

b) A soit divisible par 6. En déduire que A est divisible à la fois par 6 et 7.

2) On prend x=2. Déterminer l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs de A ?

Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par le quel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait.

+++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

1) On considère l'entier naturel A qui s'écrit 53x4 dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :

Ecrivons A dans le système décimal : $A = \overline{53x4}^{8} = 5 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8x + 4 =$

$$A = 2560 + 192 + 8x + 4 \Longrightarrow A = 8x + 2756\ \ avec\ \ 0 \leq x < 8$$

Déterminons x de telle sorte que :

a)A soit divisible par 7.

On pose $A \equiv 0[7]\ \Longrightarrow 8x + 2756 \equiv 0[7]\ mais\ 2756 \equiv 5[7]\ et\ 8 \equiv 1[7]\ alors\ x + 5 \equiv 0[7] \Longrightarrow\ x \equiv -5[7] \Longrightarrow x \equiv (7-5)[7] \Longrightarrow x \equiv 2[7]\ \Longrightarrow x = 2 + 7k$

$$alors\ si\ \ k = 0 \quad on\ a\ \ \boldsymbol{x = 2}$$

b) A soit divisible par 6.

On pose $A \equiv 0[6]\ \Longrightarrow 8x + 2756 \equiv 0[6]\ mais\ 2756 \equiv 2[6]\ et\ 8 \equiv 2[6]\ alors\ 2x + 2 \equiv 0[6] \Longrightarrow$

$$2x \equiv -2[6] \Longrightarrow 2x \equiv (6-2)[6] \Longrightarrow 2x \equiv 4[6]\ \Longrightarrow x \equiv 2[3]\ \Longrightarrow x = 2 + 3k$$

$$alors\ si\ \begin{cases} k = 0 & on\ a\ \ \boldsymbol{x = 2} \\ k = 1 & on\ a\ \ \boldsymbol{x = 5} \end{cases}$$

A est divisible à la fois par 6 et 7 si et seulement si $\boldsymbol{x = 2}$

2) On prend x=2. Déterminons l'écriture décimale de A.

$$A = 8x + 2756 = 8 \times 2 + 2756 = 2772\ \ d'où\ \ \boldsymbol{A = 2772}$$

Déterminons le nombre de diviseurs de A

$$\mathrm{A} = 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \text{ alors}$$

$$\mathrm{d(A)} = (2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

$$\text{d'où}\ \ \mathrm{d(A)} = 36$$

Trouvons le plus petit nombre entier naturel non nul par le quel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait

$$A = 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 = (2 \times 3)^2 \times (7 \times 11) = 6^2 \times 77$$

Soit $a = 6^{2k} \times 77^{2k+1}$ le nombre par le quel on doit multiplier A pour qu'il soit un carré parfait

D'où le plus petit entier naturel par le quel on doit multiplier A est :

Pour $k = 0$ $on\ a : a = 6^0 \times 77^{0+1} = 77$

++

EXERCICE 10 :

On considère l'entier naturel représenté en base b par A=342x

Déterminer le chiffre x pour que A soit :

a) divisible par 5, quand b=6

b) divisible par 3, quand b=7

c) divisible par 12, quand b=17

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

On considère l'entier naturel représenté en base b par A=342x

Déterminons le chiffre x pour que A soit :

a) divisible par 5, quand b=6

On pose $A = \overline{342x}^{6} \equiv 0[5] \Longrightarrow 3 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 2 \times 6 + x \equiv 0[5] \Longrightarrow$

$x + 804 \equiv 0[5]$ mais $804 \equiv 4[5]$ alors $x + 4 \equiv 0[5] \Longrightarrow$

$$x \equiv -4[5] \Longrightarrow x \equiv (5-4)[5] \Longrightarrow x \equiv 1[5]$$

$$d'où\ x = 1 + 5k\ \ avec\ \ 0 \leq x < 6 \quad ;\ \ k = 0\ on\ a\ \boldsymbol{x = 1}$$

b) divisible par 3, quand b=7

On pose $A = \overline{342x}^{7} \equiv 0[3] \Longrightarrow 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 2 \times 7 + x \equiv 0[3] \Longrightarrow x + 1239 \equiv 0[3]\ mais\ 1239 \equiv 0[3]\quad alors\ x \equiv 0[3]\quad d'où\ x = 3k\ \ avec\ \ 0 \leq x < 7$

$k = 0\ on\ a\ \boldsymbol{x = 0}\ ;\ \ k = 1\ \ on\ a\ \ \boldsymbol{x = 3}\ et\ \ k = 2\ \ on\ a\ \ \boldsymbol{x = 6}$ d'où $\boldsymbol{x = \{0; 3; 6\}}$

c) divisible par 12, quand b=17

On pose $A = \overline{342x}^{17} \equiv 0[12] \Longrightarrow 3 \times 17^3 + 4 \times 17^2 + 2 \times 17 + x \equiv 0[12]$

$\Longrightarrow\ x + 15929 \equiv 0[12]$ mais $15929 \equiv 5[12]$ alors $x + 5 \equiv 0[3]$

$$\Longrightarrow x \equiv -5[12] \Longrightarrow x \equiv (12-5)[12] \Longrightarrow x \equiv 7[12]$$

d'où $x = 7 + 12k$ avec $0 \leq x < 17$; si $k = 0$ on a $\mathbf{x = 7}$

++

EXERCICE 11:

1) Déterminer suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 7

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{136} par 7

3) Un nombre s'écrit 3x53 en base 10

Déterminer x pour que l'on ait $5^{136} + 3x53 \equiv 0[7]$

++++++++++++++++++++++++<u>**RESOLUTION**</u>+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 7

$5^n \equiv R[7]$; *comme* $5 \equiv 5[7]$ alors déterminons les puissances de 5

•$5 \equiv 5[7]$; $5^2 \equiv 4[7]$; $5^3 \equiv 5 \times 4[7] \Rightarrow 5^3 \equiv 6[7]$; $5^4 \equiv 5 \times 6[7] \Rightarrow 5^4 \equiv 2[7]$; $5^5 \equiv 5 \times 2[7] \Rightarrow 5^5 \equiv 3[7] \Rightarrow 5^6 \equiv 5 \times 3[7] \Rightarrow 5^6 \equiv 1[7] \Rightarrow p = 6$ *et on a*: $n = 6k + r$ *avec* $0 \leq r < 6$

Alors $5 \equiv 5[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5^n[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5^{6k+r}[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5^{6k} \times 5^r[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5^r[7]$

$$* \text{ Pour } r = 0 \text{ alors } 5^n \equiv 5^0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 1[7] \Rightarrow R = 1$$

$$* \text{ Pour } r = 1 \text{ alors } 5^n \equiv 5^1[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5[7] \Rightarrow R = 5$$

$$* \text{ Pour } r = 2 \text{ alors } 5^n \equiv 5^2[7] \Rightarrow 5^n \equiv 4[7] \Rightarrow R = 4$$

$$* \text{ Pour } r = 3 \text{ alors } 5^n \equiv 5^3[7] \Rightarrow 5^n \equiv 6[7] \Rightarrow R = 6$$

$$* \text{ Pour } r = 4 \text{ alors } 5^n \equiv 5^4[7] \Rightarrow 5^n \equiv 2[7] \Rightarrow R = 2$$

$$* \text{ Pour } r = 5 \text{ alors } 5^n \equiv 5^5[7] \Rightarrow 5^n \equiv 3[7] \Rightarrow R = 3$$

2) Déduisons-en le reste de la division euclidienne de 5^{136} par 7

$$5^{136} \equiv R[7] \text{ comme } 136 = 6 \times 22 + 4 \text{ alors } r = 4 \Rightarrow 5^{136} \equiv 5^4[7] \Rightarrow 5^{136} \equiv 2[7] \Rightarrow R = 2$$

3) Un nombre s'écrit 3x53 en base 10

Déterminons x pour que l'on ait $5^{136} + 3x53 \equiv 0[7]$

$$5^{136} + 3x53 \equiv 0[7] \text{ comme } 5^{136} \equiv 2[7] \text{ alors } 2 + 3x53 \equiv 0[7] \Rightarrow x + 2 + 3053 \equiv 0[7]$$
$$\Rightarrow x + 3055 \equiv 0[7] \text{ mais } 3055 \equiv 3[7] \text{ alors } x + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow x \equiv -3[7] \Rightarrow$$
$$x \equiv (7-3)[7] \Rightarrow x \equiv 4[7] \Rightarrow \mathbf{x = 4 + 7k}$$

$$\text{avec } 0 \leq x \leq 9 \text{ alors } \begin{cases} k = 0 \;, & x = 4 \\ k = 1 \;, & x = 11 \text{ à rejeter} \end{cases} \text{ d'où } \mathbf{x = \{4\}}$$

+++

<u>EXERCICE 12:</u>

On considère l'équation (E) : $(p; q) \in Z^2 : 11p - 7q = -4$

1)a)Vérifier que $(-1; -1)$ est solution de (E) ;

b) Résoudre (E)

2)a)Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :

(F) x∈ Z , $2x \equiv 3[7]$ et (G) $x \in Z$, $9x \equiv 4[11]$

b) Déduire de 1) et 2) les solutions du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}$, x∈ Z

++++++++++++++++++++++++<u>**RESOLUTION**</u>+++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation (E) : $(p; q) \in Z^2 : 11p - 7q = -4$

1)a)Vérifions que $(-1; -1)$ est solution de (E) :

$$11(-1) - 7(-1) = -11 + 7 = -4 \quad \boldsymbol{cqfv}$$

b) Résolvons (E) : on a :

$$\begin{cases} 11p - 7q = -4 \\ 11(-1) - 7(-1) = -4 \end{cases} \text{ on pose } -4 = -4 \text{ on a : } 11p - 7q = 11(-1) - 7(-1) \Rightarrow$$

$$11(p+1)=7(q+1)\Rightarrow \frac{p+1}{7}=\frac{q+1}{11}=k\Rightarrow\begin{cases}p+1=7k\\q+1=11k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=7k-1\\q=11k-1\end{cases}$$

$$d'où\ \boxed{\boldsymbol{S=\{7k-1;\ \ 11k-1\}}}$$

2)a)Résolvons les équations (F) et (G) suivantes :

●(F) $x\in\mathbb{Z}$, $2x\equiv 3[7]\Rightarrow 4\times 2x\equiv 4\times 3[7]\Rightarrow 8x\equiv 12[7]$ mais $8\equiv 1[7]$ et $12\equiv 5[7]$ alors $x\equiv 5[7]\Rightarrow \mathbf{x=5+7a}$

●(G) $x\in\mathbb{Z}$, $9x\equiv 4[11]\Rightarrow 5\times 9x\equiv 5\times 4[11]\Rightarrow 45x\equiv 20[11]$ mais $45\equiv 1[11]$ et $20\equiv 9[11]$ alors $x\equiv 9[11]\Rightarrow \mathbf{x=9+11b}$

b) Déduisons de 1) et 2) les solutions du système $\begin{cases}\mathbf{2x\equiv 3[7]}\\\mathbf{9x\equiv 4[11]}\end{cases}$, $x\in\mathbf{Z}$

$$\begin{cases}2x\equiv 3[7]\\9x\equiv 4[11]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5+7a\\x=9+11b\end{cases}\text{ on pose } x=x;\ 5+7a=9+11b\Rightarrow 11b-7a=-4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=7k-1\\a=11k-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5+7(11k-1)=77k-2\\x=9+11(7k-1)=77k-2\end{cases}\quad \mathbf{x=\{77k-2\}}$$

++

EXERCICE 13:

Le nombre x s'écrit $\overline{bbaa}$ en base 3

a) Quelles valeurs peuvent prendre a et b

b) Le nombre s'écrit $\overline{bba}$ en base 6. Trouver une relation liant a et b, et en déduire les valeurs de a et b.

c) Ecrire x dans la base décimale

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Le nombre x s'écrit $\overline{bbaa}$ en base 3

a) **Les valeurs que a et b doivent prendre sont :** $\mathbf{a=\{0;1,2\}}$ **et** $\mathbf{b=\{1;2\}}$

b) **Le nombre s'écrit $\overline{bba}$ en base 6. Trouvons une relation liant a et b**

$$\begin{cases}x=\overline{bbaa}^{3}=b\times 3^3+b\times 3^2+3a+a=36b+4a\\x=\overline{bba}^{6}=b\times 6^2+6b+a=42b+a\end{cases}$$

on pose $x=x\ \Rightarrow 36b+4a=42b+a\Rightarrow a=2b$

Déduction des valeurs de a et b $a=2b$

Pour $b=1\Rightarrow a=2$ alors $(a,b)=(2;1)$ Pour $b=2\Rightarrow a=4$ à rejeter

c)Ecrivons x dans la base décimale $\begin{cases}x=\overline{bbaa}^{3}=36+8=44\\x=\overline{bba}^{6}=42+2=44\end{cases}$ $alors\ x=44$

++

EXERCICE 14:

On considère trois nombres entiers naturels a , b et c qui s'écrivent dans base n :

$$a=111\ ;\ \ b=114\quad et\ c=13054$$

1) Sachant que $c=ab$, déterminer n puis l'écriture de de chacun des nombres dans le système décimal

2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.
En déduire les solutions dans Z² de l'équation : $ax + by = 1$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

On considère trois nombres entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans base n : $\boldsymbol{a = 111}$; $\boldsymbol{b = 114\ et\ c = 13054}$

1) Sachant que $\boldsymbol{c = ab}$, déterminons n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal

$$\mathrm{a = 111 = n^2 + n + 1 \quad ; \quad b = 114 = n^2 + n + 4 \ \ et}$$

$$\mathrm{c = 13054 = n^4 + 3n^3 + 5n + 4 \ \ avec\ (n > 5)}$$

$$\mathrm{c = ab \Longrightarrow n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 4) \Longrightarrow}$$

$$\mathrm{n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = n^4 + 2n^3 + 6n^2 + 5n + 4 \Longrightarrow n^3 - 6n^2 = 0 \Longrightarrow}$$

$\mathrm{n^2(n-6) = 0}$ on a $\mathbf{n = 6}$

$$\mathrm{a = 111 = 6^2 + 6 + 1 = 43 \Longrightarrow a = 43 \quad ; b = 114 = 6^2 + 6 + 4 \quad b = 46 \ \ et}$$

$$c = 13054 = 6^4 + 3(6)^3 + 5(6) + 4 \ \Longrightarrow c = 1978$$

2) Vérifions en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.

Pour cela déterminons le $PGCD(a, b)$

$PGCD(a, b)$: $46 = 1 \times 43 + 3 \quad 43 = 3 \times 14 + 1 \ \ alors\ \ PGCD(a, b) = 1\ \ \boldsymbol{cqfv}$

Déduisons-en les solutions dans Z² de l'équation : $\boldsymbol{ax + by = 1}$

$43 - 3 \times 14 = 1 \ \Longrightarrow\ 43 - 14(46 - 43) = 1 \ \Longrightarrow\ 43 - 14 \times 46 + 14 \times 43 = 1 \ \Longrightarrow$

$$\mathrm{43(15) + 46(-14) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} 43x + 46y = 1 \\ 43(15) + 46(-14) = 1 \end{cases} \quad 1 = 1 \ on\ a}$$

$$\mathrm{43x + 46 = 43(15) + 46(-14) \Longrightarrow\ 43(x - 15) = 46(-y - 14) \Longrightarrow}$$

$$\mathrm{\frac{x - 15}{46} = \frac{-y - 14}{43} = k \ \Longrightarrow \begin{cases} x - 15 = 46k \\ -y - 14 = 43k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 46k + 15 \\ y = -43k - 14 \end{cases} \Longrightarrow}$$

$$\mathbf{S = \{(46k + 15;\ -43k - 14)\}}$$

++

EXERCICE 15:

On donne $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) a- Déterminer tous les polynômes de degré 3 tels que : $f(x + 1) - f(x) = x^2$

   b- Retrouver le résultat : $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) On donne $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   a- Calculer $\sum_{p=1}^{n} p^3$ par une méthode analogue à celle de la 1ère question

   b- En déduire une expression de $E_n = \sum_{p=1}^{n} p(p + 1)(p + 2)$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) a- Déterminons tous les polynômes de degré 3 tels que : $\boldsymbol{f(x + 1) - f(x) = x^2}$

On pose $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ce polynôme, on a :

$$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d-ax^3-bx^2-cx-d=x^2 \Rightarrow$$
$$ax^3+3ax^2+3ax+a+bx^2+2bx+b+cx+c-ax^3-bx^2-cx=x^2 \Rightarrow$$

$3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c=x^2$ par comparaison on a :

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 3a+2b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ 3\left(\dfrac{1}{3}\right)+2b=0 \\ \dfrac{1}{3}+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-1 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2} \\ b+c=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow c=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$a=\frac{1}{3}\ ;\ b=-\frac{1}{2}\ \text{ et }\ c=\frac{1}{6}\ \text{ alors }\ \boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d}$$

b- Retrouvons le résultat : $\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\begin{array}{llll} f(x+1)-f(x)=x^2 & pour & x=1 & f(2)-f(1)=1^2 \\ & pour & x=2 & f(3)-f(2)=2^2 \\ & pour & x=3 & f(4)-f(3)=3^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & pour & x=n & f(n+1)-f(n)=n^2 \end{array}$$

En faisant la somme membre à membre on a :

$$f(n+1)-f(1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)+d-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-d$$

$$=\frac{2(n+1)^3-3(n+1)^2+n+1-2+3-1}{6}$$

$$=\frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-6n-3+n+1}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\quad \text{mais } 2n^2+3n+1=2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=(n+1)(2n+1);\quad \text{d'où}\quad \boldsymbol{\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3) On donne $\sum_{p=1}^{n} p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

a) Calculer $\sum_{p=1}^{n} p^3$ par une méthode analogue à celle de la 1ère question

Pour déterminer l'expression de $\sum_{p=1}^{n} p^3$ **;** on détermine le polynôme de degré 4 tels que : $f(x+1)-f(x)=x^3$

b) Déduisons une expression de $E_n=\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)$

$$E_n=\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)=\sum_{p=1}^{n}(p^2+p)(p+2)=\sum_{p=1}^{n}(p^3+3p^2+2p)$$

$$E_n = \sum_{p=1}^{n} p^3 + \sum_{p=1}^{n} 3p^2 + \sum_{p=1}^{n} 2p = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3n^2(n+1)^2 + 6n(n+1)(2n+1) + 12n(n+1)}{12} \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{3n(n+1)[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]}{12} = \frac{n(n+1)(n^2 + n + 4n + 2 + 4)}{4}$$

$$E_n = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4} \Rightarrow \ d'où \quad \boldsymbol{E_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

++

EXERCICE 16:

1) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers

2) Démontrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour 3x+5y et x+2y

3) Résoudre dans N* le système $\begin{cases}(3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m\end{cases}$ ou m est le PPCM de a et b

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Décomposons 319 en produit de facteurs premiers $\boldsymbol{319 = 11 \times 29}$

2) Démontrons que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour 3x+5y et x+2y

En utilisant l'Algorithme d'Euclide, on a :

$$(3x+5y) = 2(x+2y) + (x+y) \Rightarrow (x+2y) = (x+y) + y \Rightarrow$$

$$(x+y) = (y) + x \quad d'où \ \mathrm{PGCD}(3x+5; x+2y) = \mathrm{PGCD}(x; y);$$

$$\text{Si le } \mathrm{PGCD}(x; y) = 1 \ \text{ alors } \ \mathrm{PGCD}(3x+5; x+2y) = 1$$

3) Résolvons dans N* le système $\boldsymbol{\begin{cases}(3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m\end{cases}}$ **ou m est le PPCM(a ; b)**

- Si $\mathrm{PGCD}(a,b) = d$ alors il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\begin{cases}a = dx \\ b = dy\end{cases}$ avec $\Delta(x,y) = 1$
- On sait que $\mathrm{PGCD}(a,b) \times \mathrm{PPCM}(a,b) = ab \Rightarrow dm = ab$

$$\begin{cases}(3dx+5dy)(dx+2dy) = 1276 \\ dm = 2m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(3x+5y)(x+2y) = \frac{1276}{4} = 319 \\ d = 2\end{cases} \Rightarrow$$

$$(3x+5y)(x+2y) = 319 \times 1 = 11 \times 29 \Rightarrow$$

$$S_1 \begin{cases}3x+5y = 319 \\ x+2y = 1\end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 \begin{cases}3x+5y = 29 \\ x+2y = 11\end{cases}$$

$$\aleph \begin{cases}3x+5y = 319 \\ x+2y = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+5y = 319 \\ x = 1-2y\end{cases} \Rightarrow 3(1-2y) + 5y = 319 \Rightarrow 3 - 6y + 5y = 319$$

$$\Rightarrow y = -316 \text{ à rejeter}$$

$$\aleph \begin{cases}3x+5y = 29 \\ x+2y = 11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+5y = 29 \\ x = 11-2y\end{cases} \Rightarrow 3(11-2y) + 5y = 29 \Rightarrow 33 - 6y + 5y = 29$$

$$\Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 11 - 2 \times 4 = 11 - 8 = 3 \Rightarrow x = 3 \ \text{ alors } \ (x; y) = \{(3; 4)\}$$

x	y	a = 2x	b = 2y
3	4	6	8

D'où $\boldsymbol{(a, b) = \{(6; 8)\}}$

++

EXERCICE 17:

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$; $(x; y) \in Z^2$

a) Donner une solution particulière de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier naturel tels qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple (a ;-b) est solution de (E)

b) Quel est le reste de la division de N par 40

3)a)Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$; $(x; y) \in Z^2$

b) Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes dépensé 100 pièces de monnaies dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces et les femmes ont dépensé 5 pièces chacune.

Combien pourrait-il y'avoir d'hommes et de femmes dans le groupe.

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) On considère l'équation (E) : $\boldsymbol{8x + 5y = 1}$; $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{Z^2}$

a) Donnons une solution particulière de (E)

D'après le théorème de l'Algorithme d'Euclide, on a :

$8 = 1 \times 5 + 3 \implies 3 = 8 - 1 \times 5$; $5 = 1 \times 3 + 2 \implies 2 = 5 - 3 \times 1$; $3 = 1 \times 2 + 1 \implies$

$1 = 3 - 2 \times 1 \implies 3 - (5 - 3 \times 1) = 1 \implies 2 \times 3 - 5 = 1 \implies 2(8 - 1 \times 5) - 5 = 1 \implies 2 \times 8 - 3 \times 5 = 1 \implies 8(2) + 5(-3) = 1 \implies$

$$\begin{cases} 8(2) + 5(-3) = 1 \\ 8x + 5y = 1 \end{cases} \textit{par comparaison } x = 2 \textit{ et } y = -3 \implies \boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{2};\ -\boldsymbol{3})\}$$

b) Résolvons l'équation (E)

$$\begin{cases} 8(2) + 5(-3) = 1 \\ 8x + 5y = 1 \end{cases} \textit{on pose } 1 = 1 \implies 8(2) + 5(-3) = 8x + 5y \implies$$

$$8(x - 2) = 5(-y - 3) \implies$$

$$\frac{x-2}{5} = -\frac{y+3}{8} = k \implies \begin{cases} \dfrac{x-2}{5} = k \\ \dfrac{y+3}{8} = -k \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2 = 5k \\ y + 3 = -8k \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = -3 - 8k \end{cases} \implies$$

$$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{5k} + \boldsymbol{2}; -\boldsymbol{3} - \boldsymbol{8k})\} \textit{ avec } k \in Z$$

2) Soit N un entier naturel tels qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} \boldsymbol{N = 8a + 1} \\ \boldsymbol{N = 5b + 2} \end{cases}$

a) Montrons que le couple (a ;-b) est solution de (E)

$\begin{cases} \mathrm{N = 8a + 1} \\ \mathrm{N = 5b + 2} \end{cases}$ on pose $\mathrm{N = N}$, on a : $\mathrm{8a + 1 = 5b + 2 \implies 8a - 5b = 1} \implies$

$$\mathrm{8(a) + 5(-b) = 1} \implies \begin{cases} \mathrm{8(a) + 5(-b) = 1} \\ \mathrm{8x + 5y = 1} \end{cases} \text{ par comparaison , on a :}$$

$$x = a \text{ et } y = -b\,;\ \text{d'où } S = \{(a;\ -b)\}\,\textbf{cqfm}$$

b) Cherchons le reste de la division de N par 40

Comme la solution de (E) est $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = -3 - 8k \end{cases}$ et $(a, -b)$alors on pose :

$$\begin{cases} x = a = 5k + 2 \\ y = -b = -3 - 8k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5k + 2 \\ b = 3 + 8k \end{cases} \text{alors on a : } \begin{cases} N = 8(5k + 2) + 1 \\ N = 5(3 + 8k) + 2 \end{cases} \Rightarrow N = 40k + 17$$

$$\text{alors} \quad 40k + 17 \equiv 17[40] \text{ car } 40 \equiv 0[40] \text{ d'où} \quad \mathbf{r = 17}$$

3) a) Résolvons l'équation $8x + 5y = 100$; $(x; y) \in Z^2$

$$\begin{cases} 8(2) + 5(-3) = 1 \\ 8x + 5y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(200) + 5(-300) = 100 \\ 8x + 5y = 100 \end{cases} \quad \textit{on pose } 100 = 100; \textit{on a}$$

$$8(200) + 5(-300) = 8x + 5y \Rightarrow 8(x - 200) = -5(y + 300) \Rightarrow$$

$$\frac{x - 200}{5} = -\frac{y + 300}{8} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 200}{5} = k \\ \dfrac{y + 300}{8} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 200 = 5k \\ y + 300 = -8k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5k + 200 \\ y = -8k - 300 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-5k + 200}; \mathbf{-8k - 300})\}\ \textit{avec}\ k \in Z$$

b) Déterminons le nombre d'hommes et de femmes dans ce groupe.

Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes, on a : $8x + 5y = 100$

Mais $\begin{cases} x = 5k + 200 \\ y = -8k - 300 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0 \ \textit{et}\ y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 5k + 200 \geq 0 \\ -8k - 300 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k \geq -200 \\ 8k \leq -300 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} k \geq -40 \\ k \leq -37{,}5 \end{cases} \ \textit{d'où} \quad k = \{-40; -39\,; -38\}$$

●*Pour* $k = -38$; *on a :* $\begin{cases} x = -5 \times 38 + 200 = 10 \\ y = 8 \times 38 - 300 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$

●*Pour* $k = -39$; *on a :* $\begin{cases} x = -5 \times 39 + 200 = 5 \\ y = 8 \times 39 - 300 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$

●*Pour* $k = -40$; *on a :* $\begin{cases} x = -5 \times 40 + 200 = 0 \\ y = 8 \times 40 - 300 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \end{cases}$

Dans ce groupe il pourrait avoir 10 hommes et 4 femmes ; 5 hommes et 12 femmes ou 0 homme et 20 femmes

+++

EXERCICE 18:

On note d le PGCD de a et b ; α et β les quotients de a et b par d

Déterminer a et b sachant que : α+β=7 et ab=60d

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Soit $PGCD(a; b) = d \quad et \quad \begin{cases} \frac{a}{d} = \alpha \\ \frac{b}{d} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases}$

Déterminons a et b sachant que : α+β=7 et ab=60d :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ ab = 60d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha d \times \beta d = 60d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 7 = S \\ \alpha \times \beta = \dfrac{60}{d} = P \end{cases} \quad \text{d'où l'équation} \quad X^2 - SX + P = 0$$

$$on\ a:\ X^2 - 7X + \frac{60}{d} = 0; \quad \Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times \frac{60}{d} = 49 - 4 \times \frac{60}{d}$$

Trouvons les diviseurs de 60 $D(60) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$

●Pour $d = 1$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 60 = 49 - 240 < 0$ *à rejeter*

●Pour $d = 2$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 30 = 49 - 120 < 0$ *à rejeter*

●Pour $d = 3$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 20 = 49 - 80 < 0$ *à rejeter*

●Pour $d = 4$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 15 = 49 - 60 < 0$ *à rejeter*

●Pour $d = 5$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 12 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ X_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$(\alpha;\ \beta) = \{(3; 4); (4; 3)\}$ mais $(a; b) = (d\alpha; d\beta) = (5\alpha; 5\beta) = \{(15; 20); (20; 15)\}$

●Pour $d = 6$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 10 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ X_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$(\alpha;\ \beta) = \{(2; 5); (5; 2)\}$ mais $(a; b) = (d\alpha; d\beta) = (6\alpha; 6\beta) = \{(12; 30); (30; 12)\}$

●Pour $d = 10$; on a: $\Delta = 49 - 4 \times 6 = 49 - 24 = 25 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ X_2 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$(\alpha;\ \beta) = \{(1; 6); (6; 1)\}$ mais $(a; b) = (d\alpha; d\beta) = (10\alpha; 10\beta) = \{(10; 60); (60; 10)\}$

D'où $\boxed{\mathbf{(a; b) = \{(15; 20); (20; 15); (12; 30); (30; 12); (10; 60); (60; 10)\}}}$

++

EXERCICE 19:

n étant un entier relatif quelconque, on pose A=n-1 et B=n²-3n+6

1)a)Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4

b) Déterminer, suivants les valeurs de n, le PGCD de A et B

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

n étant un entier relatif quelconque, on pose $A = n - 1\ \ et\ \ B = n^2 - 3n + 6$

1) a) Montrons que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4

En utilisant l'Algorithme d'Euclide, on a : $n^2 - 3n + 6 = (n - 1)(n - 2) + 4$

D'où $PGCD(A; B) = PGCD(A; 4)\ cqfm$

b) Déterminons, suivants les valeurs de n, le PGCD de A et B

On pose $PGCD(A; 4) = d\ \ avec\ \ 0 < d \leq 4\ \ on\ a$:

●Si $n - 1 = 4k \Rightarrow n = 4k + 1$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 4}$

●Si $n - 1 = 4k + 1 \Rightarrow n = 4k + 2$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 1}$

●Si $n - 1 = 4k + 2 \Rightarrow n = 4k + 3$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 2}$

●Si $n - 1 = 4k + 3 \Rightarrow n = 4k + 4$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 1}$

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif $\frac{n^2-3n+6}{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)+4}{n-1} = n - 2 + \frac{4}{n-1}$

On pose $n - 1 = D(4) = \{-1; -2; -4,1; 2; 4\}$

●$Si\ \ n-1=-1 \Longrightarrow n=0$; ●$Si\ \ n-1=-2 \Longrightarrow n=-1$;

●$Si\ \ n-1=-4 \Longrightarrow n=-3$ ●$Si\ \ n-1=1 \Longrightarrow n=2$;

●$Si\ \ n-1=2 \Longrightarrow n=3$; ●$Si\ \ n-1=4 \Longrightarrow n=5$

D'où $\boldsymbol{n} = \{\mathbf{-3};\ \mathbf{-2}; \mathbf{0}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

++

EXERCICE 20:

Un terrain a la forme d'un triangle dont les cotés ont pour mesures 132m ; 156m et 204m. On veut planter des arbres sur son pourtour de façon à ce qu'il ait un arbre à chaque sommet du triangle et les arbres soient également espacés

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre ?

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Déterminons le nombre minimal d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre

Pour cela déterminons-le $\text{PGCD}(132; 156; 204)$

$132 = 2^2 \times 3 \times 11 \qquad 156 = 2^2 \times 3 \times 13 \qquad et \quad 204 = 2^2 \times 3 \times 17$

$$\text{PGCD}(132; 156; 204) = 2^2 \times 3 = 12$$

Sur chaque coté il y'a 12m entre les arbres deux à deux

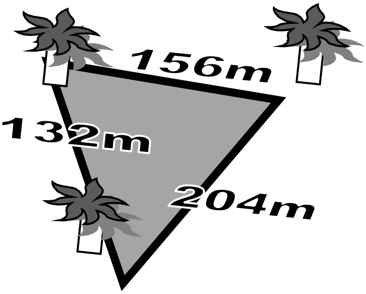
●Sur le côté de 132m le nombre d'arbre est : $N_1 = \frac{132}{12} = 11\ arbres$

●Sur le côté de 156m le nombre d'arbre est : $N_2 = \frac{156}{12} = 13\ arbres$

●Sur le côté de 204m le nombre d'arbre est : $N_3 = \frac{204}{12} = 17\ arbres$

D'où le minimum d'arbres que l'on peut planter est

$\mathrm{N} = \mathbf{N_1 + N_2 + N_3 = 11 + 13 + 17 = 41\ arbres}$



++

EXERCICE 21:

1) Déterminer le PGCD (2688 ; 3024)

2) Dans cette question x et y sont entiers relatifs

a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

(1) : 2688x+3024y=-3360

(2) : 8x + 9y= -10

b) Vérifier que (1 ; -2) est une solution particulière de (2)

c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2)

++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons le PGCD (2688 ; 3024)

En utilisant l'Algorithme d'Euclide, on a :$3024 = 1 \times 2688 + 336$

$$2688 = 8 \times 336 + 0 \quad \text{alors le } \mathbf{PGCD(2688; 3024) = 336}$$

2) Dans cette question x et y sont entiers relatifs

a) Montrons que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

(1) : $2688x + 3024y = -3360$

(2) : $8x + 9y = -10$

Dans (1) comme le $\mathrm{PGCD}(2688; 3024) = 336$ alors on a :

$$\frac{2688}{336}\mathrm{x} + \frac{3024}{336}\mathrm{y} = -\frac{3360}{336} \Rightarrow \mathbf{8x + 9y = -10 \quad cqfm}$$

b) Vérifions que (1 ; -2) est une solution particulière de (2)

$$8(1) + 9(-2) = 8 - 18 = -10 \ d'où\ \mathbf{-10 = -10 \quad cqfv}$$

c) Déduisons de ce qui précède les solutions de (2)

$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8(1) + 9(-2) = -10 \end{cases} \text{on pose } -10 = -10 \Rightarrow 8x + 9y = 8(1) + 9(-2) \Rightarrow$$

$$8(x-1) = 9(-y-2) \Rightarrow \frac{x-1}{9} = \frac{-y-2}{8} = k \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 9k \\ -y - 2 = 8k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9k + 1 \\ y = -8k - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{S = \{(9k + 1;\ -8k - 2)\}}$$

++

EXERCICE 22:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels $x \ et \ y$ tels que : $45x - 28y = 1$

2) Résoudre dans Z² l'équation (E) : $45x - 28y = 1$

3) Résoudre dans Z² l'équation (E') : $45x - 28y = 6$

++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminons deux entiers naturels x et y tels que : $\mathbf{45x - 28y = 1}$

$$45 = 28 * 1 + 17 \Rightarrow 17 = 45 - 28 * 1; \quad 28 = 17 * 1 + 11 \Rightarrow 11 = 28 - 17 * 1$$

$$17 = 11 * 1 + 6 \Rightarrow 6 = 17 - 11 * 1 \qquad 11 = 6 * 1 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6 * 1$$

$$6 = 5*1+1 \Rightarrow 1 = 6-5*1 \qquad 5 = 1*5+0$$

En remplaçant les restes dans relations précédentes on a :

$$6-5*1 = 1 \Rightarrow 6-(11-6*1) = 1 \Rightarrow 2*6-11*1 = 1$$
$$\Rightarrow 2(17-11*1)-11*1 = 1$$
$$2*17-3*11 = 1 \Rightarrow 2*17-3(28-17*1) = 5*17-3*28 = 1 \Rightarrow$$
$$5(45-28*1)-3*28 = 5*45-8*28 = 1 \Rightarrow 45(5)-28(8) = 1$$

$\begin{cases} 45x-28y=1 \\ 45(5)-28(8)=1 \end{cases}$ Par comparaison $x = 5 \; et \; y = 8$

d'où la solution de l'équation est (5 ; 8)

2) Résolvons dans Z^2 l'équation (E) : $\mathbf{45x-28y=1}$

Comme (5 ; 8) est une solution particulière de (E) on a :

$\begin{cases} 45x-28y=1 \\ 45(5)-28(8)=1 \end{cases} \Rightarrow 1=1 \Rightarrow 45x-28y = 45(5)-28(8) \Rightarrow 45(x-5) = 28(y-8)$

$\Rightarrow \dfrac{x-5}{28} = \dfrac{y-8}{45} = k \quad (\textit{théorème de Gauss}) \; k \in Z \Rightarrow \begin{cases} x-5=28k \\ y-8=45k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+28k \\ y=8+45k \end{cases}$

D'où l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \{(5+28k; 8+45k)\} \quad avec \; k \in Z}$

3) Résolvons dans Z^2 l'équation (E') : $\mathbf{45x-28y=6}$

De la relation $45(5)-28(8)=1$ on a : $45(30)-28(48)=6$ alors (30 ; 48) est la solution particulière de (E')

D'où : $\begin{cases} 45x-28y=6 \\ 45(30)-28(48)=6 \end{cases} \Rightarrow 6 = 6 \; on \; a : 45x-28y = 45(30)-28(48) \Rightarrow$

$45(x-30) = 28(y-48) \Rightarrow$

$\frac{x-30}{28} = \frac{y-48}{45} = k \;\Rightarrow \begin{cases} x-30=28k \\ y-48=45k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=30+28k \\ y=48+45k \end{cases}$ D'où l'ensemble de solution est $\boxed{S = \{(30+28k; 48+45k)\} \quad avec \; k \in Z}$

++

<u>EXERCICE 23:</u>

Trouver un nombre de trois chiffres dont le produit par 4 se termine par 364

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

Trouvons un nombre de trois chiffres dont le produit par 4 se termine par 364

Soit $\mathrm{n} = \overline{\mathrm{xyz}}$ ce nombre entier naturel tel que : $4n = a364 \Rightarrow 4n = 1000a + 364$

$$\mathrm{n} = \frac{1000}{4}\mathrm{a} + \frac{364}{4} = 250\mathrm{a} + 91 \Rightarrow \mathrm{n} = 250\mathrm{a} + 91$$

$$\text{Mais } 100 \le \mathrm{n} \le 999 \;\Rightarrow 100 \le 250\mathrm{a} + 91 \le 999 \Rightarrow 9 \le 250\mathrm{a} \le 908$$

$$0{,}036 \le \mathrm{a} \le 3{,}63 \;\text{ alors }\; \mathrm{a} = \{1; 2; 3\}$$

Pour $\mathrm{a} = 1$; on a : $\mathrm{n} = 250(1) + 91 = 341 \Rightarrow \mathrm{n} = 341$

Pour $\mathrm{a} = 2$; on a : $\mathrm{n} = 250(2) + 91 = 591 \Rightarrow \mathrm{n} = 591$

Pour $\mathrm{a} = 3$; on a : $\mathrm{n} = 250(3) + 91 = 841 \Rightarrow \mathrm{n} = 841$

D'où $\mathbf{n} = \{\mathbf{341}; \;\mathbf{591}; \;\mathbf{841}\}$

++

EXERCICE 24:

Trouver les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Trouvons les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres

Soit $n = \overline{xy}$ ce nombre, on a : $\overline{xy} = x \times y \times k \Longrightarrow 10x + y = xyk \Longrightarrow 10x + y - xyk = 0$

D'une part :

$$x(10 - yk) + y = 0 \Longrightarrow -x(yk - 10) + y = 0$$
$$-kx(yk - 10) + yk = 0 \Longrightarrow -kx(yk - 10) + yk - 10 + 10 = 0 \Longrightarrow$$
$$(1 - kx)(ky - 10) = -10 \Longrightarrow (kx - 1)(ky - 10) = 10 \Longrightarrow$$
$$(kx - 1)(ky - 10) = 10 \times 1 = 2 \times 5 \text{ avec } \begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$$S_1) \begin{cases} kx - 1 = 10 \\ ky - 10 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} kx = 11 \\ ky = 11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{k} \\ y = \dfrac{11}{k} \end{cases} \text{ alors } k = \mathrm{PGCD}(11; 11) = 11$$

$$\text{Si } k = 11 \text{ alors } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{n = 11}$$

$$S_2) \begin{cases} kx - 1 = 1 \\ ky - 10 = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} kx = 2 \\ ky = 20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{k} \\ y = \dfrac{20}{k} \end{cases} \text{ alors } k = \mathrm{PGCD}(2; 20) = 2$$

$$\text{alors } \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \end{cases} \text{ à rejeter}$$

$$S_3) \begin{cases} kx - 1 = 2 \\ ky - 10 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} kx = 3 \\ ky = 15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{k} \\ y = \dfrac{15}{k} \end{cases} \text{ alors } k = \mathrm{PGCD}(3; 15) = 3$$

$$\text{alors } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{n = 15}$$

$$S_4) \begin{cases} kx - 1 = 5 \\ ky - 10 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} kx = 6 \\ ky = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{k} \\ y = \dfrac{12}{k} \end{cases} \text{ alors}$$

$$k = D(6) \cap D(12) = \{1; 2; 3; 6\}$$

- Pour $k = 1$; on a $\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$ à rejeter
- Pour $k = 2$; on a $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{n = 36}$

- Pour $k = 3$; on a $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{n = 24}$
- Pour $k = 6$; on a $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{n = 12}$

D'où $\mathbf{n} = \{\mathbf{11}; \mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{24}; \mathbf{36}\}$

+++

EXERCICE 25:

On considère quatre entiers naturels a , b , c et d formant dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison r strictement supérieur à 1

On suppose que r est premier avec a, Déterminer ces quatre entiers pour que l'on ait la relation : $10a^2 = d - b$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Comme a, b, c et d forment les termes d'une suite géométrique de raison r , alors on a : $b = ar$, $c = br = ar^2$ et $d = cr = ar^3$

$$10a^2 = d - b \Longrightarrow 10a^2 = ar^3 - ar = ar(r^2 - 1) \Longrightarrow 10a = r(r^2 - 1) \Longrightarrow$$

$$\frac{10a}{r} = r^2 - 1 \quad \text{comme } \operatorname{pgcd}(a; r) = 1 \text{ alors r divise } 10 \Longrightarrow$$

$$r = D(10) = \{1; 2; 5; 10\} \text{ mais } r > 1 \ alors:$$

$$\text{Pour } r = 2; \text{on a: } 5a = 2^2 - 1 = 3 \text{ à rejeter}$$

$$\text{Pour } r = 5; \text{on a: } 2a = 5^2 - 1 = 24 \text{ alors } a = 12$$

$$b = 12 \times 5 = 60 \ ; \quad c = 60 \times 5 = 300 \quad \text{et} \quad d = 300 \times 5 = 1500$$

$$\text{Pour } r = 10; \text{on a: } a = 10^2 - 1 = 99 \text{ alors } a = 99$$

$$b = 99 \times 10 = 990 \ ; \quad c = 990 \times 10 = 9900 \quad \text{et} \quad d = 9900 \times 10 = 99000$$

D'où $(\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{b}\ ;\ \mathbf{c}\ ;\ \mathbf{d}) = \{(\mathbf{12}; \mathbf{60}; \mathbf{300}; \mathbf{1500}); (\mathbf{99}; \mathbf{990}; \mathbf{9900}; \mathbf{99000})\}$

++

EXERCICE 26:

Trouver l'ensemble des nombres s'écrivant xyz dans le système décimal et possédant les propriétés suivantes :

Il diminue de 99 lors qu'on intervertit les chiffres extrêmes.

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Il diminue de 99 lors qu'on intervertit les chiffres extrêmes. Soit N ce nombre

On pose : $zyx = xyz - 99 \Longrightarrow 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 99 \Longrightarrow$

$$99z - 99x = -99 \Longrightarrow x - z = 1 \Longrightarrow x = 1 + z \quad \text{mais} \begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 0 < z \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{Pour } z = 1 \Longrightarrow x = 1 + 1 = 2 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{201}; \mathbf{211}; \mathbf{221}; \mathbf{231}; \mathbf{241}; \mathbf{251}; \mathbf{261}; \mathbf{271}; \mathbf{281}; \mathbf{291}\}$$

$$\text{Pour } z = 2 \Longrightarrow x = 1 + 2 = 3 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{302}; \mathbf{312}; \mathbf{322}; \mathbf{332}; \mathbf{342}; \mathbf{352}; \mathbf{362}; \mathbf{372}; \mathbf{382}; \mathbf{392}\}$$

$$\text{Pour } z = 3 \Longrightarrow x = 1 + 3 = 4 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{403}; \mathbf{413}; \mathbf{423}; \mathbf{433}; \mathbf{443}; \mathbf{453}; \mathbf{463}; \mathbf{473}; \mathbf{483}; \mathbf{493}\}$$

$$\text{Pour } z = 4 \Longrightarrow x = 1 + 4 = 5 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{504}; \mathbf{514}; \mathbf{524}; \mathbf{534}; \mathbf{544}; \mathbf{554}; \mathbf{564}; \mathbf{574}; \mathbf{584}; \mathbf{594}\}$$

$$\text{Pour } z = 5 \Longrightarrow x = 1 + 5 = 6 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{605}; \mathbf{615}; \mathbf{625}; \mathbf{635}; \mathbf{645}; \mathbf{655}; \mathbf{665}; \mathbf{675}; \mathbf{685}; \mathbf{695}\}$$

$$\text{Pour } z = 6 \Longrightarrow x = 1 + 6 = 7 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{706}; \mathbf{716}; \mathbf{726}; \mathbf{736}; \mathbf{746}; \mathbf{756}; \mathbf{766}; \mathbf{776}; \mathbf{786}; \mathbf{796}\}$$

$$\text{Pour } z = 7 \Longrightarrow x = 1 + 7 = 8 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{807}; \mathbf{817}; \mathbf{827}; \mathbf{837}; \mathbf{847}; \mathbf{857}; \mathbf{867}; \mathbf{877}; \mathbf{887}; \mathbf{897}\}$$

$$\text{Pour } z = 8 \Longrightarrow x = 1 + 8 = 9 \text{ alors}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{908}; \mathbf{918}; \mathbf{928}; \mathbf{938}; \mathbf{948}; \mathbf{958}; \mathbf{968}; \mathbf{978}; \mathbf{988}; \mathbf{998}\}$$

+++

EXERCICE 27:

Un phare émet trois feux différents : un rouge toutes les 18 secondes ; un vert toutes les 45 secondes et un blanc toutes les 2 minutes 30 secondes. Ces trois feux sont émis simultanément à minuit.

Trouver les instants d'émissions simultanés de feux :

a) Rouge et vert b) Rouge et blanc

c) Vert et blanc d) Rouge ; vert et blanc

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Feux rouges : 18 secondes **Feux verts** : 45 secondes

Feux blancs : 2min30sec$= 2 \times 60 + 30 = 150$ secondes

Trouvons les instants d'émissions simultanés de feux :

a) Rouge et vert

PPCM(18 ; 45)=9PPCM(2; 5)=9(10)=90 alors $\mathbf{I_E = 90k \text{ avec } k} \in \mathbf{N}^*$

b) Rouge et blanc

PPCM(18 ; 150)=3PPCM(6; 50)=3(150)=450 alors $\mathbf{I_E = 450k \text{ avec } k} \in \mathbf{N}^*$

c) Vert et blanc

PPCM(45; 150)=15PPCM(3;10)=15(30)=450 alors $\mathbf{I_E = 450k \text{ avec } k} \in \mathbf{N}^*$

d) Rouge ; vert et blanc

PPCM(18; 45; 150)=3PPCM(6;15;50)=3(150)=450 alors $\mathbf{I_E = 450k \text{ avec } k} \in \mathbf{N}^*$

++

EXERCICE 28:

1) Résoudre dans Z² l'équation : $x - 9y = 13$

2) Déterminer tous les éléments (a, b) de N² qui vérifient la relation : $\mathrm{PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Résolvons dans Z² l'équation : $\mathrm{x - 9y = 13}$

Eliminons y : $x \equiv 13[9] \Rightarrow x \equiv 4[9] \Rightarrow x = 4 + 9k, k \in Z$

Remplacons x par son expression dans l'équation :

$$4 + 9k - 9y = 13 \Rightarrow -9y = 9 - 9k \Rightarrow y = -1 + k$$

$$\boldsymbol{S = \{(4 + 9k \Rightarrow; k - 1)\}}$$

2) Déterminons tous les éléments (a, b) de N² qui vérifient la relation :

$$\mathrm{PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13}$$

On pose $x = PPCM(q; b) \quad et \quad y = PGCD(a; b) \quad on\ a: x - 9y = 13 \Rightarrow$

$$\begin{cases} PPCM(a;b) = 4 + 9k \\ PGCD(a;b) = k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 9k > 0 \\ k - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -0{,}44 \\ k > 1 \end{cases} \quad alors\ k > 1$$

On a le système : $\begin{cases} PGCD(a;b) = k - 1 \\ ab = (k-1)(4 + 9k) \end{cases} \Rightarrow$

Il existe un couple $(x; y) \in N^{*2}$ $tels\ que$: $\begin{cases} a = (k-1)x \\ b = (k-1)y \end{cases}$ $avec\ x\Delta y = 1$

$$(k-1)^2xy = (k-1)(4 + 9k) \Rightarrow xy = \frac{9k + 4}{k - 1} = 9 + \frac{13}{k - 1} \quad alors$$

$$k - 1 = D(13) = \{1; 13\} \Rightarrow \begin{cases} k - 1 = 1 \\ k - 1 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 14 \end{cases}$$

Pour k=2 ; on a : $xy = 9 + \frac{13}{2-1} = 9 + 13 = 22 \Rightarrow \boxed{(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) =}$

$\boxed{\{(\mathbf{1}; \mathbf{22}); (\mathbf{2}; \mathbf{11}); (\mathbf{11}; \mathbf{2}); (\mathbf{22}; \mathbf{1})\}}$

Pour k=14 ; on a : $xy = 9 + \frac{13}{14-1} = 9 + 1 = 10 \Rightarrow (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) =$

$\{(\mathbf{1}; \mathbf{10}); (\mathbf{2}; \mathbf{5}); (\mathbf{5}; \mathbf{2}); (\mathbf{10}; \mathbf{1})\} \Rightarrow$

$$\boxed{(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = (\mathbf{13}\boldsymbol{x}; \mathbf{13}\boldsymbol{y}) = \{(\mathbf{13}; \mathbf{130}); (\mathbf{26}; \mathbf{65}); (\mathbf{65}; \mathbf{26}); (\mathbf{130}; \mathbf{13})\}}$$

++

EXERCICE 29:

Démontrer que si un nombre de trois chiffres $\overline{abc}$, est divisible par 17, il en est de meme du nombre $(2a - c)^2 + 2b^2$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Comme $\overline{\mathrm{abc}}$ est divisible par 17 alors on a:

$$\mathrm{abc \equiv 0[17] \Rightarrow 100a + 10b + c \equiv 0[17] \Rightarrow 15a + 10b + c \equiv 0[17]}$$

$$\mathrm{17a - 2a + c \equiv -10b[17] \Rightarrow 2a - c \equiv 10b[17] \Rightarrow (2a - c)^2 \equiv 100b^2[17]}$$

$$\mathrm{(2a - c)^2 \equiv 15b^2[17] \Rightarrow (2a - c)^2 \equiv -2b^2[17]}$$

$$\mathbf{(2a - c)^2 + 2b^2 \equiv 0[17]} \quad \mathbf{cqfd}$$

++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer un entier naturel x tels que 123, 140 et 156 forment une progression arithmétique

2) Déterminer x dans chacun des cas suivants :

a) $\overline{2101}^{3} = \overline{224}^{x}$, b) $\overline{50500}^{x} = 20800$ c) $\overline{46}^{x} + \overline{53}^{x} = \overline{132}^{x}$;

d) $\overline{36}^{x} + \overline{45}^{x} = \overline{103}^{x}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que pour tout entier naturel n ; on a :

a) $5^{2n} - 3^{n}$ divisible par 11

b) $7^{n} - 1$ divisible par 6

c) $3^{2n} - 2^{n}$ divisible par 7

d) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17

On pourra utiliser les congruences ou le raisonnement par récurrence

++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit n un entier naturel

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^4 par 5 ?

2) Démontrer que n^5-n est divisible par 5

++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Un nombre s'écrit x43y dans le système décimal

Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9

2) Un nombre s'écrit 28x75y dans le système décimal

Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et par 11

3) Un nombre s'écrit 1x1yxy dans le système décimal

Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63

++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**++++++++++++++++++++++++++

Ecrire les nombres suivants dans les bases suivantes :

a) 68452 en base douze

b) $\overline{23245}^{7}$ en base neuf

c) $\overline{DAOODA}^{16}$ en base deux

d) 64206 en base seize

e) $\overline{BOOBA}^{16}$ en base huit

++++++++++++++++++++++++**Exercice 6 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer les entiers naturels n tels que :

$a)\ PPCM\ (n\ ;\ 6) = 96$; $b)\ PPCM\ (n\ ;\ 72) = 216$

2) Déterminer l'entier naturel n tel que : $\begin{cases} 600 < n < 1100 \\ PGCD(n; 630) = 105 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 7 :**++++++++++++++++++++++++++++

Déterminer les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que

a) $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(a;b) = 504 \\ a+b = 135 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(a;b) = 7 \\ a+b = 105 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(a;b) = 354 \\ a+b = 5664 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(a;b) = 168 \\ ab = 1008 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(a;b) = 16 \\ \mathrm{PPCM}(a;b) = 224 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(a;b) = 9 \\ ab = 972 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 8 :**++++++++++++++++++++++++++++

Démontrer par récurrence que :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3\times 2^k}+\frac{1}{\sqrt{2}}k\right)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\times 2^{n-1}}+\frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$b)\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{7-3^{n+1}}{2\times 3^n}\right)=-\frac{3}{2}(n+1)+\frac{21}{4}-\frac{7}{4\times 3^n}$$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 9 :**++++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans Z les équations suivantes :

a) $(x+1)(y+2) = 2xy$; b) $(x-1)(y+3) = 15$;

c) $(x-2)(y+3) = 56$ d) $(x-1)(y+2) = 36$

e) $x^2 - y^2 = 24$; f) $x^2 - y^2 = 1969$

g) $9y^2 - (x+1)^2 = 32$; h) $x^2 - y^2 = 499$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 10:**++++++++++++++++++++++++++++

Quels sont les entiers naturels inferieurs à 100 qui, dans la division par 17 donne un quotient égal au reste

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 11 :**++++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes :

a) $26^{2016}\ par\ 12$

b) $2016^{2016}\ par\ 17$

c) $1995^{2016}\ par\ 13$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 12:**++++++++++++++++++++++++++++

Déterminer l'entier naturel x tels que les nombres $\overline{210}^x$; $\overline{420}^x$ et $\overline{1140}^x$ forment une progression géométrique

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 13 :**++++++++++++++++++++++++++++

Démontrer les relations suivantes :

a) Le nombre $A = 5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}}$ est divisible par 11

b) Le nombre $B = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11

c) Le nombre $C = 10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111

++++++++++++++++++++++++**Exercice 14 :**++++++++++++++++++++++++++

Trouver dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 77 et tels que le couple (b; c) soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 18$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 15:**++++++++++++++++++++++++++

Trouver

1) Le reste de la division par 11 du nombre $(4362)^{3275}$
2) Le reste de la division par 3 du nombre $(4365)^{43} \times (7937)^{65}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 16:**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le dernier chiffre des différentes puissances de 2 et celui de des différentes de 7

Application : Déterminer le dernier chiffre de la somme S et le produit P suivants :

$S=(3548)^9+(2537)^{31}$ et $P=(3548)^9 \times (2537)^{31}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 17:**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A=n^2-n+1$

2) En déduire les entiers naturels n tels que le nombre A soit divisible par 7

3) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $B=(2753)^2-2753+1$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 18 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation (E) : $(x; y) \in Z^2 : 29x - 11y = 1$

1) Ecrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. Donner la solution générale de cette équation0

2) On considère maintenant l'équation (E') : $(x; y) \in Z^2 : 29x - 11y = 5$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale

++++++++++++++++++++++++**Exercice 19 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Décomposer 599 et 218 en produit de facteurs premiers

2) Résoudre dans N^2, les équations suivantes :

a) $x^3 - y^3 = 218$ *et* $\quad b)\ x^3 + y^3 = 599$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 20:**++++++++++++++++++++++++++

1) Développer $(k+1)^5$

2) On suppose k=12. Ecrire le nombre 13^5 dans le système de numération de base 12

++++++++++++++++++++++++**Exercice 21 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que $a^2-b^2=1620$ et tels que le $PGCD\ (a\,;b) = 6$

2) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a; b) dont le PGCD est 36 et le PPCM est 756

++++++++++++++++++++++++**Exercice 22 :**+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer les entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif

+++

APPROFONDISSEMENT

++++++++++++++++++++++++**Exercice 23 :**+++++++++++++++++++++++++++

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout* $x \neq k\pi$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\,x = \cos(nx)\frac{\sin(nx)}{\sin x}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 24 :**+++++++++++++++++++++++++++

1- Démontrer par récurrence que :

$$a)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log_k x} = \frac{1}{\log_{n!} x} \qquad b) \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

2- Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{n} \underbrace{111\ldots11}_{K} = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots11}_{n} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$$

$$\text{b)}\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2}\cos\left((2k-1)x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sin(nx)\cos\left(nx-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$$

$$\text{c)}\ \sum_{k=1}^{n} k(n^2-k^2) = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$$

$$\text{d)}\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\text{e)}\ \sum_{k=1}^{n} k^2\,(n^3 - k^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)(n-1)(5n^2+2n-1)}{30}$$

$$\text{f)}\ \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\text{g)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\ ; \quad \text{h)}\ \sum_{k=2}^{n} (k-1)2^{k-2} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$$

$$\text{i)}\ \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}\ ;$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 24 :**+++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 2^n par 7 (k∈N)

2) Trouver le reste de la division euclidienne de 1971^{1000} par 7

3) On pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

a) Montrer que $\forall n \in N; on\ a:\ A_{n+3} \equiv A_n[7]$

b) Trouver les entiers naturels n tels que : $A_n \equiv 0[7]$

++++++++++++++++++++++++Exercice 25 :++++++++++++++++++++++++++

On considère un nombre entier naturel A égal à $xxyy$ dans le système décimal

1) Démontrer que A est divisible par 11

2) Déterminer x et y pour que A soit un carré parfait

3) Déterminer le nombre de diviseur de A et déterminer tous les diviseurs positifs de A

++++++++++++++++++++++++Exercice 26 :++++++++++++++++++++++++++

On considère l'anneau commutatif unitaire Z/5Z

1) Dresser les tables d'addition et de multiplication dans cet anneau. Constater que c'est un corps

2) Résoudre dans Z/5Z, l'équation : 2x=1 où l'inconnue x

3) Résoudre dans Z/5Z, l'équation : 3x=2 où l'inconnue x

4) Résoudre dans $(Z/5Z)^2$, le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

5) Résoudre dans Z/5Z, l'équation : x^2-x-2=0 où l'inconnue x

++++++++++++++++++++++++Exercice 27 :++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le nombre entier naturel du système décimal qui s'écrit :

$abca$ dans le système à base onze et $bbac$ dans le système de base sept.

On suppose que a et b sont non nuls.

++++++++++++++++++++++++Exercice 28 :++++++++++++++++++++++++++

Former le tableau des diviseurs de 504.

Montrer qu'il existe un nombre inferieur 504 et possédant autant de diviseurs de que 504.

Déterminer les valeurs de l'entier naturel n de telle manière que les racines de l'équation $x^2 - 2nx + 504 = 0$ soient des entiers naturels (l'exercice admet beaucoup de solutions).

++++++++++++++++++++++++Exercice 29 :++++++++++++++++++++++++++

Un entier naturel de quatre chiffres est le carré d'un entier naturel, le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

a) Montrer que cet entier est divisible par 121 puis trouver le.

b) Donner une représentation chiffrée de cet entier dans le système de numération de base 8

++++++++++++++++++++++++Exercice 30 :++++++++++++++++++++++++++

1) Montrer que si α et β sont premiers entre eux, il en est de même de $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$

2) Soit d le le PGCD de a et b ; on note $a = d\alpha$; $b = d\beta$ et $PPCM(a\,;b) = m$

Montrer que le PGCD (a+b ; m)=d

3) Calculer a et b pour a+b=2070 et m=9180

4) Calculer a et b pour a+b=192 et m=2300

++++++++++++++++++++++++Exercice 31 :++++++++++++++++++++++++++

1) Montrer que $n(n^2-1)$ et $n(n+1)(n+2)$ sont divisibles par 6.

On note $n(n^2-1) = 6x$; $n(n+1)(n+2) = 6y$ et $n(n^2-1)(n+2) = 6z$

2) Montrer que z est le PPCM de x et y lors que n-1 n'est pas divisible par 3

3) Montrer que lorsque n-1 n'est pas divisible par 3, le PPCM de x et y est le quotient de z par 3.

++++++++++++++++++++++++Exercice 32 :++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans N les équations suivantes :

$a)\ 2x8y \equiv 0[45]$; $b)\ 83x4y \equiv 0[44]$;

$c)\ 7x38y5 \equiv 0[99]$; $d)\ 81x7y1z \equiv 0[396]$

++++++++++++++++++++++++Exercice 33 :++++++++++++++++++++++++++

1) n étant un entier naturel supérieur à 1, déterminer le PGCD des nombres entiers :

n(n+1) et (n-1)(n+2) ; on pourra pour cela former leur différence.

Qu'en conclure pour les nombres $a = \frac{n(n+1)}{2}$ et $b = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

2) n étant un entier supérieur à 2, on considère les nombres

$$b = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad et\ c = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$$

Déterminer le PGCD de b et c

++++++++++++++++++++++++Exercice 34 :++++++++++++++++++++++++++

Soit n un entier naturel non nul ; on considère les nombres entiers suivants : M=9n-1 et N=9n+1

1) On suppose que n est pair

a) Montrer que M et N sont des entiers impairs

b) En remarquant que N=M+2 ; déterminer le PGCD de M et N

2) On suppose que n est impair

a) Montrer que M et N sont des entiers pairs

b) En remarquant que N=M+2 ; déterminer le PGCD de M et N

3) Pour tout entier naturel non nul n ; on considère l'entier naturel $81n^2-1$

a) Exprimer l'entier $81n^2-1$ en fonction des entiers M et N

b) Démontrer que si n est pair alors 81n²-1 est impair

c) Démontrer que 81n²-1 est divisible par 4 si et seulement si n est impair

+++++++++++++++++++++++++Exercice 35 :+++++++++++++++++++++++++++

On considère trois nombres entiers naturels a, b et c. Le PGCD de a et b est 24, celui de b et c est 36

1) Quel est le PGCD de a, b et c

2) Trouver toutes les valeurs possibles de ces trois nombres sachant que a+b+c=300

+++++++++++++++++++++++++Exercice 36 :+++++++++++++++++++++++++++

On se propose de résoudre dans Z l'équation (E) : $x^2 \equiv -1[25]$

1) Démontrer que (E) se ramène à chercher les nombres x tels que x²=49+25k

2) Résoudre alors l'équation (E)

+++++++++++++++++++++++++Exercice 37 :+++++++++++++++++++++++++++

Un entier naturel n a :

-pour reste 5 dans la division euclidienne de par 8

-pour reste 4 dans la division euclidienne par 11

Quel est le reste de la division euclidienne de par 88

+++++++++++++++++++++++++Exercice 38 :+++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210

2) Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, μ leur PPCM et δ leur PGCD, déterminer l'ensemble des couples (x ; y) tels que : $\begin{cases} \mu = 210\delta \\ y - x = \delta \end{cases}$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 39 :+++++++++++++++++++++++++++

1) Dans le corps des classes résiduelles modulo 7 : Z/7Z dont les éléments sont notés $\{0; 1; 2; 3; 4; 5 \; et \; 6\}$, résoudre l'équation (E) : $x = 3x + 5$

2) On considère l'application N dans Z/7Z définie par : $n \to U_n$, tels que: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 5 \end{cases}$

On pose $U_n = V_n + 1$; pour tout n∈N . Calculer V_{n+1} $en \; fonction \; de \; V_n$, $puis \; U_n en \; fonction \; de \; n$. Calculer U_{1977}

+++++++++++++++++++++++++Exercice 40 :+++++++++++++++++++++++++++

1) Décomposer 599 et 218 en produit de facteurs premiers

2) Résoudre dans N², les équations suivantes :

a) $x^3 - y^3 = 218 \quad et \quad b) \; x^3 + y^3 = 599$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 41 :+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le nombre $N = 2^\alpha \times 5^\beta$ sachant que la somme de tous ses diviseurs est égal à 42

++++++++++++++++++++++++Exercice 42 :++++++++++++++++++++++++++

Soit A=200 !

1) Quelle est la puissance de 3 dans la factorisation de A

2) Par combien de zéros A se termine-t-il ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 43 :++++++++++++++++++++++++++

Soit à résoudre l'équation (E) : $15x^2 - 7y^2 = 9$

1) a) Démontrer que dans le système décimal ; le dernier chiffre d'un carré est 0 ;1 ;4 ;5 ;6 et 9

b) En déduire que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5

2) Résoudre l'équation (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 44 :++++++++++++++++++++++++++

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2^n \geq n + 1$

2) On définie la suite $(OA)_n$ par $OA_0 = 1$

$OA_0 = OA_1 = OA_2 = \cdots = 2$ et les triangles OA_0A_1 ; OA_1A_2 … … sont rectangles.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $OA_n = \sqrt{4n+1}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 45 :++++++++++++++++++++++++++

On admet que 1999 est un nombre premier

1) Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour PGCD 1999

2) On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à N : (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse aux valeurs de S telles que (E) admette de solution dans N

   a) Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui préciser la deuxième solution

   b) Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?

   c) Montrer que pour tout entier naturel n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S tel que (E) admette deux solutions entières

++++++++++++++++++++++++Exercice 46 :++++++++++++++++++++++++++

Trouver l'ensemble des nombres s'écrivant xyz dans le système décimal et possédant les propriétés suivantes :

- Ils diminuent de 99 si l'on intervertit les deux chiffres extrêmes
- Ils diminuent de 45 si l'on intervertit les deux derniers chiffres

++++++++++++++++++++++++Exercice 47 :++++++++++++++++++++++++++

Un nombre s'écrit $\overline{abca}$ dans le système décimal divisible par 7

Déterminer toutes les valeurs possibles de $a, b\ et\ c$ pour que la division euclidienne de ce nombre par 99 ait pour reste égal à 1

++++++++++++++++++++++++Exercice 48 :+++++++++++++++++++++++++

Le 1er Janvier 2016 un homme infidèle a trois copines c_1 , c_2 et $c_3$établit un programme suivant entre ses copines :

c_1Vient chez lui à chaque 10 jours, c_2 vient chez lui à chaque 15 jours et c_3 vient à chaque 20 jours.

1) Déterminer tous les moments de rencontre possibles entre ces trois copines
2) Quelle est la date, le jour de leur 1ère rencontre sachant que le 1er Janvier 2016 est un Vendredi et que 2016 est une année bissextile

++++++++++++++++++++++++Exercice 49 :+++++++++++++++++++++++++

Déterminer un entier naturel $N = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ sachant que la somme de ces diviseurs est 546

++++++++++++++++++++++++Exercice 50 :+++++++++++++++++++++++++

Étant donné un entier naturel n ; on considère les deux nombres a et b tels que :

$a = 2n^2\ \ et\ \ b = n(2n+1)$on désigne par d leur PGCD et m leur PPCM.

Montrer que : $b - a = d\ \ et\ \ b^2 - a^2 = m - d^2$

++++++++++++++++++++++++Exercice 51 :+++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre sur Z² l'équation : $11x - 5y = 14$ (1)

2) Montrer qu'il y'a un couple $(x_0;\ y_0)$ solution de (1) ; tels que $0 \leq x_0 \leq 5$

3) Montrer que la résolution de (1) peut s'effectuer ; lorsqu'on remarque que (19 ; 39) est solution de, en faisant le changement de variable : x=19+X et y=39+Y

++++++++++++++++++++++++Exercice 52 :+++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre les équations suivantes :

a) PPCM (15 ; x)=60 ; b) PPCM (12 ; x)=72

2)a)Factoriser les deux polynômes suivants : $A(x) = 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60$

$et\ \ B(x) = 6x^2 + 18x + 12$

b) On suppose que x est un entier naturel $x = n$

Déterminer le PPCM et le PGCD des deux entiers A(n) et B(n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 53 :+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n+2 divise 2n-1

2) Démontrer que pour tout entier relatif n, les nombres n+2 et 2n²+3n-1 sont premiers entre eux

3) En déduire les entiers relatifs n pour les quels la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ est un entier relatif

++++++++++++++++++++++++Exercice 54 :+++++++++++++++++++++++++

1) Trouver un entier naturel de deux chiffres qui soient égal au triple produit de ses chiffres.

2) Par quels entiers positifs faut-il remplacer x pour que $x^2-14x-256$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

++++++++++++++++++++++++Exercice 55 :++++++++++++++++++++++++++

Le nombre n désigne un entier naturel

1) Démontrer que $n^2 + 5n + 4 \quad et \quad n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par n+1
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour les quelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par n+1

En déduire que, $\forall n \in N; 3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$

++++++++++++++++++++++++Exercice 56 :++++++++++++++++++++++++++

1) Calculer la somme :$S_k = 1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2k} \quad (k \in N^*)$
2) Exprimer le nombre qui s'écrit, en base 10, $\overline{ababab}$ à l'aide du nombre $\overline{ab}$ et de puissance de 10
3) En déduire la somme :$A = 29 + 2929 + 292929 + \cdots + \underbrace{2929 \ldots 29}_{n\, fois\, 29}$

++

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

++++++++++++++++++++++++Exercice 57 :++++++++++++++++++++++++++

1) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360
2) En déduire dans l'ensemble N la résolution de l'équation d'inconnue b:
$$b^3[b^2 + (b+1)^2] = 18360$$
3) Existe-t-il un entier naturel b tel que le nombre qui s'écrit 36723 dans le système décimal et 442003 dans le système de numération à base b ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 58 :++++++++++++++++++++++++++

1- On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$

a) Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence de solutions à l'équation (E)

b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E'): $91x + 10y = 412$

c) Résoudre (E')

2- Démontrer par récurrence que$\forall n \in N$, l'entier $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8

3- Résoudre dans Z^2 l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$

a- Déterminer les couples d'entiers relatifs (x ;y) solution de l'équation (E'')

b- Résoudre (E'')

++++++++++++++++++++++++Exercice 59 :++++++++++++++++++++++++++

Pour tout entier naturel supérieur où égal à 5 on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \ \ et \ b = 2n^2 - 7n - 4$$

1) Montrer après factorisation que a et sont des entiers divisibles par n-4

2) On pose $\alpha = 2n + 1 \ \ et \ \beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β

a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si n-2 est multiple de 5.

3) Montrer que 2n+1 et n sont premiers entre eux.

4)a)Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD (a ; b)

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n=11 et n=12

++++++++++++++++++++++++Exercice 60 :+++++++++++++++++++++++++

Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels, on désigne δ leur PPCM et µ leur PGCD

1) Déterminer les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que : 2δ+3µ=11

2) Dresser la liste des diviseurs de 108.

Déterminer les couples d'entiers naturels tels que : δ-3µ=108 et $10 < \mu < 15$

++++++++++++++++++++++++Exercice 61:+++++++++++++++++++++++++

1) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?

2) Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels, on désigne δ leur PPCM et µ leur PGCD

Déterminer les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que : $\delta^2 - 3\mu^2 = 1998$

++++++++++++++++++++++++Exercice 62 :+++++++++++++++++++++++++

Soit $(x_n) et \ (y_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3 \ et \ y_0 = 1 \\ \forall n \in N; \ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in N; \ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; \ y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$

2) En déduire $x_{n+1} en \ fonction \ de \ x_n$

3) Démontrer que $(x_n) et \ (y_n)$ sont des suites d'entiers relatifs.

4) Soit n un entier naturel

a) Démontrer que (x_n) est divisible par 5 si et seulement si (y_n) est divisible par 5

b) Démontrer que si $(x_n) et \ (y_n)$ ne sont pas divisible par 5, alors ils sont premiers entre eux.

5)a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in N : x_n = 2^{n+1} + 1$

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise (x_n) si et seulement si 5 divise x_{n+4}

c) En déduire les valeurs de n pour les quelles $(x_n) et\ (y_n)$sont divisibles par 5

++++++++++++++++++++++++Exercice 63 :++++++++++++++++++++++++++

Soit $(x_n) et\ (y_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 1\ et\ y_0 = 8 \\ \forall n \in N;\ x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ \forall n \in N;\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n;\ y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $5x - y + 3 = 0$. En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

2) Montrer par récurrence que $(x_n) et\ (y_n)$ sont des suites d'entiers naturels.

3) Soit n un entier naturel, montrer que :

a) (x_n) est divisible par 3 si et seulement si (y_n) est divisible par 3

b) Si $(x_n) et\ (y_n)$ ne sont pas d ivisible par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4)a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in N : x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

b) En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n

++++++++++++++++++++++++Exercice 64 :++++++++++++++++++++++++++

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs

1- a- Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux

b- En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux

2- On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple est appelé solution

a- Déterminer a lorsque a=b

b- Vérifier que $(1;1), (2;3)\ et\ \ (5;8)$ sont trois solutions particulières

c- Montrer que si (a,b) est solution et si $a < b, alors\ \ a^2 - b^2 < 0$

3- a- Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x; x)\ \ et\ \ (y; y + x)$ sont aussi des solutions

b- Déduire de 2-b- trois nouvelles solutions

4- On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in N;\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout entiers naturels $n \geq 0; (a_n;\ a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux

++++++++++++++++++++++++Exercice 65 :++++++++++++++++++++++++++

On considère les nombres A et B tels que :

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1\ \ et\ \ B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$$

1) Vérifier que : $10^3 - 1 = 9 \times 111\ \ et\ \ 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

2) Démontrer : $\blacksquare \forall n \in N, A est\ divisible\ par\ 111$

$\blacksquare Si\ n\ est\ impair, alors\ A\ est\ divisible\ par\ 7\ et\ par\ 13$

3) a) Si n est impair, démontrer que B est divisible par 7 ; 11 et 13

b) Si n est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7 ; 11 ; 13 et 111

++++++++++++++++++++++++Exercice 66 :+++++++++++++++++++++++++

On se propose de résoudre dans N² l'équation : (E): $5^x - 4^x = y^2$

1) Vérifier que (1 ; 1) est solution de (E)

Dans la suite du problème, on suppose que x est différent de 1

2) L'objet de cette question est que x est :

a) Quels sont les entiers naturels n tel que : $n^2 \equiv 5[8]$?

b) Démontrer que si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5[8]$

c) Conclure

3) On pose x=2m (m∈N)

a) Démontrer que (E) est équivalente à : $(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$

b) En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels que :$5^m - y = 2^p \;\; et \;\; 5^m + y = 2^q$ avec $p + q = 4m$

c) Déduire de 3)b) que : $\begin{cases} p = 1\,; q = 4m - 1 \\ 5^m = 1 + 4^{2m-1} \end{cases}$

En déduire que $m \leq 1$; on pourra faire un raisonnement par absurde

4) Déterminer les solutions de (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 67 :+++++++++++++++++++++++++

a) Décomposer $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs

b) $n \in N$; $n^4 + 4$ peut-il être premier ?

c) Les nombres $n^4 + 4 \;\; et \;\; (n+2)^4 + 4$ peuvent-ils être premiers entre eux ?

d) Déterminer deux entiers dont le PGCD soit$n^4 + 4$, lors que n est un nombre impair donné ; on donne a²+b² et PPCM (a ; b) ; calculer les entiers a et b , on peut commencer par l'étudier si a et b sont pairs où impairs ; on prendra :

1) a²+b²=5409 et PPCM (a ; b)=360 ; 2) a²+b²=85113 et PPCM(a ; b)=1764

++++++++++++++++++++++++Exercice 68 :+++++++++++++++++++++++++

Nombres amiables – Nombres parfaits

1) On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur de n positif et autre que lui-même

Déterminer les diviseurs stricts de 220

2) On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre

Vérifier que ; 220 et 284 sont amiables ; 17296 et 18416 sont amiables

3) On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire dire amiable avec lui-même)

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier p tel que 2^4p soit un nombre parfait

c) Soit n et p deux entiers naturels, tel que p est premier

Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait ?

Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme, pour $n < 10$

++++++++++++++++++++++++Exercice 69 :++++++++++++++++++++++++++

Nombres de Fermat

On appelle nombre de Fermat tout entier naturel $F_n = 2^{2^n} + 1$, où n est un entier naturel

1)a) Calculer F_0; F_1; F_2 et F_3 . Vérifier que ces nombres sont premiers

b) Vérifier que F_5 est divisible par 641

2) Démontrer que : $\forall n \in N$; $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 ; l'écriture décimale de F_n se termine par 7. (On pourra utiliser les congruences)

4) Soit k un entier naturel non nul

a) En posant $a = 2^{2^n}$; démontrer que : $\frac{F_{n+k}-2}{F_n} = \frac{a^{2^k}-1}{a+1}$

b) En déduire que F_n divise $F_{n+k} - 2$

5) Déduire de la question précédente que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux

++++++++++++++++++++++++Exercice 70 :++++++++++++++++++++++++++

Dans tout exercice, n désigne un entier naturel non nul

1) a) Pour $1 \leq n \leq 6$; calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7

b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste de la division euclidienne par 7

c)A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour tout n quelconque

e)En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7

2) Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$=$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ $où$ $n \geq 2$

a) Montrer que si U_n est divisible par 7 alors 3^n-1 est divisible par 7

b) Réciproquement montrer que si 3^n-1 est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7

++++++++++++++++++++++++Exercice 71 :++++++++++++++++++++++++++

1- Déterminer les restes de la division par 13 des différentes puissances de 3 à exposants entiers naturels

2- Déterminer les entiers naturels n tels que : $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisibles par 13

3- Les nombres suivants étant écrits dans le système de numération à base trois 1110, 1010100 et 1001001000

On demande s'ils sont divisibles par treize

++++++++++++++++++++++++**Exercice 72 :**++++++++++++++++++++++++++

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n ; m) élément de Z² : $11\mathrm{n} - 24\mathrm{m} = 1$
   a. Justifier à l'aide de l'énoncé, d'un théorème, que cette équation admet au moins nue solution
   b. En utilisant l'algorithme d'euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1)
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de (1)
2. Récherche du P.G.C.D de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$
   a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$
   b. (n ; m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11\mathrm{n}} - 1) - 10(\,10^{24\mathrm{m}} - 1) = 9$
   c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11\mathrm{n}} - 1$

   (On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 73 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $\mathrm{x} < y$

S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\mathrm{PGCD}(\mathrm{x}\,;\ \mathrm{y}) = \mathrm{y} - \mathrm{x}$

1. a. Calculer le PGCD(363 ; 484)

   b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple (n ; n+1) appartient-il à S ? Justifier votre réponse
3. a. Montrer que (x ; y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que : $\mathrm{x} = \mathrm{k}(\mathrm{y} - \mathrm{x})$ et $\mathrm{y} = (\mathrm{k} - 1)(\mathrm{y} - \mathrm{x})$

   b. En déduire que pour tout couple (x ; y) de S on a :

$$\mathrm{P.P.C.M}(\mathrm{x}\,;\ \mathrm{y}) = \mathrm{k}(\mathrm{k} + 1)(\mathrm{y} - \mathrm{x})$$

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228

b. En déduire l'ensemble des couples (x ; y) de S tels que : $\mathrm{PPCM}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 228$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 74 :**++++++++++++++++++++++++++

Un livre a la forme d'un pave droit tels que :

-son aire totale est 1356 cm²

-son volume est 2520cm^3

-la longueur totate des arêtes est 196 cm

Soit P le polynome défini par : $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ où a ; b ; c désignent les dimensions de ce pavé

1- Exprimer P(x) en fonction de x
2- Sachant que 6 est racine évidente de P, en déduire les dimensions de ce livre avec $a < b < c$
3- On considère dans Z² l'équation (E): $cx - by = a$

a- Soit (E') l'équation : $cx - by = 1$

-Déterminer une solution particulière de (E')

-Résoudre dans Z² l'équation (E')

b- En déduire les solutions de (E)

c- Soit le système (S) : $\begin{cases} 19x \equiv 3[28] \\ 4x \equiv 1[15] \end{cases}$

-Résoudre dans Z le système (S)

-Trouver le reste R de la division euclidienne de x par 420

d- Déterminer la base du système de numération dans le quel on a : $\overline{420}^{x} = R - 17$

++

LE DEFI

++++++++++++++++++++++++ **Exercice 75 :** ++++++++++++++++++++++++++

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Etant donné deux nombres entiers naturels non nuls, a et b , si $\mathrm{PGCD}(a;b) = 1$ alors $\mathrm{PGCD}(a^2;b^2) = 1$ »

Soit la suite U_n définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2- Etude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tels que n=2k

a- Démontrer que $\mathrm{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = (2k+1)^2\mathrm{PGCD}(k^2, (k+1)^2)$

b- Calculer $\mathrm{PGCD}(k;\ k+1)$

c- Calculer $\mathrm{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1})$

3- Etude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tels que n=2k+1

a- Démontrer que les entiers 2k+1 et 2k+3 sont premiers entre eux

b- Calculer $\mathrm{PGCD}(S_{2k+1}\ ;\ S_{2k+2})$

4- Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique valeur de n, que l'on déterminera pour laquelle S_n ; S_{n+1} sont premiers entre eux

++++++++++++++++++++++++ **Exercice 76:** ++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que dans tout système de numération de base x, les produits (x-1) par deux nombres entiers positifs dont la somme est égale à x+1 s'écrivent avec les mêmes chiffres pris en inverse

Calculer $(x-1)(x+1)$ en base x

++++++++++++++++++++++++**Exercice 77 :**++++++++++++++++++++++++++

Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme des carrés s'écrit en système décimal $\overline{xxxx}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 78:**+++++++++++++++++++++++++++

On considère par n un entier naturel non nul tel que :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dans ce problème on se propose de déterminer le $PGCD(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1})$

1- On suppose que n est pair

a- Montrer que : $S_{2k} = \frac{k(2k+1)(4k+1)}{3}$

b- Démontrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 1, 2k+1 est divisible par 3

c- Démontrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, 4k+1 est divisible par 3

2- On suppose que n est impair

a- Montrer que : $S_{2k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(4k+3)}{3}$

b- Démontrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 1, k+1 est divisible par 3

c- Démontrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 3, 4k+3 est divisible par 3

3- a- Montrer que k et k+1 sont premiers entre eux

b- Montrer que k et 4k+3 sont premiers entre eux si et seulement si k n'est pas divisible par 3

c- Montrer que 4k+1 et 4k+3 sont premiers entre eux

4- a- Montrer que si k est un multiple de 3, alors le $PGCD(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = 2k+1$

b- Montrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2 alors le $PGCD(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = 2k+1$

c- Montrer que si k est un terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 1 alors le $PGCD(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = \frac{2k+1}{3}$

d- En déduire les valeurs de k pour les quelles S_{2k} et S_{2k+1} soient premiers entre eux

5- Vérifier les réponses ci-dessus pour :

a- $PGCD(S_6\ ;\ S_7)$ b- $PGCD(S_4\ ;\ S_5)$ c- $PGCD(S_8\ ;\ S_9)$

6- Calculer la somme : $\Delta_{20} = 10^2 + 11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2$

7- En déduire l 'expression de la somme : $S'_n = 3^2 + 6^2 + 9^2 + \cdots + (3n)^2$

Puis démontrer la par récurrence

+++++++++++++++++++++++Exercice 79 :+++++++++++++++++++++++++

Etablir que : $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + 10^{10^4} + \cdots + 10^{10^{10}} \equiv 5[7]$

On pourra remarquer que $10^6 \equiv 1[7]$

+++++++++++++++++++++++Exercice 80 :+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 7 de 2^n puis de 10^{2n}

Vérifier que le nombre qui s'écrit 787878 en base 10 est divisible par 7

2) Soit b et c deux entiers naturels qui satisfont aux conditions suivantes : $0 \leq b \leq 9$ et $0 \leq c \leq 9$

Pour chaque entier naturel non nul n, on considère le nombre a(n) qui s'écrit $bcbcbc\ldots bc$ en base dix, b et c étant étant répétés chacun n fois

Déterminer, suivant les valeurs des entiers b et c, l'ensemble des entiers n tels que a(n) soit divisible par 7

+++++++++++++++++++++++Exercice 81 :+++++++++++++++++++++++++

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où (a $\geq$2 et b $\geq$ 0)

Partie A :

1) a- Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

b- Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2) a- Quel est le nombre élément de (E)

b- Quel est le nombre d'éléments de (E) qui n' sont ni divisible par i par 5 ?

c- soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

d- Montrer que « n est divisible par 3 » équivaut à « a+b est divisible par 3 »

e- Montrer que « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

f- Déduire des questions précédentes le nombre d'élément de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B :

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels P et q tel que : n = 2000 + 4p et n= 2002 + 11p.

1) On considère l'équation (e) : 4P – 11q = 2 où P et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (E) qui se résoudre l'équation (E).

2) En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme 2024 + 44k où K est entier relatif.

3) A l'aide de la calculatrice. Déterminer les six plus petits éléments de (F).

NB : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :

2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;31 ;37.

++++++++++++++++++++++++**Exercice 82 :**+++++++++++++++++++++++++++

1) Deux trains T et T' partent simultanément de A vers B et de B vers A, la vitesse (en kilomètre-heure) de T est supérieur de 10km/h à celle de T'.Le point où les deux se croisent est à 28km du milieu de AB. D'autre part si le train T partait 45minutes après T', les deux trains se croiseraient au milieu de AB .Calculer la distance AB et les vitesses V et V' des deux trains

2) On considère par (E) l'équation définie par : $Vx + V'y = AB$

a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E') : $8x + 7y = 1$

b) Résoudre dans Z² l'équation (E')

c) En déduire les solutions de l'équations (E)

d) En 2015 ; pour assister au mariage de **Monsieur DAOUDA**, les élèves du Groupe Scolaire l'Avenir ont payé solidairement 80Gnf par garçons et 70Gnf par fillequi donnent une somme de 840Gnf

Quel est le nombre de garçons et de filles qui ont assisté **Monsieur DAOUDA** ?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 83 :**+++++++++++++++++++++++++++

p étant un entier positif et n un entier positif plus grand que 1 ; on considère les nombres : $\mathrm{a = pn}$ et $\mathrm{b = p(n-1)}$

Démontrer que le plus grand commun divisible est égal a leur différence, inversement ; démontrer que si deux nombres positifs a et b admettent leur différence comme le plus grand commun diviseur, ils sont de la forme $\mathrm{a = pn}$ et $\mathrm{b = p(n-1)}$

2) Déterminer deux entiers positifs admettant leur différence comme le plus grand commun diviseur, sachant que leur plus petit commun multiple est 30 (Le problème admet plusieurs solutions)

3) x et y étant deux entiers positifs donnés, on considère trois nombres :

$$\mathrm{A = 15x(8y+5)\ ;\ B = 24x(5y+3)\ et\ C = 40x(3y+2)}$$

Démontrer que le plus grand commun diviseur de deux quelconques d'entre eux est égal à leur différence en fonction de x et y, et chercher le plus grand commun diviseur de ces trois nombres.

++++++++++++++++++++++++**Exercice 84 :**+++++++++++++++++++++++++++

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées indépendament les unes des autres

Partie A : Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Déterminer les paires $(a;b)$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1

Partie B:

1- Soit n un entier naturel superieur ou égal à 3 a- L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?

b- L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?

2- Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15

3- L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie C: Soit p un entier naturel non premier $(n \geq 2)$

1- Prouver que p admet un diviseur q $(1 < q < p)$ qui divise $(n-1)!$

2- L'entier q divise t-il l'entier $(P-1)!+1$?

3- L'entier q divise t-il l'entier $(P-1)!+1$?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 85 :**++++++++++++++++++++++++++

Le nombre entier naturel N, qui s'écrit 341 dans le système décimal, 2331 en base a

a- Trouver un encadrement de a^3

b- Déterminer a et vérifier

++++++++++++++++++++++++**Exercice 86 :**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer les valeurs de n pour les quelles :

a- $2^{2n}+2^n+1 \equiv 0[21]$

b- $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2 \equiv 0[11]$

c- $49^n+5^n+3 \equiv 0[57]$

d- $5^{3n}+(2n+1)2^n+1 \equiv 0[11]$

e- $n \times 7^{n+1}-(n+1)7^n-1 \equiv 0[17]$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 87 :**++++++++++++++++++++++++++

Partie A :

Soit N un entier naturel, impair non premier. On pose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité
2. Montrer que N peut séécrire comme produit de deux entiers naturels p et q
3. Quelle est la parité de p et de q

Partie B :

On admet que 250 507 n'est pas premier.. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$

1. Soit X un entier naturel

a- Donner dans tableau, les restes posssibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9

b- Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2

c- Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer q'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\ b)$

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E)
   a- Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9
   b- Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple de solution correspondant

Partie C :

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 205 507 en un produit de deux facteurs
2. Les deux facteurs sont ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture es-elle unique ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 88 :++++++++++++++++++++++++++

Trouver les entiers relatifs n tel que : 10 divise $n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$

++++++++++++++++++++++++Exercice 89 :++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans N² l'équation : $\mathrm{pgcd}(x;y)+\mathrm{ppcm}(x;y)=x+y$

++++++++++++++++++++++++Exercice 90 :++++++++++++++++++++++++++

1- Pour tout entier naturel n, montrer qu'il existe un couple unique $(a_n;\ b_n)\in N^2$ tel que : $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$
2- Calculer $a^2{}_n-2b^2{}_n$
3- En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux

++++++++++++++++++++++++Exercice 91 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases}\varphi_0=0\ ;\ \ \varphi_1=1\\ \varphi_{n+2}=\varphi_{n+1}+\varphi_n\end{cases}$

1- Montrer que $\forall n\in N^*;\ \ \varphi_{n+1}\times\varphi_{n-1}-\varphi^2{}_n=(-1)^n$
2- En déduire que $\forall n\in N^*;\ \ \mathrm{pgcd}(\varphi_{n+1};\ \varphi_n)=1$
3- Montrer que $\forall n\in N;\ \forall m\in N^*;\ \ \varphi_{m+n}=\varphi_m\varphi_{n+1}+\varphi_{m-1}\varphi_n$
4- En déduire : $\forall m,n\in N^*;\ \ \mathrm{pgcd}(\varphi_{m+n};\varphi_n)=\mathrm{pgcd}(\varphi_n;\varphi_m)$ puis $\mathrm{pgcd}(\varphi_m;\varphi_n)=\mathrm{pgcd}(\varphi_n;\varphi_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n
5- Conclure : $\mathrm{pgcd}(\varphi_m;\varphi_n)=\varphi_{\mathrm{pgcd}(m;n)}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 92 :++++++++++++++++++++++++++

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de 12n est le double du nombre de diviseurs de n

1- Montrer que l'on a : $\beta(\alpha-1)=4$
2- En déduire n

BONNE CHANCE A TOUS

+++

NOMBRES COMPLEXES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définition et propriétés :

●On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme $\boldsymbol{Z = a + ib}$ avec $(a; b) \in R^2$ où a est la partie réelle notée $Re(Z)$ et b la partie imaginaire notée $Im(Z)$

●i est l'unité imaginaire avec $\boldsymbol{i^2 = -1}$

● On appelle conjugué d'un nombre complexe $Z = a + ib$, le nombre complexe noté $\overline{Z}$ défini par $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{a - ib}$

NB : Le nombre complexe j est défini par : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Module et argument d'un nombre complexe :

●On appelle module d'un nombre complexe $\mathrm{Z = a + ib}$, tout nombre réel strictement positif défini par $|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$

On considère Z et Z' deux nombres complexes non nuls tels que :

●$|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$ ●$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ ●$|Z^n| = |Z|^n$ ●$\left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{1}{|Z'|}$

●$|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ ●$|k \times Z| = |k| \times |Z|$ $avec$ $k \in R^*$ ●$|Z|^2 = Z \times \overline{Z}$

●On appelle argument d'un nombre complexe $Z = a + ib$ toute mesure en radians de l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}}\right)$.

On note $\mathbf{arg}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{2k\pi}$ s'il s'agit d'un argument et $\mathbf{arg}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\theta}$ s'il s'agit de l'argument

Avec $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{|Z|}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{|Z|}}$

On considère Z et Z' deux nombres complexes non nuls tels que :

●$\arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z')$ ●$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$

●$\arg(Z^n) = n \times \arg(Z)$ ●$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = \arg(\overline{Z}) = -\arg(Z)$

●$\arg(-Z) = \pi + \arg(Z)$ ●$\arg(a) = \begin{cases} 0 & si\ \ a > 0 \\ \pi & si\ \ a < 0 \end{cases}$ ●$\arg(ib) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ \ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ \ b < 0 \end{cases}$

Formes d'écritures d'un nombre complexe :

Ils sont au nombre de 3 qui sont :

●**La forme algebrique ou cartesienne :**

Tout nombre complexe qui s'écrit sous la forme $\boldsymbol{z=a+ib}$

●**La forme Trigonometrique :**

Soit Z un nombre complexe de module $|Z|$ et d'argument θ ; la forme trigonométrique de Z s'écrit sous la forme : $Z=|Z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

On considère Z et Z' deux nombres complexes non nuls tels que :

$$\bullet Z\times Z'=|Z|\times|Z'|\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)\qquad \bullet\overline{Z}=|Z|(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\bullet\frac{Z}{Z'}=\frac{|Z|}{|Z'|}\left(\cos\left(\theta-\theta'\right)+i\sin(\theta-\theta')\right)\qquad \bullet Z^n=|Z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

●**La forme Exponentielle :**

Soit Z un nombre complexe de module $|Z|$ et d'argument θ ; la forme exponentielle de Z s'écrit sous la forme : $Z=|Z|e^{i\theta}$

On considère Z et Z' deux nombres complexes non nuls tels que :

$$\bullet Z\times Z'=|Z|\times|Z'|e^{i(\theta+\theta')}\qquad \bullet\overline{Z}=|Z|e^{-i\theta}\qquad \bullet\frac{Z}{Z'}=\frac{|Z|}{|Z'|}e^{i\left(\theta-\theta'\right)}\qquad \bullet Z^n=|Z|^n e^{in\theta}$$

$$\bullet 1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\qquad \bullet 1-e^{i\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bullet e^{i\delta}+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\delta-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\delta+\theta}{2}\right)}\qquad \bullet e^{i\delta}-e^{i\theta}=2\sin\left(\frac{\delta-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta+\theta}{2}\right)}$$

Equations dans C :

Equations du 1er degré dans C :

a. **Equation du type $\boldsymbol{az+b\overline{z}=c;(a;b)\in C^{*2}\ et\ c\in C}$**

Pour résoudre une telle équation, on pose : $z=x+iy\ \ et\ \overline{z}=x-iy$ puis on les remplace par leurs expressions puis on trouve les réels x et y

Exemple : Résolvons dans C l'équation : $(2+i)z+(1-3i)\overline{z}=-4+11i$

On pose : $z=x+iy\ \ et\ \overline{z}=x-iy$;

$$(2+i)(x+iy)+(1-3i)(x-iy)=-4+11i\Leftrightarrow$$

$$2x+2iy+ix-y+x-iy-3ix-3y=-4+11i\Leftrightarrow$$

$$3x-4y+i(-2x+y)=-4+11i\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-4\\-2x+y=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-4\\-8x+4y=44\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$-5x=40\Leftrightarrow x=-8\Leftrightarrow y=11+2x=11-16=-5\Leftrightarrow y=-5$$

$$\boldsymbol{S=\{-8-5i\}}$$

b. **Equation du type $\boldsymbol{a|z|+bz=c;(a;b)\in R^{*2}\ et\ c\in C}$**

Pour résoudre une telle équation, on pose : $z=x+iy$ puis on le remplace par son expressions puis on trouve les réels x et y

Exemple : Résolvons dans C l'équation : $2|z|+5z=30-15i$

On pose : $z = x + iy$; $2\sqrt{x^2+y^2} + 5(x+iy) = 30 - 15i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} + 5x = 30 \\ 5y = -15 \Leftrightarrow y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(-3)^2} = 30 - 5x \Leftrightarrow$$

$$4(x^2+9) = (30-5x)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 36 = 900 - 300x + 25x^2 \Leftrightarrow$$

$$21x^2 - 300x + 864 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 90000 - 4(21)(864) = 17424 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 132$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{300-132}{42} = \frac{168}{42} = 4 \\ x_1 = \frac{300+132}{42} = \frac{432}{42} = \frac{72}{7} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathbf{S} = \left\{\mathbf{4 - 3i}; \frac{\mathbf{72}}{\mathbf{7}} - \mathbf{3i}\right\}}$$

Racines carrées d'un nombre complexe :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe et $z = x + iy$ l'une des racines de Z

<u>1[ère] méthode</u> : On résoud le système d'équation : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |Z| \\ 2xy = b \end{cases}$

<u>2[ème] méthode</u> : $\sqrt{Z} = \pm\left(\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}\right)$ où ε est le signe de b

<u>Equations du second degré :</u> $(\mathbf{aZ^2 + bZ + c = 0}$ **avec** $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^*; (\mathbf{b}; \mathbf{c}) \in \mathbf{C^2})$

On détermine le discriminant Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$

●Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\mathbf{Z_1} = \frac{-\mathbf{b}-\sqrt{\Delta}}{\mathbf{2a}}$ **et** $\mathbf{Z_2} = \frac{-\mathbf{b}+\sqrt{\Delta}}{\mathbf{2a}}$

●Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double : $\mathbf{Z_1} = \mathbf{Z_2} = \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$

●Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{Z_1} = \frac{-\mathbf{b} - \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{\mathbf{2a}} \quad \mathbf{et} \quad \mathbf{Z_2} = \frac{-\mathbf{b} + \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{\mathbf{2a}}$$

<u>Formule d'Euler</u> :

Soit Z un nombre complexe de module 1 tel que

$$\begin{cases} Z = \cos x + i\sin x = e^{ix} \\ \overline{Z} = \cos x - i\sin x = e^{-ix} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{Z + \overline{Z}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad et$$

$$\sin x = \frac{Z - \overline{Z}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad avec \ \ Z \times \overline{Z} = 1$$

Soit $n \in N$ tel que : $\begin{cases} Z^n = \cos nx + i\sin nx = e^{inx} \\ \overline{Z}^n = \cos nx - i\sin nx = e^{-inx} \end{cases} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\cos nx = \frac{Z^n + \overline{Z}^n}{2} = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad et \ \ \sin nx = \frac{Z^n - \overline{Z}^n}{2i} = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$$

<u>Résolution de l'équation du type $\boldsymbol{acosx + bsinx = c}$</u> :

<u>1[ère] méthode</u> : Pour resoudre l'équation de ce type on pose : $Z = a + ib$ et l'équation devient :

$$\boldsymbol{\cos(x - \theta) = \frac{c}{|Z|}} \quad où \ \ \theta \text{ est l'argumentde } Z \ et \ |Z| \text{ son module}$$

●Si $c > |Z|$ l'équation n'admet pas de solutions

●Si $c \leq |Z|$ l'équation admet de solutions

<u>2ème méthode</u> : On pose $\cos x = \frac{Z+\overline{Z}}{2}$ et $\sin x = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}$ $avec$ $Z \times \overline{Z} = 1$ puis on les remplace par leurs expressions dans l'équation pour avoir une équation du second degré (E) dans C, ainsi que les solutions de l'équation sont les arguments des solutions de l'équation (E)

<u>Transformations et nombres complexes :</u>

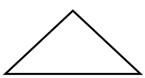
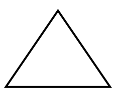
Soit M un point d'affixe Z et M' d'affixe Z' image de M . On considère Ω un point d'affixe w

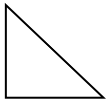
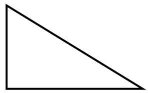
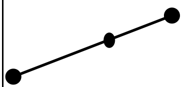
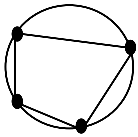
On définit les transformations dans le tableau suivant :

Transformations	Ecritures complexes
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$	$Z' = Z + a$
Symétrie de centre $\Omega(w)$	$Z' - w = -(Z - w)$
Symétrie par rapport à l'axe réel	$Z' = \overline{Z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire	$Z' = -\overline{Z}$
Homothetie de centre Ω et de rapport k	$Z' - w = k(Z - w)$
Rotation de centre Ω et d'angle θ	$Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$

<u>Configuration et nombres complexes</u> :

Dans ce tableau ci-dessous nous caracterisons certaines configurations géométriques à l'aide des nombres complexes

Configuration		Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A		$AB = AC \ et \ \hat{A} = \theta$ $0 < \theta < \pi$	$\frac{b-a}{c-a} = e^{i\theta}; 0 < \theta < \pi$
Triangle ABC équilatéral		$AB = AC = BC$ $et \ mes\hat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{b-a}{c-a} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Triangle ABC rectangle et isocèle en A		$AB = AC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{b-a}{c-a} = \pm i$
Triangle ABC rectangle en A		$mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{b-a}{c-a} = ib$
Points A, B, C alignés		$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 0[\pi]$	$\frac{b-a}{c-a} \in R$
Points A, B, C, D cocycliques		$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \equiv Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA};DB}\right)[\pi]$ $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \not\equiv 0[\pi]$	$\frac{b-a}{c-a} : \frac{b-d}{c-d} \in R$

Racines $n^{ième}$ d'un nombres complexe :

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ et n un entier naturel superieur ou égal à 2 tel que : $Z^n = z$ et on a $Z^n = \rho e^{i\theta}$

$$\boldsymbol{Z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad avec \ \ k = \{0; 1; 2; \cdots; n-1\}}$$

●Les images des solutions sont les sommets d'un polygone regulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{\rho}$

●La somme de toutes les solutions est égale à 0

●Cette équation admet n solutions

Similitudes planes :

1- Similitudes planes directes :

Toute transformation du plan qui multiplie la distance par un réel k $(k > 0)$ et qui concerve l'angle θ par rapport à un centre Ω d'écriture complexe $\boldsymbol{Z' = aZ + b}$ $avec$ $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{C}^* \times \boldsymbol{C}$ avec $|a| \neq 1$

●**Eléments caractéristiques :** Ils sont au nombre de 3 qui sont :

+**Le rapport k :** $k = |a|$

+ **L'angle $\boldsymbol{\theta}$**: $\theta = \arg(a)$

+**Le centre ou point invariant $\boldsymbol{\Omega(w)}$:** $Z' = Z = w \ \ avec \ \ w = \frac{b}{1-a}$

●**Détermination de l'écriture complexe connaissant les elements caractéristiques** : $Z' - w = ke^{i\theta}(Z - w)$

●**Détermination de l'image d'un cercle par une similitude plane directe :**

Soit (C) le cercle d'équation : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad avec \ \ \Omega(a; b)$

L'image (C') de (C) par (S) est a pour équation : $(x-a')^2+(y-b')^2=R'^2$ avec $R'=k\times R \quad et \quad Z'_\Omega=aZ_\Omega+b$

●**<u>Détermination de la reciproque (S^{-1}) d'une similitude plane directe (S) :</u>**

Soit (S) la SPD d'élements caractéristiques $(\Omega; k;\ \theta)$

La reciproque (S^{-1}) a pour elements caratéristiques : $\left(\Omega;\ \frac{1}{k};\ -\theta\right)$

<u>2) Similitudes planes indirectes</u> : Toute transformation du plan qui multiplie la distance par un réel $k\ (k>0)$ et qui concerve l'axe de symétrie (Δ) passant par le centre Ω avec $|a|\neq 1$ d'écriture complexe $\boldsymbol{Z'=a\overline{Z}+b}\ \ avec\ \ (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})\in \boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}$

<u>NB :</u>

La similitude plane indirecte admet un axe de symétrie et cet axe est invariant passant par Ω

●**<u>Eléments caractéristiques :</u>** Ils sont au nombre de 3 qui sont :

- **Le rapport k :** $k=|a|$
- **Le centre ou point invariant $\boldsymbol{\Omega(w)}$:** $Z'=Z=w\ \ avec\ \ w=\frac{b+a\overline{b}}{1-|a|^2}$ ou on résoud l'équation $Z=a\overline{Z}+b$ en posant $Z=x+iy$
- **L'axe** (Δ): $\overrightarrow{\Omega M'}=k\times\overrightarrow{\Omega M}$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$a)\ \dfrac{2}{1-i}$; $b)\ -\dfrac{1}{4i}$; $c)\ \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}$; $d)\ \dfrac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$; $e)\ \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$;

$f)\ \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$ $g)\ (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$; $i)\ (1+5i)^5(-2+i\sqrt{2})^2$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Calculons le module des nombres complexes suivants :

$a)\ \left|\dfrac{2}{1-i}\right| = \dfrac{2}{|1-i|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \mathbf{\sqrt{2}}$ $b)\ \left|-\dfrac{1}{4i}\right| = \dfrac{1}{|4i|} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$c)\ \left|\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}\right| = \dfrac{|\sqrt{2}(1+i)|}{\left|\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\right|} = \dfrac{|\sqrt{2}|\times|1+i|}{\left|\frac{1}{2}\right|\times|\sqrt{3}-i|} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\times 2} = \mathbf{2}$;

$d)\ \left|\dfrac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}\right| = \dfrac{|-5+7i|\times|4-2i|}{|3+4i|\times|7+5i|} = \dfrac{\sqrt{(-5)^2+7^2}\times\sqrt{4^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{7^2\times 5^2}} = \dfrac{\sqrt{74}\times\sqrt{20}}{\sqrt{25}\times\sqrt{74}} = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

$e)\ \left|\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^3}\right| = \dfrac{|1-i|^2}{|1+i|^3} = \dfrac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^3} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$; $f)\ \left|\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

$g)\ |(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)| = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}}$;

$i)\ \left|(1+5i)^5(-2+i\sqrt{2})^2\right| = |1+5i|^5\times|-2+i\sqrt{2}|^2 = \sqrt{1^2+5^2}^{\,5}\times\sqrt{(-2)^2+(\sqrt{2})^2}^{\,2}$

$= \mathbf{6\times 26^2\sqrt{26}}$

++

EXERCICE 2 :

Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)\ i(-1-i)^2$; $b)\ (\sqrt{3}+i)(-1-i\sqrt{3})$; $c)\ \dfrac{i}{1-i}$; $d)\ \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$e)\ \dfrac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; $f)\ \dfrac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$ $g)\ \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}$; $i)\ (3-3i)^2(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Ecrivons sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)\ i(-1-i)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}\times 2e^{i\frac{2\times 5\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\right)} = \mathbf{2e^{i3\pi}}$;

$b)\ (\sqrt{3}+i)(-1-i\sqrt{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\times 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \mathbf{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}$;

$c)\ \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ $d)\ \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$;

$e)\ \dfrac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \dfrac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \mathbf{\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$; $f)\ \dfrac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{5e^{-i\frac{\pi}{4}}}{10e^{i\frac{\pi}{4}}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

$g)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}=\left(\frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^{10}=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)}\right)^{10}=2^5\times e^{10i\frac{7\pi}{12}}=\mathbf{32e^{i\frac{35\pi}{6}}}$;

$i)\left((3-3i)^2(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6\right)=\left(3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2\times\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6=18e^{-i\frac{\pi}{2}}\times 64e^{-i\frac{3\pi}{2}}=\mathbf{1152e^{-2i\pi}}$

+++

EXERCICE 3 :

Soit $J=cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\;\; et\;\; U=1+J$

1) Démontrer que : $1+J+J^2=0$ 2) Calculer U^n $(n\in N^*)$ en fonction de n

+++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Soit $J=cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\;\; et\;\; U=1+J$

1) Démontrons que : $1+J+J^2=0$

1ère méthode : $1+J+J^2=1+cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}+\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)^2$

$$1+J+J^2=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0\;\; d'où\;\; \mathbf{1+J+J^2=0}$$

2ème méthode : $1+J+J^2=\frac{1-J^{2+1}}{1-j}=\frac{1-J^3}{1-J}=\frac{1-\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)^3}{1-J}=\frac{1-\cos 2\pi-i\sin 2\pi}{1-J}=\frac{1-1}{1-J}=0$

$$d'où\;\; \mathbf{1+J+J^2=0}$$

2) Calculer U^n $(n\in N^*)$ en fonction de n

$$U^n=(1+J)^n=\left(1+cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$$

$$\mathbf{U^n=\frac{1}{2^n}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}$$

+++

EXERCICE 4 :

Soit $Z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\;\; et\; Z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a)Ecrire sous la forme exponentielle $Z_1\; et\; Z_2$

b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes $Z_1Z_2;\; \frac{Z_1}{Z_2}\;;\; (Z_1)^2\;\; et\;\; \frac{(Z_2)^6}{(Z_1)^3}$

+++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Soit $Z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\;\; et\; Z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a)Ecrivons sous la forme exponentielle $Z_1\; et\; Z_2$

$Z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)}=e^{-i\frac{4\pi}{6}}=\mathbf{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

$$Z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}=\mathbf{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

b) Déduisons-en la forme algébrique des nombres complexes $Z_1Z_2;\; \frac{Z_1}{Z_2}\;;\; (Z_1)^3\;\; et\;\; \frac{(Z_2)^6}{(Z_1)^3}$

●$Z_1\times Z_2=\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\times 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\mathbf{\sqrt{3}+i}$

$$\bullet \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{9\pi}{6}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \mathbf{\frac{1}{2}i}$$

$$\bullet (Z_1)^2 = \left(\mathbf{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right)^2 = \mathbf{e^{-i\frac{4\pi}{3}}} = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\mathbf{\frac{1}{2}} + \mathbf{i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\bullet \frac{(Z_2)^6}{(Z_1)^3} = \frac{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6}{\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3} = \frac{2^6 \times e^{5i\pi}}{e^{-2i\pi}} = 32 \times e^{i(5\pi+2\pi)} = 32e^{7i\pi} = 32(\cos 7\pi + i\sin 7\pi) = \mathbf{-32}$$

+++

EXERCICE 5 :

On pose $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1-i$

1) EcrireZ_1 ; Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique

2) Déduisez-en $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

3) Résoudre dans $[-\pi;\pi]l'équation$: $(\sqrt{6}+\sqrt{2})cosx + (\sqrt{6}-\sqrt{2})sinx = 2$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

On pose $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1-i$

1) Ecrivons Z_1 ; Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique

$$\bullet Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} |Z_1| = \sqrt{2} \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} d'où \ \boxed{\mathbf{Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}}$$

$$\bullet Z_2 = 1-i \Longrightarrow \begin{cases} |Z_2| = \sqrt{2} \\ \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{d'où} \ \boxed{\mathbf{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

$$\bullet \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{21} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{\frac{Z_1}{Z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{21}}}$$

2) Déduisons-en $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

Ecrivons $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous sa forme algébrique :

$$\bullet \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2\left(1^2+(-1)^2\right)} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} + \mathbf{\frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}$$

On pose $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ alors $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{21} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \mathbf{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3) Résolvons dans $[-\pi;\pi]$l'équation: $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2 \Longrightarrow \mathrm{a} = \sqrt{6}+\sqrt{2}\ ;\ \ \mathrm{b} = \sqrt{6}-\sqrt{2}\ \ \text{et}\ \ \mathrm{c} = 2$$

On pose $Z = a+ib = \sqrt{6}+\sqrt{2}+\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \Longrightarrow \begin{cases} |Z| = 4 \\ \theta = \arg Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

D'où l'équation devient : $\cos(x-\theta) = \frac{c}{|Z|} \Longrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\dfrac{\pi}{12}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}+2k=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}+2k=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{S}=\left\{\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right\}}$$

++

EXERCICE 6 :

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

a) $Z=\dfrac{1}{1+\mathrm{itg}\alpha}$; $Z_0=\dfrac{1}{1+\mathrm{itg}\frac{\pi}{4}}$; $Z_1=\dfrac{1}{1+\mathrm{itg}\frac{2\pi}{3}}$;

b) $Z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sin x+i\cos x)}{2(1-i)(\cos x-i\sin x)}$; c) $Z=(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$;

d) $Z=(1-i\sqrt{3})(1-i)(\cos\alpha-i\sin\alpha)$; e) $Z=\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$

++++++++++++++++++++++++ **RESOLUTION** ++++++++++++++++++++++++++

a) $Z=\dfrac{1}{1+itg\alpha}=\dfrac{1}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{1}{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\cos\alpha(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

$\boldsymbol{Z=\cos\alpha\, e^{-i\alpha}}$

●Si $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $Z=|\cos\alpha|e^{-i\alpha}$ d'où $\mathbf{|Z|=\cos\alpha}$ **et** $\mathbf{\arg Z=-\alpha}$

●$\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ alors $Z=|\cos\alpha|e^{i(\pi-\alpha)}$ d'où $\mathbf{|Z|=|\cos\alpha|}$ **et** $\mathbf{\arg Z=\pi-\alpha}$

$Z_0=\dfrac{1}{1+\mathrm{itg}\frac{\pi}{4}}$ comme $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $Z_0=\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\begin{cases}\mathbf{|Z_0|=\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ \mathbf{\arg Z_0=-\frac{\pi}{4}}\end{cases}}$;

$Z_1=\dfrac{1}{1+\mathrm{itg}\frac{2\pi}{3}}$ comme $\frac{2\pi}{3}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ alors $Z_1=\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$ $\boxed{\begin{cases}\mathbf{|Z_1|=\frac{1}{2}}\\ \mathbf{\arg Z_1=\frac{3\pi}{4}}\end{cases}}$

b) $Z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sin x+i\cos x)}{2(1-i)(\cos x-i\sin x)}=\dfrac{a\times b}{2c\times d}\Rightarrow\begin{cases}a=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\\ b=\sin x+i\cos x=i(\cos x-i\sin x)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\end{cases}$

et $\begin{cases}c=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\\ d=\cos x-i\sin x=e^{-ix}\end{cases}\Rightarrow Z=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{-ix}}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)}\times e^{i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$Z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-x+\frac{\pi}{4}+x\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\mathbf{|Z|=\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ \mathbf{\arg Z=\frac{13\pi}{12}}\end{cases}}$

c) $Z=(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2e^{i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\alpha}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\alpha\right)}$

d'où $\boxed{\begin{cases}\mathbf{|Z|=2\sqrt{2}}\\ \mathbf{\arg Z=\frac{7\pi}{12}+\alpha}\end{cases}}$;

d) $Z=(1-i\sqrt{3})(1-i)(\cos\alpha-i\sin\alpha)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\alpha}=2\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

$Z = 2\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{7\pi}{12}+\alpha\right)}$ d'où $\boxed{\begin{cases} |\mathbf{Z}| = \mathbf{2\sqrt{2}} \\ \mathbf{arg\,Z} = -\dfrac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{12}} - \boldsymbol{\alpha} \end{cases}}$

e) $Z = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{e^{i\frac{4\pi}{9}}} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{9}} \times e^{-i\frac{4\pi}{9}} = \dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}\right)} = \dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\boxed{\begin{cases} |\mathbf{Z}| = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{arg\,Z} = -\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \end{cases}}$

++

EXERCICE 7 :

On considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

1) Déterminer le module et un argument de Z²

En déduire le module et l'argument de Z

2) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

3) Résoudre dans R l'équation : $(\sqrt{3}+1)cosx + (\sqrt{3}-1)sinx = \sqrt{2}$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

On considère le nombre complexe $\boldsymbol{Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)}$

1) Déterminer le module et un argument de Z²

$$Z^2 = \left(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)\right)^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)^2$$

$Z^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 2i(3-1) - (4 - 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 4i$ $d'où$ $Z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$

$$\bullet|Z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{3 \times 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 \times 4^2} = 2 \times 4 = 8 \ d'où \boxed{|\mathbf{Z^2}| = \mathbf{8}}$$

$\bullet Soit\ \theta = arg\ Z^2;$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}}$

Déduisons-en le module et l'argument de Z

$\bullet|Z^2| = 8 \Longrightarrow |Z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{|\mathbf{Z}| = \mathbf{2\sqrt{2}}}$

$\bullet \arg Z^2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow 2\arg Z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow \boxed{\mathbf{arg\,Z} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} + \mathbf{k\pi}}$

2) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{12}}$ et $\boldsymbol{sin\frac{\pi}{12}}$

Comme $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ alors écrivons Z sous sa forme trigonométrique :

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + 2i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

Par comparaison $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\mathbf{4}} \\ \mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\mathbf{4}} \end{cases}}$

3) Résolvons dans R l'équation : $(\sqrt{3}+1)cosx + (\sqrt{3}-1)sinx = \sqrt{2}$

$$(\sqrt{3}+1)cosx + (\sqrt{3}-1)sinx = \sqrt{2} \Longrightarrow a = \sqrt{3}+1\ ;\ b = \sqrt{3}-1 \text{ et } c = \sqrt{2}$$

On pose $Z = a + ib = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1) \Longrightarrow \begin{cases} |Z| = 2\sqrt{2} \\ \theta = \arg Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

D'où l'équation devient : $\cos(x - \theta) = \frac{c}{|Z|} \Longrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}+2k=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}+2k=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{S}=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi ; -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}}$$

++

EXERCICE 8 :

On donne les nombres complexes Z et U définis par :

$$Z=-8\sqrt{3}+8i \quad et \quad U=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

1) Ecrire Z sous forme trigonométrique le nombre Z

Déterminer les racines carrées de Z sous forme trigonométrique

2) Calculer U². Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous leur forme algébrique

En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12} \ \ et \ \ sin\frac{5\pi}{12}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

On donne les nombres complexes Z et U définis par :

$$Z=-8\sqrt{3}+8i \quad et \quad U=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

1) Ecrivons Z sous forme trigonométrique le nombre Z

• $|Z|=\left|-8\sqrt{3}+8i\right|=\sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2+8^2}=\sqrt{3\times 8^2+8^2}=2\times 8=16$

$$\bullet \arg Z=\theta \ ; \begin{cases} \cos\theta=\frac{-8\sqrt{3}}{16}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \end{cases} \ alors \ \ \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$\boxed{\mathbf{Z=16\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}}$$

Déterminons les racines carrées de Z sous forme trigonométrique

$$\sqrt{Z}=\pm\sqrt{16\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}=\pm\sqrt{16}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{\sqrt{Z}=\pm 4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}}$$

2) Calculons U².

$$U^2=\left((\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2\Rightarrow$$

$$U^2=8-2\sqrt{12}+2i(6-2)-\left(8+2\sqrt{12}\right)=8-4\sqrt{3}+8i-8-4\sqrt{3}=-8\sqrt{3}+8i$$

$$\boxed{\mathbf{U^2=-8\sqrt{3}+8i}}$$

Utilisons ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous leur forme algébrique

Comme $U^2=Z \ \Rightarrow \ \sqrt{Z}=\pm U \Rightarrow \boxed{\mathbf{\sqrt{Z}=\pm\left((\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)}}$

Déduisons-en les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12} \ \ et \ \ sin\frac{5\pi}{12}$

On pose $\sqrt{Z}=\sqrt{Z}\Rightarrow\pm 4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\pm\left((\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)\Rightarrow$

$$4\cos\frac{5\pi}{12}+4i\sin\frac{5\pi}{12}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$$

++

EXERCICE 9 :

A tout nombre complexe Z ; différent de 2-i ; on associe le nombre complexe $Z'=\frac{Z+3-2i}{Z-2+i}$

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée ;

a) Z' soit un nombre réel

b) Z' soit un nombre imaginaire pur

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

A tout nombre complexe Z ; différent de 2-i ; on associe le nombre complexe $Z'=\frac{Z+3-2i}{Z-2+i}$

Déterminons l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée ;

On pose $Z=x+iy$ et on a $Z'=\frac{x+iy+3-2i}{x+iy-2+i}=\frac{x+3+i(y-2)}{x-2+i(y+1)}=\frac{(x+3+i(y-2))(x-2-i(y+1))}{(x-2+i(y+1))(x-2-i(y+1))}\Rightarrow$

$$Z'=\frac{(x+3)(x-2)-i(x+3)(y+1)+i(y-2)(x-2)+(y-2)(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\Rightarrow$$

$$Z'=\frac{x^2+x-6+y^2-y-2+i(-xy-x-3y-3+xy-2y-2x+4)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\Rightarrow$$

$$Z'=\frac{x^2+x+y^2-y-8+i(-3x-5y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

a) Z' est un nombre réel si et seulement si : $Im(Z')=0$

$$\frac{(-3x-5y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}=0\Rightarrow \mathbf{-3x-5y+1=0}$$

D' où l'ensemble des points M du plan est une droite d'équation $-3x-5y+1=0$

b) Z' est un nombre imaginaire pur si et seulement si : $Re(Z')=0$

$$\frac{x^2+x+y^2-y-8}{(x-2)^2+(y+1)^2}=0\Rightarrow x^2+x+y^2-y-8=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=8+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\left(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\mathbf{y}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{2}}$$

D'où l'ensemble des points M du plan est un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ de rayon $R=\sqrt{\frac{17}{2}}$

++

EXERCICE 10 :

Dans chacun des cas suivants ; déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tels que :

$a)\ Z'=-Z+2+i$; $b)\ Z'=e^{i\frac{\pi}{4}}Z+2-4i$; $c)\ Z'=-\frac{1}{3}Z+2-i$; $d)\ Z'=-iZ+1+i$;

$e)\ Z'=Z-4i$; $f)\ Z'=-Z+2$; $g)\ Z'=-4Z+10-5i$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants ; déterminons la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $a)\ Z' = -Z + 2 + i$ comme $a = -1$ alors c'est une **symétrie centrale**

Elément caractéristique: Le centre Ω d'affixe $w = \frac{2+i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$

$b)\ Z' = e^{i\frac{\pi}{4}}Z + 2 - 4i$ comme $|a| = 1$ c'est une **Rotation**

<u>Eléments caractéristiques</u>:

●L'angle $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$ et

● Le centre Ω: $w = Z = Z'$ on a: $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2-4i}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2-4i}{1-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2-4i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$w = \frac{(2-4i)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}-4i+2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{2+\sqrt{2}+i(3\sqrt{2}-4)}{2-\sqrt{2}} = \frac{\left(2+\sqrt{2}+i(3\sqrt{2}-4)\right)(2+\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$w = \frac{(2+\sqrt{2})^2+i(2+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-4)}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}+i(6\sqrt{2}-8+6-4\sqrt{2})}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-2)}{2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{w = 3 + 2\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1)}}$$

$c)\ Z' = -\frac{1}{3}Z + 2 - i$ comme $a = -\frac{1}{3}$ alors c'est une **Homothetie**

<u>Eléments caractéristiques</u>:

●Le rapport k : $\mathbf{k = -\frac{1}{3}}$ et

●Le centre Ω: $w = Z = Z'$ on a: $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2-i}{\frac{3+1}{3}} = \frac{3}{4}(2-i) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}i \Longrightarrow \boxed{\mathbf{w = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}i}}$

$d)\ Z' = -iZ + 1 + i$ comme $|a| = |-i| = 1$ c'est une **Rotation**

<u>Eléments caractéristiques</u>:

●L'angle $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{2}}$ et

● Le centre Ω: $w = Z = Z'$ on a: $w = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1+i} = 1 \Longrightarrow \boxed{\mathbf{w = 1}}$

$e)\ Z' = Z - 4i$ comme $a = 1$ alors c'est une **Translation** ;

<u>Elément caractéristique</u>:

Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-4i \implies \vec{\mathbf{u}}(-4\mathbf{i})$

$f)\ Z' = -Z + 2$; comme $a = -1$ alors c'est une **symétrie centrale**

Elément caractéristique: Le centre Ω d'affixe $w = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow \boxed{\mathbf{w = 1}}$

$g)\ Z' = -4Z + 10 - 5i$ comme $a = -4$ alors c'est une **Homothetie**

<u>Eléments caractéristiques</u>:

●Le rapport k : $\mathbf{k = -4}$ et

●Le centre Ω: $w = Z = Z'$ on a: $w = \frac{b}{1-a} = \frac{10-5i}{1+4} = \frac{10-5i}{5} = 2 - i \Longrightarrow \boxed{\mathbf{w = 2 - i}}$;

+++

<u>EXERCICE 11 :</u>

1) Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

   a) S : Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$

   b) S' : Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 1$

2) Donner l'écriture complexe de S∘S' et S'∘S

En déduire que S∘S'= S'∘S et préciser la nature de cette transformation

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) Donnons l'écriture complexe des transformations suivantes :

a) S : Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$

On pose $H(-2; y)\ et\ M(x; y)$; $M'(x'; y')$

Comme $H = \frac{[MM']}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x+x'}{2} \\ y_H = \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = -2 \\ \frac{y+y'}{2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x = -4 \\ y' + y = 2y \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x' = -x - 4 \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x - 4 \\ iy' = iy \end{cases} \Rightarrow x' + iy' = -x + iy - 4 \Rightarrow \mathbf{Z' = -\overline{Z} - 4}$

b) S' : Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 1$

On pose $H(x; 1)\ et\ M(x; y)$; $M'(x'; y')$

Comme $H = \frac{[MM']}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x+x'}{2} \\ y_H = \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = x \\ \frac{y+y'}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x = 2x \\ y' + y = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ iy' = -iy + 2i \end{cases} \Rightarrow x' + iy' = x - iy + 2i \Rightarrow \mathbf{Z' = \overline{Z} + 2i}$

2) Donnons l'écriture complexe de S∘S' et S'∘S

$$S \circ S' : Z' = -\left(\overline{\overline{Z} + 2i}\right) - 4 = -(Z - 2i) - 4 = -Z + 2i - 4$$

$$S' \circ S : Z' = \left(\overline{-\overline{Z} - 4}\right) + 2i = (-Z - 4) + 2i = -Z + 2i - 4$$

Déduisons-en que S∘S'= S'∘S et précisons la nature de cette transformation

On voit que $S \circ S' = S' \circ S$ d'écriture complexe $Z' = -Z + 2i - 4$

Comme $a = -1$ alors c'est une symétrie centrale

++

EXERCICE 12 :

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $Z' = 3iZ - 1 - 7i$

1)a)Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques

b) Déterminer l'expression analytique de S

2) Déterminer une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et 3-i

3) Déterminer une équation de (C'), image du cercle (C) d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 1$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $Z' = 3iZ - 1 - 7i$

1)a)Justifions que S est une similitude directe et précisons ses éléments caractéristiques

Comme $|a| = |3i| = 3 \neq 1$ alors S est une similitude plane directe

<u>**Eléments caractéristiques**</u> :

●Le rapport : $k = |a| = 3$

●L'angle : $\theta = \arg a = \arg 3i = \frac{\pi}{2}$

●Le centre ou point invariant Ω:

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-7i}{1-3i} = \frac{(-1-7i)(1+3i)}{1+9} = \frac{-1-3i-7i+21}{10} = \frac{20-10i}{10}\ \ d'où\ \ \mathbf{w = 2 - i}$$

b) Déterminons l'expression analytique de S

On pose $Z = x + iy$ $\quad et\ Z' = x' + iy'\ on\ a$:

$$x' + iy' = 3i(x + iy) - 1 - 7i = 3ix - 3y - 1 - 7i = -3y - 1 + i(3x - 7)$$

$$D'où \quad \begin{cases} \mathbf{x' = -3y - 1} \\ \mathbf{y' = 3x - 7} \end{cases}$$

2) Déterminons une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et 3-i

Pour cela trouvons les images de B et C :

$$\bullet Z_B{}' = 3iZ_B - 1 - 7i = 3i(2) - 1 - 7i = 6i - 1 - 7i = -1 - i$$

$$\bullet Z_C{}' = 3iZ_C - 1 - 7i = 3i(3 - i) - 1 - 7i = 9i + 3 - 1 - 7i = 2 + 2i$$

$$(B'C') \text{ a pour équation : } \frac{x - x_{B'}}{x_{C'} - x_{B'}} = \frac{y - y_{B'}}{y_{C'} - y_{B'}} \Longrightarrow \frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y + 1}{2 + 1} \Longrightarrow x + 1 = y + 1$$

$$d'où \quad \mathbf{y = x}$$

3) Déterminons une équation de (C'), image du cercle (C) d'équation

$$\boldsymbol{(x - 2)^2 + y^2 = 1}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1 \ \ (C)\ a\ pour\ centre\ \mathrm{B}(2)\ et\ \ de\ rayon\ \ R = 1$$

Alors (C') $a\ pour\ centre$ B' $(-1 - i)et\ \ de\ rayon\ \ R' = kR = 3 \times 1 = 3$ et pour équation : $\mathbf{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 3^2}$

++

<u>EXERCICE 13 :</u>

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'écriture complexe de f

2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = x + y + 2} \\ \boldsymbol{y' = -x + y - 1} \end{cases}$

1) Déterminons l'écriture complexe de f

$$\begin{cases} \mathrm{x' = x + y + 2} \\ \mathrm{y' = -x + y - 1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{x' = x + y + 2} \\ \mathrm{iy' = -ix + iy - i} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{x' + iy' = x + y + 2 - ix + iy - i} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Z' = x + iy - ix + y + 2 - i = Z - i\left(x - \frac{y}{i}\right) + 2 - i = Z - i(x + iy) + 2 - i} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Z' = Z - iZ + 2 - i = (1 - i)Z + 2 - i} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{Z' = (1 - i)Z + 2 - i}}$$

2) Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de f

Comme $|a| = |1 - i| = \sqrt{2} \neq 1$ alors c'est une similitude plane directe

<u>**Eléments caractéristiques**</u> :

●Le rapport : $k = |a| = \sqrt{2}$

●L'angle : $\theta = \arg a = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$

●Le centre ou point invariant Ω:

$$\mathrm{w} = \frac{\mathrm{b}}{1 - \mathrm{a}} = \frac{2 - i}{1 - (1 - i)} = \frac{2 - i}{i} = -i(2 - i) = -2i - 1\ \ d'où \quad \mathbf{w = -1 - 2i}$$

3) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}

f^{-1} est une similitude plane directe

Eléments caractéristiques de f^{-1} :

●Le rapport : $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

●L'angle : $-\theta = -\arg a = -\arg(1-i) = \frac{\pi}{4}$

●Le centre ou point invariant Ω: $\mathbf{w = -1 - 2i}$

Ecriture complexe de f^{-1} : $Z' - w = a(Z - w) \Rightarrow Z' + 1 + 2i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(Z + 1 + 2i) \Rightarrow$

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(Z + 1 + 2i) - 1 - 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 + 2i) - 1 - 2i \Rightarrow$$

$$Z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}i - 2 - 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}i - i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

D'où $\mathbf{Z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$

++

EXERCICE 14 :

On considère la somme : $S = cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5}$

a)Ecrire la formule permettant de mettre $\cos p + \cos q$ sous forme de produit et transformer : $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5}$

b) Ecrire la formule exprimant cos2x en fonction de cosx. En remarquant que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$, calculer $cos\frac{3\pi}{5}$ en fonction de $cos\frac{\pi}{5}$

c)En utilisant les résultats précédents, démontrer l'égalité $1 + S = 4\left(cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 2cos\frac{\pi}{5} - 1$

d)Soit $S' = sin\frac{2\pi}{5} + sin\frac{4\pi}{5} + sin\frac{6\pi}{5} + sin\frac{8\pi}{5}$

Démontrer que S+iS' est la somme des termes d'une suite géométrique et en déduire que 1+S=0.Calculer alors $cos\frac{\pi}{5}$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

a) Ecrivons la formule permettant de mettre $\cos p + \cos q$ sous forme de produit et transformons : $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5}$

● $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

● $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5} - \frac{8\pi}{5}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{10\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{-\frac{6\pi}{5}}{2}\right)$

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 2\cos(\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

b) Ecrivons la formule exprimant cos2x en fonction de cosx.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

En remarquant que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$, calculons $cos\frac{3\pi}{5}$ en fonction de $cos\frac{\pi}{5}$

$$\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{\cos\frac{3\pi}{5} = 1 - 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2}}$$

c) En utilisant les résultats précédents, démontrons l'égalité $1 + S = 4\left(cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 2cos\frac{\pi}{5} - 1$

$$1+S=1+cos\frac{2\pi}{5}+cos\frac{4\pi}{5}+cos\frac{6\pi}{5}+cos\frac{8\pi}{5}$$

- $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-2\left(1-2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-2$
- $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=2\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}-\frac{6\pi}{5}}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\frac{10\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{5}}{2}\right)$

$$\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=2\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$1+S=1+4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-2-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-2\cos\frac{\pi}{5}-1\Longrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{1+S=4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-2\cos\frac{\pi}{5}-1}}$$

d) Soit $S'=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}$

Démontrons que $S+iS'$ est la somme des termes d'une suite géométrique

$$S+iS'=cos\frac{2\pi}{5}+cos\frac{4\pi}{5}+cos\frac{6\pi}{5}+cos\frac{8\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}+isin\frac{4\pi}{5}+isin\frac{6\pi}{5}+isin\frac{8\pi}{5}\Longrightarrow$$

$$S+iS'=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^1+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4=e^{i\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}\right)\Longrightarrow$$

$$S+iS'=e^{i\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{1-e^{i\frac{8\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}\right)\ mais\ 1-e^{ia}=2\sin\frac{a}{2}e^{i\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\Longrightarrow S+iS'=e^{i\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{2\sin\frac{4\pi}{5}e^{i\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\frac{\pi}{5}e^{i\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}}\right)\Longrightarrow$$

$$S+iS'=\left(\frac{2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)e^{i\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)}=\left(\frac{4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)e^{i\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)}=4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}e^{i\pi}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\boldsymbol{S+iS'=-4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}}$$

Déduisons-en que 1+S=0.

$$1+S+iS'=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^1+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}$$

$$\Longrightarrow\ 1+S+iS'=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}\ \Longrightarrow 1+S+iS'=\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=0\Longrightarrow \mathbf{1+S=0}$$

Calculons alors $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{5}}$

$$4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0\ \Longrightarrow 4t^2-2t-1=0\Longrightarrow\ \Delta=(-2)^2-4(4)(-1)=4+16=20\ \Longrightarrow$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ \Longrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{2-2\sqrt{5}}{8}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0\\ t_2=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}>0\end{cases}\ \text{alors}\ \boxed{\mathbf{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}}$$

++

EXERCICE 15 :

Soit A le point du plan complexe d'affixe $a=\sqrt{3}-i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Calculer l'affixe b de B

Ecrire b sous forme algébrique et trigonométrique

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit A le point du plan complexe d'affixe $a = \sqrt{3} - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Calculons l'affixe b de B

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{4}}Z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Z \Rightarrow b = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

Ecrivons b sous forme algébrique et trigonométrique

Forme algébrique : $\boxed{\mathbf{b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)}}$

Forme trigonométrique : $b = e^{i\frac{\pi}{4}}a = e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt{3} - i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}}$

Déduisons-en les valeurs de $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{12}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{sin\frac{\pi}{12}}$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \\ b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{cases} \Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\ \mathbf{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \end{cases}}$$

++

EXERCICE 16 :

On pose $P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26$

1) α désigne un nombre complexe quelconque

Démontrer que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. Déduisez-en que si P(α)=0 alors P($\overline{\alpha}$)=0

2) Calculer P(1+i). Indiquer deux solutions complexes de l'équation P(Z)=0

3) a) Calculer $Q(Z) = [Z - (1+i)][Z - (1-i)]$

b) Vérifier que P(Z) est le produit du polynôme Q(Z) et d'un polynôme $Q_1(Z)$ du second degré. Déterminer $Q_1(Z)$

c) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

On pose $\boldsymbol{P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26}$

1) α désigne un nombre complexe quelconque

Démontrons que $\mathbf{P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}}$.

$\overline{P(Z)} = \overline{Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26} = \overline{Z}^4 - 6\overline{Z}^3 + 23\overline{Z}^2 - 34\overline{Z} + 26 = P(\overline{\alpha}) \Rightarrow \mathbf{P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}}$ **cqfd**

Déduisons-en que si P(α)=0 alors P($\overline{\alpha}$)=0

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(\overline{\alpha}) = 0 \\ \overline{P(\alpha)} = 0 \Rightarrow \overline{\overline{P(\alpha)}} = \overline{0} = 0 \Rightarrow P(\alpha) = 0 \end{cases} \quad \textbf{cqfd}$$

2) Calculons $P(1+i)$.

$$P(1+i) = (1+i)^4 - 6(1+i)^3 + 23(1+i)^2 - 34(1+i) + 26 \Rightarrow$$

$$P(1+i) = (2i)(2i) - 6(2i)(1+i) + 23(2i) - 34 - 34i + 26$$

$$= -4 - 12i + 12 + 46i - 34 - 34i + 26 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{P(1+i) = 0}$$

Indiquons deux solutions complexes de l'équation P(Z)=0

Comme $P(\overline{\alpha}) = P(\alpha) = 0$ alors $P(1+i) = P(\overline{1+i}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Z_0 = 1 + i} \\ \mathbf{Z_1 = 1 - i} \end{cases}$

3) a) Calculons $\boldsymbol{Q(Z) = [Z - (1+i)][Z - (1-i)]}$

$$Q(Z) = [Z - (1+i)][Z - (1-i)] = Z^2 - 2Z + 2$$

b) Vérifions que P(Z) est le produit du polynôme Q(Z) et d'un polynôme Q_1(Z) du second degré.

$P(Z) = [Z^2 - 2Z + 2][Z^2 + aZ + b] = Z^4 + aZ^3 + bZ^2 - 2Z^3 - 2aZ^2 - 2bZ + 2Z^2 + 2aZ + 2b$

$P(Z) = Z^4 + (a-2)Z^3 + (b - 2a + 2)Z^2 + (2a - 2b)Z + 2b$ avec $Q_1(Z) = Z^2 + aZ + b$

Déterminons Q_1(Z)

On pose $P(Z) = P(Z) \Rightarrow$

$$\begin{cases} P(Z) = Z^4 + (a-2)Z^3 + (b-2a+2)Z^2 + (2a-2b)Z + 2b \\ P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - 2 = -6 \\ b - 2a + 2 = 23 \\ 2a - 2b = -34 \\ 2b = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -8 - 2 + 23 = 13 \end{cases} \Rightarrow Q_1(Z) = Z^2 - 4Z + 13$$

c) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0

$P(Z) = 0 \Rightarrow Q(Z)Q_1(Z) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_0 = 1 + i \quad et \quad Z_1 = 1 - i \\ Z^2 - 4Z + 23 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 23 = 16 - 92 = -76 = 76i^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{19} \text{ alors } \begin{cases} Z_2 = \dfrac{4 - 2i\sqrt{19}}{2} = 2 - i\sqrt{19} \\ Z_3 = \dfrac{4 + 2i\sqrt{19}}{2} = 2 + i\sqrt{19} \end{cases} \text{ d'où } \boxed{\mathbf{S = \{1 + i;\ 1 - i; 2 - i\sqrt{19}; 2 + i\sqrt{19}\}}}$$

++

EXERCICE 17 :

a) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{\theta} = 0$ où $\theta \in [0; 2\pi[$

Donner chaque solution sous forme trigonométrique

b) On appelle A et B les images dans le plan complexe des solutions de l'équation précédente. Déterminer θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

++++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

a) Résolvons dans C l'équation : $\boldsymbol{Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0}$ où $\boldsymbol{\theta \in [0; 2\pi[}$

$$Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{\theta} = 0 \Rightarrow \Delta = (2^{\theta+1}\cos\theta)^2 - 4 \times 2^{2\theta} = 2^{2\theta+2}\cos^2\theta - 2^{2\theta+2} \Rightarrow$$

$$\Delta = -2^{2(\theta+1)}(1 - \cos^2\theta) = i^2 2^{2(\theta+1)}\sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2^{\theta+1} i \sin\theta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{2^{\theta+1}\cos\theta - 2^{\theta+1} i \sin\theta}{2} = 2^{\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ Z_2 = \dfrac{2^{\theta+1}\cos\theta + 2^{\theta+1} i \sin\theta}{2} = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{2^{\theta}(\cos\theta - i\sin\theta);\ 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)\}}}$$

Donnons chaque solution sous forme trigonométrique

$$\begin{cases} Z_1 = 2^{\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 2^{\theta}\ (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ Z_2 = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Z_1 = 2^{\theta}\ (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))} \\ \boldsymbol{Z_2 = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)} \end{cases}$$

b) On appelle A et B les images dans le plan complexe des solutions de l'équation précédente. Déterminons θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

OAB est équilatéral si et seulement si :

$$\frac{Z_A - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{2^{\theta}e^{i\theta}}{2^{\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ \theta \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}}$$

++

EXERCICE 18 :

1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $u = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$

2) Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe z associe $f(z) = uz + (1+i)(1-u)$

Montrer que f est bijective et déterminer le nombre complexe w tel que : $f(w) = w$

3) Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes w, z et $f(z)$ respectivement

Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right)$ et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM

On note F l'application qui, à tout point M associe le point M'

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques

4) Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$

On définie pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n)$. On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe

Calculer en fonction de n la distance IA_n. Quelle est la limite de cette distance quand $n \to +\infty$

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons le module et un argument du nombre complexe $\boldsymbol{u = \frac{\sqrt{3}+i}{4}}$

<u>Module de u :</u> $|u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{|u| = \frac{1}{2}}$

<u>Argument de u :</u> Soit θ un argument de u : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

1) Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe z associe

$$\boldsymbol{f(z) = uz + (1+i)(1-u)}$$

Montrons que f est bijective

Posons $f(z) = z'$; $z' \in C$; on a : $uz + (1+i)(1-u) = z' \Longrightarrow uz = z' - (1+i)(1-u) \Longrightarrow$

$$\boxed{z = \frac{z' - (1+i)(1-u)}{u}}$$

Sachant que $u \neq 0$ alors, $\forall z' \in C$; son antécédent z est unique alors f est bijective

Déterminons le nombre complexe w tel que : $f(w) = w$

$$f(w) = w \Longrightarrow wu + (1+i)(1-u) = w \Longrightarrow wu - w = -(1+i)(1-u) \Longrightarrow$$
$$w(u-1) = -(1+i)(1-u) \Longrightarrow \boxed{w = 1+i}$$

2) **Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes w, z et $f(z)$ respectivement**

Donnons une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right)$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) = \arg\left(\frac{f(z) - w}{z - w}\right) = \arg\left(\frac{uz + (1+i)(1-u) - (1+i)}{z - (1+i)}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{uz + (1+i)(1-u-1)}{z-(1+i)}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{uz - u(1+i)}{z-(1+i)}\right) \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) = \arg\left(\frac{u\big(z-(1+i)\big)}{z-(1+i)}\right) = \arg(u) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) = \frac{\pi}{6}}$$

Calculons la distance IM' en fonction de la distance IM

$$\frac{IM}{IM'} = \frac{1}{u} \Rightarrow \left|\frac{IM}{IM'}\right| = \left|\frac{1}{u}\right| = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Longrightarrow IM = 2IM' \Longrightarrow \boxed{IM' = \frac{1}{2}IM}$$

On note F l'application qui, à tout point M associe le point M'

Précisons la nature de F et ses éléments caractéristiques

L'écriture $z' = uz + (1+i)(1-u)$ est de la forme $z' = az + b$; $(a,b) \in C \times C$ alors F est une similitude plane directe de rapport $k = \frac{1}{2}$ d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ et de centre $w = 1+i$

3) **Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$**

On définie pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n)$. On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe

Calculons en fonction de n la distance IA_n.

$$IA_n = |z_n - w|$$

<u>**1ère méthode :**</u>$z_{n+1} = f(z_n) = uz_n + (1+i)(1-u)$ et $f(w) = w \Longrightarrow w = uw + (1+i)(1-u)\ donc$

$$z_{n+1} - w = uz_n + (1+i)(1-u) - uw - (1+i)(1-u) \Longrightarrow z_{n+1} - w = uz_n - uw$$
$$= u(z_n - w)$$
$$\Longrightarrow \frac{z_{n+1} - w}{z_n - w} = u \Longrightarrow \boxed{\frac{z_{n+1} - w}{z_n - w} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Ceci montre que la suite $z_n - w$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et de premier terme $z_0 - w = -1 + 2i - (1+i) = -2 + i$ alors $z_n - w$ peut s'écrire sous la forme : $z_n - w = (z_0 - w)q^n = (-2+i)\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$

Alors $IA_n = |z_n - w| = \left|(-2+i)\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{2}^n(-2+i)\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{5} \Longrightarrow$

$$\boxed{IA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{5}}$$

2ème méthode :$IA_n = |z_n - w| \Longrightarrow IA_{n+1} = |z_{n+1} - w| = |uz_n + (1+i)(1-u) - w| =$
$|uz_n + (1+i)(1-u) - (1+i)| \Longrightarrow IA_{n+1} = |uz_n + (1+i)(1-u-1)| =$
$|uz_n - u(1+i)| = |u(z_n - w)| = |u||z_n - w| = \frac{1}{2}IA_n \Longrightarrow IA_{n+1} = \frac{1}{2}IA_n$

Alors IA_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme

$IA_0 = |z_0 - w| = |-1 + 2i - 1 - i| = |-2 + i| = \sqrt{5}$

D'où $IA_n = IA_0(q)^n = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow \boxed{IA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{5}}$

Calculons la limite de cette distance quand $n \to +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} IA_n = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{5}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} \sqrt{5} = 0 \times \sqrt{5} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} IA_n = 0}$

++

EXERCICE 19 :

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1+i)Z + 1 + 4i$

1) Donner la nature de S et ses éléments caractéristiques
2) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1
3) Déterminer les équations des transformées par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (D) d'équation $y = x - 1$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1+i)Z + 1 + 4i$

1) **Donnons la nature de S**

$|a| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ alors S est une similitude plane directe

Les éléments caractéristiques

•Le rapport : $k = |a| = \sqrt{2}$

•L'angle θ :$\theta = \arg(a) = \arg(-1+i)$, on a $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ alors $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

•Le centre ou le point invariant $\Omega(w)$:On pose $z_1 = z = w \Longrightarrow w = \frac{b}{1-a} = \frac{1+4i}{1-1+i} = \frac{1+4i}{2-i}$

$$w = \frac{2 + i + 8i - 4}{5} = \frac{-2+9i}{5} \Longrightarrow w = \frac{-2+9i}{5}$$

2) **Calculons les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1** On pose $z_1 = x_1 + iy_1 \ \ et \ \ z = x + iy$, on a :

$x_1 + iy_1 = (-1+i)(x+iy) + 1 + 4i = -x - iy + ix - y + 1 + 4i$
$= -x - y + 1 + i(x - y + 4)$

$\begin{cases} x_1 = -x - y + 1 & (1) \\ y_1 = x - y + 4 & (2) \end{cases} \Longrightarrow De\ (1) + (2), on\ a :\ x_1 + y_1 = -2y + 5 \Longrightarrow$

$$y = -\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 5)$$

$De\ \ (1)-(2)$ on a : $x_1 - y_1 = -2x - 3 \Rightarrow \ x = -\dfrac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3)$

3) Déterminons les équations des transformées par S de la droite d'équation $\boldsymbol{x = 0}$ et de la droite (D) d'équation $\boldsymbol{y = x - 1}$

•Pour $x = 0\,, on\ a :\ \ 0 = -\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3) \Rightarrow \ x_1 - y_1 + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = x_1 + 3$

D'où l'équation de la transformée est $y = x + 3$

•Pour $y = x - 1\,, on\ a :$

$$-x + y = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3) - \frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 5) = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3 - x_1 - y_1 + 5) = -1 \Rightarrow -2y_1 + 8 = -2 \Rightarrow -2y_1 = -10 \Rightarrow y_1 = 5$$

D'où l'équation de la transformée est $y = 5$

++

EXERCICE 20 :

On considère le polynôme défini par : $\mathrm{f(z) = z^3 - (6 + 12i)z^2 - (36 - 48i)z + 90 + 27i}$

1) Calculer f(3i). En déduire nue factorisation de f(z)

2) Résoudre l'équation :$\mathrm{z^2 - (6 + 9i)z - 9 + 30i = 0}$. En déduire les racines $\mathrm{z_0;\ z_1}$ et $\mathrm{z_3}$ de f(z)

3) $\mathrm{M_0;\ M_1}$ et $\mathrm{M_3}$ sont les points images des racines $\mathrm{z_0;\ z_1}$ et $\mathrm{z_3}$

Mettre le nombre complexe $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$ sous la forme trigonométrique. En déduire la nature du triangle $\mathrm{M_0M_1M_3}$

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

On considère le polynôme défini par : $\boldsymbol{f(z) = z^3 - (6 + 12i)z^2 - (36 - 48i)z + 90 + 27i}$

1) Calculons f(3i) :

$$f(3i) = (3i)^3 - (6 + 12i)(3i)^2 - (36 - 48i)3i + 90 + 27i$$

$= -27i + 54 + 108i - 108i - 144 + 90 - 27i = 0$ D'où $f(3i) = 0$

En déduisons une factorisation de f(z) $f(z) = (z - 3i)q(x)$

	1	$-6-12i$	$-36+48i$	$90+27i$
$3i$		$3i$	$27-18i$	$-90-27i$
	1	$-6-9i$	$-9+30i$	0

D'où $f(z) = (z - 3i)(z^2 - (6 + 9i)z - 9 + 30i)$

2) Résolvons l'équation :$\boldsymbol{z^2 - (6 + 9i)z - 9 + 30i = 0}$.

$\Delta = (6 + 9i)^2 - 4(-9 + 30i) = 36 + 108i - 81 + 36 - 120i = -9 - 12i$

Soit t l'une des racines de Δ: $\mathrm{t} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{|\Delta| + a}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\dfrac{|\Delta| + a}{2}}\right)$ avec

$|\Delta| = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ et $\varepsilon = -$ alors

$$t = \pm\left(\sqrt{\frac{15 - 9}{2}} - i\sqrt{\frac{15 + 9}{2}}\right) = \pm(\sqrt{3} - i\sqrt{12}) = \pm(\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{6+9i-\sqrt{3}+2i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6-\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{9+2\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_2 = \dfrac{6+9i+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6+\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

En déduisons les racines z_0; z_1 et z_3 de $f(z)$

On pose $f(z) = (z-3i)(z^2-(6+9i)z-9+30i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-3i = 0 \Rightarrow z_0 = 3i \\ z^2-(6+9i)z-9+30i = 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{S = \left\{3i;\ \frac{6-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{9+2\sqrt{3}}{2}\right); \frac{6+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}$$

3) M_0; M_1 et M_3 sont les points images des racines z_0; z_1 et z_3

Mettons le nombre complexe $\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}$ sous la forme trigonométrique

$$\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0} = \frac{\dfrac{6-\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{9+2\sqrt{3}}{2}\right) - 3i}{\dfrac{6+\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{2}\right) - 3i} = \frac{6-\sqrt{3}+9i+2i\sqrt{3}-6i}{6+\sqrt{3}+9i-2i\sqrt{3}-6i}$$

$$= \frac{6-\sqrt{3}+i(3+2\sqrt{3})}{6+\sqrt{3}+i(3-2\sqrt{3})} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Le triangle $M_0M_1M_3$ est équilatéral

++

EXERCICE 21 :

On considère le nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3}+2)$

1) On pose $Z = z^2$. Exprimer Z sous forme algébrique
2) Déterminer le module et un argument de Z
3) En déduire le module et un argument de z
4) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

On considère le nombre complexe

1) On pose $Z = z^2$. Exprimons Z sous forme algébrique

$Z = z^2 = \left(2\sqrt{3}-2+i(2\sqrt{3}+2)\right)^2 = (2\sqrt{3}-2)^2 + 2i(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2) - (2\sqrt{3}-2)^2$

$= 16-8\sqrt{3}+2i(12-4)-(16+8\sqrt{3}) = 16-8\sqrt{3}+16i-16-8\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{Z = -16\sqrt{3}+16i}$

2) Déterminons le module et un argument de Z

$$|Z| = |-16\sqrt{3}+16i| = \sqrt{(-16\sqrt{3})^2+16^2} = \sqrt{16^2(3+1)} = 16\times 2 = 32 \quad d'où \ \ \boldsymbol{|Z| = 32}$$

Soit θ un argument de Z: $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{16\sqrt{3}}{32} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad d'où\ \boldsymbol{\arg Z \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]}$

3) Déduisons-en le module et un argument de z

Comme $Z = z^2$ *alors*

$$\begin{cases} |z^2| = |Z| \Rightarrow |z| = \sqrt{|Z|} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ \arg z^2 = \arg Z \Rightarrow \arg z = \frac{1}{2}\arg Z = \frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{12} + k\pi \Rightarrow \arg z = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

D'où $|\mathbf{z}| = \mathbf{4\sqrt{2}}$ **et** $\mathbf{arg\, z = \frac{5\pi}{12} + k\pi}$

4) Donnons alors les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ ***et*** $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \mathbf{4\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{\cos}\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \mathbf{4\sqrt{2}}\boldsymbol{\cos}\frac{5\pi}{12} + 4i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$ et $z =$ $2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3}+2)$, on pose $z = z$: $\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ d'où $\mathbf{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ **et** $\mathbf{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

+++

EXERCICE 22 :

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

1) a) Mettez z sous sa forme algébrique b) Calculer le module et un argument de z

2) Calculer $\overline{z}^6$, $\overline{z}^8$, $\overline{z}^{2005}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

1) a) Mettons z sous sa forme algébrique

$$z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{(1+\sqrt{2}-i)^2}{(1+\sqrt{2})^2+1^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - 2i(1+\sqrt{2}) + i^2}{3+2\sqrt{2}+1} = \frac{3+2\sqrt{2}-2i(1+\sqrt{2})-1}{4+2\sqrt{2}}$$

$= \frac{2+2\sqrt{2}-2i(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}$ D'où $\mathbf{z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

b) Calculons le module et un argument de z : $|z| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = 1$ $d'o\grave{u}$ $|z| = 1$

Soit θ un argument de z : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $d'o\grave{u}$ $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2) Calculons $\boldsymbol{\overline{z}^6}$, $\boldsymbol{\overline{z}^8}$, $\boldsymbol{\overline{z}^{2005}}$ **et donnons les résultats sous forme algébrique** $\overline{z} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$\overline{z}^6 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + +i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$ $d'o\grave{u}$ $\overline{z}^6 = -i$

$\overline{z}^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + +i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 = \cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ $d'o\grave{u}$ $\overline{z}^8 = 1$

$\overline{z}^{2005} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + +i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2005} = \cos\frac{2005\pi}{4} + i\sin\frac{2005\pi}{4} == -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $d'o\grave{u}$ $\boldsymbol{\overline{z}^{2005} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

+++

EXERCICE 23 :

Déterminer tous les nombres complexes Z non nuls ; tels que Z^2 et Z^6 soient conjugués

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ ce nombre complexe tel que : $z^2 = \overline{z}^6 \Rightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \rho^6 e^{-i6\theta} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^6 \\ 2\theta = -6\theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 2\theta + 6\theta = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 8\theta = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

D'où $\boldsymbol{z_k = e^{i\frac{k\pi}{4}}}$ ***avec*** $\boldsymbol{k \in Z}$

+++

EXERCICE 24 :

Déterminer deux nombres complexes tels que l'un soit le carré de l'autre

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

Soit u et v ces deux nombres complexes tels que : $\begin{cases} u = v^2 \\ v = u^2 \end{cases} \Longrightarrow u = (u^2)^2 = u^4$

$$u = u^4 \Longrightarrow u^4 - u = 0 \Longrightarrow u(u^3 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ (u-1)(u^2 + u + 1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \\ u^2 + u + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3} \Longrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j \\ u = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$u = \{0; 1; j; \bar{j}\} \Longrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = j \\ v = j^2 = \bar{j} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \bar{j} \\ v = \bar{j}^2 = j \end{cases}$$

D'où $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \{(\mathbf{0}; \mathbf{0}); (\mathbf{1}; \mathbf{1}); (\boldsymbol{j}; \bar{\boldsymbol{j}}); (\bar{\boldsymbol{j}}; \boldsymbol{j})\}$

+++

EXERCICE 25 :

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que $\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

Comme $\beta^7 = 1 \Longrightarrow \beta^7 - 1 = 0 \Longrightarrow (\beta - 1)(\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta - 1 \neq 0 \\ \beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = \frac{\beta(1+\beta^4)(1+\beta^6) + \beta^2(1+\beta^2)(1+\beta^6) + \beta^3(1+\beta^2)(1+\beta^4)}{(1+\beta^2)(1+\beta^4)(1+\beta^6)}$$

$$\frac{\beta + \beta^7 + \beta^5 + \beta^{11} + \beta^2 + \beta^8 + \beta^4 + \beta^{10} + \beta^3 + \beta^7 + \beta^5 + \beta^9}{1 + \beta^6 + \beta^4 + \beta^{10} + \beta^2 + \beta^8 + \beta^6 + \beta^{12}}$$

$$= \frac{(\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5) + \beta^7 + \beta^{11} + \beta^{10} + \beta^8 + \beta^7 + \beta^5 + \beta^9}{1 + \beta^2 + \beta^4 + 2\beta^6 + \beta^8 + \beta^{10} + \beta^{12}}$$

Comme $\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0 \Longrightarrow -1 - \beta^6 = \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta$ *et* $\beta^7 = 1$

$$\frac{-1 - \beta^6 + \beta^7(1 + \beta^4 + \beta^3 + \beta + 1 + \beta^2) + \beta^5}{1 + \beta^2 + \beta^4 + 2\beta^6 + \beta^7(\beta + \beta^3 + \beta^5)} \quad mais\ \beta^7 = 1\ \ on\ a:$$

$$\frac{-1 - \beta^6 + 1 + \beta^4 + \beta^3 + \beta + 1 + \beta^2 + \beta^5}{1 + \beta^2 + \beta^4 + 2\beta^6 + \beta + \beta^3 + \beta^5} = \frac{-\beta^6 - \beta^6}{2\beta^6 - \beta^6} = \frac{-2\beta^6}{\beta^6} = -2$$

D'où $\boldsymbol{\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2}$

+++

EXERCICE 26 :

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$$

Indication : poser $Z = z^3$ et calculer $(9+i)^2$.

++++++++++++++++++++++++<u>**RESOLUTION**</u>++++++++++++++++++++++++++

1. On pose $z_1^3=z_2^3=z_3^3$

$$z_2^{\ 3}=z_1^{\ 3} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2^{\ 3}|=|z_1^{\ 3}| \\ \arg(z_2^{\ 3})=\arg(z_1^{\ 3})+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^3=|z_1|^3 \\ 3\arg(z_2)=3\arg(z_1)+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z_2|=|z_1| \\ \arg(z_2)=\arg(z_1)+\dfrac{2k\pi}{3};k=\{0;1;2\} \end{cases}$$

$$z_2=|z_1|e^{i\left(\arg(z_1)+\frac{2k\pi}{3}\right)}=|z_1|e^{i\arg(z_1)}e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)}=z_1\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^k=z_1j^k$$

$$z_2=z_1 \quad ; \quad z_2=z_1j \quad et \quad z_2=z_1j^2$$

De même les solutions de z_3 sont : $z_3^{\ 3}=z_1^{\ 3}$ on a :

$$z_3=z_1 \quad ; \quad z_3=z_1j \quad et \quad z_3=z_1j^2$$

2. $z^6+(7-i)z^3-8-8i=0$

On pose $Z=z^3$: $z^6+(7-i)z^3-8-8i=0 \Leftrightarrow Z^2+(7-i)Z-8-8i=0$

$\Delta=(7-i)^2-4(-8-8i)=49-14i-1+32+32i=80+18i=(9+i)^2$

$Z_1=\frac{-(7-i)-(9+i)}{2}=-\frac{16}{2}=-8$ et $Z_2=\frac{-(7-i)+(9+i)}{2}=1+i$

On cherche alors les z tels que $z^3=Z$

D'après la première question $z^3=-8=(-2)^3 \Leftrightarrow z\in\{-2,-2j,-2j^2\}$

Et $z^3=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}j^k \Leftrightarrow$

$$\text{Alors } S=\left\{-2,-2\mathrm{j},-2\mathrm{j}^2;\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}j;\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}j^2\right\}$$

++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**+++++++++++++++++++++++++++

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a)\ Z = 4 + 2i + (3 - i)^2 \qquad b)\ Z = (2 - 2i)\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

$c)\ Z = \dfrac{2 - i}{(1 + i)^2} \qquad d)\ Z = \dfrac{(3 + 4i)(2i)}{(1 - 2i)^2}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$a)\ Z = (2 + 2i)(2 - i)^2 \qquad b)\ Z = (3 - 2i)^2\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2$

$c)\ Z = \dfrac{2 - i}{(1 + i)^2} \qquad d)\ Z = \dfrac{(3 + 4i)(2i)}{(1 - 2i)^2}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = 2x + 3i + (ix - 2)\left(2 - i(x + 4)\right)$

Déterminer le nombre réel x tels que :

a) Z est un nombre réel
b) Z est un nombre imaginaire pur

++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$a)\ Z = (1 + i)\left(1 - i\sqrt{3}\right) \qquad b)\ Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^5 \qquad c)\ Z = \dfrac{25 + 25i}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}$

$d)\ Z = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} (2 + 2i)^5$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$a)\ Z = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad b)\ Z = \sin\alpha - i\cos\alpha \qquad c)\ Z = -\cos\alpha + i\sin\alpha$

$d)\ Z = -\cos\alpha - i\sin\alpha \qquad e)\ Z = \tan\alpha + i \qquad f)\ Z = 1 - i\tan\alpha$

$g)\ Z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad h)\ Z = 1 - \cos\alpha - i\sin\alpha \qquad i)\ Z = \text{cotan}\,\alpha + i$

$f)\ Z = 1 - i\,\text{cotan}\,\alpha \qquad g)\ Z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha \qquad d)\ Z = 1 - \sin\alpha - i\cos\alpha$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 6 :**+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée :

$a)\ |Z + 5 - 2i| = |Z - 2 + i| \qquad b)\ |Z + 1 + i| = |3Z - 9 - 3i|$;

$c)\ \left|Z + \overline{Z} - 1\right| = 4$; $\qquad d)\ \left|Z - \overline{Z} - 1 + i\right| = 2$;

$e)\ \arg(3i - Z) \equiv 0[2\pi]$; $\qquad f)\ \arg(-\overline{Z} - 3 + i) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$;

$g)\ \arg\left(\frac{1}{Z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; $h)\ \arg(Z-3i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$;

$i)\ \arg(Z^2-4) \equiv \arg(Z+2)\,[2\pi]$; $j)\ \left|\frac{Z-3i}{Z-2+i}\right| = 1$;

$k)\ |Z-3+i| = |2Z-4i|$; $l)\ |\overline{Z}-1+i| = |Z-1|$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 7:**++++++++++++++++++++++++++

A tout nombre complexe Z ; différent de -1+2i ; on associe le nombre complexe $Z' = \frac{Z-2+4i}{Z+1-2i}$

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée ;

a) Z' soit un nombre réel
   Z' soit un nombre imaginaire pur
b) $|Z'| = 1$; $d)\ |Z'| = 2$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 8 :**++++++++++++++++++++++++++

A tout nombre complexe Z ; différent de 1+2i ; on associe le nombre complexe $Z' = \frac{Z-3+2i}{Z-1-2i}$

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée ;

a) Z' soit un nombre réel
b) Z' soit un nombre imaginaire pur
c) $|Z'| = 1$; $d)\ |Z'| = 2$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 9 :**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée :

a) $\frac{2Z-1}{Z^2}$ est un nombre réel ; b) $\frac{4-(Z+\overline{Z})i}{1-i+\frac{1}{2}(Z-\overline{Z})}$ est un nombre réel

++++++++++++++++++++++++**Exercice 10 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit Z un nombre complexe tel que : $Z+\frac{1}{Z} = 2\cos\theta$ et $Z-\frac{1}{Z} = 2i\sin\theta$

Démontrer que pour tout entier naturel n ; on a : $Z^n+\frac{1}{Z^n} = 2\cos(n\theta)$ et $Z^n-\frac{1}{Z^n} = 2i\sin(n\theta)$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 11 :**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C les équations suivantes :

$a)\ iZ^2+Z-3+i=0$; $b)\ (-2+i)Z^2+(4-5i)Z+3-i=0$;

$c)\ Z^2+Z+1=0$; $d)\ |Z|^2=(1+i)Z$

$e)\ -\left(\frac{Z-3i}{Z+2}\right)^2+6\left(\frac{Z-3i}{Z+2}\right)-13=0$; $f)\ \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^3-2\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2+\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)-2=0$;

$g)\ Z^4+Z^3+Z^2+Z+1=0$; $h)\ \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n+\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)^n = 2\cos\theta$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 12:**++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre dans C l'équation : $Z^4-1=0$

2) Développer le produit $(Z-1)(Z^3+Z^2+Z+1)$

3) Quelles sont les solutions dans C de l'équation $Z^3+Z^2+Z+1=0$

4) Résoudre dans C l'équation : $\left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)^3+\left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)^2+\left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)+1=0$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 13 :**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C l'équation : $4Z^2+8|Z|^2-3=0$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 14 :**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le nombre complexe Z pour que :

$$|Z^2| - |1 - Z| = |Z| \ \ ou\ que: |Z - i| = |iZ - i| = |Z - iZ|$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 15 :**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre sur C les équations suivantes :

$$a)\ |Z| + Z = 3 + 4i \ \ ; \ \ b)\ |Z| - Z = 4 - 3i$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 16 :**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C les équations suivantes :

$a)\ Z^2 - (3 + 2i)Z + 5 + i = 0$; $b)\ Z^2 - 2(1 + i)Z + i - 1 = 0$;

$c)\ Z^2 + 2i\sqrt{2}Z - 2(1 + i) = 0$; $d)\ 2Z^2 - (20 + 9i)Z + 50 = 0$;

$e)\ Z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})Z + 9 = 0$; $f)\ (1 - i)Z^2 - 2Z - 11 + 3i = 0$;

$g)\ Z^2 - 4(1 - i)Z + 2(4 - i) = 0$; $h) Z^2 - (5 - i\sqrt{3})Z + 6 - i\sqrt{3}Z = 0$;

$i)\ iZ^2 + (1 - 5i)Z + 6i - 2 = 0$; $j)(1 + i)Z^2 - (5 + i)Z + 6 + 4i = 0$;

$k)\ (4 + 3i)Z^2 - (2i - 4)Z + 2 - i = 0$; $l)\ Z^2 - iZ + i\sqrt{3} = 0$;

$m)\ (2 - i)Z^2 - (3 + i)Z - 2 + 6i = 0$; $n)\ 2(1 - i)Z^2 + 8(2 + i)Z - 3(1 - 7i) = 0$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 17 :**++++++++++++++++++++++++++

On Considère le polynôme $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$

1) Démontrer qu'il existe un réel α solution de l'équation $P(z) = 0$
2) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$
3) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 18 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la transformation du plan dont l'écriture complexe est : $Z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}}Z - 3\sqrt{3} - 2i$

1) Déterminer le nombre complexe Z_0 $tel\ que$: $Z' - Z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_0)$
2) En déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre que l'on précisera

++++++++++++++++++++++++**Exercice 19 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe ; la nature et les éléments caractéristiques des transformations :$S_1 \circ S_2$ et $S_2 \circ S_1$

$$a)\ S_1:\ Z' = 2iZ + 1 - 2i \qquad et \qquad S_2:\ \ Z' = \frac{1}{2}iZ + 1 - \frac{1}{2}i$$

$$b)\ S_1\ :\ \ Z' = (1 + i)Z + 1 + i \qquad et \quad S_2\ :\ \ Z' = -2Z$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 20 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$Z' = (i - \sqrt{3})Z + 3 + i(2\sqrt{3} + 1)$$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
2) Déterminer l'expression analytique de f
3) Déterminer l'image par f de la droite de repère $(A; \vec{u})$ $où$ $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$ et $\vec{u}(\sqrt{3}\,; 0)$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 21:**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α

$$a)\ \Omega = 0\ ;k = 2\ \ et\ \alpha = \frac{\pi}{6}\quad ;\quad b)\ \Omega = 1\ ;k = \sqrt{2}\ \ et\ \alpha = \frac{\pi}{2}\quad ;$$

$$c)\ \ \Omega = 2 - i\ ;k = 1\ \ et\ \alpha = \frac{5\pi}{6}\ ;\qquad d)\ \Omega = -1 - i\ ;k = 3\ \ et\ \alpha = 0\ \ ;$$

$$e)\ \Omega = 1 + i\ ;k = 2\ \ et\ \alpha = \frac{2\pi}{3}\ ;\qquad f)\ \Omega = -3\ ;k = \sqrt{2}\ \ et\ \alpha = \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$g)\ \Omega = i\ ;k = \sqrt{2}\ \ et\ \alpha = \frac{\pi}{3}\ ;\quad h)\ \Omega = 2 + \frac{1}{2}i\ ;k = \frac{1}{2}\ \ et\ \alpha = -\frac{\pi}{3}\ ;$$

$$i)\ \ \Omega = 1 - i\ ;k = 2\ \ et\ \alpha = \frac{\pi}{4}$$

+++++++++++++++++++++++**Exercice 22 :**+++++++++++++++++++++++++

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Déterminer l'écriture complexe de f

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}

+++++++++++++++++++++++**Exercice 23 :**+++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer complexe de la similitude directe S définie par: $S(A) = A'\ et\ \ S(B) = B'$

$a)\ \ A(3 + 2i);\ \ A'(3);\ \ B(1)\ et\ \ B'(i)$, $b)\ \ A(2 + i);\ \ A'(3 + 2i);\ \ B(2)\ \ et\ \ B'(3i)$

+++++++++++++++++++++++**Exercice 24 :**+++++++++++++++++++++++++

Soit S une similitude directe d'écriture complexe : $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe Z tels que :

$$|(1 + i)Z + 1 - i| = 8$$

3) Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique

+++++++++++++++++++++++**Exercice 25 :**+++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C les équations suivantes :

$$a)\ Z^8 = -1\ \ ;\qquad b)\ Z^6 = \sqrt{3} + i\ \ ;\qquad c)\ Z^7 + \sqrt{3} - i = 0\ \ ;$$

$$d)\ Z^9 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}\quad ;\quad e)\ Z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

+++

APPROFONDISSEMENT

+++++++++++++++++++++++**Exercice 26 :**+++++++++++++++++++++++++

Soit n un entier naturel. On pose $A = \sum_{k=0}^{n} coskx$ $\quad et \quad$ $B = \sum_{k=0}^{n} sinkx$

1) Calculer et écrire sous la forme exponentielle $\mathrm{A} + \mathrm{iB}$

2) En déduire les expressions plus simples de A et B

+++++++++++++++++++++++**Exercice 27 :**+++++++++++++++++++++++++

Soit (Z_n) la suite définie dans C par : $Z_0 = 1 + i \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}\ Z_{n+1} = -\frac{1}{2} Z_n$

1) Démontrer que $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

2) Exprimer arg(Z_n) en fonction de n puis Z_n en fonction de Z_0 et n

++++++++++++++++++++++++**Exercice 28 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit S une similitude directe d'écriture complexe : $Z' = 3iZ - 9 - 3i$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S

2) Déterminer l'image par S :

a) du cercle de centre $\mathrm{K}(1 - 3\mathrm{i})$ et de rayon 1

b) de la droite (D) d'équation x=1

3) Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de S^{-1}

++++++++++++++++++++++++**Exercice 29 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère sur C, l'équation définie par : $aZ^2 + b|Z|^2 + ic = 0$, où a, b et c sont des réels
Quelles conditions vérifient les nombres a, b et c si Z=3+2i est une solution de l'équation ?

Déterminer (a, b, c) lorsque ; $(a, b, c) \in Z^3$ et $0 < a < 15$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 30:**++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que si les nombres complexes Z_1 et Z_2 ont pour module 1, le nombre $Z' = \frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$ est réel

++++++++++++++++++++++++**Exercice 31 :**++++++++++++++++++++++++++

x , y et z étant trois nombres complexes de module 1

Comparer les modules des nombres : $\mathrm{x + y + z}$ et $\mathrm{xy + yz + xz}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 32 :**++++++++++++++++++++++++++

Sachant que : $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1$

Déterminer Z_1 ; Z_2 et Z_3 tel que : $\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \\ Z_1Z_2Z_3 = 1 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 33 :**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer l'ensemble des images des points M(Z) tels que les images des nombres i ; Z et iZ soient alignées

++++++++++++++++++++++++**Exercice 34 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Mettre chacun des nombres suivants sous forme d'un produit de deux facteurs

$$Z = 1 + cosx + isinx \quad et \quad Z' = 1 - cosx - isinx$$

2) Simplifier la fraction : $X = \frac{Z}{Z'}$ et $Y = \frac{Z'}{Z}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 35 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit $Z = \varphi(cos\theta + isin\theta)$ un nombre complexe non nul

Calculer le module et l'argument en fonction de φ et θ du nombre complexe:

$$Z' = Z - \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)\overline{Z}$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 36:**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C les équations suivantes :

$a)\ Z^n = Z\ \ ;(n \in N^*)\ ;\qquad b)\ \left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)^n = \cos(nx) + isin(nx); (n \in N^*)\ ;$

$$c)\left(\frac{1+iZ}{1-iZ}\right)^3 = \frac{1+ai}{1-ai}(a \in R)$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 37 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit dans C l'équation : $Z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$

1) Montrer en cherchant sous forme trigonométrique, que cette équation admet trois solutions $Z_1;\ Z_2\ et\ Z_3$ dont on donnera pour chacune d'elle, le module et l'argument

2) Vérifier que l'on a les égalités suivantes :$\frac{Z_1 Z_2}{{Z_3}^2} = \frac{Z_2 Z_3}{{Z_1}^2} = \frac{Z_1 Z_3}{{Z_2}^2}$

Quelle est la valeur commune de ces rapports ?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 38:**++++++++++++++++++++++++++

Trouver le module et un argument de :

$$\mathrm{Z} = \frac{1 + (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3}{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2}\ \ \text{ou } \varphi \text{est dans l'intervalle } \left]0; \frac{\pi}{3}\right[$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 39:**++++++++++++++++++++++++++

Soit dans l'ensemble C des complexes l'équation en Z suivante : $Z^2 - 2pZ + \overline{p}^2 = 0\ \ (1)$

Dans la quelle p est un nombre donné sous la forme $p = a + ib$ et $\overline{p}$ son conjugué

1) Résoudre l'équation (1) et donner les expressions des racines en fonction de a et de b
2) Quels les nombres complexes p pour les quels l'équation a au moins une racine réelle ?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 40 :**++++++++++++++++++++++++++

Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2},\qquad b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}\ \ et\ c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1) Faites une figure que vous compléterez au cours de l'exercice
2) Calculer l'affixe d du point D image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport -3
3) Calculer l'affixe e du point E image de C par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
4) a. Calculer le quotient $Z = \frac{d-b}{e-b}$

b. I désigne le milieu du segment $[DE]$ et F le symétrique de B par rapport à I. Démontrer que BDFE est un carré

++++++++++++++++++++++++**Exercice 41:**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - 2cos\theta Z + 1 = 0\ \ où\ \theta\ est\ un\ réel$

Déterminer le module et un argument de chacune des solutions

++++++++++++++++++++++++**Exercice 42 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i\ \ , b = 3 + 2i\ \ et\ c = 7 - 2i$

1) a. Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a

En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

b. Déterminer les entiers relatifs n pour les quels a^n est un nombre réel.

c. Déterminer les entiers relatifs n pour les quels a^n est un nombre imaginaire pur

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$a)\ |Z-b| = |Z-c| \quad ; \quad b)\ 2|Z-b| = |a|$$

3) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1+i\sqrt{3})Z - 5i\sqrt{3}$

a. Démontrer que f admet un seul point invariant Ω

b. Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω

Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie

c. Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2)

+++++++++++++++++++++++Exercice 43:+++++++++++++++++++++++++

Soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z, distinct de A, associe le point M' d'affixe Z' telle : $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$

1) Démontrer que f admet deux points invariants
2) Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque
3) Démontrer que la droite de repère$(O;\ \overrightarrow{e_2})$, privé de A est globalement invariante par f
4) a. Démontrer que : $|Z'-2i||Z-2i| = 9$

b. En déduire l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R

Déterminer R pour que C soit globalement invariant par f.

+++++++++++++++++++++++Exercice 44 :+++++++++++++++++++++++++

1) a. Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

Ecrire les solutions sous forme algébriques et trigonométriques

b. Placer les points A et B des solutions ; A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative

Quelle est la nature du triangle OAB ?

2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

b. Déterminer sous forme trigonométrique, puis algébrique l'affixe du point A', image de A par f

En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

+++++++++++++++++++++++Exercice 45:+++++++++++++++++++++++++

Démontrer que si A, B et C désignent les mesures des angles d'un triangle, on a :

a) $sinA + sinB + sinC = 4cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}$

b) $cosA + cosB + cosC = 1 + 4sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$

+++++++++++++++++++++++Exercice 46 :+++++++++++++++++++++++++

Soit le nombre complexe $Z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; on pose $a = Z + Z^2 + Z^4 \quad et \quad b = Z^3 + Z^5 + Z^6$

1) Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive
2) Calculer a+b et ab. En déduire a et b

++++++++++++++++++++++++Exercice 47 :++++++++++++++++++++++++++

Soit l'équation (E) : $Z^4 + 2Z^3 + 2Z^2 - 2Z + 1 = 0$; $(Z \in \mathbb{C})$

1) Démontrer que si Z_0 est solution de (E), alors $\overline{Z_0}$ est solution de (E)
2) a. Déterminer les nombres a et b tels que :

$$(E) \leftrightarrow Z^2\left[\left(Z - \frac{1}{Z}\right)^2 + a\left(Z - \frac{1}{Z}\right) + b\right] = 0$$

b. Résoudre dans C l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$ puis l'équation (E)

3) Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

++++++++++++++++++++++++Exercice 48 :++++++++++++++++++++++++++

Soit l'équation (E) $Z^5 = 1$

1) Résoudre dans C l'équation (E) et représenter les images des solutions

2) Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

3) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$

En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

4) soit l'équation (E') : $(Z - 1)^5 = (Z + 1)^5$ avec $Z \in C$

a) Démontrer que Z_0 est solution de (E'), alors : $\left|\frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1}\right| = 1$

En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures

b) Résoudre (E')

++++++++++++++++++++++++Exercice 49 :++++++++++++++++++++++++++

On pose $Z = re^{i\theta}$ *avec r un réel strictement positif et on note* :

$Z_n = (Z + \overline{Z})(Z^2 + \overline{Z}^2)\ldots(Z^n + \overline{Z}^n)$ avec n un entier naturel non nul.

1) Calculer Z_3 et Z_4 en fonction de r et θ
2) Calculer Z_n en fonction de r et θ

++++++++++++++++++++++++Exercice 50:++++++++++++++++++++++++++

Soit (Z_n) la suite définie dans C par : $Z_0 = 4 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N};\ Z_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + i)Z_n$

1) Trouver le module et un argument de $Z_1;\ Z_2;\ Z_3;\ Z_4\ et\ Z_5$
2) Pour tout entier naturel n, on pose : $\Delta_n = |Z_{n+1} - Z_n|$
   a) Calculer Δ_{n+1} *en fonction de* Δ_n
   b) Démontrer que Δ_n est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison
   c) Calculer Δ_n en fonction de n et en déduire l'entier n_0 tels que lorsque $n \geq n_0$; $\Delta_n < 10^{-2}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 51 :**+++++++++++++++++++++++++

On considère les points M_n d'affixes Z_n tels que : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1+i\sqrt{3})$; où n est un entier naturel

1) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n, puis Z_n en fonction de n et Z_0
   Donner Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et trigonométrique
2) Placer les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 (unité graphique : 4cm)
3) Déterminer la distance de OM_n en fonction de n
4) a) Démontrer que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout entier naturel n
   b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$
   Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n

++++++++++++++++++++++++**Exercice 52 :**+++++++++++++++++++++++++

1) On pose $= e^{2i\frac{\pi}{7}}$. Calculer U^7
2) $S = U + U^2 + U^4$ et $T = U^3 + U^5 + U^6$. Démontrer que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive
3) Calculer S+T et ST
4) En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 53 :**+++++++++++++++++++++++++

1) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) Quelles sont les valeurs des sommes : $C = \sum_{k=0}^{4} \cos\frac{k\pi}{5}$ et $S = \sum_{k=0}^{4} \sin\frac{k\pi}{5}$?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 54 :**+++++++++++++++++++++++++

Les points A et B ont pour affixe $a = -8$ et $b = 8i$

D est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

C est le barycentre des points A , B et D affectés des coefficients respectifs -3, $\sqrt{3}$ et 3

1) Calculer les affixes d et c des points D et C
2) Prouver que A ; B ; C et D sont sur le même cercle. Préciser son centre et son rayon
3) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Démontrer que ses diagonales sont perpendiculaires et de même mesures

++++++++++++++++++++++++**Exercice 55 :**+++++++++++++++++++++++++

Linéariser les monômes et polynômes suivants :

a) $(\cos x)^3$; $(\sin x)^3$; $(\cos x)^4$; $(\sin x)^4$; $(\cos x)^5$; $(\sin x)^5$

b) $(\cos x)^4 \sin x$; $(\cos x)^4(\sin x)^3$; $(\sin x)^2(\cos x)^3$; $3(\sin 2x)^2 + (\sin 4x)^2$

c) $3(\cos x)^3(\sin x)^3 - 2(\cos x)^4(\sin x)^2$; $2(\sin x)^4 + 3(\sin x)^2(\cos x)^2 - \sin x$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 56 :**+++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation définie par :

$$Z^2 + 4Z\cos u + 2 + 4\cos 2u = 0 \quad où \ u \in [-\pi;;\ \pi]$$

1) Pour quelles valeurs de u les deux solutions sont-elles réelles ?
2) Déterminer le module et l'argument de chaque solution dans le cas où $u = \frac{\pi}{6}$

+++++++++++++++++++++++Exercice 57 :++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C l'équation définie par:

$$4(1 - sin\alpha)Z^2 - 2(1 + cos2\alpha)Z + 1 + sin\alpha = 0$$

Déterminer le module et l'argument des solutions en fonction de α

+++++++++++++++++++++++Exercice 58 :++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C l'équation définie par :

$$Z^4 - 2Z^3(cos\alpha + isin\alpha) + 2Z^2(1 + sin2\alpha) - 2Z(cos\alpha + sin\alpha) + 1 = 0$$

On posera $Y = Z + \frac{1}{Z}$; $\alpha\ est\ un\ réel$

+++++++++++++++++++++++Exercice 59 :++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans C les équations suivantes :

$a)\ (Z+1)^3 + i(Z-1)^3 = 0$; $b)\ (Z+1)^n + (Z-1)^n = 0$;

$c)\ (1 - iZ)^n + i(1 + iZ)^n = 0$;

$d)\ (Z+i)^n - (Z-i)^n = 0$; $e)\ \left(1 + \frac{iZ}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{iZ}{n}\right)^n = 0$

+++++++++++++++++++++++Exercice 60 :++++++++++++++++++++++++

Etudier les racines cubiques de $Z = a + ib$. En déduire les solutions du système sur R :

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3x^2y - y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

+++++++++++++++++++++++Exercice 61 :++++++++++++++++++++++++

Trois nombres complexes Z_1 ; Z_2 et Z_3 ont pour produit $3i\sqrt{3}$. Leurs arguments respectifs $\theta_1, \theta_2\ et\ \theta_3$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et leurs modules respectifs $\rho_1, \rho_2\ et\ \rho_3$ les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2

Sachant que $\theta_1 \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right[$, déterminer Z_1 ; Z_2 et Z_3 et construire leurs images dans le plan complexe

+++++++++++++++++++++++Exercice 62 :++++++++++++++++++++++++

a) Soit $A = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$ Montrer que $A = \frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n} i \sin\frac{n\pi}{6}$

b) Démontrer que $B = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin\frac{\pi}{4}$

+++++++++++++++++++++++Exercice 63 :++++++++++++++++++++++++

Soit l'équation (E) : $iZ^2 - 2(\sin\theta + i)Z + 2\sin\theta = 0\ \ avec\ \ \theta \in]-\pi;\ \pi[$

1) Résoudre l'équation (E)
2) a) Exprimer $1 + \cos\theta$ en fonction de $\cos\frac{\theta}{2}$; $1 - \cos\theta$ en fonction de $\sin\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta$ en fonction de $\sin\frac{\theta}{2}\ et\ \cos\frac{\theta}{2}$

b) Calculer le module et un argument de chacune des solutions de (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 64 :++++++++++++++++++++++++++

Soit le nombre complexe $u = \frac{ai-4b}{5+3i}$ $avec\ (a,b) \in R \times R$

1- Déterminer les réels a et b sachant que u a pour module 1 et pour argument $\frac{3\pi}{4}$

2- On donne $a = \sqrt{2}\ et\ b = \sqrt{2}$

a- Calculer u^{12} et u^{16}

b- Démontrer que, quels que soient les entiers m et n respectivement pair et impair, on a : $u^{4m} + u^{4n} = 0$

c- Sachant que les paramètres p et q sont des entiers naturels consecutifs, résoudre dans le corps des complexes : $Z^2u^{2p} + 2Zu^{2q} - 2u^{2p} = 0$
On donnera les solutions sous la formes cartesienne

+++

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

++++++++++++++++++++++++Exercice 65 :++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation (E) définie sur C par :

$$\frac{Z^4}{8} - (1+i)Z^3 + 6iZ^2 + 8(1-i)Z - 10 = 0$$

1) Démontrer que (E) admet une solution réelle Z_1 et une solution imaginaire pure Z_2

2) En utilisant la question précédente, résoudre dans C l'équation (E)

On désigne par $Z_1;\ Z_2;\ Z_3\ et\ Z_4$ les solutions de cette équation avec $Re(Z_3) < Re(Z_4)$

3) On appelle A, B, C et D les points du plan P d'affixes respectives $2; 2i; 2 + 4i\ et\ 4 + 2i$. Faire une figure et démontrer que ABCD est un carré

4) Déterminer la similitude plane directe S telle que $S(A) = B\ et\ S(C) = D$. On précisera les éléments caractéristiques de S

++++++++++++++++++++++++Exercice 66:++++++++++++++++++++++++++

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; u; v)$(unité graphique : 2cm) 1) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

On pose $a = \sqrt{3} + i\ et\ b = \sqrt{3} - i$. Ecrire $a\ et\ b$ sous leur forme exponentielle puis placer leurs images respectives A et B

2) a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente

b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par H. Placer B' sur la figure précédente

3) Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C

a) Justifier les égalités suivantes :

$c\overline{c} = R^2$; $(c-2i)(\overline{c}+2i) = R^2$; $\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$

b) En déduire que $c + \overline{c} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et que $c - \overline{c} = 2i$

c) En déduire l'affixe du point C et la valeur de R

++++++++++++++++++++++++Exercice 67 :+++++++++++++++++++++++++

Soit $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) Calculer Z² ; puis calculer le module et un argument de Z². Ecrire Z² sous la forme trigonométrique
2) En déduire le module et un argument de Z
3) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 68 :+++++++++++++++++++++++++

Soit $P(Z) = Z^3 - (1-2sin\alpha)Z^2 + (1-2sin\alpha)Z - 1$ $où$ $\alpha \in [0; \pi]$

1) Calculer P(1). En déduire une factorisation de P(Z)
2) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0. On notera Z_0=1 et Z_1 et Z_2 les autres solutions
3) Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions
4) Pour quelles valeurs de α les nombres $|Z_2+1|$, $|Z_0|$ et $|Z_1+1|$ forment une progression géométrique ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 69:+++++++++++++++++++++++++

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J)

1- Soit le polynôme P tel que pour tout z de C : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

Déterminer les réels u et v tels que : $P(z) = (z-2)(z^2 + uz + v)$

Résoudre dans C l'équation : $P(z) = 0$

2- On note $\propto$ la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de $\propto$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $\propto$; β et 2, I le milieu de $[AB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminer l'affixe du point r(B), en déduire la nature du quadrilatère OACB

3- Soit f l'application de P privé du point C dans P qui au point M d'affixe z, $(z \neq 2)$ associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-(1+i)}{z-2}$

a- Déterminer f(A) et f(B)

Déterminer le point E tel que : $f(E) = C$

b- Quelles distances représentent les réels $|z-(1+i)|$ et $|z-2|$?

En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

++++++++++++++++++++++++Exercice 70 :+++++++++++++++++++++++++

Soit $(U_n), n \in \mathbb{N}$; la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ U_{n+1} = (1+i)U_n \end{cases}$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5
2) Exprimer U_n en fonction de n
3) Pour quelles valeurs de n, la suite (U_n) est-elle :

• un nombre réel ? • un nombre imaginaire pur ?

4) Résoudre dans C l'équation : $Z^5=U_2$

5) Soit $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Déterminer n pour que $S_n=4+6i$

++++++++++++++++++++++++Exercice 71 :+++++++++++++++++++++++++

Dans le plan complexe rapporté orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère les points A ; B et D d'affixes respectives : $Z_A=-\frac{1}{2}$; $Z_B=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_D=1+i\sqrt{3}$

(S) est la similitude directe du plan transformant A en B et B en D

1) Déterminer l'écriture complexe de (S)

2) Soit M_n un point d'affixe Z_n, on pose pour tout entier naturel n ; $M_{n+1}=S(M_n)$; où M_{n+1} admet pour affixe Z_{n+1}
Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n

3) On considère la suite $U_n=|Z_n|$ *où* $U_0=\frac{1}{2}$. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique

4) Justifier que la distance $OM_{12}=2048$

++++++++++++++++++++++++Exercice 72 :+++++++++++++++++++++++++

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I ; J) unité graphique : 4cm

B et M_1 sont des points d'affixes respectives i et $Z_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

1) Calculer le module et l'argument de Z_1

2) M_2 est le point, d'affixe Z_2 , image de M_1par la rotation cde centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Trouver le module et l'argument de Z_2

En déduire que le point M_2 est sur la droite d d'équation y=x

3) M_3 est le point d'affixe Z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$

a) Vérifier que $Z_3=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$

b) Prouver que les points M_1 et M_3 sont sur le même cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

4) Construire à l'aide d'une règle et au compas, les points M_1,M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; préciser les différentes étapes de la construction

5) A tout point M distinct de B, d'affixe Z on associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z'=\frac{1}{i-Z}$

Trouver puis représenter l'ensemble des oints M tels que M appartienne au cercle de centre O et de rayon 1

++++++++++++++++++++++++Exercice 73:+++++++++++++++++++++++++

A tout nombre complexe Z, on associe le nombre complexe $z=\cos\theta+i\sin\theta$ différent de 1 défini par : $Z=\frac{1+z}{1-z}$

1) Déterminer le module et un argument de Z

2) Résoudre dans C l'équation : $z^4 + \frac{1}{z^4} = 1$.En déduire les valeurs de Z pour les valeurs de z ainsi trouvées

++++++++++++++++++++++++**Exercice 74 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $Z' = 2iZ - 1 - 7i$

1) a)Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques

b) Déterminer l'expression analytique de S

2) Déterminer une équation de l'image par S de la droite (D) d'équation :$3x + 2y + 5 = 0$

3) Déterminer une équation de (C'), image du cercle (C) d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 1$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 75:**++++++++++++++++++++++++++

On pose $a = \frac{1}{2}(1+i)$

1) Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes : a et $a - 1$

2) On pose $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul on pose : $z_n = a^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n.

Placer dans un repère orthonormé direct les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3; M_4 ; M_5 M_6 et M_7 (Unité graphique 4 cm)

3) Pour tout entier naturel non nul on pose $u_n = |z_n - z_{n-1}|$

Vérifier que : $u_n = |a|^{n-1} \times |a-1|$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1

4) a) On pose : $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Calculer s_n

b) Calculer si elle existe la limite de s_n

++++++++++++++++++++++++**Exercice 76:**++++++++++++++++++++++++++

On considère le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$

1) Calculer Z^2 et Z^4 ; puis en déduire le module et un argument de Z^4

En déduire le module et argument de Z

2) Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

3) Résoudre dans R l'équation : $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}\sin x = -\sqrt{\sqrt{2}}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 77 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère le polynôme défini par : $P(Z) = Z^3 - 3\sqrt{2}(1+i)Z^2 + 4(1+3i)Z - 8i\sqrt{2}$

1- a- Calculer $P\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$

b- Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$P(Z) = \left(Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)(Z^2 + aZ + b)$$

c- Résoudre dans C l'équation : $P(Z) = 0$

2- Soit A, B et C les points d'affixes respectives

$$Z_0 = \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} - 2\right) \; ; \; Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad et \; Z_2 = \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + 2\right)$$

a- Déterminer le module et un argument de Z_0 , Z_1 et Z_2

b- Montrer que les points A, B et C sont alignés et que B est le milieu du segment $[AC]$

3- a- Déterminer l'équation de la droite (Δ) médiatrice du segment $[AC]$

b- Soit M l'ensemble des points de la droite (Δ) d'affixe Z

Trouver l'expression de Z

c- Calculer le rapport $\frac{Z_0 - Z}{Z_1 - Z}$. En déduire la nature du triangle MAC

d- Déterminer l'expression de Z pour la quelle MAC est un triangle équilatéral

++++++++++++++++++++++++Exercice 78 :++++++++++++++++++++++++++

On donne l'équation suivante : $Z \in C$: $Z^2 - (2r\cos\alpha)Z + r^2 = 0$ (E) où r est un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque. Soient Z_1 et Z_2 les solutions de (E)

1- Ecrire Z_1 et Z_2 sous formes trigonométriques

2- a- Calculer ${Z_1}^n$ et ${Z_2}^n$ pour tout entier naturel n

b- On pose $P_n = {Z_1}^n + {Z_2}^n$ pour tout entier naturel n. Montrer que : P_n est un nombre réel

3- On suppose que : $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

a- Trouver une relation entre P_n et P_{n+3}

b- En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

++++++++++++++++++++++++Exercice 79:++++++++++++++++++++++++++

1- Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant : $\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 \\ -z_1 + iz_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

2- Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

3- Calculer $(z_1 \times z_2)^{2000}$. On écrira le résultat final sous la forme algébrique

++++++++++++++++++++++++Exercice 80:++++++++++++++++++++++++++

1- Développer $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

2- Résoudre dans C l'équation : $z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + \sqrt{2} = 0$

3- Résoudre dans C les équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ $puis$ $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

4- Soit P(z) le polynôme de variable z défini par :

$$P(z) = z^4 - \left(1+\sqrt{2}\right)z^3 + \left(2+\sqrt{2}\right)z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + 1$$

Vérifier que pour tout z non nul, on a $\frac{P(z)}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$

En déduire les solutions de l'équation P(z)=0

++

LE DEFI

++++++++++++++++++++++++Exercice 81:++++++++++++++++++++++++++

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soient U, V et W les milieux respectifs des segments $[A'B], [B'C]$ et $[C'A]$

Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral

++++++++++++++++++++++++Exercice 82 :++++++++++++++++++++++++++

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ unité graphique : 5cm , on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 1+i\ \ et\ \ Z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$

On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de $Z_A\ et\ celle\ de\ Z_B$.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un pont de C d'affixe $e^{i\alpha}$; $\alpha \in [0;2\pi[$.

On considère l'application f à tout point M de C associe $f(M) = MA \times MB$.

a) Montrer pour tout α$\in R$, l'inégalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$

b) Montrer l'inégalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c) En déduire l'égalité : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$.

3)a)En utilisant 2)c), Montrer qu'il existe deux points M de C, dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b) En utilisant 2)c), Montrer qu'il existe un seul point M de C, dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

++++++++++++++++++++++++Exercice 83 :++++++++++++++++++++++++++

1- Soit z_1 le nombre complexe définie par : $z_1 = 2^{i\frac{\pi}{6}}$

Ecrire z_1 sous la forme algébrique

Placer le point A image de z_1 dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ d'unité graphique 2cm

Soit $z_2 = {z_1}^2$. Ecrire z_2 sous la forme algébrique

Placer le point B image de z_2

2- Soit f l'application de C dans C qui à tout nombre z on fait correspondre le nombre complexe f(z) définie par : $f(z) = z + \left(-\sqrt{3}-2\right) + \left(1-2\sqrt{3}\right)i$

a- Déterminer la nature de la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$

b- Calculer Z_1 et Z_2 définis par : $Z_1 = f(z_1)$ et $Z_2 = f(z_2)$. On note A' et B' les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2. Placer A' et B' sur la figure

Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ?

3- Quelle est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$?

++++++++++++++++++++++++Exercice 84 :++++++++++++++++++++++++++

I- Soit P le polynôme défini par

$$\mathrm{P(Z)} = \mathrm{Z}^3 - \left(3+\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\mathrm{Z}^2 + \left(2\sqrt{2}-1+4\mathrm{i}\right)\mathrm{Z} + 3 + 3\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{2}+4\right)$$

1- Calculer $P\left(1+\sqrt{2}\right)$

2- Déterminer les réels a et b tels que : $P(Z) = \left(Z-1-\sqrt{2}\right)(Z^2+aZ+b)$

3- a- Calculer $\left(4+2i\sqrt{2}\right)^2$

b- Résoudre dans C l'équation : P(Z)=0 où a ; $b\ et\ c$ sont des solutions avec : $a = 1+\sqrt{2}$; $Re(b) < Re(c)$

II- On considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$Z_0 = a \quad ; \qquad Z_1 = \frac{2a+3b+c}{2} et Z_2 = \frac{c-2a-b}{2}$$

a- Déterminer le module et un argument de $Z_1 + 1$

b- Déterminer le module et un argument de $Z_1 - 3$

c- Calculer $\frac{Z_1+1}{Z_1-3}$ puis montrer que : $Z_1 = \frac{3i\cot an\frac{\pi}{8}-1}{i\cot an\frac{\pi}{8}+1}$

d- Calculer le rapport $\frac{Z_0-Z_1}{Z_2-Z_1}$. En déduire la nature du triangle ABC

++++++++++++++++++++++++Exercice 85 :+++++++++++++++++++++++++

On donne sur le corps complexe l'équation : $Z^2 - 2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)Z - 1 = 0, \quad (1)$

Z est l'inconnue, θ est un paramètre réel vérifiant la double relation $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

1) Déterminer les valeurs du paramètre θ pour les quelles l'équation (1) a ses coefficients réels.
   Pour chacune de ces valeurs, résoudre l'équation
2) Déterminer les valeurs du paramètre θ pour les quelles l'équation (1) a une double solution.

Pour chacune de ces valeurs, résoudre l'équation

3) Dans le cas général, on appelle Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (1), pour une valeur donnée du paramètre θ. On pose $\begin{cases} u_1 = (Z_1+1)(\cos\theta - i\sin\theta) \\ u_2 = (Z_2+1)(\cos\theta - isn\theta) \end{cases}$;
   Calculer $u_1 + u_2 \quad et \quad u_1u_2$
4) D'après les résultats de 3) $u_1 \quad et \quad u_2$ sont solutions de l'équation :
   $u^2 - 4cos\theta u + 2 = 0$ (2)

Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles$u_1 \quad et \quad u_2 \; sont \; réels$, puis les valeurs de θ pour lesquelles u_1 et u_2 ne sont pas réels

5) a) Quand $u_1 \quad et \quad u_2$ sont réels, montrer que les nombres complexes Z_1 +1 et Z_2 +1 ont même argument, que l'on déterminera

Indiquer alors une propriété de figure formée, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'axes X'OX et Y'OY ; par les points A, M_1, M_2 d'affixes respectives -1, Z_1 et Z_2

b) Quand $u_1 \quad et \quad u_2$ ne sont pas réels, montrer que les nombres complexes Z_1 +1 et Z_2 +1 ont même module, que l'on déterminera

Indiquer alors une propriété de figure formée, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'axes X'OX et Y'OY ; par les points A, M_1, M_2 d'affixes respectives -1, Z_1 et Z_2

++++++++++++++++++++++++Exercice 86:++++++++++++++++++++++++++

Soit Z le nombre complexe définie par : $Z= \frac{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}}}{2}$

1) Calculer Z^2, Z^4 et Z^8. Déterminer le module et un argument de Z^8.

En déduire le module et un argument Z.

2) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{48} = \frac{\sqrt{8+\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{48} = \frac{\sqrt{8-\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}{4}$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{\sqrt{8+\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{8-\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}}{4}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 87:++++++++++++++++++++++++++

Soit sur C l'équation définie par :

$$Z^4\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2}\right)-4Z^2\cos\theta+4iZ\sin2\theta+8\sin^2\theta=0 \text{ où } \theta \text{ est un réel fixé}$$

1) Démontrer que cette équation a une solution de la forme $\lambda(1+i)$ et une autre de la forme $\lambda(-1+i),\lambda$ étant un nombre réel que l'on déterminera

En déduire les solutions de l'équation

2) Quels sont dans le plan complexe, lorsque θ varie, les ensembles respectifs des images des quatre solutions ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 88:++++++++++++++++++++++++++

Si l'on permute les deux aiguilles d'une montre, on obtient en général une position impossible sur une montre normale. Par exemple, la configuration (2) obtenue en effectuant cette permutation à 4heures ne s'observe jamais. Combien de fois par jours cette permutation conduit-elle à une configuration observable sur une montre normale ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 89:++++++++++++++++++++++++++

Soit le nombre complexe Z défini par : $Z=8a^2-(1+a^2)^2+4a(1-a^2)i\,;a\in R$

1) Calculer le module de Z ; si α est un argument de Z, calculer cosα, sinα, $\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$, cosαsinα , en fonction de réel a
2) Démontrer que : $cos\frac{\alpha}{4}=\frac{a+1}{\sqrt{2(1+a)^2}}$ $et\ sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1-a}{\sqrt{2(1+a)^2}}$
3) En déduire les racines quatrièmes du nombre Z.

++++++++++++++++++++++++Exercice 90:++++++++++++++++++++++++++

1- Trouver les racines cubiques de 11+2i.

2- Déterminer les racines quatrième de -7-24i .

++++++++++++++++++++++++Exercice 91:++++++++++++++++++++++++++

1- a- Soit $(r_n)_{n\in N}$, la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n

b- Soit $(\theta_n)_{n\in N}$, la suite géométrique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et de raison $2\frac{\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n

c- Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$. Sachant que $z_0;\ z_1\ et\ z_2$ sont liés par la relation $z_0z_1z_2=8$. Déterminer le module et un argument de $z_0;\ z_1\ et\ z_2$

2- Dans le plan P muni d'un repère orthonormal direct (O ; I ; J) (unité graphique : 4cm) On rappelle M_n le point d'affixe z_n

a- Placer les points $M_0;\ M_1\ M_2\ et\ M_3$ dans le plan P b- Pour tout entier naturel n, calculer $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ en fonction de n

c- On pose $l_n = \|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$

Calculer l_n en fonction de n et déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++Exercice 92:+++++++++++++++++++++++++++

Etablir l'identité suivante : $|z+z'|^2 + |z-z'| = 2(|z|^2 + |z'|^2)$; $(z \in C; z' \in C)$ et en déduire une interprétation géométrique

++++++++++++++++++++++++Exercice 93:+++++++++++++++++++++++++++

Soit ϵ une racine n-ième de l'unité ; calculer : $A = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}$

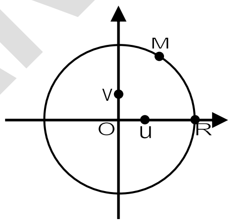
++++++++++++++++++++++++Exercice 94:+++++++++++++++++++++++++++

Soit OAB et ODC deux triangles rectangles isocèles en O, de sens direct. Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OBD est la hauteur issue de O dans le triangle

++++++++++++++++++++++++Exercice 95:+++++++++++++++++++++++++++

Partie A : On appelle C l'ensemble des nombres complexes

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O ; U ; V) on a placé un point M d'affixe Z appartenant à C, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe (O ; U)



1- Exprimer l'affixe du point R en fonction de z

2- Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$

Représenter la figure sur la copie et construire le point M'

Partie B :

On définie la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à C et pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0

1- Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2- Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3- On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel

a- Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b- Démontrer cette conjecture puis conclure.

BONNE CHANCE A TOUS

++

BARYCENTRE

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définitions et propriétés :

● Soit $(A_i;\ \alpha_i)$; $1 \leq i \leq n$ un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $G = \text{bar}\begin{matrix} A_i \\ \alpha_i \end{matrix}\ 1 \leq i \leq n$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

NB : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors le barycentre n'existe pas

● Si $\alpha_1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \end{cases}$

Donc G est appelé isobarycentre du système de points pondérés $(A_i;\ \alpha_i)$; $1 \leq i \leq n$

Affixe et coordonnées de barycentre :

Dans le plan du repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ on considère le point $G = \text{bar}\begin{matrix} A_i \\ \alpha_i \end{matrix}\ 1 \leq i \leq n$

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

● **L'affixe du barycentre G :**

Si Z_1 ; Z_2 ; Z_3; $\cdots$; Z_n sont les affixes des points A_1 ; A_2 ; A_3; $\cdots$; A_n alors l'affixe du barycentre G est $\boldsymbol{Z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$

● **Les coordonnées du barycentre G :** On considère les points $A_1(x_1; y_1)$; $A_2(x_2; y_2)$; $A_3(x_3; y_3)$; $\cdots$; $A_n(x_n;\ y_n)$ et $G = bar\begin{matrix} A_i \\ \alpha_i \end{matrix}\ 1 \leq i \leq n$

G a pour coordonnées $\begin{cases} \mathbf{x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}} \\ \mathbf{y_G = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}} \end{cases}$

Réduction de la somme $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$:

● Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors on introduit le point $G = \text{bar}\begin{matrix} A_i \\ \alpha_i \end{matrix}\ 1 \leq i \leq n$ et on a :

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \quad \text{mais} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \text{ alors } \mathbf{f(M)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{MG}}$$

● Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors on introduit le point O et on a :

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \quad \text{mais} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO} = \vec{0} \text{ alors } \mathbf{f(M)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{OA_i}}$$

Alignement, Parallélisme et concours de droites :

●**Alignement :** On considère les points A, B et C. On dit que A, B et C sont alignés si et seulement si l'un des points est barycentre des deux autres $A = bar\begin{matrix} B & C \\ b & c \end{matrix}$

●**Parallélisme** : On considère deux droites (AB) et (CD). Pour montrer que (AB) et (CD) sont parallèles on doit prouver que les deux droites sont colinéaires : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

●**Concours des droites** : On considère les droites (AB), (CD) et (EF). Pour montrer que ces droites sont concourantes, on doit prouver que ces droites ont un point commun G et que

$$G \in (AB)\,; G \in (CD)\ et\ \ G \in (EF)$$

Lignes de niveau :

a) Lignes de niveau $M \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i{}^2$

Soit $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i{}^2$, on considère $G = bar \begin{matrix} A_i \\ \alpha_i \end{matrix}\ 1 \le i \le n$

●Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors G existe puis on introduit le point G :

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + GA_i{}^2) \Longrightarrow$$

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, GA_i^2\ \ mais\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}\ \ alors\, f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$$

$$d'où\ \ f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + f(G)\ avec\ f(G) = \begin{cases} f(G) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i{}^2 \\ f(G) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j A_iA_j{}^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \end{cases}$$

Détermination de la ligne de niveau :On considère $\mathrm{E_M} = \{\forall \mathrm{M} \in \mathcal{P}\colon \mathrm{on\ a\ f(M) = k\ avec\ \ k \in R}\}$

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + f(G) = k \Longrightarrow MG = \sqrt{\frac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}} = \sqrt{\eta}$$

* Si $\eta < 0$ alors $E_M = \{\emptyset\}$
* Si $\eta = 0$ alors $E_M = \{G\}$
* Si $\eta > 0$ alors E_M est un cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\eta}$

●Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors G n'existe pas alors on introduit le point I :

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_i} + IA_i{}^2) \Longrightarrow$$

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MI^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, IA_i^2\ \ mais\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MI^2 = 0\ \ alors$$

$$f(M) = \overrightarrow{MI}\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{IA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, IA_i^2\ \ mais\ f(I) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i IA_i^2\ \ et\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{IA_i}\ alors$$

$$\boldsymbol{f(M) = \overrightarrow{MI}.\vec{u} + f(I)}$$

Détermination de la ligne de niveau : On considère $E_M = \{\forall M \in \mathcal{P}\colon on\ a\ f(M) = k\ \ avec\ \ k \in R\}$

$$f(M) = \overrightarrow{MI}.\vec{u} + f(I) = k \Longrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u} = f(I) - k$$

* Si $f(I) - k \neq 0$, soit H le projeté orthogonal de m sur la droite (u) ; on a :

$\overrightarrow{IH}.\vec{u} = f(I) - k \Longrightarrow \overline{IH}.\overline{u} = f(I) - k \Longrightarrow \overline{IH} = \frac{f(I)-k}{\overline{u}} = \frac{(f(I)-k)\overline{u}}{\overline{u}^2}$ alors E_M est une droite passant par H et perpendiculaire à (u)

* Si $f(I) - k = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u} = 0$ alors E_M est la droite passant par I et perpendiculaire à (u)

b) Lignes de niveau $M \to \frac{MA}{MB}$

On considère $E_M = \left\{\forall M \in \mathcal{P}\colon on\ a\ \frac{MA}{MB} = k\ \ avec\ \ k \in R\right\}$

● Si $k = 1$ alors E_M est la médiatrice du segment $[AB]$

● Si $k \neq 1$ alors on a $\frac{MA}{MB} = k \Longrightarrow MA = kMB \Longrightarrow MA^2 = (kMB)^2 \Longrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Longrightarrow$

$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$ on pose $I = \text{bar}\begin{matrix} A & B \\ 1 & k \end{matrix}$ et $J = \text{bar}\begin{matrix} A & B \\ 1 & -k \end{matrix}$ inserons I et J on a:

$(1+k)\overrightarrow{MI}.(1-k)\overrightarrow{MI} = 0 \Longrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 1-k^2 \neq 0 \\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \end{cases}$ d'où E_M est un cercle de diamètre $[IJ]$

c) Lignes de niveau $M \to \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

On considère $E_M = \{\forall M \in \mathcal{P}: on\ a\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k\ \ avec\ \ k \in R\}$

Soit $= \frac{[AB]}{2}$, introduisons le point I, on a : $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Longrightarrow$

$$MI^2 - IA^2 = k \Longrightarrow MI = \sqrt{k + IA^2} = \sqrt{\eta}$$

* Si $\eta < 0$ alors $E_M = \{\emptyset\}$
* Si $\eta = 0$ alors $E_M = \{I\}$
* Si $\eta > 0$ alors E_M est un cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{\eta}$

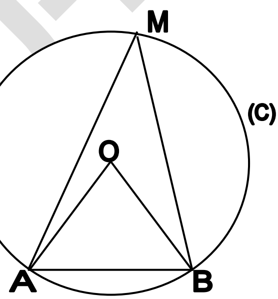
d) Lignes de niveau $M \to Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}\right)$

On considère $E_M = \left\{\forall M \in \mathcal{P}: on\ a\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}\right) = k\ \ avec\ \ k \in R\right\}$

●Si $k = 0 \Longrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}\right) = 0$ alors E_M est la droite (AB) privée du segment $[AB]$

●Si $k = \pi \Longrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}\right) = \pi$ alors E_M est le segment $[AB]$ privé des points A et B

●Si $k = \alpha\ avec\ \alpha \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[\Longrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$ alors E_M est l'un des deux arcs, privés des points A et B définis sur le cercle (C) par la corde $[AB]$



EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Soit ABCD un tétraèdre, P, Q, R et S sont les points tels que :
$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ $et\ \overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]\ et\ \ [BD]$

Démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

Démontrons que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow P=\text{bar}\begin{array}{cc}A & B\\ 2 & 1\end{array}, \qquad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow Q=\text{bar}\begin{array}{cc}A & D\\ 2 & 1\end{array}, \qquad I=\text{bar}\begin{array}{cc}A & C\\ 1 & 1\end{array}=\text{bar}\begin{array}{cc}A & C\\ 2 & 2\end{array}$$

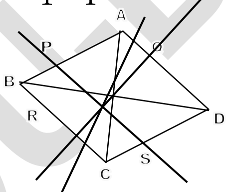
$$\overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\Rightarrow R=\text{bar}\begin{array}{cc}C & B\\ 2 & 1\end{array} \qquad \overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\Rightarrow S=\text{bar}\begin{array}{cc}C & D\\ 2 & 1\end{array} \qquad J=\text{bar}\begin{array}{cc}B & D\\ 1 & 1\end{array}$$

D'où le point $G=\text{bar}\begin{array}{cccc}A & B & C & D\\ 2 & 1 & 2 & 1\end{array}$

●De $P=\text{bar}\begin{array}{cc}A & B\\ 2 & 1\end{array}$ et $S=\text{bar}\begin{array}{cc}C & D\\ 2 & 1\end{array}$ on a $G=\text{bar}\begin{array}{cc}P & S\\ 3 & 3\end{array}$ alors $G\in(PS)$

●De $Q=\text{bar}\begin{array}{cc}A & D\\ 2 & 1\end{array}$ et $R=\text{bar}\begin{array}{cc}C & B\\ 2 & 1\end{array}$ on a $G=\text{bar}\begin{array}{cc}Q & R\\ 3 & 3\end{array}$ alors $G\in(QR)$

●De $I=\text{bar}\begin{array}{cc}A & C\\ 2 & 2\end{array}$ et $J=\text{bar}\begin{array}{cc}B & D\\ 1 & 1\end{array}$ on a $G=\text{bar}\begin{array}{cc}I & J\\ 3 & 3\end{array}$ alors $G\in(BD)$



+++

EXERCICE 2:

Soit ABC un triangle

1) Déterminer et construire le point G des points pondérés (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 1)
2) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

a) Vérifier que B appartient à (Γ)

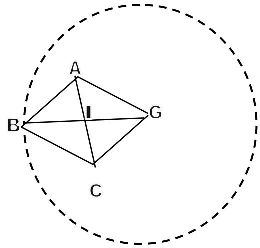
b) Déterminer et construire (Γ)

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle

1) Déterminons et construisons le point G des points pondérés (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 1)

Comme $1-1+1=1\neq 0$ alors G existe et on a : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ introduisons le point A :
$\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$



2) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

a- Vérifions que B appartient à (Γ)

On pose M=B, on a : $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$ ***cqfv***

b- Déterminons et construire (Γ)

On pose $\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\\ \vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\end{cases}$ introduisons le point G dans $\vec{u}$ *et* $I=\frac{[AC]}{2}$ *dans* $\vec{v}$

$\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{MG}\\ \vec{v}=\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\end{cases} \Rightarrow \quad \vec{v}=-2\overrightarrow{IA} \Rightarrow \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{IB}\right\| \Rightarrow \boldsymbol{MG=2IB}$

D'où l'ensemble des points (Γ) est un cercle de centre G et de centre $R=2IB$

++

EXERCICE 3:

Soit ABCD un carré

1) Ecrire A comme barycentre de B, C et D
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}^2=0$$

+++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit ABCD un carré

1) Ecrivons A comme barycentre de B, C et D

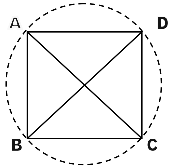
On sait que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ *mais* $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ *alors* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Rightarrow A=bar\begin{matrix}B & C & D\\ 1 & -1 & 1\end{matrix}$$

2) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}^2=0 \Rightarrow \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$ introduisons le point A:

$\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MA}\right)=0 \Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ alors l'ensemble des points M est un cercle de diamètre $[AC]$



++

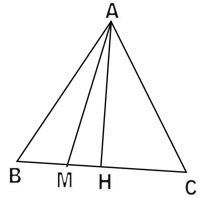
EXERCICE 4:

Soit ABC un triangle et M un point de $[BC]$

Démontrer que M est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{B,aire(CAM)})$ et $(\mathrm{C\,,aire\,(BAM)})$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Démontrons que $\mathbf{M = bar}\begin{matrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{aire(CAM)} & \mathbf{aire(BAM)}\end{matrix}$



●Dans le triangle ABM ; $\mathrm{aire(BAM)} = \frac{\mathrm{AH \times BM}}{2} \Longrightarrow \mathrm{AH} = \frac{\mathrm{2aire(BAM)}}{\mathrm{BM}}$

●Dans le triangle AMC ; $\mathrm{aire(CAM)} = \frac{\mathrm{AH \times MC}}{2} \Longrightarrow \mathrm{AH} = \frac{\mathrm{2aire(CAM)}}{\mathrm{MC}}$

On pose $AH = AH\ on\ a :\ \frac{\mathrm{2aire(BAM)}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{2aire(CAM)}}{\mathrm{MC}} \Longrightarrow$

$\mathrm{aire(BAM)MC} = \mathrm{aire(CAM)BM} \Longrightarrow \mathrm{aire(BAM)}\overrightarrow{\mathrm{MC}} = -\,\mathrm{aire(CAM)}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

$\mathrm{aire(BAM)}\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \mathrm{aire(CAM)}\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0}$

D'où $\mathbf{M = bar}\begin{matrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{aire(CAM)} & \mathbf{aire(BAM)}\end{matrix}$ **cqfd**

++

EXERCICE 5:

ABC est un triangle rectangle en A tels que : AB=4cm et AC=6cm

1) Déterminer et construire le point G=bar$\begin{matrix}A & B & C\\ 5 & -3 & 2\end{matrix}$
2) Calculer GA², GB² et GC²
3) Soit f(M)=5MA²-3MB²+2MC²
   a) Démontrer que f(M)=4MG²-48
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : f(M)=24

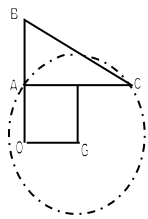
++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

ABC est un triangle rectangle en A tels que : AB=4cm et AC=6cm

4) **Déterminons et construisons le point G=bar**$\begin{matrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{matrix}$

Comme $5 - 3 + 2 = 4 \neq 0$ alors G existe, ona : $5\overrightarrow{\mathrm{GA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{GB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$ introduisons le point A ; $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ *alors on a* : $\overrightarrow{\mathbf{AG}} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

5) **Calculons GA², GB² et GC²**



●$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow AG^2 = \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Longrightarrow$

$\mathrm{AG}^2 = \frac{9}{16}\mathrm{AB}^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{4}\mathrm{AC}^2 = \frac{9}{16}4^2 + \frac{1}{4}6^2 \Longrightarrow$

$\mathrm{AG}^2 = 9 + 9 = 18 \Longrightarrow \mathbf{AG^2 = 18}$

●Dans le triangle OBG ; d'après la propriété de Pythagore, on a :

$BG^2 = OA^2 + OG^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58 \Longrightarrow \boldsymbol{BG^2 = 58}$

●On constate que $GA = GC\ alors\ GA^2 = GC^2 \Longrightarrow \boldsymbol{GC^2 = 18}$

6) Soit $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$
   c) **Démontrons que** $\boldsymbol{f(M) = 4MG^2 - 48}$

$\mathrm{f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2}$; introduisons le point G ; $\mathrm{f(M) = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + f(G)} \Longrightarrow$

$$\mathrm{f(M) = 4MG^2 + f(G)\ mais\ f(G)}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{\alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 = 5GA^2 - 3GB^2 + 2GC^2} \\ \dfrac{\mathrm{\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma AC^2}}{\alpha + \beta + \gamma} = \dfrac{\mathrm{-15AB^2 - 6BC^2 + 10AC^2}}{4} \end{cases}$$

$$f(G)=\begin{cases}5GA^2-3GB^2+2GC^2=5(18)-3(58)+2(18)=-48\\ \dfrac{-15AB^2-6BC^2+10AC^2}{4}=\dfrac{-15\times4^2-6\times(4^2+6^2)^2+10\times6^2}{4}=-48\end{cases}$$ alors $\boldsymbol{f(M)=4MG^2-48}$

d) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{f(M)=24}$

$$f(M)=24\Longrightarrow 4MG^2-48=24\Longrightarrow 4MG^2=72\Longrightarrow MG^2=18=AG^2\Longrightarrow \boldsymbol{MG=AG}$$

L'ensemble des points M du plan est un cercle de centre G et de rayon $\boldsymbol{R=AG}$

++

EXERCICE 6:

ABC est un triangle rectangle en A tels que BC=$2a$ $avec$ $a>0$

1) Déterminer et construire G=bar$\begin{matrix}A & B & C\\ 4 & -1 & -1\end{matrix}$
2) Soit $f(M)=4MA^2-MB^2-MC^2$ (1)
   a) Montrer que $f(M)=2MG^2+f(G)$ (2)
   b) On pose $S=4f(A)-f(B)-f(C)$
      En calculer S dans (1) et (2), déterminer f(G) en fonction de a
   c) Discuter suivant les valeurs de k l'ensemble des points M du plan tels que : $4MA^2-MB^2-MC^2=k$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

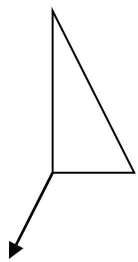
1- Déterminons et construisons G=bar$\boldsymbol{\begin{matrix}A & B & C\\ 4 & -1 & -1\end{matrix}}$

Comme $4-1-1=2\neq0$ alors G existe on a : $4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ introduisons le point A

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}\ \ alors\ on\ a:\ \overrightarrow{\mathbf{AG}}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

2- Soit $\boldsymbol{f(M)=4MA^2-MB^2-MC^2}$ (1)

a- Montrons que $\boldsymbol{f(M)=2MG^2+f(G)}$ (2)



$f(M)=4MA^2-MB^2-MC^2$; introduisons le point G ;

$f(M)=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+f(G)\Longrightarrow \boldsymbol{f(M)=2MG^2+f(G)}$

b- On pose $\mathbf{S=4f(A)-f(B)-f(C)}$

En calculant S dans (1) et (2), déterminons f(G) en fonction de a

●Dans (1) on a ; $\mathbf{f(M)=4MA^2-MB^2-MC^2}$

$*\ \mathrm{M=A}$, on a $\mathrm{f(A)=-AB^2-AC^2=-(AB^2+AC^2)=-BC^2}$

$*\ \mathrm{M=B}$, on a $\mathrm{f(B)=4AB^2-BC^2}$

$*\ \mathrm{M=C}$, on a $\mathrm{f(C)=4AC^2-BC^2}$

$$\mathrm{S=4(-BC^2)-(4AB^2-BC^2)-(4AC^2-BC^2)=-4BC^2-4AB^2+BC^2-4AC^2+BC^2}$$

$$\mathrm{S=-6BC^2=-6(2a)^2=-6(4a^2)=-24a^2\Longrightarrow S=-24a^2}$$

●Dans (2) on a ; $\mathbf{f(M)=2MG^2+f(G)}$

$*\ \mathrm{M=A}$, on a $\mathrm{f(A)=2GA^2+f(G)}$

$*\ \mathrm{M=B}$, on a $\mathrm{f(B)=2GB^2+f(G)}$

$*\ \mathrm{M=C}$, on a $\mathrm{f(C)=2GC^2+f(G)}$

$$\mathrm{S=4\big(2GA^2+f(G)\big)-\big(2GB^2+f(G)\big)-\big(2GC^2+f(G)\big)=8GA^2-2GB^2-2GC^2+2f(G)}$$

$$\mathrm{S=4f(G)\Longrightarrow on\ pose\ S=S\ \Longrightarrow 4f(G)=-24a^2\Longrightarrow \mathbf{f(G)=-6a^2}}$$

c- **Discutons suivant les valeurs de k l'ensemble des points M du plan tels que :** $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = k \Rightarrow 2MG^2 + f(G) = k \Rightarrow MG = \sqrt{\frac{k+6a^2}{2}}$

* Si $\frac{k+6a^2}{2} < 0 \Rightarrow \mathbf{k} < -6\mathbf{a^2}$ alors $E_M = \{\emptyset\}$

* Si $\frac{k+6a^2}{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} = -\mathbf{6a^2}$ alors $E_M = \{G\}$

* Si $\frac{k+6a^2}{2} > 0 \Rightarrow \mathbf{k} > -6\mathbf{a^2}$ alors E_M est un cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\frac{k+6a^2}{2}}$

++

EXERCICE 7:

Soit le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

On désigne les points A(1 ;6) ; B(2 ;6) et C(4 ;2)

1) Déterminer le barycentre G_α des points A, B et C affectés respectivement des coefficients α ; α+2 et 4-α avec α Є R
2) Déterminer l'ensemble des points G_α quand α décrit R
3) Choisir α pour que G_α soit le point D(2 ;4)
4) On prend α=7. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25$$

+++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

On désigne les points A(1 ;6) ; B(2 ;6) et C(4 ;2)

1) **Déterminons le barycentre $G_\alpha = \mathrm{bar}\{(A,\alpha),(B,\alpha+2),(C,4-\alpha)\}$ α Є R**

Comme $\alpha + \alpha + 2 + 4 - \alpha = \alpha + 6 \neq 0$ alors G_α existe

$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = \dfrac{\alpha \times 1 + (\alpha+2) \times 2 + (4-\alpha) \times 4}{\alpha+6} = \dfrac{20-\alpha}{\alpha+6} \\ y_{G_\alpha} = \dfrac{\alpha \times 6 + (\alpha+2) \times 6 + (4-\alpha) \times 2}{\alpha+6} = \dfrac{20+10\alpha}{\alpha+6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G_\alpha\left(\dfrac{20-\alpha}{\alpha+6};\dfrac{20+10\alpha}{\alpha+6}\right)}$$

2) **Déterminons l'ensemble des points G_α quand α décrit R**

Soit $M(x\,,y)$ un point du plan tel que : $M = G_\alpha$ alors on a : $\begin{cases} x = x_G \\ y = y_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20-\alpha}{\alpha+6} \\ y = \frac{20+10\alpha}{\alpha+6} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(\alpha+6) = 20-\alpha \\ y(\alpha+6) = 20+10\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x+1) = 20-6x \\ \alpha(y-10) = 20-6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{20-6x}{x+1} \\ \alpha = \dfrac{20-6y}{y-10} \end{cases}$$

On pose $\alpha = \alpha \quad on\ a : \frac{20-6x}{x+1} = \frac{20-6y}{y-10} \Rightarrow (20-6x)(y-10) = (20-6y)(x+1) \Rightarrow$

$20y - 200 + 60x = 20x + 20 - 6y \Rightarrow 40x + 26y - 220 = 0 \Rightarrow \boxed{20x + 13y - 110 = 0}$

D'où l'ensemble des points M du plan est la droite d'équation : $20x + 13y - 110 = 0$

3) **Choisissons α pour que G_α soit le point D(2; 4)**

Pour cela on pose $D(2;4) = G_\alpha\left(\frac{20-\alpha}{\alpha+6};\frac{20+10\alpha}{\alpha+6}\right)$alors $\begin{cases} 2 = \frac{20-\alpha}{\alpha+6} \\ 4 = \frac{20+10\alpha}{\alpha+6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{8}{3} \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{3} \neq \frac{2}{3}$

alors on ne peut pas choisir α pour que G_α soit le point D(2; 4) ; en effet $G_\alpha \neq D$

4) **On prend α=7. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant :**

$$\mathbf{MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25}$$

Comme α=7, vérifions si $G_\alpha = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\alpha+2),(C,4-\alpha)\}$ vérifie la relation scalaire de Leibniz donnée ; on a :$7MA^2 + (7+2)MB^2 + (4-7)MC^2 = 25 \Longrightarrow$
$7MA^2 + 9MB^2 - 3MC^2 = 25$, comme cette relation ne vérifie pour α=7 alors l'ensemble des points M du plan n'existe pas

++

EXERCICE 8:

ABCD est un rectangle du plan, de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de longueur a $(a > 0)$

1) Soit m un nombre réel non nul. On note G_m barycentre de$(A; m), (B, -1)$et$(C, 1)$

a) Préciser la position de G_1

b) Déterminer l'ensemble (E_1)des G_m lorsque m décrit R*

2) Quel est l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a$?

3) Quel est l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :$MA^2 - MB + MC^2 = \frac{a^2}{4}$?

4) Faire une figure ou l'on présentera le rectangle ABCD et les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3).

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

ABCD est un rectangle du plan, de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de longueur a $(a > 0)$

1) Soit m un nombre réel non nul. On note G_m barycentre de$(A; m), (B, -1)$et$(C, 1)$

a) Précisons la position de G_1

$$G_1 = \text{bar}\begin{matrix} A & B & C \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \text{ alors } \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}, \text{introduisons le point A; ona:}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{BC}}$$

D'où le point G_1 est confondu avec le point D

b) Déterminons l'ensemble (E_1) des G_m lorsque m décrit R*

$$G_m = \text{bar}\begin{matrix} A & B & C \\ m & -1 & 1 \end{matrix} \text{ alors } m\overrightarrow{G_mA} - \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}, \text{introduisons le point A; ona:}$$

$$\overrightarrow{AG_m} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{m}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{BC}}$$

(E_1) est une droite passant par le point A et parallèle à la droite (BC)

2) Déterminons l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a$

Introduisons le point G_1 on a $\|\overrightarrow{MG_1}\| = a \Longrightarrow \mathbf{MG_1 = a}$

(E_2) est un cercle de centre G_1 et de rayon $R = a$

3)Déterminons l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :$MA^2 - MB + MC^2 = \frac{a^2}{4}$

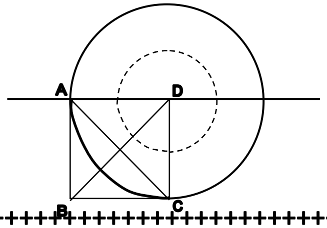
Introduisons le point G_1 on a $(\alpha + \beta + \gamma)MG_1{}^2 + f(G_1) = k \Longrightarrow MG_1^2 + f(G_1) = \frac{a^2}{4}$

$$\text{mais } f(G_1) = \frac{-AB^2 + AC^2 - BC^2}{1 - 1 + 1} = -AB^2 + AC^2 - BC^2 = -a^2 + 2a^2 - a^2 = 0 \text{ alors } (MG_1)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{MG_1 = \frac{a}{2}}$$

(E_3) est un cercle de centre G_1 et de rayon $R = \frac{a}{2}$

3) Faisons une figure ou l'on présentera le rectangle ABCD et les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3).



++

EXERCICE 9:

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les points $A(3;1)$ *et* $B(0;2)$

Soit a un nombre réel strictement positif ; trouver les coordonnées du point M tel que :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{3}{ln\,a}\vec{\imath}+3a\,ln\frac{1}{a}\vec{\jmath}$$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Déterminons les coordonnées de M : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{3}{\ln a}\vec{\imath}+3a\ln\frac{1}{a}\vec{\jmath}$ avec

$M(x;y)$; $A(3;1)$ et $B(0;2)$

$$2Z_A-2Z_M+Z_B-Z_M=\frac{3}{\ln a}+3ia\ln\frac{1}{a}\Longrightarrow -3Z_M=\frac{3}{\ln a}+3ia\ln\frac{1}{a}-2(3+i)-2i\Longrightarrow$$

$$-3Z_M=-6+\frac{3}{\ln a}+3ia\ln\frac{1}{a}-4i\Longrightarrow Z_M=2-\frac{1}{\ln a}+i\left(\frac{4}{3}-a\ln\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{M\left(2-\frac{1}{\ln a};\ \frac{4}{3}-a\ln\frac{1}{a}\right)}$$

++

EXERCICE 10:

ABCD un losange de centre O avec OB=2.OA

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2+MC^2-2MD^2=-6.OA^2$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

ABCD est un losange de centre O avec OB=2.OA

1) **Déterminons l'ensemble des points M tels que :**

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$$

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ *et* $\vec{v}=2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ Réduisons $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$:

•$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$, Puis que (1+1-2=0) alors introduisons le point O milieu du segment $[AC]$ $\vec{u}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DO}\Longrightarrow\vec{u}=2\overrightarrow{DO}$

•$\vec{v}=2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, Puis que (2-1+1= $2\neq 0$) alors introduisons le barycentre $G=bar\begin{matrix}B & C & D\\ 2 & -1 & 1\end{matrix}$ $\vec{v}=2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{MG}\Longrightarrow\vec{v}=2\overrightarrow{MG}$

D'où $\vec{u}.\vec{v}=0\Longrightarrow 2\overrightarrow{DO}.2\overrightarrow{MG}=0\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{MG}=0}$ alors $(DO)\perp(MG)$ ⟹l'ensemble des points M recherché est la droite (D) passant par G perpendiculaire à la droite (DO)

•G est tel que : $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ⟹ G est le milieu du segment [BA]

2) **Déterminons l'ensemble des points M tels que :**

$$MA^2+MC^2-2MD^2=-6.OA^2$$

Puis que (1+1-2=0) alors introduisons le point O milieu du segment $[AC]$

$$(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2-2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})^2=-6.OA^2 \Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD})+OA^2+OC^2-2OD^2=-6.OA^2 \text{ mais } \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$$

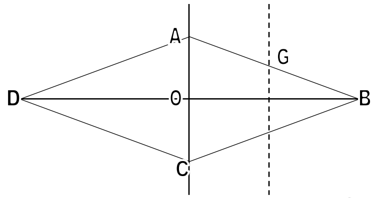
$$OA=OC \text{ et } OD=2OA \Rightarrow MA^2+MC^2-2MD^2=2\overrightarrow{MO}(-2\overrightarrow{OD})+2OA^2-8OA^2 \Rightarrow$$

$$MA^2+MC^2-2MD^2=-4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}-6.OA^2 \text{ alors on a: } -4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}-6.OA^2=-6.OA^2$$

$$\Rightarrow \boxed{-\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}=0}$$

$$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (OD)\perp(MO)$$

L'ensemble des points M du plan est la droite (D') perpendiculaire à (OD) passant par O.



++

EXERCICE 11:

Soit ABC un triangle

1) Construire I, J, K tels que :

$\mathrm{I}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1)\}$, $\mathrm{J}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{A},1);(\mathrm{B},2)\}$ et $\mathrm{K}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{C},1);(\mathrm{B},-4)\}$

2) Démontrer que :
   a) Le point B est le barycentre de $\{(C,1);(K,3)\}$
   b) Le point J est le barycentre de $\{(A,2);(C,1);(K,3)\}$
   c) Le milieu du segment $[IK]$ est le point J
3) Soit L et M les milieux respectifs de $[CI]$ *et* $[CK]$. Démontrer que $IJML$ est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de $\{A,B,C\}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle

1) Construisons I, J, K tels que :

$\mathrm{I}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1)\}$, $\mathrm{J}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{A},1);(\mathrm{B},2)\}$ et $\mathrm{K}=\mathrm{bar}\{(\mathrm{C},1);(\mathrm{B},-4)\}$

$$I=bar\{(A,2);(C,1)\} \Rightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$J=bar\{(A,1);(B,2)\} \Rightarrow \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$K=bar\{(C,1);(B,-4)\} \Rightarrow \overrightarrow{KC}-4\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CK}=\tfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$$

2) Démontrons que :

a) Le point B est le barycentre de $\{(\boldsymbol{C},\mathbf{1});(\boldsymbol{K},\mathbf{3})\}$

Revient à montrer que $\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BK}=\vec{0}$

•Comme $\overrightarrow{KC}-4\overrightarrow{KB}=\vec{0}$, alors introduisons le point B :

$\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}-4\overrightarrow{\mathrm{KB}}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{BC}}-3\overrightarrow{\mathrm{KB}}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{BC}}+3\overrightarrow{\mathrm{BK}}=\vec{0}}$ **cqfd**

b) Le point J est le barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{2});(\boldsymbol{C},\mathbf{1});(\boldsymbol{K},\mathbf{3})\}$

On sait que $J = bar\{(A,1);(B,2)\} \Longrightarrow \quad J = bar\{(A,2);(B,4)\}$ mais $B = \{(C,1);(K,3)\}$ alors d'après le théorème de barycentre partiel, on a : $\mathrm{J} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{B},4)\} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1);(\mathrm{K},3)\} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{J} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1);(\mathrm{K},3)\}}$ **cqfd**

c) Le milieu du segment $[IK]$ est le point J

Il s'agit de montrer que $J = bar\{(I,1);(K,1)\}$

On sait que : $J = bar\{(A,2);(C,1);(K,3)\}$et $I = bar\{(A,2);(C,1)\}$, alors d'après le théorème de barycentre partiel, on a :

$$\mathrm{J} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1);(\mathrm{K},3)\} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{I},3);(\mathrm{K},3)\} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{I},1);(\mathrm{K},1)\} \Longrightarrow$$
$$\boxed{J = bar\{(I,1);(K,1)\} \boldsymbol{cqfd}}$$

3) Soit L et M les milieux respectifs de $[CI]$ et $[CK]$.

Démontrons que $IJML$ est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de $\{A, B, C\}$

Cela revient à montrer que $[JL]$ et $[IM]$ ont le même milieu G et $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

•Posons G est le milieu du segment $[JL]$:

$G = bar\{(J,1);(L,1)\} = bar\{(J,6);(L,6)\}$, mais $J = bar\{(A,1);(B,2)\} = bar\{(A,2);(B,4)\}$ et

$L = bar\{(C,1);(I,1)\} = bar\{(C,3);(I,3)\}$, alors on a :

$$G = bar\{(J,6);(L,6)\} = bar\{(A,2);(B,4);(C,3);(I,3)\}$$

De plus $K = bar\{(A,2);(C,1)\}$, alors on a : $G = bar\{(A,2);(B,4);(C,3);(I,3)\} = bar\{(A,2);(B,4);(C,3);(A,2);(C,1)\} \Longrightarrow G = bar\{(A,4);(B,4);(C,4)\} \Longrightarrow$

$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ (1)

•Posons G' le milieu du segment $[IM]$:

$G' = bar\{(I,1);(M,1)\} = bar\{(I,6);(M,6)\}$, mais $I = bar\{(A,2);(C,1)\} = bar\{(A,4);(C,2)\}$ et $M = bar\{(C,1);(K,1)\} = bar\{(C,3);(K,3)\}$,

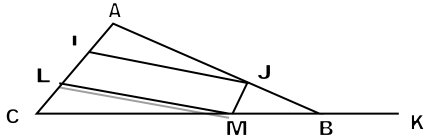
alors on a : $G' = bar\{(I,6);(M,6)\} = bar\{(A,4);(C,2);(C,3);(K,3)\}$

De plus $K = bar\{(C,-1);(B,4)\}$, alors on a : $G = bar\{(A,4);(B,2);(C,3);(I,3)\} = bar\{(A,4);(C,2);(C,3);(C,-1);(B,4)\} \Longrightarrow G = bar\{(A,4);(B,4);(C,4)\}$

$G' = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\boxed{G = G' = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}}$

D'où $IJML$ est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de $\{A, B, C\}$



++

EXERCICE 12:

On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés $[AB]$ et $[AD]$ ont pour longueurs respectives a et b

Pour tout réel non nul m, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A,m);(B,-1);(C,1)\}$$

Pour chacune des questions ci dessous on donnera une solution géométrique puis une solution analytique

1) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lors que m décrit R

2) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$$

+++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons l'ensemble (E_1) des points G_m lors que m décrit R

<u>Méthode géométrique :</u> $G_m=bar\{(A,m);(B,-1);(C,1)\}\Rightarrow$

$$\overrightarrow{AG_m}=-\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{m}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{m}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}}$$

D'où l'ensemble (E_1) est la droite passant par le point A parallèle à la droite (BC) , c'est-à-dire l'ensemble (E_1) est la droite (AD)

<u>Méthode analytique :</u> Considérons le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère sont respectivement : $A(0;0)$; $B(a;0)$; $C(a;b)$ et $D(0;b)$

Comme $\overrightarrow{AG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}$ alors on a :

$\begin{cases} x_{G_m}=\frac{0-a+a}{m}=0 \\ y_{G_m}=\frac{0+0+b}{m}=\frac{b}{m}\end{cases}\Rightarrow\boxed{G_m\left(0;\frac{b}{m}\right)}$ Ainsi l'ensemble (E_1) est la droite d'équation $x=0$

C'est-à-dire la droite (AD)

2) Déterminons l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\boldsymbol{\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

<u>Méthode géométrique :</u> $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

Introduisons le point G_1, on a :

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}-\overrightarrow{MG_1}-\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{MG_1}$

mais $G_1=A$ alors $\|\overrightarrow{MD}\|=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow\boxed{MD=\sqrt{a^2+b^2}}$ Alors l'ensemble (E_2) des points M du plan est le cercle de centre D et de rayon $r=\sqrt{a^2+b^2}$

<u>Méthode analytique :</u> Comme $MD=\sqrt{a^2+b^2}$, alors soit $M(x,y)$ un point du plan ; on a :

$(MD)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\Rightarrow(x-0)^2+(y-b)^2=a^2+b^2\Rightarrow\boxed{x^2+(y-b)^2=a^2+b^2}$

Ainsi l'ensemble (E_2) est le cercle de centre $D(0;b)$ et rayon $r=\sqrt{a^2+b^2}$

3) Déterminons l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0}$$

<u>Méthode géométrique :</u> $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

Posons $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

• Introduisons D dans $\vec{u}$; $\vec{u}=\overrightarrow{MD}$ et

• Introduisons le point G_2 dans $\vec{v}$;

$$\vec{v}=2\overrightarrow{MG_2}+2\overrightarrow{G_2A}-\overrightarrow{MG_2}-\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{MG_2}+\overrightarrow{G_2C}=2\overrightarrow{MG_2}\Rightarrow\vec{v}=2\overrightarrow{MG_2}$$

$\overrightarrow{MD}\cdot2\overrightarrow{MG_2}=0\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0}$ Alors l'ensemble (E_3) des points M est le cercle de diamètre $[DG_2]$

<u>Méthode analytique :</u> Comme $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0$ alors on a $M(x,y), D(0,b)\ et\ \ G_2\left(0,\frac{b}{2}\right)$

(E_3): Introduisons le point I milieu du segment $[\mathrm{DG}_2]$ on a :

$$MI=\sqrt{\frac{1}{2}DG_2{}^2}\Longrightarrow MI^2=\frac{1}{2}DG_2{}^2\ \text{où}\ \ \mathrm{I}\left(0,\frac{3\mathrm{b}}{4}\right)$$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left((0-0)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2\right)\Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2$$

$$\boxed{x^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2}$$

D'où l'ensemble **(E_3)** des points M du plan est le cercle de centre $I\left(0,\frac{3b}{4}\right)$ et de rayon $r=\frac{b}{4}$

++

<u>EXERCICE 13:</u>

ABC est un triangle, on pose :$BC=a\ ;\ \ AC=b\ \ et\ \ AB=c$. A' est le milieu du segment $[BC]$; B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC

1) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$
2) En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2$, établissez que :
$$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$
3) On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']\ et\ [BC]$

Montrer que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on déterminera le rayon en fonction de $a,b\ et\ c$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

ABC est un triangle, on pose :$BC=a\ ;\ \ AC=b\ \ et\ \ AB=c$. A' est le milieu du segment $[BC]$; B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC

1) Montrons que pour tout point M du plan : $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Introduisons le point G dans $MA^2+MB^2+MC^2$ on a :

$$MA^2+MB^2+MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+f(G)=3MG^2+f(G)\ \text{ mais}$$

$$\mathrm{f(G)}=\frac{\alpha\beta AB^2+\gamma AC^2+\beta\gamma BC^2}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\mathrm{AB^2+AC^2+BC^2}}{3}\Longrightarrow\mathrm{f(G)}=\frac{\mathrm{c^2+b^2+a^2}}{3}$$

$$=\frac{\mathrm{a^2+b^2+c^2}}{3}\text{d'où}\ \boxed{\mathrm{MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}$$

2) En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2$, établissons que :

$$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

<u>1ère façon :</u>

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$
$$=MA^2+\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MA}+MB^2+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MB}$$
$$+MC^2=MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}\Longrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=$$

$$=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+2\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}\ \ introduisons\ A'dans\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC};$$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MA'}$ d'où $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+2\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MA'}\right)+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}}$

<u>2ème façon :</u>$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$; introduisons le point G :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2\left((\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right)^2=\left(3\overrightarrow{MG}\right)^2=9MG^2$$

Par comparaison :

$$3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=9MG^2\Rightarrow$$

$$4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=9MG^2-3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=6MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\Rightarrow\boxed{2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}}\textbf{cqfe}$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BC]$
Montrons que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on déterminera le rayon en fonction de a, b et c

D'après $2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$; posons $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MA'}=0$ et $\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=0$ on a :

$$2(0)+0=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}\Rightarrow 3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}=0\Rightarrow$$

$$MG^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{18}\Rightarrow\boxed{MG=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}}$$

D'où l'ensemble des points est un cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}$

++

EXERCICE 14:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct . Soit S la similitude directe de centre I transformant les points A et B d'affixes respectives $3+i$ et $3-i$ en A' et B' d'affixes respectives $2+5i$ et $4+3i$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S
2) Déterminer le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients 6 ; 1 ; et 1

En déduire le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients

+++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons les éléments caractéristiques de S

On pose $z'=az+b$ et on a :

$$\begin{cases}S(A)=A'\\S(B)=B'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_{A'}=az_A+b\\z_{B'}=az_B+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+5i=a(3+i)+b\\4+3i=a(3-i)+b\end{cases}\Rightarrow a=1+i\ \text{ et }\ b=i$$

D'où $\boldsymbol{z'=(1+i)z+i}$

•<u>Le rapport :</u>$k=|a|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$

•<u>L'angle :</u> $\theta=\arg(a)\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

•<u>Le centre ou le point invariant :</u> On pose : $z_0 = z' = z\ \ on\ a$:

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-1-i} = \frac{i}{-i} = -1 \Longrightarrow \quad z_0 = -1$$

2) Déterminons le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients 6 ; 1 ; et 1

$$z_G = \frac{6z_I + z_A + z_B}{6+1+1} = \frac{6(-1)+3+i+3-i}{8} = \frac{6-6}{8} = 0 \Longrightarrow z_G = 0 \ \Longrightarrow G(0;0)$$

En dédusons le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients

$$z_{G'} = \frac{6z_I + z_{A'} + z_{B'}}{6+1+1} = \frac{6(-1)+2+5i+4+3i}{8} = \frac{-6+6+8i}{8} = i \Longrightarrow z_{G'} = i \Longrightarrow \ G'(0;1)$$

++

EXERCICE 15:

On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a\ \ et\ AC = a$, où a est un nombre réel positif donné.

1) a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1)

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

2) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3 ; 1 et -2

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

1) a) Déterminons et construisons le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1) Comme $1-1+1 = 1 \neq 0$ alors G existe , on a : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

$$\text{introduisons le A}, \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

b) Déterminons et construisons l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{\mathbf{MA}} - \overrightarrow{\mathbf{MB}} + \overrightarrow{\mathbf{MC}}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{MA}} + \overrightarrow{\mathbf{MB}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{MC}}\|$$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

•Introduisons G dans $\vec{u}$: $\vec{u} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \Longrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MG}$

•Comme 1+1-2=0 alors introduisons le point I milieu du segment [AB]

$\vec{v} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IC}$ alors $\vec{v} = -2\overrightarrow{IC}$

On a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Longrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|-2\overrightarrow{IC}\| \Longrightarrow \mathbf{MG = 2IC}$

Alors (C) est un cercle de centre G et de rayon $r = 2IC$

2) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{\mathbf{AH}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

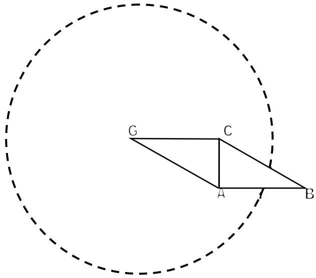
Démontrons que H est le barycentre du système $\{(\mathbf{A},\mathbf{3}),(\mathbf{B},\mathbf{1}),(\mathbf{C},-\mathbf{2})\}$

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, introduisons le point H $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$

$$2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{HC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Longrightarrow 3\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Longrightarrow -3\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0} \end{cases} \text{ Par comparaison } \alpha = 3, \beta = 1 \text{ et } \gamma = -2 \textbf{ cqfd}$$



++

EXERCICE 16:

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace
On désigne par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 3); (B, 2)\ et\ (C, -1)$ et par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 2); (B, 1)\ et\ (C, 1)$

1) a) Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}\ et\ \ \overrightarrow{AC}$
   b) En déduire que $G_1 \neq G_2$
2) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point $M_1\ tel\ que$:
   $\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point $M_2\ tel\ que$: $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
   a) Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera
   b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit R
3) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}$ =0

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) a) Calculons $\overrightarrow{\mathbf{G_1G_2}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

●Comme $3 + 2 - 1 = 4 \neq 0$ alors $\mathrm{G_1}$ existe et on a : $3\overrightarrow{\mathrm{G_1A}} + 2\overrightarrow{\mathrm{G_1B}} - \overrightarrow{\mathrm{G_1C}} = \vec{0}$
introduisons le point A : $\overrightarrow{\mathrm{AG_1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (1)
●Comme $2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ alors $\mathrm{G_2}$ existe et on a : $2\overrightarrow{\mathrm{G_2A}} + \overrightarrow{\mathrm{G_2B}} + \overrightarrow{\mathrm{G_2C}} = \vec{0}$
introduisons le point A : $\overrightarrow{\mathrm{AG_1}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (2)
De (1)-(2), on a : $\overrightarrow{\mathrm{AG_1}} - \overrightarrow{\mathrm{AG_2}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{G_2G_1}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

b) Déduisons-en que $\mathbf{G_1 \neq G_2}$

Comme A, B et C sont non alignés alors $\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \neq 0$ d'où $\mathrm{G_1 \neq G_2}$

2) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point $\mathrm{M_1}$ tel que:
$\overrightarrow{\mathrm{MM_1}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ et le point $\mathrm{M_2}$ tel que: $\overrightarrow{\mathrm{MM_2}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$

a) Démontrons que si M décrit une droite (D) de l'espace, $\mathrm{M_1}$ décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera

●$\overrightarrow{\mathrm{MM_1}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ introduisons le point $\mathrm{G_1}$, on a : $\overrightarrow{\mathrm{MG_1}} + \overrightarrow{\mathrm{G_1M_1}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MG_1}} \Longrightarrow$

$$3\overrightarrow{\mathrm{MG_1}} = \overrightarrow{\mathrm{G_1M_1}} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{G_1M_1}} = -3\overrightarrow{\mathrm{G_1M}}$$

$\mathrm{M_1}$ est l'image de M par l'homothétie de centre $\mathrm{G_1}$ et de rapport $\mathrm{k} = -3$

Lorsque M décrit la droite (D), alors M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par l'homothétie de centre G_1 et de rapport $k = -3$

b) Montrons que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit R

Comme $\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} = 4\overrightarrow{MG_1} & (1) \\ \overrightarrow{MM_2} = 4\overrightarrow{MG_2} & (2) \end{cases}$ de $(1)-(2)$on a: $\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2} = 4\overrightarrow{MG_1} - 4\overrightarrow{MG_2} \Longrightarrow$

$\overrightarrow{M_2M_1} = 4\left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_2M}\right) = 4\overrightarrow{G_2G_1} \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 4\overrightarrow{G_1G_2}$

$\overrightarrow{G_1G_2}$ est un vecteur indépendant de M alors $\overrightarrow{M_1M_2}$ est un vecteur constant

c) Déterminons l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que :

$\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2} = 0 \Longrightarrow \left(4\overrightarrow{MG_1}\right)\left(4\overrightarrow{MG_2}\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{MG_1} \times \overrightarrow{MG_2} = 0$

Alors (S) est une sphère de diamètre $[G_1G_2]$

++

EXERCICE 17:

ABCD est un carré de coté a. On désigne par O le centre du carré

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) (E_1): $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$

b) (E_2) : $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 - 2MD^2 = a^2$

c) (E_3) : $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = 4a^2$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

a) (E_1): $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$

On pose $\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ \vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \end{cases}$ introduisons le point O dans $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\begin{cases} \vec{u} = 4\overrightarrow{MO} \\ \vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \end{cases} \Longrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA} \Longrightarrow$

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Longrightarrow \left\|4\overrightarrow{MO}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BA}\right\| \Longrightarrow 4MO = 2AB \Longrightarrow$

$MO = \frac{1}{2}AB$ alors (E_1) est un cercle de centre O et de rayon $R = \frac{1}{2}AB$

b) (E_2): $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 - 2MD^2 = a^2$

Comme $1 - 2 + 3 - 2 = 0$ alors G n'existe pas, introduisons le point O :

$OA^2 - 2OB^2 + 3OC^2 - 2OD^2 + 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} = a^2 \Longrightarrow 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} = a^2$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} \Longrightarrow$

$\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC} - 2\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$ mais $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \end{cases}$ alors $\vec{u} = 2\overrightarrow{OC}$

$2\overrightarrow{MO}.\vec{u} = a^2 \Longrightarrow 2\overrightarrow{MO}.2\overrightarrow{OC} = a^2 \Longrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} = \frac{a^2}{4}$ Soit H le projeté orthogonal de M sur $-\overline{OH}.\overline{OC} = \frac{a^2}{4} \Longrightarrow \overline{OH} = -\frac{a^2.\overline{OC}}{4\overline{OC}^2}$ mais $(2OC)^2 = 2a^2 \Longrightarrow OC^2 = \frac{1}{2}a^2 \Longrightarrow$

$\overline{OH} = -\frac{a^2.\overline{OC}}{4\frac{1}{2}a^2} = -\frac{1}{2}\overline{OC} \Longrightarrow \mathbf{\overline{OH} = -\frac{1}{2}\overline{OC}}$

(E_2) est une droite passant par H et perpendiculaire à la droite (OC)

c) (E_3) : $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = 4a^2$

On pose $G = \text{bar}\begin{matrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{matrix}$ comme $1 + 2 - 1 + 2 = 4 \neq 0$ alors G existe puis introduisons-le :

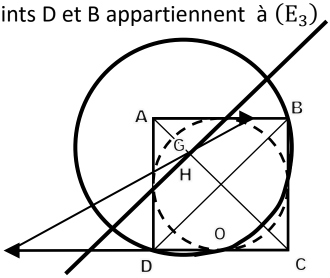
$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)MG^2 + f(G) = 4a^2 \Longrightarrow 4MG^2 + f(G) = 4a^2 \text{mais}$$

$$f(G)=\frac{2AB^2-AC^2+2AD^2-2BC^2+4BD^2-2CD^2}{4}=\frac{-2a^2+8a^2}{4}=\frac{6a^2}{4}=\frac{3a^2}{2}\Longrightarrow f(G)=\frac{3a^2}{2}$$

$$4MG^2+\frac{3a^2}{2}=4a^2\Longrightarrow 4MG^2=4a^2-\frac{3a^2}{2}=\frac{5a^2}{2}\Longrightarrow MG^2=\frac{5a^2}{8}\Longrightarrow \mathbf{MG}=\frac{\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{4}}\mathbf{a}$$

(E_3) est un cercle de centre G et de rayon $R=\frac{\sqrt{10}}{4}a$ avec $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

On constate que les points D et B appartiennent à (E_3)



++

EXERCICE 18:

Soit $[AB]$ un segment de longueur 10cm et I son milieu

1) M est un point du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

Déterminer et représenter l'ensemble au quel appartient le point M

2) On sait de plus que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=11$. A quel ensemble appartient aussi le point M ? Représenter cet ensemble et préciser la position de M

3) Calculer MA^2+MB^2 et MA^2-MB^2

4) A l'aide des résultats de la question 3), déterminer les valeurs exactes, puis approchées à 10^{-2} près, des longueurs MA et MB et contrôler sur la figure.

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

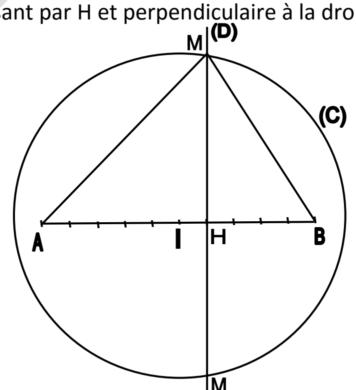
1- M est un point du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

Déterminons et représentons l'ensemble au quel appartient le point M

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), on a :

$$\overline{IH}.\overline{AB}=10\Longrightarrow \overline{IH}=\frac{10}{\overline{AB}}=\frac{10}{\overline{AB}^2}\overline{AB}=\frac{1}{10}\overline{AB}\Longrightarrow\boxed{\overline{IH}=\frac{1}{10}\overline{AB}}$$

M décrit une droite passant par H et perpendiculaire à la droite (AB)



2- On sait de plus que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 11$.Représentons cet ensemble et précisons la position de M

Introduisons le point I, on a: $MI^2 - IB^2 = 11 \Longrightarrow MI^2 = 11 + IB^2 = 11 + 5^2 = 11 + 25$

$$MI^2 = 36 \Longrightarrow \boldsymbol{MI = 6}$$

M décrit un cercle (C) de centre I et de rayon R=6

D'où M est le commun de (D) et (C)

3- Calculons $MA^2 + MB^2$ et $MA^2 - MB^2$

Introduisons le point I :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2(6)^2 + 5^2 + 5^2 = 72 + 50 = 122 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{MA^2 + MB^2 = 122}}$$

$$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2(10) = 20 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 20}}$$

4- A l'aide des résultats de la question 3), déterminons les valeurs exactes, puis approchées à 10^{-2} près, des longueurs MA et MB et contrôler sur la figure.

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 122 \\ MA^2 - MB^2 = 20 \end{cases} \Longrightarrow 2MA^2 = 142 \Longrightarrow MA^2 = 71 \Longrightarrow MA = \sqrt{71} = 8{,}42$$

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 122 \\ -MA^2 + MB^2 = -20 \end{cases} \Longrightarrow 2MB^2 = 102 \Longrightarrow MB^2 = 51 \Longrightarrow MB = \sqrt{51} = 7{,}14$$

D'où $\boxed{\mathbf{MA = 8,42 \quad et \quad MB = 7,14}}$

++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit un quadrilatère ABCD

a) Placer les points E, F, I, J, K, et L définis par :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BJ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{CK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}\ et\ \overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

b) Démontrer que les droites (EF) ;(IK) et (JL) sont concourantes

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle

1) Construire les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$
2) Démontrer que les droites (AI) ;(BJ) et (CK) sont concourantes

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :

•I et J les milieux respectifs des segments $[AD]\ et\ [BC]$

•K et L les points tels que : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\quad et\ \ \overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

•G le barycentre des points pondérés (A ; 2) , (B ; 1), (C ; 1) et (D ; 2).

1) Démontrer que les points I, J et G sont alignés
   Démontrer que les points K, L et G sont alignés
2) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle, G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 2). Les droites (BG) et (CG) coupent (AC) et (AB) respectivement en B' et C'

1) En utilisant les barycentres partiels, démontrer que :
   $2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GB'}=\vec{0}\ \ et\ 2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$
2) En déduire que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles ?

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle. On désigne par :

•A' le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, -3)

•B' le barycentre des points pondérés (C, -3) et (A, 1)

1) Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles
2) Soit C' le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

Pour quelles valeurs de des nombres réels a et b les droites (AA') et (CC') sont-elles parallèles ?

+++++++++++++++++++++++++++**Exercice 6:**+++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants écrire G comme barycentre de points pondérés $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$

a) $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

b) $-\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$

c) $2\overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AC}$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 7 :+++++++++++++++++++++++++++

Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 6\ cm$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB$

b) $2MA^2 + MB^2 = 51$

c) $MA^2 - MB^2 = 9$

d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 16$

e) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

f) $\frac{MA}{MB} = 2$

+++

APPROFONDISSEMENT

+++++++++++++++++++++++++Exercice 8 :+++++++++++++++++++++++++++

Soit le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O,I,J)

On désigne les points $A(1\,;5)$; $B(2\,;3)$ et $C(4\,;4)$

1) Déterminer le barycentre G_α des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1 ; $\alpha + 1$ et $-\alpha + 3$ avec $\alpha \in R$
2) Déterminer l'ensemble des points G_α quand α décrit R
3) Choisir α pour que G_α soit le point D(1 ;3)
4) On prend α=5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\mathrm{MA}^2 + 6\mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MC}^2 = 25$$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 9 :+++++++++++++++++++++++++++

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

On considère les points A(-2 ;-1) , B(1 ;5) et C(3 ;1) et le cercle (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 24 = 0$$

Déterminer les trois nombres réels α, β, γ $et\ la\ constante$ k tels que (C) soit la ligne de niveau k de Leibniz associée au système $\{(A;\alpha);(B.\beta);(C;\gamma)\}$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 10 :++++++++++++++++++++++++++

On donne dans le plan muni d'un repère cartésien les points $\mathrm{A}(0\,;\,1)$, $\mathrm{B}(2\,;\,1)$, $\mathrm{C}(1\,;0)$ et $\mathrm{D}(1\,;\,1)$

1) Déterminer le barycentre de l'ensemble des points pondérés (A ; 1) , (B ;-1), (C ; 2) et (D ;2)
2) Avec les points définis à la question précédente, déterminer le barycentre de l'ensemble des points pondérés (A ; 1) , (B ;-3), (C ; 1) et (D ;a) avec a Є R

Déterminer l'ensemble des points G_a lorsque a décrit R

3) A, B et C sont les sommets d'un triangle rectangle en C dans le plan (P), m est un nombre réel différent de -2 (m$\neq -2$)

On considère la fonction f définie par : f(M)=MA²+MB²+mMC²

Soit G le barycentre du système des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1 ; 1 ; m

a) Montrer que f(M)=(2+m)MG²+f(G)

b) Calculer$\mathrm{f(A)+f(B)+mf(C)}$ en fonction de f(G)

c) Montrer que $f(G)=\left(\frac{1+m}{2+m}\right)AB^2$

d) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : f(M)=AB²

4) Montrer que pour tout $m\neq -2$, le point C est un élément de € En déduire une construction de l'ensemble (E_m) correspondant à m=-3

++++++++++++++++++++++++++Exercice 11 :++++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle isocèle tels que AB=AC=7 et BC=4 ; on désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et G le centre de gravité de ABC

1) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\|=12$$

2) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$-2AM^2+BM^2+CM^2=38$$

3) a) Calculer AG² et BG²

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :

$$AM^2+BM^2+CM^2=65$$

++++++++++++++++++++++++++Exercice 12 :++++++++++++++++++++++++++++

Soit A, B et C trois points non alignés

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\|$$

++++++++++++++++++++++++++Exercice 13 :++++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle tels que AB=7, BC=4 et AC=5

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$

1) En utilisant le théorème de médiane, Calculer AI

2) Déterminer et construire l'ensemble € des points M du plan tels que :

$$2MA^2-MB^2-MC^2=58$$

(On pourra développer $2MA^2-MB^2-MC^2$ $par\ I$)

3) On désigne par D le barycentre des points pondérés (A.-1) , (B ;1) et (C ; 1)

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$MA^2-MB^2-MC^2=25$$

++++++++++++++++++++++++++Exercice 14 :++++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle isocèle tel que : BC=2 et AB=AC=3

On désigne par A' le milieu du segment $[BC]$ et H l'orthocentre de ABC

1) Démontrer que $cos\widehat{BAC}=\frac{7}{9}$

2) Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC)

a) Calculer $\frac{B'A}{B'C}$

b) Déterminer deux nombres réels α et γ tels que B' est le barycentre des pondérés (A ;α) et (C ;γ)

3) En déduire trois nombres réels a, b et c tels que H est le barycentre des points pondérés (A ;a), (B ;b) et (C ;c)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 15:**++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB = a \quad (a > 0)$

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$$

2) a) Construire le barycentre G des points pondérés (A , -1) , (B, 4) et (C ; 1)

c) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 16 :**++++++++++++++++++++++++++

Une unité de longueur étant choisie, on considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a \ et \ AC = a$,où a est un nombre réel positif donné.

1) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

2) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

a) Déterminer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on déterminera

b) On considère l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$$

Pour quelles valeurs du nombre réel k, cet ensemble contient-il le point A ?

Pour cette valeur préciser l'ensemble obtenu, noté (E) et le construire

++++++++++++++++++++++++**Exercice 17 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans un plan P, on donne un trapèze convexe isocèle ABCD tel que (AB) soit parallèle à (DC).

Soit $[AH]$ sa hauteur relativement aux bases $[AB] \ et \ [CD]$.

On pose $AB = a$; $CD = 3a \ et \ AH = a \ où \ a \in R^*$

1) Déterminer les réels $\alpha \ et \ \beta$ pour que H soit le barycentre des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients α ; 1 ; 1 et β.

Pour cette question on pourra utiliser un repère d'origine H

2) Soit G_1 l'isobarycentre des points B et C. Soit G_2 le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients -1 et 3. Construire G_1 et G_2

Montrer que H est le milieu du segment $[G_1G_2]$

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}\|$$

4) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MD^2 \leq 24a^2$$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 18 :++++++++++++++++++++++++++

Dans un plan affine euclidien P, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = a$ (a est un réel strictement positif donné)

1) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, -1)
2) Pour tout point M du plan P, on pose $\vec{V} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Démontrer que $\vec{V}$ est un vecteur constant, indépendant de M. Construire le point A' tel que

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$$

3) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan P tel que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

4) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$$

On pourra remarquer que le point G appartient à (E_2)

+++++++++++++++++++++++++Exercice 19 :++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A et G l'isobarycentre des points A, B et C

1) Soit G' le symétrique de G par rapport à la droite (BC)

Déterminer les réels b et c pour que G' soit le barycentre du système

$$\{(A, 1), (B, b), (C, c)\}$$

2) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 20 :++++++++++++++++++++++++++

Dans un plan affine euclidien P, on considère un triangle ABC équilatéral tel que $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{a}$

1) Déterminer les nombres réels b et c pour que le point D symétrique de B par rapport à la droite (AC), soit le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 1, b et c

On pourra rapporter le plan au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2) Soit k un nombre réel quelconque. Etudier suivant les valeurs de k l'ensemble (C_k) des points M du plan P tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = ka^2$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 21:++++++++++++++++++++++++++

Dans un plan affine euclidien P, on considère un triangle ABC équilatéral tel que $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{a}$

1) Construire le point G barycentre du système (A, 2), (B,1), (C,1)
2) Déterminer et construire dans chacun des deux ensembles suivants :

a) $E_1 = \{M \in P; 2MA^2 + MB + MC^2 = 2a^2\}$

b) $E_2 = \left\{M \in P; 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}\right\}$

Pour ce dernier ensemble, on pourra utiliser le point G puis le milieu I du segment $[AG]$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 22 :++++++++++++++++++++++++++

Dans un plan affine euclidien P, on considère un triangle ABC isocèle de sommet A tel que $AB = AC = 3a \;\; et \;\; BC = 2a$ (a est un réel strictement positif donné)

On appelle G le barycentre des points pondérés A, B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 3 ; 3

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$

1) Montrer que G est le milieu du segment $[IJ]$
2) M étant un point de P, calculer $2MA^2+3MB^2+3MC^2$ en fonction de MG et a
3) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :
$$2MA^2+3MB^2+3MC^2=18a^2$$
4) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan P tel que :
$$2MA^2+3MB^2+3MC^2=22a^2$$
5) Montrer que les droites (BC), (AB) et (AC) ont chacune un point commun avec (F) Que représente le point G pour le triangle ABC ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 23:+++++++++++++++++++++++++

Dans E, plan affine euclidien, A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral, tel que : $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\mathrm{d}$; où $\mathrm{d}>0$

1) Déterminer l'ensemble des réels a tels que les points A, B , C affectés de coefficients respectifs a, 1, 1 admettent un barycentre G_a . Quel est l'ensemble des points G_a ainsi obtenu ?
2) On prend a=1. Déterminer le point G_1 correspondant

On pose $f_1(M)=MA^2+MB^2+MC^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que
$$f_1(M)=2d^2$$
3) On prend a=-2. Montrer que le vecteur $\vec{V}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant de M qu'on précisera. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f_{-2}(M)=-2MA^2+MB^2+MC^2=0$

++++++++++++++++++++++++Exercice 24 :+++++++++++++++++++++++++

Soit $[AB]$ un segment de longueur 10cm et I son milieu

1) M est un point du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

Déterminer et représenter l'ensemble au quel appartient le point M
2) On sait de plus que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=11$. A quel ensemble appartient aussi le point M ?

Représenter cet ensemble et préciser la position de M
3) Calculer $MA^2+MB^2 \quad et \quad MA^2-MB^2$
4) A l'aide des résultats de la question 3), déterminer les valeurs exactes, puis approchées à 10^{-2} près, des longueurs MA et MB et contrôler sur la figure.

++++++++++++++++++++++++Exercice 25 :+++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle rectangle en A et de centre de gravité G et A' le milieu de

$[\mathrm{BC}]$; on pose $\mathrm{BC}=\mathrm{a}$

1) Exprimer $4\overrightarrow{\mathrm{GA}}.\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ en fonction de a.
2) Exprimer GB^2+GC^2 en fonction de a. En déduire que $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{2}{3}a^2$
3) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que :
$$MA^2+MB^2+MC^2=\frac{3}{4}a^2$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 26 :++++++++++++++++++++++++++

Soit ABC un triangle

1) Construire le barycentre G des points $(A,-1)$; $(B,2)$ et $(C,3)$
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AC}=0$
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=4BC$
4) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$?
5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MA}=0$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 27 :++++++++++++++++++++++++++

On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=2a$ et $AC=a$, où a est un nombre réel positif donné.

1) a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1)
   b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$$

2) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
   a) Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3 ; 1 et -2
   b) Pour tout réel k, on désigne par (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2+MB^2-2MC^2=ka^2$
   Pour quelles valeurs du nombre réel k, cet ensemble contient-il le point C ?
   c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 28 :++++++++++++++++++++++++++

Soit ABCD un losange de centre O tel que : OB=2OA

1) Démontrer que le barycentre des points pondérés (B, 2) ; (C, -1) et (D, 1) est le milieu du segment $[AB]$
2) Soit k un nombre réel
   a) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des barycentres G_k des points pondérés (A, k),(B, 2),(C, k-1) et (D,1-2k)
   b) Préciser la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC)
3) Déterminer et construire :
   a) L'ensemble E_2 des points M du plan tel que les vecteurs $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$sont colinéaires
   b) L'ensemble E_3 des points M du plan tel que les vecteurs $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ ont la même norme

++++++++++++++++++++++++Exercice 29 :++++++++++++++++++++++++++

On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés $[AB]$ et $[AD]$ ont pour longueurs respectives a et b

Pour tout réel non nul m, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$$

Pour chacune des questions ci dessous on donnera une solution géométrique puis une solution analytique

1) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lors que m décrit R
2) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 30 :++++++++++++++++++++++++++

ABC est un triangle équilatéral de coté de longueur a ; soit I le barycentre des points pondérés $(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ 2)\ et\ (C\ ;\ -2)$

1) Déterminer et construire I
2) Calculer $IA^2\ ;\ IB^2\ et\ IC^2$ en fonction de a
3) Soit k un nombre réel
   a) Déterminer en fonction de k l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tel que :
   $$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$$
   b) Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k)
4) a) Démontrer (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droite (AB)
   b) Démontrer que le symétrique D de B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC)
   c) Démontrer (Ω_{-1}) est tangent à la droite (AC) en D
   d) Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifier la réponse

++++++++++++++++++++++++Exercice 31:+++++++++++++++++++++++++++

ABCD est un trapèze non rectangle tel que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On désigne par I, J, O les milieux respectifs de $[AB], [CD]\ et\ [IJ]$

1) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$
2) Les médiatrices des cotés $[AD]\ \ et\ [BC]$ se coupent en G
   Démontrer que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$
3) Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$
   a) Justifier que (E_2) est non vide
   b) Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}}.\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{k}$ (où k est une constante réelle)
   c) En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}}.\overrightarrow{\mathrm{GM}} = 0$
   d) Déterminer et construire (E_2)

++++++++++++++++++++++++Exercice 32 :++++++++++++++++++++++++++

ABC est un triangle équilatéral de coté a , $(a > 0)$

1) Soit G le point défini par la relation $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Construire le point G et déterminer trois réels $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ tels que G soit barycentre du système $\{(A;\ \alpha).(B;\ \beta);(C;\ \gamma)\}$

2) On pose $f(M) = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = a^2$

++

NOMBRES COMPLEXES ET BARYCENTRE

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 33 :**+++++++++++++++++++++++++++

1) Pour tout nombre complexe Z, on considère $\mathrm{f(Z)} = \mathrm{Z}^4 - 10\mathrm{Z}^3 + 38\mathrm{Z}^2 - 90\mathrm{Z} + 1 - 261$

a) Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$. En déduire que l'équation $f(Z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution

b) Montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe Z, $f(Z) = (Z^2 + 9)(Z^2 + \alpha Z + \beta)$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(Z) = 0$

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé

a) Placer dans le plan P les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes

$$a = 3i, b = -3i, c = 5 + 2i \text{ et } d = 5 - 2i$$

b) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C et D.

c) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que : $\|\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}}\| = 10$

Tracer E sur la figure précédente

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 34 :**+++++++++++++++++++++++++++

1) Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

a) Calculer $P(-1)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe Z, on ait :

$$P(Z) = (Z + 1)(Z^2 + aZ + b)$$

c) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$Z_A = -1;\ Z_B = 2 + i\sqrt{3}\ ;\ Z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } Z_G = 3$$

a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G

b) Calculer les distances AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Calculer un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC.

4) Soit (D) l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12$ (1)

a) Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$$

b) Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4$ (2)

c) Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D)

d) Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0$

e) En déduire l'ensemble (D) et le tracer

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 35 :**+++++++++++++++++++++++++++

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (OIJ) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $i; 8+5i \ et \ 8-5i$

1) Placer les points A, B et C
2) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B
3) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A,-1)$; $(B,1)$; $(C,-1)$
4) Démontrer que $GA = GC$
5) On considère l'ensemble (Γ) des points du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20$
   a) Démontrer que A et C appartiennent à (Γ)
   b) Démontrer que (Γ) est un cercle de centre G et rayon GA
   c) On appelle (Γ′) le symétrique de (Γ) par rapport à (AC). Construire (Γ′)

   Choisi une unité appropriée

++++++++++++++++++++++++Exercice 36 :++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation (E) : $(Z \in C)$ $Z^3 + (1-6i)Z^2 - (17+8i)Z - 33 + 30i = 0$

1) a) Vérifier que -3 est solution de cette équation
   b) Résoudre l'équation (E)

Les solutions seront notées par $Z_0, Z_1 \ et \ Z_2$ où $Z_0 = -3 \ et \ Z_2$ a sa partie réelle positive

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; u; v)(unité : 1cm)$

On considère les points $M_0, M_1 \ et \ M_2$ d'affixes respectives $Z_0, Z_1 \ et \ Z_2$

   a) Placer $M_0, M_1 \ et \ M_2$ dans le repère $(O; u; v)$
   b) Démontrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle

3) On désigne par G le barycentre des points pondérés $(M_0,-1); (M_1,1) et \ (M_2,1)$
   a) Construire géométriquement G . Justifier la construction (on ne demande de calculer les coordonnées de G)
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

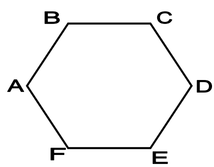
$$-MM_0{}^2 + MM_1{}^2 + MM_2{}^2 = -GM_2{}^2$$

+++

LE DEFI

++++++++++++++++++++++++Exercice 37 :++++++++++++++++++++++++++

On considère par ABCDEF un hexagone régulier de coté a $(a > 0)$ et de centre O



1- Démontrer par récurrence que le nombre de diagonale dans un polygone de n cotés est : $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$ avec $n > 3$
2- Montrer que la somme des diagonales de cet hexagone est : $S = 6a(1+\sqrt{3})$
3- Déterminer la nature du triangle ABD
4- Soit f l'application du plan définie par : $f(M) = -3MA^2 + 2MB^2 - MD^2$

a- Construire le point $G = bar\begin{matrix} A & B & C \\ -3 & 2 & -1 \end{matrix}$ Que constate t-on

b- On pose (E) : $f(M) = -2a^2$

+ Montrer que les points O, A et E appartiennent à (E)

+ Montrer que $f(G) = f(F) = 0$

c- Déterminer et construire l'ensemble (E)

5- Soit (F) l'ensemble des points M du plan tels que :

$g(M) = MB^2 - 2MD^2 + MF^2 = 3a^2$ et I le milieu du segment $[BF]$

a- Montrer que les points C et E appartiennent à (F)

b- Montrer que $g(I) = -3a^2$

c- Déterminer et construire l'ensemble (F)

6- (E) et (F) sont-ils tangents ? Si oui, démontrer et donner leur point tangent.

7- a- Montrer que l 'aire de cet hexagone est : $A = \frac{5a^2\sqrt{3}}{2}$

b- Soit A' l 'aire de la partie commune de l'hexagone et de l'ensemble (E)

Démontrer que l 'aire de la partie de l'hexagone privée de A' est : $A'' = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) a^2$

++++++++++++++++++++++++Exercice 38 :++++++++++++++++++++++++++

Partie A :

On considère le polynôme défini par : $P(Z) = Z^3 - 3\sqrt{2}(1+i)Z^2 + 4(1+3i)Z - 8i\sqrt{2}$

1- a- Calculer $P\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$

b- Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $P(Z) = \left(Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)(Z^2 + aZ + b)$

c- Résoudre dans C l'équation : $P(Z) = 0$

2- Soit A, B et C les points d'affixes respectives

$$Z_0 = \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} - 2\right) \ ; \ Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad et \ \ Z_2 = \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + 2\right)$$

a- Déterminer le module et un argument de Z_0 ,Z_1 et Z_2

b- Montrer que les points A, B et C sont alignés et que B est le milieu du segment $[AC]$

3- a- Déterminer l'équation de la droite (Δ) médiatrice du segment $[AC]$

b- Soit M l'ensemble des points de la droite (Δ) d'affixe Z. Trouver l'expression de Z

c- Calculer le rapport $\frac{Z_0 - Z}{Z_1 - Z}$. En déduire la nature du triangle MAC

d- Déterminer l'expression de Z pour la quelle MAC est un triangle équilatéral

Partie B :

Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives

$$\sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} - 2\right) \quad ; \quad \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + 2\right) \quad et \quad \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + i\sqrt{2}$$

On considère par G et G' deux points du plan tels que : $G = bar\begin{matrix} A & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ et $G' = bar\begin{matrix} A & B & D \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

1- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\|$$

2- Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$MA^2 - 2MD^2 + MC^2 = 16$$

3- Soit f l'application du plan définie par : $f(M) = 3MA^2 + MC^2 + 2MD^2$

a- Ecrire G' comme barycentre de A, C et D b- Montrer que : $f(M) = 6MG'^2 - \frac{104}{3}$

c- Discuter suivant les valeurs de k l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $f(M) = k$

d- Déterminer la valeur de k pour la quelle (E_k) contienne le point G

e- Déterminer et construire l'ensemble (G) des points M du plan tels que :

$$-\frac{32}{2} \leqslant 3\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MC}^2 + 2\mathrm{MD}^2 \leqslant \frac{58}{3}$$

4- Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = \frac{77}{9}$

a- Calculer $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GG'}$,(I est le milieu de $[G'B]$)

b- En déduire la nature du triangle BGG'

c- Montrer que (Γ) peut s'écrire sous la forme : $MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GI} = \frac{77}{9}$

d- On considère par E un point tel que : $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GI}$

En déduire que (Γ) est équivalent à : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{ME} = \frac{77}{9}$

e- Montrer que : $MI^2 = 9$

f- En déduire la nature de (Γ) puis construire le

++++++++++++++++++++++++Exercice 39 :+++++++++++++++++++++++++++

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal (O,I,J), on considère les points :
A(-4 ;4) ; B(-5 ;-1) et C(1 ;1)

1- Calculer les coordonnées du point G barycentre de A,B et C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et 1

2- On considère l'application f de P dans R telle que :$f(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$
Démontrer que pour tout point M du plan P on a : $f(M) = 4MG^2 + 40$

3- On suppose que le point M appartient à la droite (D) d'équation y=2x-7

a- Calculer $f(M)$ en fonction de l'abscisse x du point M

b- Montrer qu'il existe une valeur x_0 de x et une seule pour laquelle $f(M)$ est minimum

On appelle M_0 le point de la droite (D) d'abscisse x_0 .

Démontrer que la droite (D) et GM_0 sont orthogonales

++++++++++++++++++++++++Exercice 40 :+++++++++++++++++++++++++++

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$l'unité graphique est 1 cm

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3})\ ;$$

$$Z_B = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1) \quad et \quad Z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$$

1-)On se propose de placer les points A B C dans le repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ à l'aide du compas

Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$

a-)Donner l'écriture complexe de R

b-) Vérifier que R transforme le point A en le point A' d'affixe $4 - 6i$

On admettra que R transforme les points B, C en les points B' et C' d'affixes respectives 2+2i et -2+8i c-) Placer les points A', B', C' puis à l'aide du compas, les points A B C (la construction du point A sera justifiée)

2-a)Calculer $Z_A - Z_B + Z_C$

b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$$

3-)Soit l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

a-)Vérifier que B appartient à Γ

b-) Déterminer puis tracer l'ensemble Γ

4-)Déterminer puis tracer l'ensemble D des points M du plan tels que

$$2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 41 :++++++++++++++++++++++++++

Soient trois points de l'espace, A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1;1]$

On note G_k le barycentre du système $\{(A;k^2+1);(B;k);(C;-k)\}$

1) Représenter les points A, B, C, le milieu I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}

2) a) Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[-1;1]$ on a : $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

b) Etablir le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-1;1]$, par :

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1;1]$

Pour la suite de l'exercice aucune figure n'est demandée sur la copie

3) Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

4) Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives : $(0;0;2)$; $(-1;2;1)$ et $(-1;2;5)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-déssus

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants

b) Calculer le rayon du cercle (C) intersection de E et F

++++++++++++++++++++++++Exercice 42:++++++++++++++++++++++++++

ABC est un triangle tels que : $\mathrm{BC} = \mathrm{a}$; $\mathrm{AC} = \mathrm{b}$ et $\mathrm{AB} = \mathrm{c}$; C' le milieu du segment [AB] et G le barycentre du système $\{(A,1);(B,1);(C,4)\}$ et G' le barycentre du système $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$

1) Soit $f(M) = MA^2 + MB^2 + 4MC^2$

a) Montrer que $f(M) = 6MG^2 + \frac{4a^2+4b^2+c^2}{6}$

b) Calculer deux de façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})^2$

En déduire que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = 8MG'^2 - 3MG^2 - \frac{4a^2+4b^2+c^2}{12}$

2) Soit G'' le barycentre du système $\{(G', 8); (G, -3)\}$

a) Montrer que $8MG'^2 - 3MG^2 = 5MG''^2 - \frac{c^2+4b^2}{30}$

b) En déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = 5MG''^2 - \frac{20a^2+28b^2+7c^2}{60}$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres $[CC']$ et $[AB]$

Montrer que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G'' dont on déterminera le rayon en fonction de a, b et c

4) Soit S l'aire et p le demi-périmètre du triangle ABC

a) Calculer $\cos\hat{A}$ en fonction de a ; b et c

b) Calculer S en fonction de $b; c$ et $\sin\hat{A}$

c) Montrer que $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\tan\hat{A}$

d) En déduire l'égalité : $16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ (1)

e) En factorisant le second membre de (1) , démontrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

f) Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) : Démontrer que :

$$AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

g) **<u>Application :</u>** Calculer l'aire du triangle ABC ; la distance AH et la valeur de $\tan\hat{A}$ tels que: $AB = 6$; $AC = 7$ et $BC = 8$

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 43:</u>+++++++++++++++++++++++++++

On considère un rectangle ABCD de côté a et $3a, (a > 0)$. Soit I le point défini par $\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et J le milieu de $[BC]$. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 44:</u>+++++++++++++++++++++++++++

On considère un cercle de centre O et de rayon r. On place quatre points A, B, C et D tels que (AB) et (CD) soient perpendiculaires. On note E leur point d'intersection et I le milieu de $[AD]$. Démontrer que la médiane (EI) du triangle AED est une hauteur du triangle ECD

FONCTIONS NUMERIQUES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Limites des fonctions élémentaires :

●**Limites à l'infini d'une fonction polynôme** : Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \quad \text{car} \quad f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_n}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \text{ et que}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n \text{ alors } \boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n}$$

●**Limites à l'infini d'une fonction polynôme** : Soit $f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + bx^2 + b_1x + b_0}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

●**Opérations sur les limites :**

$\mathbf{lim\,f}$	l	$l = +\infty$	$l = 0$	$l = \infty$	$l = 0$	$l = \infty$
$\mathbf{lim\,g}$	$l' \neq 0$	$l' = +\infty$	$l' = \infty$	$l' = 0$	$l' = 0$	$l' \neq 0$
$\mathbf{lim(f+g)}$	$l + l'$	$+\infty$	∞	∞	0	∞
$\mathbf{lim\frac{f}{g}}$	$\frac{l}{l'}$	Forme indéterminée	0	∞ Règle de signe	Forme indéterminée	∞ Règle de signe
$\mathbf{lim(f\times g)}$	$l \times l'$	$+\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée	0	∞ Règle de signe
$\mathbf{lim(f-g)}$	$l - l'$	Forme indéterminée	∞ Règle de signe	∞	0	∞

●**Limite d'une fonction composée :** Soit f la fonction défini e par $f(x) = u \circ v$

Si $\lim\limits_{x\to a} v = l$ et $\lim\limits_{x\to l} u = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} u \circ v = l'$

Continuité et dérivabilité d'une fonction :

●**Continuité** : Une fonction f est continue sur intervalle K si et seulement si elle admet une limite finie en toute valeur de K

On dit que f est continue en un point x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de x_0 ; c'est-à-dire $\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) = l \text{ avec } l \in R}}$

●**Dérivabilité** : Une fonction f est dérivable sur intervalle K si et seulement si elle est dérivable en tout point de l'intervalle K

On dit que f est dérivable en un point x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de x_0 ; c'est-à-dire $\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to x_0^-}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0) = l \text{ avec } l \in R}}$

Ou bien $\boxed{\boldsymbol{\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f(h+x)-f(x_0)}{h}\right) = f'(x_0) = l \text{ avec } l \in R}}$

$\mathrm{f'_d(x_0)}$ est le nombre dérivé de f à droite en x_0

$\mathrm{f'_g(x_0)}$ est le nombre dérivé de f à gauche x_0

NB : Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{f'_d(x_0) = f'_g(x_0)}$

Interprétation graphique :

Si $f'(x_0) = 0$ alors (C) admet une demi-tangente horizontale en x_0

Si $f^{'}(x_0) = \infty$ alors (C) admet une demi-tangente verticale en x_0

Si $\mathbf{f'}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{f'}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x_0})$ alors (C) admet deux demi-tangentes obliques en x_0

●**<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>** : Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle K, on dit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]a;b[$ si et seulement si f réalise une bijection de $K\ vers\ f(K)$ et que $\alpha \in]a;b[\subset K$ on a : $f(a) \times f(b) < 0$

●**<u>Equation de la tangente :</u>** Soit $M\big(x_0; f(x_0)\big)$ un point d'une fonction f

La tangente en x_0 a pour équation : $\frac{y-y_0}{f^{'}(x_0)} = x - x_0 \Longrightarrow y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow$

$y = f^{'}(x_0)(x - x_0) + y_0$ avec $y_0 = f(x_0)$ $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}}$

Pour montrer qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est la tangente d'une courbe à un point d'abscisse x_0 ; on vérifie que : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{(f(x) - y) = 0}}$

<u>Branches infinies :</u>

●**<u>Asymptote verticale</u>** : Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe (C) de f

●**<u>Asymptote Horizontale</u>** : Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe (C) de f

●**<u>Asymptote oblique</u>** : La droite d'équation $y = ax + b$ avec

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ et } \ b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

-Si $a = 0$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OI)

-Si $a = \pm\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

-Si $a \neq 0\ \ et\ \ b = \infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de $y = ax$

Pour montrer qu'une droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C) ; on vérifie que : $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \boldsymbol{(f(x) - y) = 0}}$

Pour étudier la position relative de (Cf) et (Δ) on étudie le signe de $f(x) - y$

<u>Fonction réciproque :</u>

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle K et f^{-1} sa bijection réciproque de K vers $f(K)$

●f^{-1} a pour ensemble de définition $f(K)$

●f^{-1} a le sens de variations que la fonction f

●$\big(C_{f^{-1}}\big)$ est le symétrique de $\big(C_f\big)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en un point d'abscisse $a \in K$, on détermine un réel $b\ tel\ que\ f(b) = a$ et on verifie si $f^{'}(b) \neq 0$ alors $(f^{-1})^{'}(a)$ existe Pour calculer $(f^{-1})^{'}(a)$ on procède comme suit : $(f^{-1})^{'}(a) = \frac{1}{f^{'}(b)}$

Dérivées et primitives des fonctions :

Fonctions	Dérivées		Fonctions	Primitives
$a \in R$	0		a	$ax + c$
ax	a		x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

x^n	nx^{n-1}		$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}+c$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+c$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{x^n}+c$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$		$\cos x$	$\sin x+c$
$\sin x$	$\cos x$		$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$-\sin x$		$1+\tan{}^2x$	$\tan x+c$
$\tan x$	$1+\tan{}^2x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+c$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$		$(ax+b)^n$	$\dfrac{1}{a}\times\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$
$u+v$	$u'+v'$		$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+c$
$u\times v$	$u'v+v'u$		a^x	$\dfrac{1}{\ln a}a^x+c$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$			
u^n	$nu'u^{n-1}$			
$\cos u$	$-u'\sin u$			
$\sin u$	$u'\cos u$			
$\tan u$	$1+\tan^2 u$			

FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENS

●**Définition :** On appelle fonction logarithme népérien et on note $(\ln x)$ la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ $sur\ ]0;\ +\infty[$

●**Propriétés algébriques** :

$$\ln ab=\ln a+\ln b \quad ; \quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \quad ; \quad \ln a^n=n\ln a \quad ; \quad \ln x<0 \text{ si } x\in\,]0;1[$$

$$\ln 1=0 \quad ; \quad \ln e=1 \quad ; \quad \ln x=a \text{ alors } x=e^a$$

●**Ensemble de définition :**

Si $f(x)=\ln(u)$ alors $D_f=\{\forall x\in R;\ u>0\}$

Si $f(x)=\ln|u|$ alors $D_f=\{\forall x\in R;\ u\neq 0\}$

●**Dérivée d'une fonction (ln)**

La dérivée de la fonction $f(x)=\ln u$ se calcule comme suit $f'(x)=\frac{u'}{u}$

●**Limite des fonctions (ln)**

$$\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}(x\ln x)=0 \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

FONCTIONS LOGARITHMES DE BASE a :

●**Définition :** On appelle fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) et on note ($\log_a x$) la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

-Si $a = e$ alors $\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$ d'où (ln) est une fonction logarithme de base e

-Si $a = 10$ alors $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log x$ d'où (log) est une fonction logarithme décimale

●**Propriétés algébriques** : $\forall x \in]0;\ +\infty[$ et $\forall y \in]0;\ +\infty[$

$$\log_{\mathrm{a}} xy = \log_{\mathrm{a}} x + \log_{\mathrm{a}} y \quad ; \quad \log_{\mathrm{a}} \frac{x}{y} = \log_{\mathrm{a}} x - \log_{\mathrm{a}} y \quad ; \quad \log_{\mathrm{a}} x^n = n \log_{\mathrm{a}} x \quad ;$$

$$\log_{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}} x = \frac{1}{n} \log_{\mathrm{a}} x \quad ; \quad \log_{\mathrm{a}} a = 1 \qquad \operatorname{colog}_a x = -\log_{\mathrm{a}} x \quad ; \quad a^{\log_a x} = x$$

●**Relation entre logarithme de bases différentes :**

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{\frac{\ln b}{\ln a}} = \frac{\log_a x}{\log_a b} \Longrightarrow \boldsymbol{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

FONCTIONS EXPONENTIELLES :

●**Définition :** On appelle fonction exponentielle et on note (e^x) la réciproque de la fonction ($\ln x$) strictement croissante

●**Propriétés algébriques** : $e^{ab} = e^a \times e^b$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $e^{an} = (e^a)^n$;

$e^a > e^b$ si $a > b$; $e^{\ln a} = a$; $e^x = a$ alors $x = \ln a$; $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

●**Ensemble de définition :**

Si $f(x) = e^x$ alors $D_f = \mathbb{R}$

Si $f(x) = e^u$ alors $D_f = D_u$

●**Dérivée d'une fonction (e^x)**

La dérivée de la fonction $f(x) = e^u$ s'écrit sous la forme $f^{'}(x) = u'e^u$

●**Limite des fonctions (e^x)**

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (e^x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} (xe^{-x}) = 0$$

●**Croissance comparée :**

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{\ln x}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{e^x}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to0} (x^\alpha \ln x) = 0$$

Eléments de symétrie :

●**AXE DE SYMETRIE** : Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$

Pour démontrer que (Δ) est un axe de symétrie à la courbe (C) de f, on procède comme suit :

1ère Méthode : On doit montrer que la fonction $f(x + a)$ est paire

2ème Méthode : On doit montrer que $f(2a - x) = f(x)$

3ème Méthode : On doit montrer que $f(a + x) = f(a - x)$

CO

●**CENTRE DE SYMETRIE :** Soit $M(a;b)$ un point du plan

Pour démontrer que M est un centre de symétrie à la courbe (C) de f, on procède comme suit :

1ère Méthode : On doit montrer que la fonction $f(x+a)-b$ est impaire

2ème Méthode : On doit montrer que $f(2a-x)+f(x)=2b$

3ème Méthode : On doit montrer que $\frac{f(a+x)+f(a-x)}{2}=b$

PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION TRIGONOMETRIQUE

Fonction périodique : Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si $\forall x \in R;\ \exists k \in Z\ \ tel\ que: f(x+kT)=f(x)$

NB : Si une fonction f est périodique de période T, étudier cette fonction revient à l'étudier dans un intervalle de longueur T : $I=\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\ \ et\ \ E=\left]-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[\cap D_f$ puis on complète la représentation par une translation de vecteur $T_{\vec{i}}$ suivant le sens positif ou négatif

PERIODE DE CERTAINES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Soit f une fonction ayant pour période T et g une fonction de période T'

Les fonctions $f+g$; $f-g$; $f\times g\ \ et\ \ \frac{f}{g}$ ont pour période $t=PPCM(T\,;T')$

■ $\sin x$ alors $T=2\pi$ $\cos x$ alors $T=2\pi$

■ $\sin ax$ alors $T=\frac{2\pi}{a}$ $\cos ax$ alors $T=\frac{2\pi}{a}$

■ $\sin^2 x$ alors $T=\pi$ $\cos^2 x$ alors $T=\pi$

■ $\tan x$ alors $T=\pi$ $\tan ax$ alors $T=\frac{\pi}{a}$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Résoudre dans R les équations suivantes :

1) $\ln(x-6)+\ln(x+1)=\ln 4+\ln 2$ **2)** $\ln(x+5)+\ln(x-2)=\ln 8$

3) $\ln\sqrt{3x-1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln(x-2)$ 4) $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

5) $(\log x)(\log x-5)=0$ 6) $(\log x)^2=\log x$ 7) $(\log x)^2+\log x-2=0$

8) $2\log(x-1)=\log(x-2)$ 9) $(\ln x)^2=\ln x^2$ 10) $(2\ln x)^2+10\ln x-6=0$;

11) $\frac{(x-1)(\log x+1)}{\log x}=0$ 12) $6-5\log^2 x=13\log x$

13) $\ln|x+1|+\ln|x+5|=\ln 15$ 14) $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$ 15) $e^{2x}-5e^{x}+4=0$

16) $e^{2x}-2e^{x}-3=0$ 17) $2^{x+1}-10\times 2^{-x}+12=0$ 18) $4^{x}+2^{x+1}-3=0$

19) $9^{x}-3^{x+1}-10=0$ 20) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{x}}=16^{x}$ 21) $6^{\frac{1}{2}+\log_6 \sin x}+2^{\frac{1}{2}+\log_2 \cos x}=\sqrt{2}$

22) $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}+\log_x \sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a$ où $\begin{cases}a>0\\ a\neq 1\end{cases}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Résolvons dans R les équations suivantes :

1) $\mathbf{\ln(x-6)+\ln(x+1)=\ln 4+\ln 2}$

●**Domaine de validité** : $D_V=\{\forall x\in R; x-6>0\ ;\ \ x+1>0\}\Rightarrow\begin{cases}x>6\\ x>-1\end{cases}$ alors $\begin{cases}x\in\,]6;\,+\infty[\\ x\in\,]-1;\,+\infty[\end{cases}$

$D_V=\,]6;\,+\infty[\,\cap\,]-1;\,+\infty[\,=\,]6;\,+\infty[$ alors $\boldsymbol{D_V=\,]6;\,+\infty[}\Rightarrow$

$\ln(x-6)+\ln(x+1)=\ln 4+\ln 2\Rightarrow \ln(x-6)(x+1)=\ln 8\Rightarrow (x-6)(x+1)=8\Rightarrow$

$x^2-5x-6-8=0\Rightarrow x^2-5x-14=0\Rightarrow \Delta=(-5)^2-4(-14)=25+56=81$

alors $\sqrt{\Delta}=9\ \Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5-9}{2}=-2\notin D_V\\ x_1=\frac{5+9}{2}=7\end{cases}$ **D'où** $\boldsymbol{S=\{7\}}$

2) $\mathbf{\ln(x+5)+\ln(x-2)=\ln 8}$

●**Domaine de validité** :$D_V=\{\forall x\in R; x+5>0\ ;\ \ x-2>0\}\Rightarrow\begin{cases}x>-5\\ x>2\end{cases}$ alors $\begin{cases}x\in\,]-5;\,+\infty[\\ x\in\,]2;\,+\infty[\end{cases}$

$D_V=\,]-5;\,+\infty[\,\cap\,]2;\,+\infty[\,=\,]2;\,+\infty[$ alors $\boldsymbol{D_V=\,]2;\,+\infty[}$

$\ln(x+5)+\ln(x-2)=\ln 8\Rightarrow \ln(x+5)(x-2)=\ln 8\Rightarrow (x+5)(x-2)=8$

$\Rightarrow x^2+3x-10-8=0$

$\Rightarrow x^2+3x-18=0\Rightarrow \Delta=(3)^2-4(-18)=9+72=81$ alors $\sqrt{\Delta}=9\ \Rightarrow$

$\begin{cases}x_1=\frac{-3.-9}{2}=-6\notin D_V\\ x_1=\frac{-3+9}{2}=3\end{cases}$ **D'où** $\boldsymbol{S=\{3\}}$

3) $\mathbf{\ln\sqrt{3x-1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln(x-2)}$

●**Domaine de validité** : $D_V=\{\forall x\in R; 3x-1>0\,; x-1>0\,;\ x-2>0\}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\ x>1\\ x>2\end{cases}$

alors $\begin{cases}x\in\left]\frac{1}{3};\,+\infty\right[\\ x\in\,]1;\,+\infty[\\ x\in\,]2;\,+\infty[\end{cases}D_V=\left]\frac{1}{3};\,+\infty\right[\cap\,]2;\,+\infty[\,\cap\,]1;+\infty[\,=\,]2;\,+\infty[$ alors $\boldsymbol{D_V=\,]2;\,+\infty[}$

$$\ln\sqrt{3x-1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln(x-2) \Rightarrow \ln\sqrt{(3x-1)(x-1)}=\ln(x-2) \Rightarrow$$
$$\sqrt{(3x-1)(x-1)}=x-2 \Rightarrow (3x-1)(x-1)=(x-2)^2 \Rightarrow 3x^2-4x+1=x^2-4x+4$$
$$\Rightarrow 2x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-\sqrt{6}}{2} \notin D_V \\ x_1=\frac{\sqrt{6}}{2} \notin D_V \end{cases} \textbf{D'où} \quad \boldsymbol{S}=\{\emptyset\}$$

4) $(\mathbf{lnx})^2-\mathbf{2lnx}-\mathbf{3}=\mathbf{0}$ On pose $\ln x=t$ on a : $t^2-2t-3=0$

comme $b=a+c$ alors $\begin{cases} t=-1 \\ t_2=-\frac{c}{a}=3 \end{cases}$ Mais $\ln x=t$ alors $x=e^t \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=e^{-1} \\ x=e^3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{e^{-1}};\ \boldsymbol{e^3}\}$$

5) $(\mathbf{logx})(\mathbf{logx}-\mathbf{5})=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \log x=0 \\ \log x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^{\log x}=10^0 \\ \log x=5 \Rightarrow 10^{\log x}=10^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=10^5 \end{cases} \Rightarrow$

$$\mathbf{S}=\{\mathbf{1};\ \mathbf{10^5}\}$$

6) $(\mathbf{logx})^2=\mathbf{logx} \Rightarrow (\log x)^2-\log x=0 \Rightarrow (\log x)(\log x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \log x=0 \\ \log x-1=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 10^{\log x}=10^0 \\ \log x=1 \Rightarrow 10^{\log x}=10^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=10 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{S}=\{\mathbf{1};\ \mathbf{10}\}$$

7) $(\mathbf{logx})^2+\mathbf{logx}-\mathbf{2}=\mathbf{0}$ on pose $\log x=t$ on a : $t^2+t-2=0$ comme $a+b+c=0$

alors $\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-2 \end{cases}$ mais $\log x=t \Rightarrow x=10^t$ alors $\begin{cases} x=10^1=10 \\ x=10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}=\{\mathbf{10};\ \mathbf{10^{-2}}\}$

8) $\mathbf{2log(x-1)}=\mathbf{log(x-2)}$

●**Domaine de validité** : $D_V=\{\forall x\in R; x-1>0\,; x-2>0\} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x\in\,]1;+\infty[\\ x\in\,]2;+\infty[\end{cases}$

$D_V=\,]2;+\infty[\,\cap\,]1;+\infty[\,=\,]2;+\infty[$ alors $\boldsymbol{D_V}=\,]\mathbf{2};+\boldsymbol{\infty}[$

$2\log(x-1)=\log(x-2) \Rightarrow \log(x-1)^2=\log(x-2) \Rightarrow (x-1)^2=(x-1) \Rightarrow$

$$x^2-2x+1=x-2 \Rightarrow x^2-3x+3=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(3)=9-12=-3<0$$

alors $\boldsymbol{S}=\{\emptyset\}$

9) $(\mathbf{lnx})^2=\mathbf{lnx^2} \Rightarrow (\ln x)^2=2\ln x \Rightarrow (\ln x)^2-2\ln x=0 \Rightarrow (\ln x)(\ln x-2)=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \ln x=0 \\ \ln x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \ln x=2 \Rightarrow x=e^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{S}=\{\mathbf{1};\ \mathbf{e^2}\}$$

10) $(\mathbf{2lnx})^2+\mathbf{10lnx}-\mathbf{6}=\mathbf{0} \Rightarrow 4(\ln x)^2+10\ln x-6=0$ on pose $\ln x=t$ on a :

$$4t^2+10t-6=0 \Rightarrow 2t^2+5t-3=0 \Rightarrow \Delta=5^2-4(2)(-3)=25+24=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{-5-7}{4}=-\dfrac{12}{4}=-3 \\ t_2=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{mais } \ln x=t \text{ alors } x=e^t \Rightarrow \begin{cases} x=e^{-3} \\ x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{S}=\left\{\mathbf{e^{-3}};\ \sqrt{\mathbf{e}}\right\}$$

11) $\dfrac{(\mathbf{x-1})(\mathbf{logx+1})}{\mathbf{logx}}=\mathbf{0}$

●**Domaine de validité** : $D_V=\{\forall x\in R; x>0\ et \log x\neq 0\} \Rightarrow x\neq 1$ alors

$$\boldsymbol{D_V}=\,]\mathbf{0};\mathbf{1}[\,\cup\,]\mathbf{1};+\boldsymbol{\infty}[$$

$$\frac{(x-1)(\log x+1)}{\log x}=0 \Rightarrow (x-1)(\log x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \log x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \log x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=10^{-1}$$

D'où $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{10^{-1}}\}$

12) $\mathbf{6}-\mathbf{5log^2x}=\mathbf{13logx} \Rightarrow 5(\log x)^2+13\log x-6=0$ on pose $\log x=t$ on a:

$5t^2+13t-6=0 \Rightarrow \Delta=13^2-4(5)(-6)=169+120=389 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=17 \Rightarrow$

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{-13-17}{10}=-3 \\ t_1=\dfrac{-13+17}{10}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5} \end{cases} \text{mais } \log x=t \text{ alors } x=10^t \Rightarrow \begin{cases} x=10^{-3} \\ x=10^{\frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{S}=\left\{\mathbf{10^{-3}};\ \mathbf{10^{\frac{2}{5}}}\right\}$$

13) $\mathbf{ln|x+1|}+\mathbf{ln|x+5|}=\mathbf{ln15}$

●**Domaine de validité** : $D_V = \{\forall x \in R ; x+1 \neq 0 \ et \ x+5 \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -5 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{D_V = R \setminus \{-1.-5\}}$

$$\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 15 \Longrightarrow \ln|(x+1)(x+5)| = \ln 15 \Longrightarrow |(x+1)(x+5)| = 15 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+5) = 15 \\ (x+1)(x+5) = -15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5-15=0 \\ x^2+6x+5+15=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+6x-10=0 \\ x^2+6x+20=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta = 36+40 = 76 \\ \Delta = 36-80 < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6-2\sqrt{19}}{2} = -3-\sqrt{19} \\ x_1 = \dfrac{-6+2\sqrt{19}}{2} = -3+\sqrt{19} \end{cases} \Longrightarrow \ \mathbf{S} = \{\mathbf{-3-\sqrt{19}};\ \mathbf{-3+\sqrt{19}}\}$$

14) $\mathbf{e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0}$ on pose $t = e^{-x}$ avec $t > 0$ on a: $t^2 - 7t + 6 = 0$
comme $a+b+c = 0$

alors $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \dfrac{c}{a} = 6 \end{cases}$ mais $t = e^{-x}$ alors $x = -\ln t \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\ln 6 \end{cases}$ $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{-\ln 6}\}$

15) $\mathbf{e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0}$ on pose $t = e^{x}$ avec $t > 0$ *on a* : $t^2 - 5t + 4 = 0$

comme $a+b+c = 0$ alors $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \dfrac{c}{a} = 4 \end{cases}$ mais $t = e^x$ alors $x = \ln t \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{\ln 4}\}$

16) $\mathbf{e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0}$ on pose $t = e^{x}$ avec $t > 0$ *on a* : $t^2 - 2t - 3 = 0$ comme $b = a + c$

alors $\begin{cases} t_1 = -1 < 0 \\ t_2 = -\dfrac{c}{a} = 3 \end{cases}$ mais $t = e^x$ alors $x = \ln t \Longrightarrow$ $x = \ln 3$ d'où $\mathbf{S} = \{\mathbf{\ln 3}\}$

17) $\mathbf{2^{x+1} + 10 \times 2^{-x} - 12 = 0} \Longrightarrow 2 \times 2^x + 10 \times \dfrac{1}{2^x} - 12 = 0 \Longrightarrow 2 \times 2^{2x} - 12 \times 2^x + 10 = 0$

on pose $t = 2^x$ avec $t > 0$ *on a* : $2t^2 - 12t + 10 = 0$ comme $a+b+c = 0$

alors $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \dfrac{c}{a} = 5 \end{cases}$ mais $t = 2^x$ alors $x = \log_2 t \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 5 \end{cases}$ $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{\log_2 5}\}$

18) $\mathbf{4^x + 2^{x+1} - 3 = 0} \Longrightarrow 2^{2x} + 2 \times 2^x - 3 = 0$ on pose $t = 2^x$ avec $t > 0$

on a : $t^2 + 2t - 3 = 0$ comme $a+b+c = 0$ alors $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = -3 < 0 \end{cases}$

mais $t = 2^x$ alors $x = \log_2 t \Longrightarrow x = \log_2 1 = 0$ $\mathbf{S} = \{\ \mathbf{0}\ \}$

19) $\mathbf{9^x - 3^{x+1} - 10 = 0} \Longrightarrow 3^{2x} - 3 \times 3^x - 10 = 0$ on pose $t = 3^x$ avec $t > 0$

on a : $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Longrightarrow \Delta = 9 - 4(-10) = 9 + 40 = 49 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \ \text{alors} \begin{cases} t_1 = \dfrac{3-7}{2} = -2 < 0 \\ t_2 = \dfrac{3+7}{2} = 5 \end{cases}$$

mais $t = 3^x$ alors $x = \log_3 t \Longrightarrow x = \log_3 5 = 0$ $\mathbf{S} = \{\ \log_3 5\ \}$

20) $\mathbf{(\sqrt{2})^{\frac{1}{x}} = 16^x} \Longrightarrow 2^{\frac{1}{2x}} = 2^{4x} \Longrightarrow \frac{1}{2x} = 4x \Longrightarrow 8x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Longrightarrow$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{8} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{8} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow \mathbf{S} = \left\{\pm\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}\right\}$$

21) $\mathbf{6^{\frac{1}{2}+\log_6 \sin x} + 2^{\frac{1}{2}+\log_2 \cos x} = \sqrt{2}} \Longrightarrow 6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\log_6 \sin x} + 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\log_2 \cos x} = \sqrt{\mathbf{2}}$

$\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = \mathbf{1}$ *on pose* $Z = 1 + i\sqrt{3}$ *et on a*:

$|Z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ *et* $\arg Z = \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ alors l'équation devient:

$$\cos(x-\theta)=\frac{c}{|Z|}\Longrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Longrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=2k\pi\end{cases}\Longrightarrow\ \mathbf{S}=\left\{\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}+\mathbf{2k\pi};\mathbf{2k\pi}\right\}$$

22) $\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a$ **où** $\begin{cases}a>0\\a\neq 1\end{cases}\Longrightarrow \mathbf{D_V}=]\mathbf{0};\mathbf{1}[\cup]\mathbf{1};+\infty[$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\log_a ax+\frac{1}{4}\log_x ax}+\sqrt{\frac{1}{4}\log_a\frac{x}{a}+\frac{1}{4}\log_x\frac{a}{x}}=a\Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a ax+\log_x ax)}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\log_a\frac{x}{a}-\log_x\frac{x}{a}\right)}=a\Longrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln ax}{\ln a}+\frac{\ln ax}{\ln x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln\frac{x}{a}}{\ln a}-\frac{\ln\frac{x}{a}}{\ln x}}=a\Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(\ln x)(\ln ax)+(\ln a)(\ln ax)}{(\ln a)(\ln x)}}+\sqrt{\frac{(\ln x)\left(\ln\frac{x}{a}\right)-(\ln a)\left(\ln\frac{x}{a}\right)}{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(\ln ax)(\ln a+\ln x)}{(\ln a)(\ln x)}}+\sqrt{\frac{\left(\ln\frac{x}{a}\right)(\ln x-\ln a)}{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow\sqrt{\frac{(\ln ax)^2}{(\ln a)(\ln x)}}+\sqrt{\frac{\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2}{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow$$

$$\frac{\ln ax}{\sqrt{(\ln a)(\ln x)}}+\frac{\ln\frac{x}{a}}{\sqrt{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow\frac{\ln(ax)\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow\frac{\ln x^2}{\sqrt{(\ln a)(\ln x)}}=2a\Longrightarrow$$

$$2\ln x=2a\sqrt{(\ln a)(\ln x)}\Longrightarrow 4(\ln x)^2=4a^2(\ln a)(\ln x)\Longrightarrow(\ln x)^2-a^2(\ln a)(\ln x)=0$$

$$\Longrightarrow(\ln x)(\ln x-a^2\ln a)=0\Longrightarrow\begin{cases}\ln x=0\\\ln x-\ln a^{a^2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x=a^{a^2}\end{cases}\quad \text{D'où }\ \mathbf{S}=\left\{\mathbf{a}^{\mathbf{a^2}}\right\}$$

+++

EXERCICE 2:

Résoudre dans R les équations suivantes :

1) $x^{\log_5 x}=125x^2$ 2) $cos^2(\ln x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\ln(x)^2)-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

++++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++++

Résolvons dans R les équations suivantes :

1) $x^{\log_5 x}=125x^2\Longrightarrow\log_x x^{\log_5 x}=\log_x 125x^2\Longrightarrow\quad\log_5 x=\log_x 125+\log_x x^2\Longrightarrow$

$\log_5 x=\log_x 5^3+2\log_x x\Longrightarrow\log_5 x=3\log_x 5+2\Longrightarrow\log_5 x-3\log_x 5-2=0$

Mais $\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x}$, *on a* : $\log_5 x-3\frac{1}{\log_5 x}-2=0\Longrightarrow(\log_5 x)^2-3-2\log_5 x=0$

$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-3=0$ posons $\log_5 x=t$, $t^2-2t-3=0\Longrightarrow b=a+c\Longrightarrow$

$$\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{cases} \text{ mais } \log_5 x = t \Longrightarrow 5^{\log_5 x} = 5^t \Longrightarrow x = 5^t \text{ alors } \begin{cases} x_1 = 5^{-1} \\ x_2 = 5^3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\,;\mathbf{5^3}\right\}$$

2) $\cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\ln(x)^2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\ln x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On pose $\ln x = t$; on a: $\cos^2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mais $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$, on a

$$\frac{1}{2}(\cos 2t + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos 2t + \sqrt{3}\sin(2t) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos 2t + \sqrt{3}\sin(2t) = \sqrt{2}$$

On pose $Z = 1 + i\sqrt{3} \Longrightarrow |Z| = 2$ *et* $\arg Z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ 2t = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \frac{7\pi}{24} + k\pi \\ t = \frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases}$$

Mais $\ln x = t \Longrightarrow x = e^t$ alors $\begin{cases} x = e^{\frac{7\pi}{24}+k\pi} \\ x = e^{\frac{\pi}{24}+k\pi} \end{cases}$ d'où $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{e^{\frac{7\pi}{24}+k\pi}};\ \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{24}+k\pi}}\right\}$

++

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier les variations de f
2) Montrer que (C) admet un point d'inflexion Ω dont on précisera les coordonnées
3) Etudier les branches infinies de (C)
4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$
5) Montrer que f réalise une bijection de l'ensemble J que l'on déterminera

   Donner le domaine de définition de f^{-1} bijection réciproque de f
6) Déterminer $f^{-1}(x)$
7) Soit (C^{-1}) la courbe représentative de f^{-1}

Construire dans un même repère les courbes (C) et (C^{-1})

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudions les variations de f

●Domaine de définition : $\boldsymbol{D_f = R =]-\infty;\ +\infty[}$

●Calcul de limites :

$$-\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = 0$$

$$-\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = 2$$

●<u>Dérivons f :</u> $f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

●<u>Tableau de variations</u> :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f(x)	0 ↗ 2

2) Montrons que (C) admet un point d'inflexion Ω dont on précisera les coordonnées

Pour cela on calcule $f''(x)$: $f''(x) = \left(\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{\left((x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x^2+1)^3}$

$$f''(x) = -\frac{2x\sqrt{x^2+1} + \frac{2x(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)^3} = -\frac{\frac{2x(x^2+1) + x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)^3} \Longrightarrow$$

$$f''(x) = -\frac{3x(x^2+1)}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}} \quad \text{on pose } f''(x) = 0; \quad \text{on a : } \begin{cases} 3x = 0 \\ x^2+1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0$$

Avec $f(0) = 1$ d'où $\Omega(0; 1)$

3) Etudions les branches infinies de (C)

●AV n'existe pas car $D_f = R$ ●AH $y = 0$ à $-\infty$ et $y = 2$ à $+\infty$

●AO n'existe car a=0 mais (C) admet une branche parabolique de direction (OI)

4) Montrons que l'équation $\mathbf{f(x) = x}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha \in]1; 2[}$

$$f(x) = x \Longrightarrow f(x) - x = 0 \;\text{ on pose }\; g(x) = f(x) - x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $g(1) \times g(2) < 0$

$$\begin{cases} g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7 \\ g(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} - 2 = 0{,}89 - 1 = -0{,}11 \end{cases} \quad \text{alors } 0{,}7(-0{,}11) = -0{,}077 < 0$$

5) Montrons que f réalise une bijection de R vers l'ensemble J que l'on déterminera

Comme f est strictement croissante sur R alors elle réalise une bijection de R vers $f(R) = J =]0; 2[$

Le domaine de définition de f^{-1} est $J =]0; 2[$

6) Déterminons $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$

On pose $f(x) = y \Longrightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y - 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = (y-1)^2 \Longrightarrow$

$$x^2 = (x^2+1)(y-1)^2 \Longrightarrow x^2 = x^2(y-1)^2 + (y-1)^2 \Longrightarrow$$

$$x^2(1 - (y-1)^2) = (y-1)^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{(y-1)^2}{(1-y+1)(1+y-1)} = \frac{(y-1)^2}{y(2-y)} \Longrightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{(y-1)^2}{y(2-y)}} = \frac{y-1}{\sqrt{y(2-y)}} \Longrightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}}$$

7) Soit (C^{-1}) la courbe représentative de $\boldsymbol{f^{-1}}$

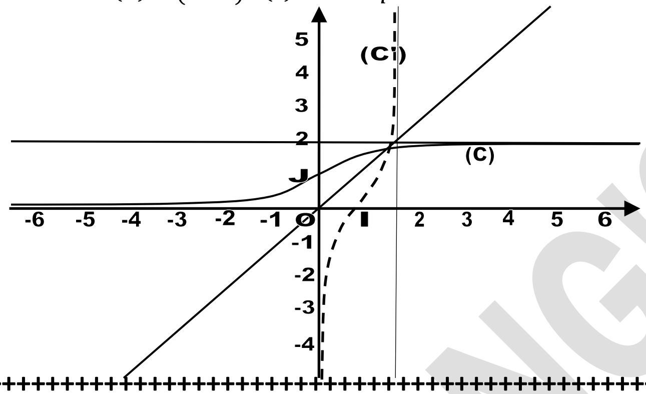
Construisons dans un même repère les courbes (C) et (C^{-1})

●Branches infinies : $AV: \nexists$; $AH: y = 0$ et $y = 2$ $AO \nexists$

●Intersection avec les axes :

$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \Longrightarrow \mathrm{f}(0) =$ $d'où$ $A(0;\ 1)$

$-(C) \cap (x'Ox): \mathrm{f(x)} > 0 \Longrightarrow$ $pas\ d'intersection$



++

EXERCICE 4:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C) sa courbe représentative

1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3) Etudier les variations de f
4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C)
5) Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.
6) Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$ le point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est une distance constante du point $\Omega\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire la nature de (C) sur l'intervalle $[1; 5]$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C) sa courbe représentative

1) Exprimons $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1 \ \ où \ \ x = 5$$

x	$-\infty$	1	5 $+\infty$
$x^2 - 6x + 5$	$+$	$-$	$+$
$\lvert x^2 - 6x + 5\rvert$	$x^2 - 6x + 5$	$-x^2 + 6x - 5$	$x^2 - 6x + 5$
$f(x)$	$\sqrt{x^2 - 6x + 5}$	$\sqrt{-x^2 + 6x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 6x + 5}$

D'où $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \ \ si \ \ x \in]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \ \ si \ \ x \in]1; 5[\\ f(1) = f(5) = 0 \end{cases}$

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition,

●<u>Continuité :</u> Comme $D_f = R$ et que $f(1) = f(5) = 0$ alors f est continue sur son ensemble de définition

●<u>Dérivabilité en 1 et 5:</u>f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = l$ avec $l \in R$

Dérivons la fonction f :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}} = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} & si\ \ x \in]-\infty;1[\cup]5;+\infty[\\ f'(x) = \dfrac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} = \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}} & si\ \ x \in]1;5[\end{cases}$$

+ En 1 on a : $\begin{cases} f'_g(1) = \frac{1-3}{\sqrt{1^2-6+5}} = -\frac{2}{0^+} = -\infty \\ f'_d(1) = \frac{-1+3}{\sqrt{-1^2+6-5}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$ alors f n'est pas dérivable en 1

+ En 5 on a : $\begin{cases} f'_g(5) = \frac{-5+3}{\sqrt{-5^2+30-5}} = -\frac{2}{0^+} = -\infty \\ f'_d(5) = \frac{5-3}{\sqrt{5^2-30+5}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$ alors f n'est pas dérivable en 5

(C) admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et 5

3) Etudions les variations de f

●Domaine de définition : $D_f = R$

●Calcul de limites :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{|x^2-6x+5|} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{|x^2|} = \lim_{x\to\pm\infty} |x| = |\pm\infty| = +\infty$$

●Tableau de variations : comme

$$\begin{cases} f'_1(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} & si\ \ x \in]-\infty;1[\cup]5;+\infty[\\ f'_2(x) = \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}} & si\ \ x \in]1;5[\end{cases} \quad \text{on pose } f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 3$$

Avec $f(3) = \sqrt{|3^2-6(3)+5|} = \sqrt{|9-18+5|} = \sqrt{4} = 2$

x	$-\infty$ 1	1 3	3 5	5 $+\infty$
$f'_1(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'_2(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f(x)	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow 2$	$2 \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$

4) Démontrons que les droites d'équations $y = x - 3$ *et* $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C)

●Pour $y = x - 3$; on a :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+5} - x + 3\right) = \lim_{x\to+\infty} (|x| - x) = \lim_{x\to+\infty} (x - x) = 0$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$ **cqfd**

●Pour $y = -x + 3$; on a :

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+5} + x - 3\right) = \lim_{x\to-\infty} (|x| + x) = \lim_{x\to-\infty} (-x + x) = 0$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0$ **cqfd**

5) Traçons (C) et démontrons qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.

Sur le graphique on voit que l'axe de symétrie a pour équation $x = 3$

<u>Démonstration :</u>

1ère Méthode : $\mathrm{f(a + x)}$ est paire

$f(3 + x) = \sqrt{|(3 + x)^2 - 6(3 + x) + 5|} = \sqrt{|x^2 + 6x + 9 - 18 - 6x + 5|} = \sqrt{|x^2 - 4|}$

On pose $\mathrm{g(x)} = \sqrt{|\mathrm{x}^2 - 4|}$; $\mathrm{g(-x)} = \sqrt{|(-\mathrm{x})^2 - 4|} = \sqrt{|\mathrm{x}^2 - 4|} = \mathrm{g(x)}$ alors g est paire

2ème Méthode : $f(2a - x) = f(x)$

$$f(6 - x) = \sqrt{|(6 - x)^2 - 6(6 - x) + 5|} = \sqrt{|x^2 - 12x + 36 - 36 + 6x + 5|}$$

$$f(6 - x) = \sqrt{|\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 5|} = \mathrm{f(x)}\ \text{d'où } \mathbf{f(6 - x) = f(x)}\ \ \mathbf{cqfd}$$

2ème Méthode : $f(a - x) = f(a + x)$

$$f(3 + x) = \sqrt{|(3 + x)^2 - 6(3 + x) + 5|} = \sqrt{|x^2 + 6x + 9 - 18 - 6x + 5|} = \sqrt{|x^2 - 4|}$$

$$f(3 - x) = \sqrt{|(3 - x)^2 - 6(3 - x) + 5|} = \sqrt{|x^2 - 6x + 9 - 18 + 6x + 5|} = \sqrt{|x^2 - 4|}$$

D'où $\mathbf{f(3 - x) = f(3 + x)}$ $\mathbf{cqfd}$

6) **Démontrons que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$ le point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est une distance constante du point $\Omega\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

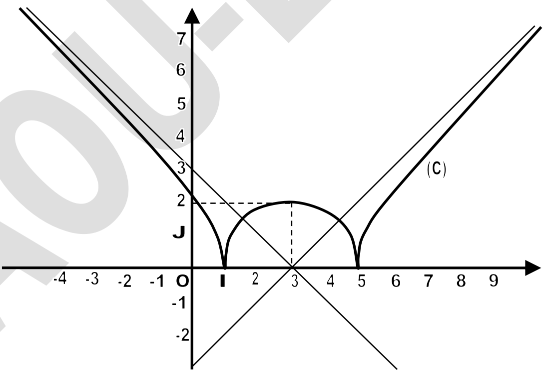
Pour cela calculons la distance ΩM:

$$\Omega M = \sqrt{(x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (f(x) - 0)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + \left(f(x)\right)^2}$$

$\Omega M = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + \left(\sqrt{-x^2 + 6x - 5}\right)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5} = 2$ alors $\boldsymbol{\Omega M = 2}$

Déduisons-en la nature de (C) sur l'intervalle $[1; 5]$

(C) est un demi cercle de centre Ω et de rayon R=2



++

EXERCICE 5:

Soit la fonction f définie R par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Vérifier que f définie sur R
2) Calculer les nombres réels $a\ et\ b$ pour que (C) passe par le point A(2 ; 0) et admette au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$
3) On considère la fonction g définie sur R par $\mathrm{g(x)} = \frac{(\mathrm{x}-2)^2}{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+2}$

a) Etudier les variations de g et les limites de g

b) Montrer que la courbe (C) représentative de g admet une asymptote

c) Montrer que le point I(1 ; 1) est un centre de symétrie

d) Construire (C) dans un repère orthonormal

4) a) Soit m un nombre réel. Utiliser (C) pour résoudre graphiquement l'équation où l'inconnue est x : $x^2(m-1)+2x(2-m)+2(m-2)=0$

b) Vérifier ces résultats par le calcul

+++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) Vérifions que f définie sur R

$D_f=\{\forall x\in R: x^2-2x+2\neq 0\}$; $\Delta=4-4\times 2=-4<0$ alors $\mathbf{D_f=R}$

2) Calculons les nombres réels a et b pour que (C) passe par le point A(2 ; 0) et admette au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-2x$

●(C) passe par le point $A(2\ ;\ 0)$ si et seulement si $f(2)=0\Longrightarrow 2^2+2a+b=0\Longrightarrow$

$$2a+b=-4$$

●(C) admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-2x$

Si et seulement si $f'(1)=-2\Longrightarrow f'(x)=\frac{-(2+a)x^2+(4-2b)x+2a+2b}{(x^2-2x+2)^2}$

$$f'(1)=\frac{-2-a+4-2b+2a+2b}{(1^2-2+2)^2}=-2\Rightarrow a+2=-2\Rightarrow a=-4$$

Alors $2(-4)+b=-4\Longrightarrow b=4$ d'où $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2}=\frac{(x-4)^2}{x^2-2x+2}$

3) On considère la fonction g définie sur R par $g(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$

a) Etudions les variations de g et les limites de g

●Domaine de définition : $D_g=R$

●Calcul de limites : $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=1$

●Dérivée de g : $g'(x)=\frac{-(2+a)x^2+(4-2b)x+2a+2b}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2x^2-4x}{x^2-2x+2}$ d'où $g'(x)=\frac{2x^2-4x}{x^2-2x+2}$

On pose g'(x)=0 on a : x=0 où x=2 avec $g(0)=2$ et $g(2)=0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

b) Montrons que la courbe (C) représentative de g admet une asymptote

Comme $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=1$ alors la droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C)

c) Montrons que le point I(1 ; 1) est un centre de symétrie

Vérifions si $g(2a-x)+g(x)=2b$

$$g(2-x)+g(x)=\frac{(2-x-2)^2}{(2-x)^2-2(2-x)+2}+\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}=$$

$$=\frac{x^2}{4-4x+x^2-4+2x+2}+\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}=\frac{x^2}{x^2-2x+2}+\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}=$$

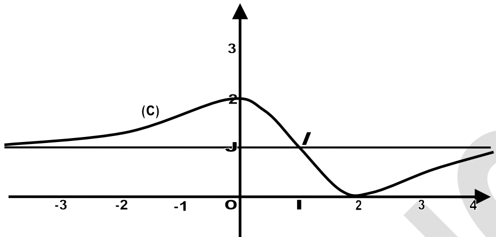
$$\frac{x^2+(x-2)^2}{x^2-2x+2}=\frac{x^2+x^2-4x+4}{x^2-2x+2}=\frac{2(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2}=2 \Longrightarrow .\, \mathrm{g}(2-\mathrm{x})+\mathrm{g}(\mathrm{x})=2$$

d) Construisons (C) dans un repère orthonormal

●Branches infinies : $AV: \nexists\ ; AH: y=1\ \ et\ \ AO \nexists$

●Intersection avec les axes :$-(C)\cap(y'Oy): x=0 \Longrightarrow \mathrm{g}(0)=2\ \ d'où\ B(0;\ 2)$

$$-(C)\cap(x'Ox): \mathrm{g}(\mathrm{x})=0 \Longrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}=0\ \Longrightarrow x=2\ \ d'où\ A(2;0)$$



4) a) Soit m un nombre réel. Utilisons (C) pour résoudre graphiquement l'équation où l'inconnue est x : $\boldsymbol{x^2(m-1)+2x(2-m)+2(m-2)=0}$

$$mx^2-x^2+4x-2mx+2m-4=0 \Longrightarrow m(x^2-2x+2)=x^2-4x+4 \Longrightarrow$$

$$m=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2}=\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}=\mathrm{g}(\mathrm{x}) \Longrightarrow \mathrm{g}(\mathrm{x})=m$$

●Si $\mathrm{m} \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]2; +\infty[$ l'équation n'a pas de solution

●Si $\mathrm{m} \in\ ]0; 2[$ l'équation admet deux solutions

●Si $\mathrm{m}=0$ où $\mathrm{m}=2$ l'équation admet une solution

b) Vérifions ces résultats par le calcul

$$x^2(m-1)+2x(2-m)+2(m-2)=0 \Longrightarrow \Delta=(4-2m)^2-4(m-1)(2m-4)$$

$$\Delta=16-16m+4m^2-4(2m^2-4m-2m+4)=-4m^2+8m$$

Etudions le signe de Δ: On pose $\Delta=0$; $-4m^2+8m=-4m(m-2)=0 \Longrightarrow \begin{cases}-4m=0 \Longrightarrow m=0\\ m-2=0 \Longrightarrow m=2\end{cases}$

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Δ	$-$		$+$	$-$

●Si $\mathrm{m} \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]2; +\infty[$ l'équation n'a pas de solution $car\ \Delta<0$

●Si $\mathrm{m} \in\ ]0; 2[$ l'équation admet deux solutions $car\ \Delta>0\ avec\ \ \sqrt{\Delta}=\sqrt{4m(2-m)}=$

$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{m(2-m)}\quad et\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-4+2m-2\sqrt{m(2-m)}}{2(m-1)}\\ x_2=\dfrac{-4+2m+2\sqrt{m(2-m)}}{2(m-1)}\end{cases}$$

●Si $\mathrm{m}=0$ où $\mathrm{m}=2$ l'équation admet une solution car $\Delta=0$ avec $\mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2=\frac{-4+2m}{2(m-1)}$

$$-\mathrm{m}=0 \text{ alors } \mathrm{x}=2 \text{ et } \mathrm{m}=2 \text{ alors } \mathrm{x}=0$$

++

EXERCICE 6:

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+|x-2|}{|x+1|}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 2
2) Etudier les variations de f et tracer (C)

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 2

Ecrivons d'abord f sans le symbole « valeur absolue »

x	$-\infty$ $\quad$ -1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$f(x)$	$\dfrac{x^2-x+2}{-x-1}$	$\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$	$\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

D'où $\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2-x+2}{-x-1} & si\ x \in]-\infty;\ -1[\\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2-x+2}{x+1} & si\ x \in]-1;\ 2[\\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2+x-2}{x+1} & si\ x \in]2;\ +\infty[\end{cases}$

●**<u>Continuité</u> : En -1 on a** : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(1) = l\,;(l \in R)$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+|x-2|}{|x+1|}\right) = \frac{(-1)^2+|-1-2|}{|-1+1|} = \frac{1+3}{0^+} = +\infty$$

Alors f n'est pas continue en -1

●**<u>Continuité</u> : En 2 on a** : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = l\,;(l \in R)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+|x-2|}{|x+1|}\right) = \frac{(2)^2+|2-2|}{|2+1|} = \frac{4}{3} \in R \quad \boldsymbol{f(2) = \frac{4}{3}}$$

Alors f est continue en 2

●**<u>Dérivabilité</u> : En -1 on a** : $f'_g(2) = f'_d(2) = f'(2) = l\,;(l \in R)$

Comme f n'est pas continue en -1 alors elle n'est pas aussi dérivable

●**<u>Dérivabilité</u> : En 2 on a** : $\mathrm{f'_g(2) = f'_d(2) = f'(2) = l\,;(l \in R)}$

$$\begin{cases} \mathrm{f'_g(2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\mathrm{f(x)-f(2)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{x^2-x+2}{x+1} - \frac{4}{3}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{3x^2-3x+6-4x-4}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} \\ \mathrm{f'_d(2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\mathrm{f(x)-f(2)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{x^2+x-2}{x+1} - \frac{4}{3}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{3x^2+3x-6-4x-4}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{f'_g(2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{3x^2-7x+2}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\left(\frac{3x-1}{3}\right)}{(x+1)} = \dfrac{5}{9} \\ \mathrm{f'_d(2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2)}{3(x+1)}}{\mathrm{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\left(\frac{3x+5}{3}\right)}{(x+1)} = \dfrac{11}{9} \end{cases}$$

Comme $\mathbf{f'_g(2) \neq f'_d(2)}$ alors f n'est pas dérivable en 2

2) Etudions les variations de f et traçons (C)

●**<u>Domaine de définition</u>** : $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-1}\} =]\mathbf{-\infty};\ \mathbf{-1}[\cup]\mathbf{-1};\ \mathbf{+\infty}[$

●**<u>Calcul de limites</u>** : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-x+2}{-x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty}(-x) = +\infty$ alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty}(x) = +\infty \text{ alors } \boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2+|x-2|}{|x+1|}\right) = \frac{(-1)^2+|-1-2|}{|-1+1|} = \frac{1+3}{0^+} = +\infty \quad \boldsymbol{\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty}$$

●Dérivée de f : $\begin{cases} \boldsymbol{f_1}'(\boldsymbol{x}) = \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} & si\ x \in]-\infty;\ -1[\\ \boldsymbol{f_2}'(\boldsymbol{x}) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & si\ x \in]-1;\ 2[\\ \boldsymbol{f_3}'(\boldsymbol{x}) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} & si\ x \in]2;\ +\infty[\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=1\ ; x=-3\ \ et\ \ x\neq-1} \\ \boldsymbol{x=1\ \ ;\ \ x=-3\ \ \ et\ \ \ x\neq-1} \\ \boldsymbol{f_3}'(\boldsymbol{x}) > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$ $\quad$ -3	-1	1	2	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f_2'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f_3'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

●Les variations de f : $f(-3) = 7\ \ et\ \ f(1) = 1$

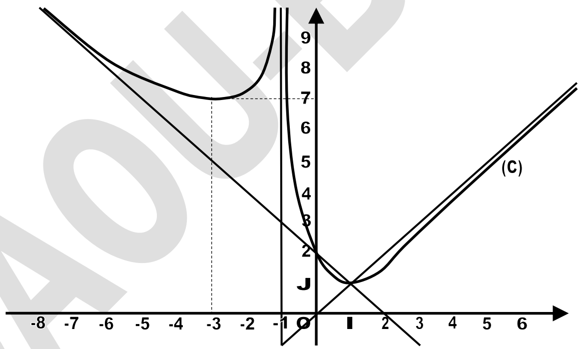
x	$-\infty$ $\quad$ -3	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 7$	$\nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 1$	$\nearrow \frac{4}{3}$	$\nearrow +\infty$

Branches infinies : $AV: x = -1\ \ AH: \nexists\ \ et\ AO: y = -x+2\ \ à -\infty\ \ et\ \ y = x\ \ à\ +\infty$

●Intersection avec les axes :

$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \Longrightarrow \mathrm{f}(0) = 2\ \ d'où\ \ A(0;\ 2)$

$$-(C) \cap (x'Ox): \mathrm{f(x)} = 0 \Longrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2} = 0\ \Longrightarrow x = 2\ \ d'où\ A(2; 0)$$



++

<u>EXERCICE 7:</u>

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+sinx}{1-cosx}$ et (C) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f ;Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi; \pi]$

2) a) Démontrer que : $\forall x \in D_f, on\ a\ f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{(1-cosx)^2}$

 b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$

c) Vérifier que sur cet intervalle (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature

3) a) Tracer (C) et préciser les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI)

b) Déterminer une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi \ et \ \pi$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+sinx}{1-cosx}$ et (C) sa courbe représentative

3) Déterminer D_f; $D_f = \{\forall x \in R; 1 - \cos x \neq 0\}$; $\cos x \neq 1 \neq \cos 0 \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{x \neq 2k\pi \quad D_f = R \setminus \{2k\pi\}}$$

Justifions que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Cette fonction est périodique de période 2π alors l'étude de cette fonction peut etre réduite dans un intervalle de longueur 2π avec $[-\pi; \pi]$

4) a) Démontrons que : $\forall x \in D_f$, **on a** $f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{(1-cosx)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1+sinx}{1-cosx}\right)' = \frac{\cos x(1-\cos x) - \sin x\,(1+\sin x)}{(1-\cos x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - (\cos x)^2 - \sin x - (\sin x)^2}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}$$

mais $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ alors $\boldsymbol{f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1}{(1-cosx)^2}}$ **cqfd**

c) Dressons le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$

Sur $[-\pi; \pi]; on\ a\ x \neq 0$:

●Calcul de limites : $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1+\sin 0}{1-\cos 0} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$$f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}$$

●Etude de variations : $f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{(1-cosx)^2}$ on pose $f'(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Longrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Longrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$$

$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} si\ k = 0$ alors $x \neq 0$ $où$ $x = -\frac{\pi}{2}$ alors $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		π
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

c) Vérifions que sur cet intervalle (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature

Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $\boldsymbol{x = 0}$ est une asymptote verticale à (C) sur cet intervalle

3) a) Traçons (C) et précisons les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI)

Les points où la tangente est parallèle à l'axe (OI) se déterminent comme suit :

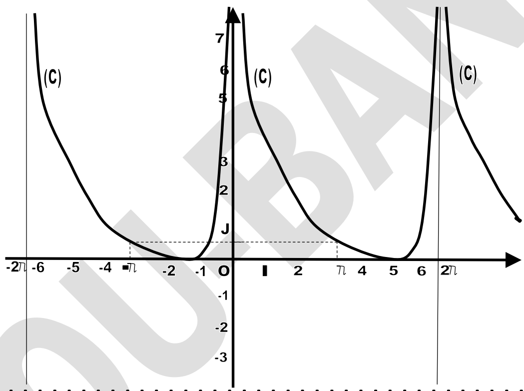
$$f'(x) = 0 \text{ avec } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; f\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}{1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = 0$$

D'où les coordonnées de ces points sont $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0\right)$

b) Déterminons une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi$ et π

$$\begin{cases} y = f'(-\pi)(x+\pi) + f(-\pi) \\ y = f'(\pi)(x-\pi) + f(\pi) \end{cases} \; avec \; \begin{cases} f'(-\pi) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{(1 - cos\pi)^2} = -\dfrac{1}{2} \\ f'(\pi) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{(1 - cos\pi)^2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x+\pi) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}(x-\pi) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} En\, -\pi : y = -\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \\ En \;\; \pi: \;\; y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$



++

EXERCICE 8:

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ $par \; f(x) = xlnx - x^2$

1) a) Déterminer la fonction f' de f

   b) Etudier les variations de f'

   c) En déduire le signe de f'

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = xlnx - x^2$

1) a) Déterminons la fonction f' de f

$$f'(x) = (x\ln x - x^2)' = \ln x + 1 - 2x \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \ln x + 1 - 2x}$$

b) Etudions les variations de f'

●Domaine de définition : $D_{f'} =]0, +\infty[$

●Calcul de limites :

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}(\ln x + 1 - 2x) = -\infty \implies \lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x + 1 - 2x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 2\right) = -\infty \implies \lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$$

●Dérivons f'(x) : $f''(x) = (\ln x + 1 - 2x)' = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x} \implies f''(x) = \frac{1-2x}{x}$

On pose $f''(x) = 0$ alors $x = \frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + 1 - 1 = -\ln 2$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$-\ln 2$	↘ $-\infty$

c) Déduisons-en le signe de f'

Comme le maximum de f' est $-\ln 2$ alors $f'(x) < 0$

2) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

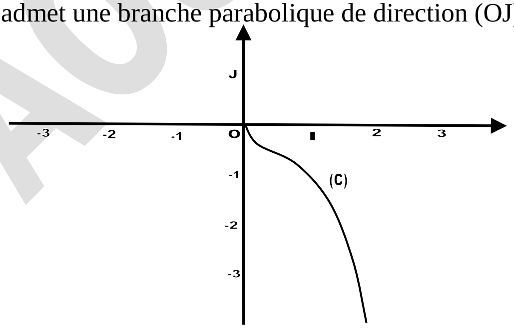
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x\ln x - x^2) = 0 \implies \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty \implies \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

3) Dressons le tableau de variations de f et traçons sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

●<u>Branches infinies</u> : $AV: \nexists$ $AH: \nexists$ $AO: y = ax + b$ $avec$ $a = -\infty$ alors AO n'existe pas mais (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)



++

EXERCICE 9:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x\ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Justifier que f est continue en 0
2) Démontrer que f est impaire

3) Etudier f et tracer sa courbe représentative

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $\mathbf{f(x) = xln|x| \quad si\ x \neq 0 \quad et \quad f(0) = 0}$

1) Justifions que f est continue en 0

f est continue en 0 si et seulement si : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = l\,; l \in R$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 0\ln 0 = 0 = f(0) \in R$ alors f est continue en 0

2) Démontrons que f est impaire. Vérifions si $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{cases} f(-x) = -x\ln|-x| = -x\ln|x| \\ \quad -f(x) = -x\ln|x| \end{cases} \quad d'où\ f(-x) = -f(x) = -x\ln|x| \ \ \mathbf{cqfd}$$

3) Etudions f et traçons sa courbe représentative

●<u>Domaine de définition</u> : $D_f = R$

●<u>Calcul de limites</u> : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ln|-\infty| = -\infty \quad alors \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ln|+\infty| = +\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

●<u>Dérivons f(x)</u> :$f'(x) = (x\ln|x|)' = \ln|x| + x\frac{1}{x}$ alors $f'(x) = \ln|x| + 1$

On pose $f'(x) = 0 \Longrightarrow \ln|x| + 1 = 0 \Longrightarrow \ln|x| = -1 \Longrightarrow |x| = e^{-1} \Longrightarrow x = \pm e^{-1}$

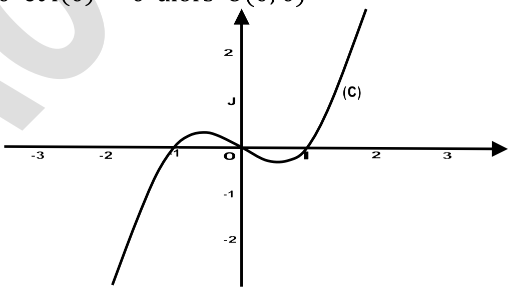
$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln e^{-1} = -e^{-1} \ \ et \ \ f(-e^{-1}) = -e^{-1}\ln|-e^{-1}| = e^{-1}$

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

●<u>Branches infinies</u> : $AV: \nexists \quad AH: \nexists \quad AO: y = ax + b \ \ avec \ \ a = +\infty$ alors AO n'existe pas mais (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

●Intersection avec les axes : $-(C) \cap x'Ox: y = f(x) = 0$ alors $x = \pm1$ avec $A(1;0)$ et $B(-1;0)$

$-(C) \cap y'Oy: x = 0$ et $f(0) = 0$ alors $O(0;0)$



++

EXERCICE 10:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \ln(1 + e^x)$. On désigne par (C) la corbe représentative de f dans le repère orthonormal (unité graphique : 3cm)

1) a) Etudier le sens de variations de f

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

c) Tracer la courbe (C) et la tangente (T)

2) En utilisant la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - f(x)$

Démontrer que l'équation $e^x = f(x)$ a une solution unique α, et α appartient à l'intervalle $[0{,}7; 0{,}8]$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \ln(1 + e^x)$. On désigne par (C) la corbe représentative de f dans le repère orthonormal (unité graphique : 3cm)

1) a) Etudions le sens de variations de f

$$f'(x) = (1 + \ln(1 + e^x))' = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad avec\ \ f'(x) > 0$$

Alors f est strictement croissante

b) Donnons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}'(0)(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(0) \ \text{ avec } \ \mathrm{f}'(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{1 + \mathrm{e}^0} = \frac{1}{2} \ \text{ et } \mathrm{f}(0) = 1 + \ln(1 + \mathrm{e}^0) = 1 + \ln 2$$

D'où $y = \frac{1}{2}x + 1 + \ln 2$

c) Traçons la courbe (C) et la tangente (T)

●<u>Domaine de définition</u> : $D_f = R$

●<u>Calcul de limites</u> : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 + \ln(1 + e^{-\infty}) = 1 \ \ alors \ \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 + \ln(1 + e^{+\infty}) = +\infty \ \text{ alors } \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

●<u>Tableau de variations</u> :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

●<u>Branches infinies</u> : $AV: \nexists \quad AH: y = 1\ à - \infty$

$\mathrm{AO}: \mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ avec $\mathrm{a} = \lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}} = \lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{1+\ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}})}{\mathrm{x}} = \lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{1+\mathrm{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})}{\mathrm{x}} = 1 \quad b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x + \ln(1 + e^{-x}) - x) \ = 1$ D'où $y = x + 1$

●<u>Intersection avec les axes</u> :

$-(\mathrm{C}) \cap \mathrm{x}'\mathrm{Ox}: \mathrm{y} = \mathrm{f(x)} = 0$ alors $\ln(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{x}}) = -1 \Rightarrow 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{-1} \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}} > \mathrm{e}^{-1} - 1$

$-(\mathrm{C}) \cap \mathrm{y}'\mathrm{Oy}: \mathrm{x} = 0$ et $\mathrm{f}(0) = 1 + \ln 2$ alors $\mathrm{A}(0; 1 + \ln 2)$

2) En utilisant la fonction g définie sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$ par $\mathbf{g(x) = e^x - f(x)}$

Démontrons que l'équation $e^x = f(x)$ a une solution unique α, et α appartient à l'intervalle $[\mathbf{0{,}7}; \mathbf{0{,}8}]$

Etudions les variations de la fonction g :Calcul de limites de g :

$$\lim_{\mathrm{x} \to 0} \mathrm{g(x)} = \mathrm{e}^0 - 1 - \ln(1 + \mathrm{e}^0) = -\ln 2 \quad \text{alors} \quad \lim_{\mathrm{x} \to 0} \mathrm{g(x)} = -\ln 2$$

$$\lim_{\mathrm{x} \to +\infty} \mathrm{g(x)} = \mathrm{e}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{+\infty}} - \frac{\ln(1 + \mathrm{e}^{+\infty})}{\mathrm{e}^{+\infty}}\right) = +\infty \ \text{ alors } \ \lim_{\mathrm{x} \to -\infty} \mathrm{g(x)} = +\infty$$

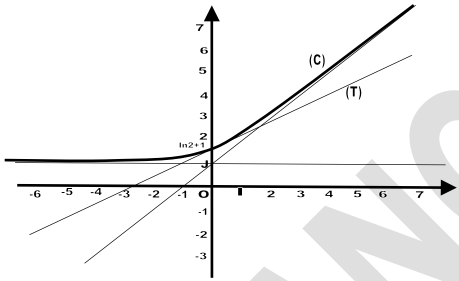
$$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{f(x)})' = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x} = \frac{e^{2x}}{1 + e^x} > 0$$

Alors g est strictement croissante

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

$e^x = f(x) \Longrightarrow e^x - f(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = 0$

Comme g est strictement croissante sur R alors elle réalise une bijection de R vers $g([\mathbf{0};\ +\infty[) = [-\mathbf{ln\ 2};\ +\infty[$ et que $\alpha \in [0{,}7; 0{,}8] \subset]-\ln 2\,; +\infty[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $g(0{,}7) \times g(0{,}8) < 0\ \ avec\ \ g(0{,}7) < 0\ \ et\ \ g(0{,}8) > 0$



++

EXERCICE 11:

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[par\ f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
2) a) On note A le point de (C) d'abscisse 1. Trouver une équation de la tangente T à (C) en A $\qquad$ b) Construire T et (C)

3) M est un point de (C) d'abscisse u. Démontrer que la tangente T_u à la courbe (C) en M est parallèle à la droite d'équation y=x si et seulement si : $u^3 - 1 + 2\ln u = 0\ ;\ \ (1)$

4) En résolvant l'équation (1), démontrer que A est le seul point de (C) en le quel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[\ \ par\ f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudions les variations de f et dresser son tableau de variations

●Domaine de définition : $D_f =]0;\ +\infty[$

●Calcul de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln 0}{0^2} = -\infty\ \ alors\ \ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\ln +\infty}{(+\infty)^2} = 0\ \ \text{alors}\ \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

●Dérivons f(x) : $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}\ \ \ d'où\ \ f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

On pose $f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \Longrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{e}$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} \Longrightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$$

●Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

2) a) On note A le point de (C) d'abscisse 1. Trouvons une équation de la tangente T à (C) en A

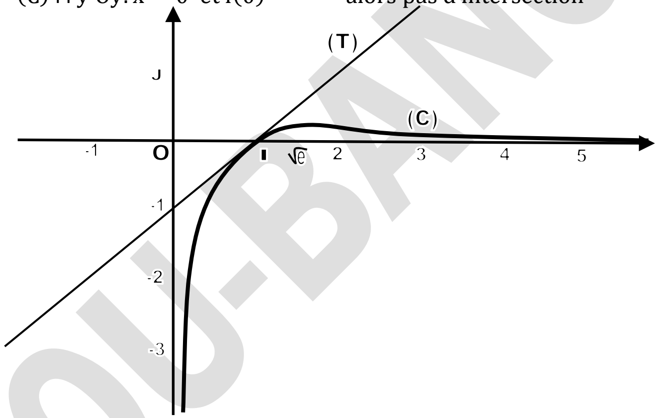
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \;\; avec \;\; \begin{cases} f'(1) = \dfrac{1 - 2\ln 1}{1} = 1 \\ f(1) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$

b) Construisons (T) et (C)

●Branches infinies : $AV\colon\ x = 0 \quad AH\colon\ y = 0$

●Intersection avec les axes : $-(\mathrm{C}) \cap \mathrm{x'Ox}\colon \mathrm{y} = \mathrm{f(x)} = 0$ alors $\frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \;\; A(1;0)$

$-(\mathrm{C}) \cap \mathrm{y'Oy}\colon \mathrm{x} = 0$ et $\mathrm{f}(0) = -\infty$ alors pas d'intersection



3) M est un point de (C) d'abscisse u. Démontrons que la tangente T_u à (C) en M est parallèle à la droite d'équation y=x si et seulement si : $\boldsymbol{u^3 - 1 + 2\ln u = 0}$ (1)

On pose $f'(u) = 1 \Rightarrow \frac{1 - 2\ln u}{u^3} = 1 \Rightarrow 1 - 2\ln u = u^3 \Rightarrow u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

4) En résolvant l'équation (1), démontrons que A est le seul point de (C) en le quel la tangente est parallèle à la droite d'équation $\boldsymbol{y = x}$

Pour cela étudions les variations de la fonction $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^3 - 1 + 2\ln \mathrm{x}$

$$\mathrm{g'(x)} = 3\mathrm{x}^2 + \frac{2}{\mathrm{x}} = \frac{3\mathrm{x}^3 + 2}{\mathrm{x}} > 0 \text{ g est strictement croissante}$$

Comme $\mathrm{g}(0) = -\infty$ et $\mathrm{g}(+\infty) = +\infty$ d'après le théorème es valeurs intermédiaires on a : $\mathrm{g}(0) \times \mathrm{g}(+\infty) < 0 \;\; avec \;\; u \in \,]0; +\infty[$ et g(1)=0 alors le point A(1 ; 0) est le seul point en le quel (T) est parallèle à la droite d'équation $y = x$

++

EXERCICE 12:

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$$ et **C** sa courbe représentative

1) Démontrer que la droite d'équation $x=\ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

2) a) Déterminer la limite de f $en-\infty$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

3) a) Démontrer que pour tout x distinct de ln2 $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite (Δ) d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

c) Démontrer que pour tout x distinct de ln2 $f'(x)=\frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$

4) En déduire les variations de f

5) a) Représenter graphiquement la courbe (C)

b) Etudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'intersection de (C) avec la droite d'équation $y=x+m$

c) Retrouver algébriquement ces solutions

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f de $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$$ et **C** sa courbe représentative

1) Démontrons que la droite d'équation $x=\ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe (C) $\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 2}\left(x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right)=\ln 2+\frac{e^{\ln 2}}{2(e^{\ln 2}-2)}=\pm\infty$

$$d'où\ \lim_{x\to\ln 2} f(x)=\pm\infty\ cqfd$$

2) a) Déterminons la limite de f $en-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\frac{e^{-\infty}}{2(e^{-\infty}-2)}\quad d'où\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

b) Démontrons que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

Vérifions si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right)=\frac{e^{-\infty}}{2(e^{-\infty}-2)}=0$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$ cqfd

3) a) Démontrons que pour tout x distinct de ln2 $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}$

$$f(x)=x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}=x+\frac{e^x-2+2}{2(e^x-2)}=x+\frac{e^x-2}{2(e^x-2)}+\frac{2}{2(e^x-2)}$$

$$D'où\ \ f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}\quad cqfd$$

b) Déduisons-en la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}\right)=+\infty+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{+\infty}-2}=+\infty$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Justifions que la droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

Vérifions si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2} - x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x - 2}\right) = \frac{1}{e^{+\infty} - 2} = 0$$

D'où $+\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y) = 0$ cqfd

c) Démontrons que pour tout x distinct de ln2 $f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}\right)' = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2 - e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$$

D'où $\boldsymbol{f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}}$ **cqfd**

4) Déduisons-en les variations de f

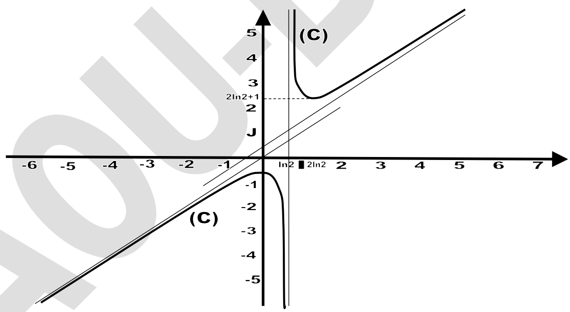
On pose $f'(x) = 0 \Longrightarrow (e^x - 1)(e^x - 4) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \\ e^x - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0 \;\; où \;\; x = 2\ln 2$

$f(0) = -\frac{1}{2}$ $\quad et \quad$ $f(2\ln 2) = 2\ln 2 + 1$ D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	‖ $-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$2\ln 2 + 1$ ↗	$+\infty$

5) a) Représentons graphiquement la courbe (C)

<u>Branches infinies</u> : $AV: x = \ln 2$, $AH: \nexists$ $\;et\;$ $AO: y = x$ $à -\infty$ $\;et\; y = x + \frac{1}{2}$ $à +\infty$



b) Etudions graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'intersection de (C) avec la droite d'équation $\boldsymbol{y = x + m}$

●Si $m \in \left]-\infty;\ 0\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ il y'a un seul point d'intersection

●Si $m \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ il n'y a pas d'intersection

c) Retrouvons algébriquement ces solutions : On pose $f(x) = y \Longrightarrow x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-2} = x + m$

$$\Longrightarrow \frac{1}{e^x - 2} = m - \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 = (e^x - 2)\left(m - \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow\; e^x\left(m - \frac{1}{2}\right) = 1 + 2m - 1$$

$$\Longrightarrow e^x = \frac{2m}{m - \frac{1}{2}} \Longrightarrow x = \ln\left(\frac{2m}{m - \frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{4m}{2m - 1}\right) \Longrightarrow x = \ln\left(\frac{4m}{2m - 1}\right)$$

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$ $+\infty$
$4m$	$-$	$+$	$+$
$2m-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{4m}{2m-1}$	$+$	$-$	$+$
$\ln\left(\frac{4m}{2m-1}\right)$	$+$		$+$

●Si $m \in]-\infty;\ 0[\cup \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ il y'a une seule solution $\boldsymbol{x = \ln\left(\frac{4m}{2m-1}\right)}$

●Si $m \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ il n'y a pas de solution

++

EXERCICE 13:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$ et **C** sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Préciser la position relative de (C) et (Γ)

3) Etudier les variations de f et tracer (C) et (Γ)

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons l'ensemble de définition de f et Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$D_f = \{\forall x \in R;\ e^x - 1 \neq 0\} \quad e^x \neq 1 \Longrightarrow x \neq 0 \quad d'où\ \boldsymbol{D_f = R \setminus \{0\}}$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right) = \frac{e^{2(-\infty)}}{e^{-\infty}-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{0}$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{e^{(+\infty)}}{1-e^{-\infty}} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right) = \frac{e^{2(0)}}{e^0-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right) = \frac{e^{2(0)}}{e^0-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2) Démontrons que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est asymptote à (C) en $+\infty$ Vérifions si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1} - (1+e^x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}-e^{2x}+1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{e^{+\infty}-1} = 0$$

D'où $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = 0$ cqfd

Précisons la position relative de (C) et (Γ) : On pose $g(x) = f(x) - y = \frac{1}{e^x-1}$

Comme $\forall x \in]0;\ +\infty[$; $e^x - 1 > 0$ alors $\frac{1}{e^x-1} > 0$ D'où (C) et au dessus de **(Γ)**

3) Etudions les variations de f et traçons (C) et (Γ)

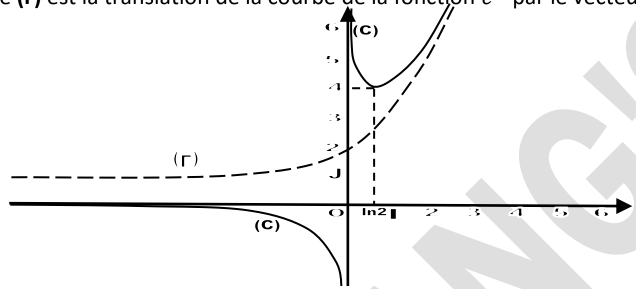
$$f'(x) = \left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right)' = \frac{2e^{2x}(e^x-1) - e^x \times e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}(2e^x - 2 - e^x)}{(e^x-1)^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

On pose $f^{'}(x) = 0 \Longrightarrow e^x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \ln 2 \;\; et \;\; f(\ln 2) = 4$

x	$-\infty$	0		$\ln 2$	$+\infty$
$f^{'}(x)$	$-$	‖	$-$		$+$
f(x)	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow +\infty$

Branches infinies :$AV: x = 0 \quad AH: y = 0 \;\; à - \infty$

La courbe de **(Γ)** est la translation de la courbe de la fonction e^x par le vecteur $\vec{j}$



++

EXERCICE 14:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|\ln x|$ et **C** sa courbe représentative

1- Etudier f et tracer sa courbe (C)

2- Démontrer que pour tout nombre réel m, l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet deux solutions $x_1 \;\; et \; x_2$

3- Calculer le produit $x_1 . x_2$

++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|\ln x|$ et **C** sa courbe représentative

1- Etudions f et traçons sa courbe (C)

Domaine de définition : $D_f = \{\forall x \in R : x > 0\,; \ln x \neq 0\} \Longrightarrow D_f =]0;1[\cup]1; +\infty[$

Calcul de limites : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln|\ln 0| = \ln|-\infty| = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ln|\ln 1| = \ln|0| = -\infty \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln|\ln +\infty| = \ln|+\infty| = +\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dérivons $f(x)$: $f'(x) = (\ln|\ln x|)^{'} = \frac{(\ln x)^{'}}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	

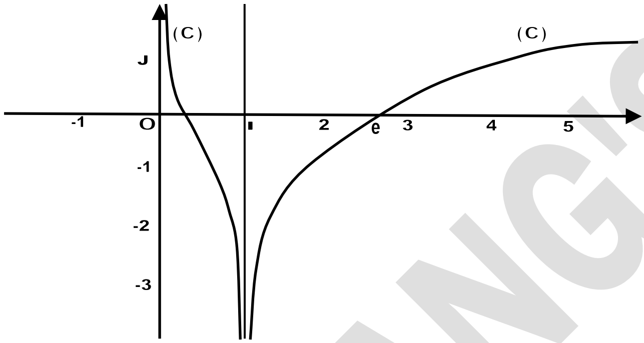
Branches infinies : $AV: x = 0 \;\; et \;\; x = 1 \quad AH: \nexists \quad AO: a = 0$ alors (C) admet une branches parabolique de direction celle de (OI)

Intersection avec les axes :

$-(C) \cap x'Ox: y = f(x) = 0$ alors $\ln|\ln x| = 0 \Longrightarrow |\ln x| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{-1} \end{cases}$

$$A(e; 0)\ et\ \ B(e^{-1}; 0)$$

$$-(C) \cap y'Oy: x = 0 \text{ et } f(0) = +\infty \text{ alors pas d'intersection}$$



2- Démontrons que pour tout nombre réel m, l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet deux solutions $x_1\ \ et\ x_2$

$$\ln|\ln x| = m \Longrightarrow |\ln x| = e^m \Longrightarrow \begin{cases} \ln x = e^m \\ \ln x = -e^m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = e^{e^m} \\ x_2 = e^{-e^m} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{S = \{e^{e^m};\ e^{-e^m}\}}}$$

3- Calculons le produit $x_1 . x_2$

$$x_1 . x_2 = \mathbf{e^{e^m} . e^{-e^m}} = \mathbf{e^{e^m - e^m}} = \mathbf{1} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{x_1 . x_2 = 1}}$$

++

EXERCICE 15:

Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$ et **C** sa courbe représentative

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$ Préciser la position relative de (C) et (D)
3) Etudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f
4) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$ et C sa courbe représentative

1) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\mathbf{1 - x})(\mathbf{1 + e^x}) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x(1 + e^x)\right) = +\infty(1 + e^{-\infty}) = +\infty \Longrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\mathbf{1 - x})(\mathbf{1 + e^x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x(1 + e^x)\right) = -\infty(1 + e^{+\infty}) = -\infty \Longrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

Vérifions si $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} ((1 - x)(1 + e^x) - (1 - x)) = \lim_{x \to -\infty} \left((1 - x)(1 + e^x - 1)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left((1 - x)(e^x)\right) = +\infty e^{-\infty}$

$$d'où\ \boxed{\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0}\ \boldsymbol{cqfd}$$

Précisons la position relative de (C) et (D)

Pour cela étudions le signe de $g(x) = f(x) - y = (1 - x)(e^x)$ on a :

$$g(x) = 0 \implies (1 - x)(e^x) = 0 \implies x = 1$$

x	$-\infty$	1 $+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$
Positions relatives	La courbe (C) est au dessus de la droite (D)	La courbe (C) est au dessous de la droite (D)

Si x=1 alors (C) et (D) sont confondues

3) Etudions les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f

$f(x) = (1 - x)(1 + e^x) \implies f'(x) = -(1 + e^x) + (1 - x)e^x = -1 - e^x + e^x - xe^x$

$$= -xe^x - 1 \implies \boxed{f'(x) = -xe^x - 1}$$

$\boxed{D_{f'} = \mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[}$, et calculons les limites de f'(x) aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} (-xe^x - 1) = +\infty e^{-\infty} - 1 = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} (-xe^x - 1)$

$$= -\infty e^{+\infty} - 1 = -\infty$$

Dérivons f'(x) :$f'(x) = -xe^x - 1 \implies f''(x) = -e^x - xe^x = (-1 - x)e^x \implies$ $f''(x) = (-1 - x)e^x$ alors f''(x)=0 on a $x = -1 f'(-1) = e^{-1} - 1$d'où le tableau de signe et le tableau de variations :

x	$-\infty$	1 $+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f'(x)$	-1 ↗	$e^{-1} - 1$ ↘ $-\infty$

D'où dans le tableau de variations on constate que : $\forall x \in R; f'(x) < 0$

Tableau de variations de f(x) :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

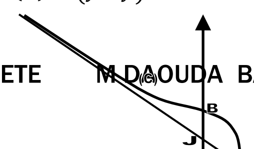
4) Traçons (C)

Branches infinies :$AV : \nexists$; $AH : \nexists$; $AO : y = -x + 1$ $à - \infty$ et cherchons à $+\infty$

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)(1+e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-(1 + e^x)\right) = -\infty$alors (C) admet à $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

Intersection avec les axes :$-(C) \cap (x'Ox): f(x) = 0 \implies x = 1 \implies A(1; 0)$

$$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \implies f(0) = 2 \implies B(0; 2)$$



++

EXERCICE 16:

Soit f la fonction définie par : $\mathrm{f(x)} = \ln\left|\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4}\right|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé , unité graphique : 2cm

Partie A :

On considère par g la fonction définie par : $\mathrm{g(x)} = \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4}$

1- Montrer que g est périodique de période 2π
2- Etudier les variations de g sur $[0; 2\pi]$
3- Résoudre dans R l'équation $\mathrm{g(x)} = 0$
4- En déduire le signe de g sur $[0; 2\pi]$

Partie B :

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2- Montrer que f est périodique de période 2π
3- En déduire l'ensemble d'étude de f
4- Montrer que $f'(x) = \frac{(2\sin x+\sqrt{3})\cos x}{\mathrm{g(x)}}$
5- Montrer que les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont des axes de symétrie de (C)
6- Construire la courbe (C) et ses axes de symétrie dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Partie A :

On considère par g la fonction définie par : $\mathrm{g(x)} = \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4}$

1- Montrons que g est périodique de période 2π

Vérifions si $\mathrm{g(x + 2\pi) = g(x)}$:

$$\mathrm{g(x + 2\pi)} = \sin^2(x + 2\pi) + \sqrt{3}\sin(x + 2\pi) - \frac{9}{4} = \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4} = \mathrm{g(x)}$$

D'où $\mathbf{g(x + 2\pi) = g(x)}$ cqfm

2- Etudions les variations de g sur $[\mathbf{0}; \mathbf{2\pi}]$

Calcul de limites :

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{g(x)} = \sin^2 0 + \sqrt{3}\sin 0 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$$
$$\lim_{x\to 2\pi} \mathrm{g(x)} = \sin^2 2\pi + \sqrt{3}\sin 2\pi - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$$

Dérivons g(x) :

$$g'(x)=\left(\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-\frac{9}{4}\right)'=2\cos x\sin x+\sqrt{3}\cos x=\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\cos x$$

$$g'(x)=0\Longrightarrow\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\cos x=0\Longrightarrow\begin{cases}2\sin x+\sqrt{3}=0\\ \cos x=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}\\ x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Longrightarrow \text{sur } [0;2\pi]\ ;\ on\ a: x=\left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{9}{4}=1+\sqrt{3}-\frac{9}{4}=\sqrt{3}-\frac{5}{4}=1{,}73-1{,}25=0{,}48$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{2\pi}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{9}{4}=1-\sqrt{3}-\frac{9}{4}=-\sqrt{3}-\frac{5}{4}=-1{,}73-1{,}25=-2{,}98$$

$$g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{3}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

$$g\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{3}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$2\sin x+\sqrt{3}$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$\cos x$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	$-\frac{9}{4}$	↗	$0{,}48$	↘	-3	↗	$-2{,}98$	↘	-3	↗	$-\frac{9}{4}$

3- Résoudre dans R l'équation $g(x)=0$

$$\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-\frac{9}{4}=0\Longrightarrow\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\left(-\frac{9}{4}\right)=3+9=12\Longrightarrow\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Longrightarrow x=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

D'où $\mathbf{g(x)=\left(\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

4- En déduisons le signe de g sur $[\mathbf{0};\mathbf{2\pi}]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$g(x)$		$-$		$+$		$-$	

D'où $\begin{cases}\forall\mathbf{x}\in\left[\mathbf{0};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right]\cup\left[\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}};\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\right]\ ;\ \mathbf{g(x)\leq 0}\\ \forall\mathbf{x}\in\left[\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}};\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right]\ ;\ \mathbf{g(x)\geq 0}\end{cases}$

<u>Partie B :</u>

1- Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f : $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-\frac{9}{4}\right|$

$$\mathbf{D_f = R \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}}$$

2- Montrons que f est périodique de période 2π

Vérifions si $f(x + 2\pi) = f(x)$

$$f(x + 2\pi) = \ln\left|\sin^2(x + 2\pi) + \sqrt{3}\sin(x + 2\pi) - \frac{9}{4}\right| = \ln\left|\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4}\right|$$

D'où $\mathbf{f(x + 2\pi) = f(x)}$

3- En déduisons l'ensemble d'étude de f

Comme f est périodique de période 2π alors f a pour ensemble d'étude $D = [0;\ 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

4- Montrons que $\mathbf{f'(x) = \frac{(2\sin x + \sqrt{3})\cos x}{g(x)}}$

Comme $f(x) = \ln|g(x)|$ alors $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(2\sin x + \sqrt{3})\cos x}{g(x)}$

$$\text{d'où } \boxed{\mathbf{f'(x) = \frac{(2\sin x + \sqrt{3})\cos x}{g(x)}}}$$

5- Montrons que les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont des axes de symétrie de (C)

Vérifions si $f(2a - x) = f(x) \Longrightarrow f\left(2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - x\right) = f(x) \Longrightarrow f(\pi + 4k\pi - x) \overset{?}{=} f(x)$

$$f(\pi + 4k\pi - x) = f((1 + 4k)\pi - x) = \ln\left|\sin^2((1 + 4k)\pi - x) + \sqrt{3}\sin((1 + 4k)\pi - x) - \frac{9}{4}\right|$$

Mais $\sin((1 + 4k)\pi - x) = \sin(1 + 4k)\pi\cos x - \cos(1 + 4k)\pi\sin x = \sin x$ alors on a :

$$f((1 + 4k)\pi - x) = \ln\left|\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \frac{9}{4}\right| = f(x) \Longrightarrow \mathbf{f((1 + 4k)\pi - x) = f(x)}$$

D'où les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont des axes de symétrie de (C)

6- Construisons la courbe (C) et ses axes de symétrie dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$

Calcul de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln\left|\sin^2 0 + \sqrt{3}\sin 0 - \frac{9}{4}\right| = \ln\left|-\frac{9}{4}\right| = \ln 2{,}25 \approx 0{,}8$

$$\lim_{x\to 2\pi} f(x) = \ln\left|\sin^2 2\pi + \sqrt{3}\sin 2\pi - \frac{9}{4}\right| = \ln\left|-\frac{9}{4}\right| = \ln 2{,}25 \approx 0{,}8$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}} f(x) = \ln\left|\sin^2\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{9}{4}\right| = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}} f(x) = -\infty$$

Comme $f'(x) = \frac{(2\sin x + \sqrt{3})\cos x}{g(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$ alors on a: $x = \left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

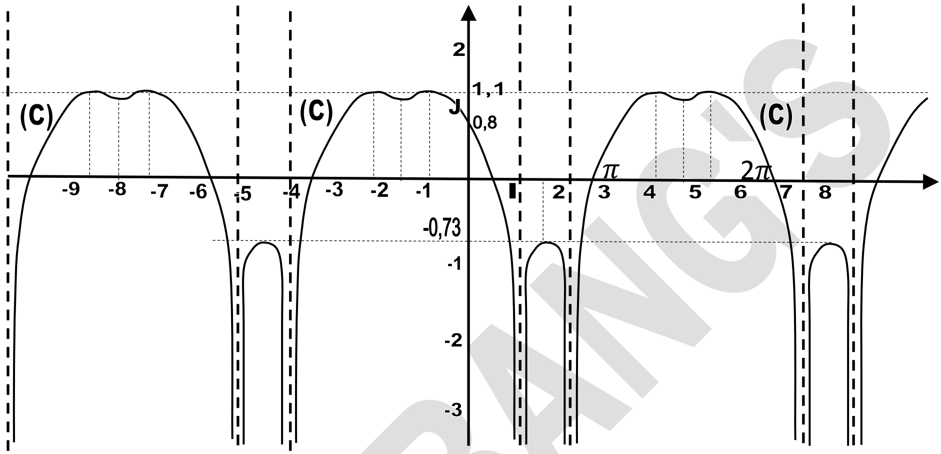
x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$g'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$0{,}8$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-0{,}73$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$1{,}1$	$\searrow$	$1{,}09$	$\nearrow$	$1{,}1$	$\searrow$	$0{,}8$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left|\sin^2\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{9}{4}\right| = \ln|0{,}48| = -0{,}73$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ln\left|\sin^2\frac{2\pi}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{9}{4}\right| = \ln|-2{,}98| = 1{,}09$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ln\left|\sin^2\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{3} - \frac{9}{4}\right| = \ln|-3| = 1{,}1$$
$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \ln\left|\sin^2\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{9}{4}\right| = \ln|-3| = 1{,}1$$

La courbe (C) est translation de la courbe de l'intervalle $[0;\ 2\pi]$ par le vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$ dans les autres intervalles



++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**+++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans R les équations suivantes :

1) $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$ **2**) $\frac{1}{2}\ln 2x = \ln(3 - x) - \ln\sqrt{x + 1}$

3) $\ln(e^x - 2) = 3$ 4) $\ln[(x - 2e)(x - e)] = 2\ln 2 + 2$

5) $2\log(x - 1) = \log(x - 2)$ 6) $(\ln x)^2 = \ln x^2$

7) $(2\ln x)^2 + 10\ln x - 6 = 0;$ 8) $2\ln^3(x + 1) - \ln^2(x + 1) - 3\ln(x + 1) + 2 = 0;$

9) $\ln(x^2 - 4x + 5) = 1$ 10) $\ln(2x + 1) + \ln(3 - x) = \ln 3 + \ln(1 - 3x)$

11) $\log(3x^2 - 4x + 1) = 1$ 12) $2\ln x + \ln(2x - 3) = \ln(3x - 2)$

13) $6 - 5\log^2 x = 13\log x$ 14) $\ln|2x - 5| + \ln|3x + 2| = \ln|x + 1|$

15) $3\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$ 16) $\ln(-2 - x) = \ln\frac{-x - 11}{x + 3}$

17) $\ln^2 x + (1 - 2\ln 2)\ln x - 2\ln 2 = 0$ 18) $\ln^3 x + 2\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$

19) $3^{2+x\log 5} = \left|5^{1+x\log 3} - 14\right|$ 20) $(\ln(\ln x))^4 - 25(\ln(\ln x))^2 + 144 = 0$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**+++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x - e) > 1$ 2) $\ln(2 - x) + \ln(x + 4) > \ln(3x + 2)$

3) $|lnx| \le 2$ 4) $\ln(x + 2) \le \ln(x + 3)$

5) $\ln(x + 2) \le \ln(x^2 - 4)$ 6) $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) < \ln(2x + 3)$

7) $\ln(x + e) + \ln(x - e) \le 2 + ln3$ 8) $\ln(3x^2 - x) \le \ln x + ln2$

9) $\ln(-x^2 + 4x + 5) + \ln\frac{1}{8} > 0$ 10) $(\ln x)^2 + \ln x > 0$

11) $\log(x + 1) + \log(x + 2) \ge log3 + \log\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$

12) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4}\right) < 0$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**+++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans $R \times R$ les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} \log_3 \frac{4\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{x}} + \log_3 \frac{4\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{y}} = \frac{5}{3} \\ x^2 + y^2 = 738 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2}\ln^2 a \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \ln xy = 5 \\ (\ln x \ln y)^2 = 36 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 9 \\ -6\log x + 5\log y = -19 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy = 256 \\ 7\left(\log_y x + \log_x y\right) = 50 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \ln y + \ln y = -1 \\ \ln x \ln y = -30 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^x 2^{2y} = 64 \\ \ln x + 2\ln y = \ln 4 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ 2\ln^2 y + 2\ln^2 x = 5 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} xy = e \\ 2\left(\log_y x + \log_x y\right) = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(xy^5) = -\frac{17}{2} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x^y - y^x = 0 \\ x^4 - y^8 = 0 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ b) $\lim\limits_{x\to e} \frac{x\ln x - e}{x - e}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2 - x)}{x - 1}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

+++

FONCTIONS RATIONNELLES ET IRRATIONNELLES

++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative

1) Démontrer que pour tout x appartenant à $]1, +\infty[$ on a : $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}$
2) Déterminer la fonction dérivée f’ de f. En déduire le sens de variations de f

Déterminer les limites de f aux bornes de $]1, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f

3) Démontrer que la droite (D_1) d’équation $y = x - 6$ est asymptote à la courbe (C). Donner une équation de l’autre asymptote à (C), notée (D_2)
4) Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe au point d’abscisse 2.
5) Construire (D_1), (D_2), T et la courbe (C)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 6 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 ; 0 et 1
2) Etudier les variations de f et tracer (C)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 7 :**++++++++++++++++++++++++++

Le plan est muni d’un repère orthonormé

On donne la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

1-Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C_f)

2-Soit (D_m) la droite d’équation : $y = mx - 1$

Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d’intersection de (C_f) et (D_m)

3- Déterminer les points de la courbe (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d’équation $y = 2x$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 8 :**++++++++++++++++++++++++++

Le plan est muni d’un repère orthonormé

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2+ax+3}{3x^2+2x+b}$

1-Déterminer les constantes $a\ et\ b$ de tel sorte que la fonction présente pour $x = -1$ un minimum égal à -1

2-Etudier f et tracer sa courbe représentative (C) pour $a = 10\ \ et\ \ b = 3$

3-La courbe (C) coupe l'axe (x'Ox) en R et S

Montrer que les tangentes à (C) en R et S se coupent orthogonalement en un point T

4-Trouver l'aire d triangle RST

+++++++++++++++++++++++Exercice 9 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Calculer la dérivée de f

A quelle condition portant sur $a\ et\ b$ la fonction f est strictement monotone sur chaque intervalle où elle est définie

3- Déterminer $a\ t\ b$ pour que la courbe représentative (C_f) de f passe par le point de coordonnées $A\left(0; -\frac{5}{4}\right)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

4- $a\ et\ b$ ayant les valeurs trouvées dans la question 3) étudier les variations de f. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées et donner les équations de s tangentes en ces points

5- Tracer (C_f) avec ses tangentes en A et aux points d'intersection aves axes de coordonnées

6- Discuter graphiquement l'existence et le nombre de solution de l'équation : $mx^2 + 2x - (4m+5) = 0$; (où m est un paramètre réel). On précisera la position des solutions par rapport aux nombres 1 et 4

+++++++++++++++++++++++Exercice 10 :++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier les variations de f
3) Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses -2 et 1
4) Déterminer les asymptotes à la courbe (C)
5) Tracer (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé

++++++++++++++++++++++Exercice 11 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+2}$

1- Etudier les variations de f. Déterminer l'asymptote verticale de (C_f)

2- Trouver les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

En déduire que la représentation graphique (C_f) de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation

3- Démontrer que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f)

4- Construire (C_f)

5- Soit (D_m) la droite d'équation : $y = mx - 1$. Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de points d'intersection de (D_m) et de $\left(C_f\right)$

6- On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+3}{x+2}|x|$

a- Ecrire g sans le symbole « valeur absolue »

b- En déduire une représentation graphique de g puis tracer $\left(C_g\right)$

++++++++++++++++++++++++Exercice 12:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier et représenter f
2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1

++++++++++++++++++++++++Exercice 13:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1
3) Etudier les variations de f
4) Etudier les branches infinies de (C)
5) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$
6) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 14:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{4}{3}x(6 - x)}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 0 et 6 ?
2) Etudier les variations de f et tracer (C).

Démontrer que cette courbe admet un axe de symétrie

++++++++++++++++++++++++Exercice 15:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{(x+3)(x-5)}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses -3 et 5 ?
2) Etudier les variations de f et préciser l'allure de (C) en $+\infty$ et $-\infty$
3) Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie.

++++++++++++++++++++++++Exercice 16:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que (C) admet une demi tangente parallèle à l'axe (OI) au point d'abscisse 0.
2) Etudier les variations de f. Démontrer que (C) admet trois asymptotes
3) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 17:++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que (C) admet une demi tangente parallèle à l'axe (OJ) au point d'abscisse 2.
2) Etudier les variations de f. Démontrer que (C) admet deux asymptotes
3) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 18:**++++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (C_f) sa courbe représentative
   a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et -1 ?
   b) Démontrer que (C_f) admet deux asymptotes que l'on précisera
   c) Etudier les variations de f et tracer (C_f).

2) Soit g la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (C_g) sa courbe représentative
   a) Démontrer que (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport au point O
   b) Construire (C_g) sur le même graphique (C_f)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 19:**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Etudier la parité de f ; en déduire l'intervalle d'étude
2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1, et sur l'intervalle $]0; 1[\ et\ ]1;\ +\infty[$
   b) Quel est le signe de f'(x). On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2 - 1}$
3) a) x étant un nombre réel supérieur à 1, mettre f(x) sous la forme $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \varphi(x)$, $où\ \log_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

b)En déduire une équation d'une asymptote à la représentation graphique (C_f)

4) Construire (C_f)

+++

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

++++++++++++++++++++++++**Exercice 20:**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par :$f(x) = 2\cos\frac{3x}{2} - 3\cos x$

1) Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; 2\pi]$
2) Démontrer que : $\forall x \in R, on\ a\ f'(x) = 2sinx.sin2x$
3) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$
4) Tracer la courbe représentative de f

++++++++++++++++++++++++**Exercice 21:**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par :$f(x) = sinx - \frac{1}{3}sin2x$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$
2) a) Démontrer que : $\forall x \in R, on\ a\ f'(x) = 2sinx.sin2x$
   b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$

3) Tracer (C) et préciser les coordonnées de ses centres de symétries et des points où la tangente est parallèle à (OI)

++++++++++++++++++++++++Exercice 22:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{sinx+sin2x}{1+cosx}$ et (C) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f ; Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$
2) Démontrer que : $\forall x \in D_f, on\ a\ f'(x) = \frac{2\cos x}{1+cosx}$
3) Vérifier que sur $[0; \pi]$, (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature
4) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$
5) Tracer (C) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$; préciser les coordonnées de ses points d'inflexion.

++++++++++++++++++++++++Exercice 23:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4sin^2x-3sinx}{sinx-1}$ et (C) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f . Démontrer que les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}\ \ et\ x = \frac{3\pi}{2}$ sont axes de symétries de (C)

A quel ensemble peut-on réduire l'étude de f ?

2) Démontrer que : $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$, on a $\mathrm{f'(x)} = \frac{\cos \mathrm{x}(2\mathrm{sinx}-3)(2\mathrm{sinx}-1)}{(\mathrm{sinx}-1)^2}$
3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Démontrer que sur cet intervalle (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature

4) Tracer (C) sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$

+++

FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENS

++++++++++++++++++++++++Exercice 24:+++++++++++++++++++++++++

1) Etudier et représenter dans le repère orthonormé (O, I, J) la fonction définie sur R par
$$f(x) = \ln(x^2+1)$$
2) En déduire les variations et la courbe représentative de la fonction g définie sur R par $\mathrm{g(x)} = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{x}^2+1}\right)$

++++++++++++++++++++++++Exercice 25:+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer l'ensemble C des solutions de l'inéquation $\frac{x+1}{x} > 0$

2) Etudier et représenter dans le repère orthonormé (O, I, J) la fonction définie par
$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 26:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[\ \ par$

$f(x) = x + 1 + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé

1) Etudier les variations de f
2) Démontrer que (C) admet pour asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ une droite (D) dont on déterminera son équation. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à (D)
3) Démontrer que (C) admet le point A(-1 ; 0) comme centre de symétrie
4) Tracer (C) et (D)

+++++++++++++++++++++++Exercice 27:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur I= $]0;\ +\infty[\ par\ \ f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) Démontrer que f est strictement croissante sur I
2) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$
   b) Préciser la position de (C) par rapport à (D)
   c) Tracer (C) et (D)

+++++++++++++++++++++++Exercice 28:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur I= $]0;\ +\infty[\ par\ \ f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) a) Etudier les limites de f aux bornes de I.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$

c) Préciser la position de (C) par rapport à (D)

2) Tracer (C) et (D)

+++++++++++++++++++++++Exercice 29:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}\ par\ f(x) = x + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé unité graphique : 2cm

1) Etudier les limites de f aux bornes de I.
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f Préciser la position de (C) par rapport à (D)
3) Démontrer que (C) admet le point $A\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ comme centre de symétrie
4) Donner une équation de la tangente à (C) en A puis tracer (C) et (D)

+++++++++++++++++++++++Exercice 30:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(3 - x)$

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative (C)
2) a) Démontrer que (C) coupe (OI) en un seul point Ω dont on déterminera les coordonnées
   b) Démontrer que Ω est un centre de symétrie de (C)
   c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en Ω

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} près

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x - 1 \leq f(x)$

++++++++++++++++++++++++Exercice 31:+++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction g définie sur I= $]-1;\ +\infty[\ par\ \ g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

a) Etudier les variations de g

b) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in]-1;\ +\infty[;\ \ g(x) \geq 0$

3) Soit f la fonction définie sur $D =]-1;0[\cup]0;\ +\infty[\ \ par : f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$

a) Vérifier que sur D f'(x) et g(x) ont de même signe

b) Etudier f et tracer sa courbe représentative (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 32:+++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

a) Etudier les variations de g. Préciser la limite en $0\ et + \infty$

b) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x (on calculera g(1))

2) Soit la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$

a) Etudier la fonction f (dérivée, limites en 0 et $+\infty$, tableau de variations)

b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles $\alpha\ et\ \beta\ (\alpha < \beta)$ Indiquer chacune d'elles, par une valeur approchée à 10^{-1} près

c) On désigne par (D) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, I, J)(unité graphique : 4cm)

Etudier le signe de $d(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ et en déduire la position de (C) par rapport à (D)

d) Démontrer que (D) est une asymptote à la courbe (C) . Tracer (D) et (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 33:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\ln x}\ \ si\ x \neq 0\ \ et\ \ f(0) = 0$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

2) Etudier les variations de f et tracer (C).

++++++++++++++++++++++++Exercice 34:+++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\mathrm{x}-1} + \ln|x-1|$

a) Etudier f et dresser son tableau de variation

b) Calculer f(0) ; en déduire le signe de f

2) Soit la fonction g définie $par\ g(x) = x\ln|x-1|$

a) Etudier g et tracer sa courbe représentative (C)

b) Soit A le point d'intersection de (C) et (OI), d'abscisse non nulle.
Démontrer que A est un point d'inflexion de (C) et écrire une équation de la tangente (T) à (C) en A.

3) On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1;\ +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1;\ +\infty[$ sur R et construire sur un autre graphique les courbes représentative de h et h^{-1}

++++++++++++++++++++++++Exercice 35:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + 1 + 3\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right)$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier les variations de la fonction f
2) a) Démontrer que (C) admet un point d'inflexion Ω et que Ω est un centre de symétrie de (C)
   b) Déterminer l'asymptote oblique (D) de (C) et vérifier que Ω appartient à (D)
   c) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 36:+++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction g définie $par\ g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$
Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x)

2) Soit la fonction f définie $par\ f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative
Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f
Etudier la fonction f et tracer (C)

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près
4) Soit la fonction h définie par :$h(x) = x + \ln x$. Etudier la fonction h et en déduire que (D) coupe (C) en un point unique dont on déterminera l'abscisse α à 10^{-2} près

++++++++++++++++++++++++Exercice 37:+++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln|e^x - 1|$ et (C) sa courbe représentative

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f
   b) Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\ telle\ que\ \forall x \in D; f(x) = x + \varphi(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$
   c) Compléter l'étude f et tracer (C)

2) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]0;\ +\infty[$.
a) Démontrer que g réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers R
b) Tracer sur le même graphique que (C) la courbe représentative (C') de la réciproque de g

++++++++++++++++++++++++Exercice 38:+++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \ln(3 - x)$et (C) sa courbe représentative
   a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f
   b) Etudier les variations de f en présentant les limites de f aux bornes de D_f et établir son tableau de variation
   c) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$. Etudier la position relation relative de (C) par rapport à (D) ; déterminer les coordonnées de leur point d'intersection
   d) Construire (T) et (C)
2) Soit E le domaine délimité par la courbe (C) d'équation $x = 0$ et la droite (D). Calculer l'aire A de E.

++

FONCTIONS EXPONENTIELLES

++++++++++++++++++++++++Exercice 39:+++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans R les équations suivantes :

1) $\frac{e^x}{1-2e^x}=5$ 2) $\frac{1}{2+e^x}=2e^{-x}$ 3) $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

4) $e^{2x}-5e^x+4=0$ 5) $4\,e^{2x}-e^x+2=0$ 6) $e^{2x}-2e^x-3=0$

7) $2e^{2x}-2e^x-3=0$ 8) $(e^x-2)(e^{-x}+1)=0$ 9) $e^{-x}(e^{2x}-4)=0$

++++++++++++++++++++++++Exercice 40:+++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans R les équations suivantes :

1) $4^x+2^{x+1}-3=0$ 2) $3^{x+1}+2\times 3^{-x}=7$ 3) $x^3=\frac{4}{\sqrt{x}}$

4) $x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}+2=0$ 5) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-2=0$ 6) $2^{2x+3}-3\times 2^{x+1}+1=0$

7) $7^{2x}-5\times 7^x+6=0$ 8) $5^{2x}+5^x-2=0$ 9) $2^{2x+1}+2^x-105=0$

10) $3^{2x-1}=27$ 11) $a^{\log_a b+\log_a sin,x}+b^{\log_b a+\log_b cosx}=c$

++++++++++++++++++++++++Exercice 41:+++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

1) $2e^{2x}-3e^x+2>0$ 2) $(e^x-3)(2-e^x)\geq 0$

3) $e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$ 4) $(e^{-x}-2)\left(e^{-x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$

5) $e^x(e^x-2)\geq 2(e^x-2)$ 6) $3e^{2x}+e^x-4<0$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}>3\times 2^x$ 8) $x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2\geq 0$

++++++++++++++++++++++++Exercice 42:+++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans $R\times R$ les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases}3^{\cos 2x+\cos 2y}=1\\ 4^{\cos x.\cos y}=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^y-y^x=0\\ x^4-y^8=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}xy=14\\ e^x\times e^y=e^{-9}\end{cases}$ 4) $\begin{cases}e^x+e^y=5\\ e^{2(x+y)}=36\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\ln x+\ln y=0\\ e^x\times e^{x+y}=e^3\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x-y=2\\ \frac{e^x}{e^{2y}}=1\end{cases}$

7) $\begin{cases}\ln(y+6)-\ln x=3\ln x\\ e^{6x}e^y=e^{-6}\end{cases}$ 8) $\begin{cases}2^x-2^y=8\\ 2^x+2^y=2\sqrt{2}\end{cases}$ 9) $\begin{cases}4^x=4^y\\ 4^x+1=y^{x+4}\end{cases}$

10) $\begin{cases}8^x+\left(\sqrt{2}\right)^y=2^{2x+1}\\ 3^x+27^y=9^{y+1}\end{cases}$ 11) $\begin{cases}2^x2^{2y}=64\\ \ln x+2\ln y=\ln 4\end{cases}$

++++++++++++++++++++++++Exercice43:+++++++++++++++++++++++++

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x-5\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x-5\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\sin(\sin(\ldots\sin x)\ldots))}^{n\ \text{fois}}}{x}$ $(n\in \mathbb{N})$

++++++++++++++++++++++++Exercice44:++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=e^{2x}-x-4$ et **C** sa courbe représentative

1) Déterminer la limite de $f\ en -\infty$
2) Etudier le comportement de $f\ en+\infty$ (mettre x en facteur dans l'expression de f(x))
3) a) Justifier la dérivabilité de f sur R et donner l'expression de f'(x)
   b) Déterminer les variations de f sur R
   4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-x-4$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$
   Construire (C) et (D)

++++++++++++++++++++++++Exercice 45:++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x)=xe^x-1$

1) a) Etudier les variations de g
   b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha e^{\alpha}=1$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
2) On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x-\ln x$
   a) Vérifier que pour tout $x>0; f'(x)=\frac{g(x)}{x}$
   b) Etudier les variations de f
3) Construire dans un repère orthonormé la courbe représentative de f

++++++++++++++++++++++++Exercice 46:++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=2e^x-2-xe^x$ et **C** sa courbe représentative

1) Etudier la fonction f, (la limite $en-\infty$ et en $+\infty$; variations)
2) Déterminer une équation de la droite (Δ), asymptote à (C) en $-\infty$, puis l'intersection de (C) et (Δ) et enfin les positons relatives de (C) et (Δ)
3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dans R dont l'une, notée α, appartient à l'intervalle$[1{,}5;1{,}6]$
   Quelle est la valeur de l'autre solution ?
4) Tracer (C) et (Δ)

++++++++++++++++++++++++Exercice 47:++++++++++++++++++++++++++

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)(unité graphique 2cm). On note E le point de coordonnées (ln2 ; ln2)

1) Soit a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction de la variable réelle x définie sur R par : $g(x)=ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$

•Calculer la dérivée de g

•Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses

2) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$

a) Prouver que pour tout nombre réel x on a : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$

b) En utilisant l'une des formes de f(x), calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = \mathrm{x} - 2$ et (D_2) d'équation $y = \mathrm{x} + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative (C) de f dans le plan P

c) Calculer la dérivée de f, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f

d) Tracer (C), sa tangente en E et ses asymptotes

++++++++++++++++++++++++Exercice 48:++++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$ et **C** sa courbe représentative

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

   Préciser la position relative de (C) et (D)
3) Etudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f
4) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 49:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$ et **C** sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Préciser la position relative de (C) et (Γ)

3) Etudier les variations de f et tracer (C) et (Γ)

++++++++++++++++++++++++Exercice 50:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x + \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x+1}$ et $f(x) = x - 1 + \frac{2e^x}{e^x+1}$
2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
3) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = \mathrm{x} + 1$ et (D_2) d'équation $y = \mathrm{x} - 1$ sont asymptotes à la courbe représentative (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$

Préciser les positions relatives de (C) par rapport à aux droites (D_1) et (D_2)

4) Démontrer que la fonction f est impaire
5) Etudier les variations de f sur $[0;\ +\infty[$
6) Tracer (C), sa tangente en x=0 et ses asymptotes

7) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α. Déterminer un encadrement de α 10^{-2} près

++++++++++++++++++++++++Exercice 51:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$ et **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) a) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 1$ est asymptote de f en $+\infty$

b) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = x + 3$ est asymptote de (C) en $-\infty$

3) Dresser le tableau de variations de f

4) Construire sur un même graphique (C) et ses asymptotes

++++++++++++++++++++++++Exercice 52:++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et (C) sa courbe représentative

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$)
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote de f en $-\infty$ et péciser la position relative de (C) par rapport à la droite (D)
3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$ c) Calculer f'(1) et en déduire le signe de f'(x) pour tout réel x

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) Soit I l'intervalle$[1{,}9; 2]$. Démontrer que, sur I l'équation f(x)=0a une solution unique α

5) Tracer (C) et la droite (D) (unité graphique : 2cm)

++++++++++++++++++++++++Exercice 53:++++++++++++++++++++++++++

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ et (C)sa courbe représentative

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de I

   b) Que peut-on en déduire de la courbe (C)

2) Calculer f'(x) pour tout x dans I, et démontrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f 4) Tracer la courbe (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 54:++++++++++++++++++++++++++

Le plan est muni du repère (O ;I ;J) (unité graphique :1cm)

Soit f la fonction définie par ; $f(x) = \frac{2xe^x - 2x + 1}{2(e^x - 1)}$

1) Déterminer deux triplets $(a; b; c) et\ (d; \beta; \gamma)$tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1} = dx + \beta + \frac{\gamma e^x}{e^x - 1}$$

2) En déduire que la courbe représentative C de f admet deux asymptotes obliques :

$$(D_1) : y = ax + b \text{ lorsque } x \to +\infty \text{ et } (D_2) : y = dx + \beta \text{ lorsque } x \to -\infty$$

3) En déduire les variations de f et établir son tableau de variations

4) Tracer la courbe C de f

5) Déterminer l'aire S(k) de l'ensemble des points M du plan (P) dont les coordonnées (x ;y) dans le repère (O ;I ;J) vérifient $\begin{cases} \ln 2 \leq x \leq \ln k \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$ S(k) a-t-elle une limite finie lorsque k tend vers $+\infty$

6) Résoudre dans R² le système

++

FONCTIONS PAR INTERVALLES

+++++++++++++++++++++++++Exercice 55:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = a + xe^x \ , si\ x \leq 0 \\ f(x) = 2 - x\ln x \ , si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f D_f
2) Déterminer le nombre réel a pour que f soit continue au point d'abscisse 0

Dans la suite de l'exercice, on donnera à ≼ a ≽ la valeur ainsi trouvée

3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
5) On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé

a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C)

b) Tracer la courbe (C), on placera les points d'abscisses 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 8

c) Calculer l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient

$$-3 \leq x \leq -2 \ \ et\ 0 \leq y \leq f(x)$$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 56:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x+2} \ , si\ x \prec 0 \\ f(x) = 1 + x\ln(x+1) \ , si\ x \succcurlyeq 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f D_f

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$

2) a) Déterminer le signe de ln(x+1) sur $[0;\ +\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [0;\ +\infty[\ ;\ \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \geq 0$

b) Dresser son tableau de variation et tracer sa courbe représentative

3) Calculer l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient

$$-1 \leq x \leq 0 \ \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) - m = 0$

+++++++++++++++++++++++++Exercice 57:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = -x + 1 + 2\log x \quad si\ x \in]0;1[\\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} \ \ si\ x \in [1;+\infty[\end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue au point $x = 1$

b) Montrer que f est continue sur $]0;\ +\infty[$

2) Montrer que f est dérivable à gauche et dérivable à droite au point x=1. f est-elle dérivable en ce point ?

3) a) On désigne par f’ la dérivée de f. Calculer la dérivée f’(x) lorsque $x \in]0;1[$ puis lorsque $x \in [1;+\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction f

4)Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)(unité graphique: 3cm)

a) Démontrer que la droite D d’équation $y = x - 2$ est asymptote à C.

Déterminer l’autre asymptote de (C)

b) Tracer (C) et ses asymptotes et ses deux demi tangentes au point Ω (1 ; 0) de (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 58:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x} & ,si\ x \in]-\infty;3] \\ f(x) = e^{-x+3} + x - 4 & ,si\ x \in]3;\ +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)(unité graphique: 2cm)

1) a) Montrer que f est continue au point $x = 3$

b) Calculer la dérivée f’(x) lorsque $x \in]-\infty;3]$ puis lorsque $x \in]3;\ +\infty[$

La fonction f admet-elle au point x=3, un nombre dérivé à droite et un nombre dérivé à gauche ?

Préciser les demi-tangentes à (C) au point d’abscisse 3

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

2) a) Démontrer que la droite D d’équation $y = x - 4$ est asymptote à C.

Préciser la position relative de (C) par rapport à D sur $x \in]3;\ +\infty[$

b) Calculer f(0) et f(2). Etudier la position de (C) par rapport à la droite Δ d’équation $y = x$ sur l’intervalle $[0;2]$

c) Construire la courbe (C) ; on fera sur la figure la tangente à (C) au point d’abscisse 2 ; les demi-tangentes au point d’abscisse 3 ainsi que les droites D et Δ

++++++++++++++++++++++++Exercice 59:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - \ln(x^2+1) & ,si\ x \le 0 \\ f(x) = -x^2 + e^{-x} & ,si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

1) Etudier la dérivabilité de f en 0
2) Etudier les branches infinies de (C) ; démontrer que la parabole (Γ) d’équation $y = -x^2$ est asymptote à (C) en $+\infty$
3) Compléter l’étude de f et construire (C) et (Γ)
4) a) Déduire de cette étude que (C) coupe (OI) en deux points dont l’un a une abscisse négative que l’on calculera

   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l’abscisse du deuxième point d’intersection

++++++++++++++++++++++++Exercice 60:++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & \text{, si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & \text{, si } x > 1 \end{cases}$$

1) a) Démontrer que f est continue et dérivable au point $x = 1$
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f
c) Etudier les variations de f. Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C)
d) Tracer (C)

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;\ +\infty[$
a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera
b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation de.
Tracer la courbe représentative de h^{-1}

++++++++++++++++++++++++Exercice 61:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = \cos^2 \pi x & \text{si } x \in]0; 1] \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 0 et 1
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et 1
3) Etudier les variations de la fonction f
4) Montrer que le droite D d'équation $y = -x$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont respectivement des asymptotes en $-\infty\ et + \infty$
5) Construire la courbe représentative de f et ses asymptotes dans le plan du repère (O, I, J)

++++++++++++++++++++++++Exercice 62:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ f(x) = x^2 + ax + b & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = -1$
2) Déterminer les réels $a\ et\ b$ de manière que f soit continue et dérivable au point $x = 1$
3) Etudier les variations de f pour les valeurs de $a\ et\ b$ obtenues, et construire (C) dans le plan rapporté à un repère

++++++++++++++++++++++++Exercice 63:+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 2^x + ax + b & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x & \text{si } x \in [0;1] \\ f(x) = \dfrac{\propto}{x}\log_2 x & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

1- Déterminer a, b et $\propto$ réels tels que f soit dérivable sur R
2- Déterminer le point d'inflexion de la courbe (C) représentant f, et une équation de la tangente en ce point
3- Déterminer une équation de (Δ), tangente à (C) au point d'abscisse $x = \frac{e}{2}$

Démontrer qu'il existe deux autres points de (C) où la tangente est parallèle à (Δ)

4- Tracer sur un même graphique, les courbes :

(C_1) : $y = 2^x - x\ln 2 - \dfrac{1}{2}$ si $x < 3$

(C_2) : $y = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x$ si $x \in [-2;4]$ si $x < 3$

(C_3) : $y = -\dfrac{\pi}{4x}\log_2 x$ si $x > \dfrac{1}{4}$

En déduire la courbe de (C)

++

FONCTIONS PARAMETRIQUES

++++++++++++++++++++++++**Exercice 64:**++++++++++++++++++++++++++++

Soitα un élément de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et f_α la fonction définie par : $f_\alpha(x) = \ln(4x^2 - 4x\sin\alpha + 1)$

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α

1) a) Déterminer suivant de α l'ensemble de définition de f_α

b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}\sin\alpha$ est un axe de symétrie de f_α

c) Démontrer que (C_α) et $(C_{-\alpha})$ sont symétriques par rapport à (OJ).

2) a) Etudier f_α pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et tracer sur le même graphique les courbes $(C_{-\frac{\pi}{2}})$ et $(C_{\frac{\pi}{2}})$

b) Démontrer que pour tout $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ l'équation $f_\alpha(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution

++++++++++++++++++++++++**Exercice 65:**++++++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit m un nombre réel strictement positif *et* f_m la fonction définie par :

$$f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}$$

On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m et étudier les branches infinies de (C_m)

b) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de (C_m), lorsque m décrit $]0;+\infty[$, est la courbe (Γ) d'équation : $y = 2\ln(x|\ln x|)$

c) Etudier la fonction $x \to 2\ln(x|\ln x|)$ et tracer (Γ)

Dans la suite du problème, on suppose que m=1

2) a) Etudier la fonction f_1 et tracer sa courbe (C_1)

b) On désigne par g la restriction de f_1 à l'intervalle $[e;\ +\infty[$

Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition

Tracer la courbe représentative de g^{-1}

3) a) Démontrer que (C_1) admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution de l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0$

a) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près

+++++++++++++++++++++++Exercice 66:+++++++++++++++++++++++++++

La partie B peut être traitée indépendamment de la partie A

Le plan est muni d'un repère arthomormal (O ; I ; J) ; unité graphique : 2cm

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur R par : $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère (O ; I ; J)

Partie A :

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et $f_1$correspondant respectivement à n=0 et n=1

on considère d'abord la fonction f_0 définie sur R par : $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

1- a- Déterminer la limite de $f_0(x)$ lors que x tend vers $-\infty$

b- Déterminer la limite de $f_0(x)$ lors que x tend vers $+\infty$

c- En déduire les asymptotes de C_0

2- Montrer que le point $K\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_0

3- Etudier les variations de $f_0(x)$

4- a- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_0 au point K

b- Justifier que pour étudier la position de C_0 par rapport à la tangente T, il suffit d'étudier sur R le signe de g(x) où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$

c- Calculer g'(x) et g''(x)

d- Déterminer, en les justifiant, les signes de g''(x) ; g('x) et g(x) suivant les valeurs de x

e- En déduire la position relative de la tangente T par rapport à courbe C_0

5- Tracer la courbe C_0 et la tangente T dans le repère (O ; I ; J)

6- a- Montrer que pour tout réel x, les points $M\big(x;\ f_0(x)\big)\ et\ \ M'\big(x;\ f_1(x)\big)$ sont symétriques par rapport à la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}$

b- Comment obtient-on C_1 à partir de C_0 ? Tracer C_1 sur la même figure

Partie B :

Etude de la suite u définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1- Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

2- Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1

3- Montrer la suite u est positive

4- On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

a- Montrer que pour tout x réel, $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

b- En déduire le signe de k pour tout $x \in [0; 1]$

c- En déduire que u est décroissante

5- a- Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1 - e^{-(n-1)}}{n-1}$$

b- Calculer u_2

6- Soit v la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, par

$$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$$

a- Calculer la limite de v quand n tend vers $+\infty$

b- Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leq u_n \leq v_n$

c- En déduire la limite u quand n tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++Exercice 67:++++++++++++++++++++++++++++

PARTIE A :

On note f_n la fonction numérique de variable réelle x définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour tout n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) L'unité graphique : 2cm

1) Etudier les limites de f_n $en - \infty\ et + \infty$

2) a) Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n $en - 2$

b) Calculer $f'_n(x)$; puis étudier son signe suivant la parité de n

c) Dresser le tableau de variations de f_n

3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent un point fixe A

Déterminer une équation de la tangente $(T_n)\ à\ (C_n)$ en A

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel $x \neq -2, on\ a$: $f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives des courbes $(C_1)\ et\ (C_2)$ (pour n=1 et n=2)

Représenter graphiquement $(C_1)\ et\ (C_2)$

PARTI B :

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$

1) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a $U_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?

2) a) En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $nU_{n+1} = 1 + U_n - \frac{e}{2^n}$

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4-b) de A

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} = 1$

PARTIE C :

On considère la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[\ par:\ \ g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O;I ;J)

1) Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1). Justifier la construction
2) On considère la fonction φ définie sur $[0;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + \ln(1+x)$
   a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $I = [2;3]$
   b) Démontrer que pour x positif, l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à $g(x) = e$
   c) Démontrer que pour tout x de I ; $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 2\ \ et\ \ v_{n+1} = \varphi(v_n)$
   a) Montrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α. Conclure
   b) Démontrer que $\varphi(I) \subset I$
   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; (v_n) appartient à l'intervalle I
4) a) Démontrer pour tout entier naturel n , on a : $|v_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|v_n - \alpha|$ puis que $\alpha - v_{n+1} \leq \frac{1}{3}(\alpha - v_n)$

b) Démontrer que pour tout entier naturel : $\alpha - v_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et que la suite (v_n) converge vers α

c) Déterminer un entier naturel p pour lequel v_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer cette valeur approchée

+++++++++++++++++++++++Exercice 68:+++++++++++++++++++++++++++

On désigne par n l'entier naturel supérieur à 2, on con sidère les fonctions f_n qui sont définies sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}$

Partie A : I- Etude des fonctions f_n

1) calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln x$
2) Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Etudier le signe de $f'_n(x)$
3) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
4) Etablir le tableau de variation de la fonction $\mathrm{f_n}$ et calculer sa valeur maximale en fonction de n

II- Représentation graphique de quels que fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) ; (unit é graphique 5cm)

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère

1) Tracer $(C_2)\ \ et\ \ (C_3)$
2) a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$
   Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3). Tracer (C_4)

Partie B : Calculs d'aires

1) Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

2) En déduire l'aire, en unité d'aires du domaine plan par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1 \ \ et \ \ x = e$
3) On note A_n l'aire, en unité d'aires, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y = 0\,; x = 1 \ \ et \ \ x = e$
   a) Calculer A_2
   b) Déterminer la nature de la suite $\mathrm{A_n}$ en précisant l'interprétation graphique de la raison

<u>Partie C:</u> Etude sur l'intervalle $]\mathbf{1}; +\infty[$ de léuation $\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$

Dans toute la suite, on prend $n \geq 3$

1) a) Vérifier que , pour tout n ; $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \ \ et \ \ f_n\left(\frac{n-2}{2n}\right) > 1$

   b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'admet pas de solution sur l'intervalle$\left]1;\ e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$

2) On admet que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}};\ +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n

3) On se propose de déterminre la limite de la suite (α_n)

Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$

En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n)

++

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

+++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 69:</u>++++++++++++++++++++++++++++

<u>PARTIE A :</u> On donne la fonction g définie sur R par : $\mathrm{g(x) = e^{2x} - 5e^x + 4}$

1) Résoudre l'équation : $\forall x \in R; g(x) = 0$

   Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4\,;\ +\infty[\quad g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; \ln 4[; g(x) < 0 \end{cases}$

<u>PARTIE B :</u> Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2}$ et **C** sa courbe représentative (unité graphique : 2cm)

1) Déterminer l'ensemble de définition de f D_f
2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f

a) Démontrer que $\forall x \in D_f$; $\mathrm{f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2)^2}}$

b) Etudier le signe de f'(x) et en déduire le tableau de variation de f(x)

3) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = \mathrm{x} - 1$ est asymptote de f en $+\infty$
4) Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite (D_1)
5) Démontrer que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$
6) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = \mathrm{x} - \frac{3}{2}$ est asymptote de (C) en $-\infty$
7) Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite (D_2) sur l'intervalle $]-\infty; \ln 2[$
8) Construire (C) et ses asymptotes

PARTIE C : Soit λ un réel strictement négatif

1) Exprimer en fonction de λ l'aire du domaine délimité par : $x = 0; x = \lambda$ et la droite (D_2) avec la courbe (C); en cm²
2) Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 70:**+++++++++++++++++++++++++++

1) Soit la fonction g définie sur R par : $g(x) = e^x + x + 1$

a) Etudier le sens de variation de la fonction g et ses limites $en - \infty$ et en $+\infty$
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution notée α appartient à l'intervalle$[-1{,}28; -1{,}27]$
c) En déduire le signe de g(x) sur R

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ et **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 4cm)

a) Montrer que $f(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

c) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T) et étudier la position de (C) par rapport à (T)

d) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D)

e) Faire le tableau de variation de f

f) Tracer sur un même graphique (C) (T) et (D)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 71:**+++++++++++++++++++++++++++

On considère l'application de $]-1;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\ln(\mathrm{x}+1)}{\mathrm{x}} \quad \text{si } \mathrm{x} \neq 0 \quad \text{et } \mathrm{f}(0) = 1$$

PARTIE A :

1) Etudier la continuité de f sur $]-1;\ +\infty[$
2) Etudier la dérivabilité de f sur $]-1;\ +\infty[$. Expliciter la fonction f'.
3) On note g l'application de $]-1;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $\mathrm{g(x)} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} - \ln(1+\mathrm{x})$
   b) Etudier les variations de g et le signe de g(x) (On ne demande pas l'étude de la limite de g en -1)
   c) En déduire les variations de f
4) Etudier les limites de f aux bornes de $]-1;\ +\infty[$
5) Construire la courbe (C). Préciser les asymptotes et la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses
6) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 et étudier la position de (C) par rapport à la tangente. (On étudiera les variations de
   $h(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + f'(x)\right)$ puis le signe de $h(x)$)

PARTIE B :

1) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $]0;1[\ tels\ que\ f(\alpha)=\alpha$

On ne demande pas de calculer α

2) On considère la suite (U_n) $définie\ par$ $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in N;\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Démonter que $\forall n \in N, 0 \leq U_n \leq 1$

b) Démontrer que $\forall n \in N, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$(on remarquera que $U_{n+1} - \alpha = f(U_n) - f(\alpha)$ et on utilisera le résultat : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0.)$

c) En déduire que la suite (U_n) converge vers α

++++++++++++++++++++++++Exercice 72:+++++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

PARTIE A : Soit la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

1) Démontrer que sur $]1;\ +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et donner un encadrement de α à 10^{-1} près

2) Préciser le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$

PARTIE B : Soit la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) a) Quelle est la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ quand x tend vers 0

b) Déduisez en que f est dérivable en x=0 et trouver une équation de la tangente (T) en x=0 à la courbe (C) représentant de f

2) a) Démontrer que pour tout $x > 0; f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

b) Déduisez en la limite de f en $+\infty$

3) a) Démontrer que pour tout nombre réel $x > 0; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Déduisez en les variations de f

c) Construire (T) et (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 73:+++++++++++++++++++++++++++

Le repère (O, I, J) est orthonormé

PARTIE A : Soit la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1) a) Etudier le sens de variation de g

b) Calculer g(1) et g(2)

c) Démontrer que sur l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$

Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

d) Déduire le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$

PARTIE B : Soit la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ On notera (C) la courbe représentative de f

1) Démontrer que pour tout nombre réel $x > 0; f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$

2) Etudier les variations de f

3) En déduire les variations de f et démontrer que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4) Construire la courbe (C)

++++++++++++++++++++++++Exercice 74:+++++++++++++++++++++++++++

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0;1[\,\cup\,]1.+\infty[\ ;\ \ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\ln x \\ f(0) = 0 \ \ et \ \ f(1) = 1 \end{cases}$$

On notera C la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O ; I ; J) d'unité 5cm

PARTIE A : On considère la fonction g dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ $et\ définie\ par$

$$g(x) = (x-2)\ln x + (x-1)$$

1) Démontrer que pour tout réel x élément de $]0\,;\,+\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + lnx$

2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation

3) Déduire de 2) que g(x) est positif pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$

PARTIE B : 1)a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Démontrer que f est continue à droite en 0 , et continue en 1

c) Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0

Donner une interprétation graphique de ce résultat

d) On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \frac{3}{2}$

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1

2)a)On admet que f est dérivable sur $]0;1[\,\cup\,]1.+\infty[$

Démontrer que pour tout x appartenant à $]0;1[\,\cup\,]1.+\infty[$: $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2}g(x)$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

c)Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $on\ a\ 0 \le f(x) \le 1$

d) Dans le repère (O ;I ;J) , tracer la de tangente à C au point O, la tangente à C au point B de coordonnées $(1;1)$ et la courbe C .

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}69\ \ et\ \ \ln 3 \simeq 1{,}1$

++++++++++++++++++++++++Exercice 75:+++++++++++++++++++++++++++

PARTIE A: La fonction g est définie sur R par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Etudier les limites de g en $-\infty\ et\ en + \infty$

2) Etudier le sens de variations de g sur R et dresser son tableau de variation

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions

b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \le \alpha \le -1{,}5$

4) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

PARTIE B: La fonction f est définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

On note C sa courbe représentative dans un repère (unité graphique 2cm)

1) Etudier les limites de f en $-\infty\ et\ en + \infty$

2) Calculer f'(x) dérivée de f et montrer que f'(x) et g(x) ont le même signe. Etudier le sens de variation de f(x)

3) Démontrer l'égalité $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

Où α est définie dans la première partie. En déduire un encadrement de f(α)

4) Etablir un tableau de variation de f

5) Tracer (C)

PARTIE C: Soit m un nombre réel négatif

1) Interpréter graphiquement $\int_m^0 f(x)dx$

2) a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie $\int_m^0 xe^x dx$

b) En déduire $\int_m^0 f(x)dx$

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$ lors que x tend vers $-\infty$

++++++++++++++++++++++++Exercice 76:++++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$ et (C) sa courbe représentative

PARTIE A: La fonction g est définie sur R par : $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$

1) Déterminer f'(x) et exprimer f'(x) en fonction de g(x)

2) Etude de signe de g(x)

a) Calculer les limites de g(x) en $-\infty$ $et\ en + \infty$

b) Calculer g'(x) et étudier son signe suivant les valeurs de x

c) En déduire le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation

d) Montrer que l'équation g(x)=0 admet sur R une solution unique $\alpha \in]0{,}20; 0{,}21[$

e) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x

PARTIE B: 1) Etudier suivants les valeurs de x le signe de f'(x)

2) En déduire le sens de variation de f

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

4) On considère la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$

a) Calculer h'(x) pour tout x élément de $[0; 1]$ puis déterminer le sens de variation de h sur $[0; 1]$

b) En déduire un encadrement de f(α)

5) a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe (x'x)

b) Préciser alors la position de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses

6) Tracer la courbe représentative (C) de f

++++++++++++++++++++++++Exercice 77:++++++++++++++++++++++++++++

Dans tout le problème on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$l'unité est 2 cm

A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x + 1$ et **C** sa courbe représentative

1-)Etudier les variations de g et en déduire son signe en fonction de x

2-)On note **C'** la courbe représentative de la fonction $x \to \ln x$ dans le même repère

Monter que **C** et **C’** ont deux points communs d’abscisses respectives 1 et e et que pour tout élément de $[1; e]$ $on\ a :\ \ xlnx - x + 1 \leq lnx$, on ne demande pas de représenter **C et C’**

3-a)Calculer à l’aide d’une intégration par partie, l’intégrale : $J = \int_1^e (x-1)lnx\, dx$

b) Soit Δ le domaine plan défini par: $\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \mathrm{g(x)} \leq \mathrm{y} \leq \ln\mathrm{x} \end{cases}$ Déterminer en cm² l’aire de Δ.

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2}près de cette aire.

B : Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} lnx$

1-)Etudier les limites de f en $+\infty\ et\ en\ 1$

2-a) Ecrire f’(x) en fonction de g(x) b-) Déterminer le tableau de variations de f

3-)Tracer la courbe représentative de f dans le repère

C-)1-) Montrer que l’équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in]3{,}5 ; 3{,}6[$

2-)Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a-) Montrer que α est solution de l’équation $h(x) = x$

b-) Etudier le sens de variations de h(x)

c-) On pose $I = [3\ ; 4]$ Montrer que pour tout x élément de I on a : $h(x) \in I et\ |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

1- On définie la suite $(U_n)\ par$: $U_0 = 3\ et\ pour\ tout\ n \geq 0;\ U_{n+1} = h(U_n)$

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a-) pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$;

b-) pour tout entier naturel n : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

c-) la suite (U_n) converge vers α

++++++++++++++++++++++++Exercice 78:++++++++++++++++++++++++++++

1) Etudier et tracer la courbe de la fonction φ définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ \varphi(x) = \ln(2x)$

2) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\ par\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

a) Déterminer f’(x) et en déduire le sens de variation de f

b) Démontrer que f est impaire

c) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f\quad puis\ \ \lim\limits_{-\infty} f$

4) a) Démontrer que pour tout $x > 0\ \ on\ a\ f(x) = \ln(2x) + \ln\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$

b) On pose $\mathrm{g(x) = f(x) - \ln(2x)}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans le même repère

Que peut on dire des courbes Γ et (C) en $+\infty$

c) Etudier la position relative de Γ par rapport à sa tangente à l’origine

On pourra étudier les variations de la fonction $h(x) = f(x) - x$

d) Tracer la courbe Γ

++++++++++++++++++++++++Exercice 79:++++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f dérivable sur R et définie par $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2cm

Partie A :

1) a) Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations

2) Démontrer que le point A de (C) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (C)

3) Tracer la courbe (C) . On construira en particulier la tangente à (C) au point A

4) a) Démontrer que la fonction f admet une bijection reciproque f^{-1}

Préciser l'ensemble de définition de f^{-1}

b) Donner une expression de $f^{-1}(x)$

c) Tracer dans le même repère que (C) , la courbe (Γ) de f^{-1}

5) a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x on ait : $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1}$

b) On pose $\lambda \in R$; $I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t)dt$. Déduire de 5) a) que :

$$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^\lambda + 1) + \ln\frac{4}{27}$$

6) a) x étant un réel de l'intervalle $[0; 1[$; établir à l'aide d'une considération géométrique que : $I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t)dt = xf^{-1}(x)$

b) En déduire une expression de $\int_0^x f^{-1}(t)dt$

Partie B :

1) a) Etudier le sens de variation de f'

b) En déduire que pour tout réel x : $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$

2) On pose, pour tout réel x , $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Démontrer que la fonction φ est une bijection de R vers R

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution , que l'on notera α

c) Démontrer que $-1{,}5 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}4$

3) On défint la suite numérique (U_n) par son premier terme U_0 et la relation de récurrence : $\forall n \in N$; $U_{n+1} = f(U_n)$

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis , établir que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout entier naturel n : $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$

En déduire que la suite (U_n) converge vers α

c) On donne $U_0 = -1$. Justifier que : $\forall n \in N$; $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

A partir du quel rang n est t-on sûr d'avoir : $|U_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 80:+++++++++++++++++++++++++++

On considère f la fonction définie sur R par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

On considère par C la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique : 3cm

PARTIE A : 1) Justifier que ; pour tout réel x : $x^2 - 2x + 2 > 0$

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variations de f sur R

3) Déterminer les limites de f $-\infty$ *et en* $+\infty$

4) Représenter C et la droite Δ *d'équation* $y = x$; on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C et on précisera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points ?

PARTIE B : On s'intéresse à l'intersection de C et de Δ. On pose pour tout réel x :

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

1) Déterminer la dérivée φ' *de* φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur R

2)a)Déterminer la limite de φ *en* $-\infty$

b) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $\varphi(x) = x\left(\frac{2lnx}{x} + \frac{ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right)$.

En déduire la limite de φ *en* $+\infty$

3) Montrer que φ est une bijection de R sur R

En déduire que la droite Δ *coupe* C en un seul point et un seul ; on désigne par α l'abscisse de ce point . Montrer que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

PARTIE C : On pose $J = [0{,}3 ; 0{,}4]$

1) Montrer que la fonction $x \to x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J

En déduire que si x appartient à J alors f(x) appartient à J

2) a)Prouver que pour tout x de J $|f'(x)| \leq 0{,}95$; (on pourra montrer que f est croissante sur J)

b) En déduire que pour tout x de J, $|f(x) - \alpha| \leq 0{,}95|x - \alpha|$

3) On définit la suite (U_n) par U_0=0,3 et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = f(U_n)$

Prouver que pour tout n :

■$U_n \in J$; ■ $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}95|U_n - \alpha|$ *et* ■ $|U_n - \alpha| \leq 0{,}1 \times (0{,}95)^n$

En déduire que la suite (U_n) converge vers α

PARTIE D : On désigne par A l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$; l'axe des abscisses et courbe C. On se propose de déterminer une valeur approchée de A en unités d'aire.

1) Montrer que la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ a pour équation

$$y = -\frac{24}{25}x + \frac{6}{25} + ln\frac{25}{16}$$

2) Soit les points E d'abscisse 0 et F d'abscisse $\frac{1}{2}$de la courbe C . Montrer que la droite (EF) a pour équation $y = 2\left(ln\frac{5}{8}\right)x + ln2$.

3) On admet, que sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, la courbe C est au dessus de (T) et dessous de (EF)

a) Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{24}{25}x + \frac{6}{25} + ln\frac{25}{16}\right)dx \leq A \leq \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\left(ln\frac{5}{8}\right)x + ln2\right)dx$

b) En déduire que,$ln\frac{5}{4} \leq A \leq \frac{1}{4}ln\frac{5}{2}$.

c) Donner une valeur approchée de A à 5.10^{-3} près.

+++++++++++++++++++++++++Exercice 81:++++++++++++++++++++++++++++

PARTIE A : La fonction g est définie sur R par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ $et\ en + \infty$
2) Etudier le sens de variations de g sur R et dresser son tableau de variation
3) Justifier que l'équation g(x)=0 admet sur R une solution unique $\alpha \in]0{,}94; 0{,}941[$
4) Etudier le signe de g sur R

PARTIE B La fonction f est définie sur R par : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$
On note C sa courbe représentative dans un repère
1) Etudier le signe de f sur R
2) Etudier les limites de f en $-\infty$ $et\ en + \infty$
3) Calculer f'(x), ou f' désigne la fonction dérivée de f, et vérifier que f'(x) et g(x) ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de f
4)a)Démontrer l'égalité $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$
b) Etudier le sens de variations de la fonction h définie sur $\left[-\infty; \frac{5}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$
En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} $de\ f(\alpha)$
5) Démontrer que la droite D, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à C en $+\infty$
Préciser la position de C par rapport à D
6) Tracer la droite D et la courbe C dans le repère (O,I,J) ; (unité graphique 2cm)

PARTIE C : A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$

PARTIE D : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à3, on considère les points A_n, B_N et C_n , d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite D et à la courbe C ;soit U_n le réel défini par : $U_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}$
1) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a ; $U_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$
2) a)Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 82:++++++++++++++++++++++++++

Nombre de chiffres d'un entier naturel
Si n est un entier naturel , on note C(n) le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n

1) Déterminer C(385243)
2) Evaluer C(n) en fonction de log(n)
3) Déterminer le nombre de chiffres des nombres suivants :

$$a = 9^{9^9} \quad ; \quad b = 11^{9^7} \quad ; \quad c = 2^{86242}(2^{86241} - 1)$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 83:++++++++++++++++++++++++++

Partie A :

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ $où$ $a, b\ et\ c$ sont des nombres réels. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

1- Calculer les réels $a, b\ et\ c$ pour que (C) passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, par le point $B(0; 1)$ et qu(elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1

2- On supposera désormais que f est définie sur R par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

   a- Déterminer la limite de f en $-\infty\ \ et\ \ en\ +\infty$. En déduire l'existence d(une asymptote è (C)

   b- Etudier les variations de f sur R

3- Résoudre sur R, l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur R

4- Montrer que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique $\propto$

   En déduire que $1{,}3 <\propto< 1{,}4$

5- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point B .

6- Tracer (C) et (T) dans le repère (O, I, J) . Unité graphique 2cm

Partie B:

Soit F la fonction définie sur R par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3$

1- Montrer que F est une primitive sur R de f qui s'annule pour $x = 0$

2- Calculer en cm², la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}\ \ et\ \ x = 1$

   Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près

++++++++++++++++++++++++Exercice 84:+++++++++++++++++++++++++++

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$. On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I ; J) du plan

1- Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (Γ)

2- a- Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$

   On note $\propto_n$ cette solution. On a donc pour tout entier naturel n ; $\propto_n + \ln \propto_n = n$

   b- Préciser la valeur de $\propto_1$

   c- Démontrer que la suite $(\propto_n)$ est strictement décroissante

3- a- Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) au point A d'abscisse 1

   b- Etudier la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x - x + 1$

   c- En déduire la position relative de la courbe (Γ) par rapport à (Δ)

4- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \propto_n$

Déterminer la limite de la suite $(\propto_n)$

PARTIE B :

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir une suite (β_n) de réels tels que : $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante

1- Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

2- Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++Exercice 85:+++++++++++++++++++++++++++

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)L'unit é graphique est 2cm

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ $par\ \ f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$

On note (C) la courbe représentative de f

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat

   c) Calculer la limite à gauche en 1 puis interpréter graphiquement ce résultat

2) a) Pour tout réel $x \in]-\infty; 1[$; calculer $f'(x)$

   b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

   c) Dresser le tableau de variations de f

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-\infty; 1[$

   b) Justifier que $-0{,}7 < \beta < -0{,}6$

4) a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$y = -x - 1$$

   b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (C) et (T)

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par : $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

5) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \beta\ \ et\ \ x = 0$

a) Calculer $\int_{\beta}^{0} \ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties

b) Démontrer que la valeur de A en unité d'aire est : $A = \frac{\beta^3}{3} - 2\beta - (1-\beta)\ln(1-\beta)$

c) Déterminer en cm² l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\beta = -0{,}65$

6) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J)

a) Calculer $f(-1)$

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis calculer le.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la même figure

++++++++++++++++++++++++Exercice 86:+++++++++++++++++++++++++++

A- On considère la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Unité graphique 2cm

4) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes de la courbe (C)

b) Etudier les variations de f ; dresser le tableau de variations de f. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

c) Construire avec soin (T) et la courbe (C)

2) On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique

a) Etudier les variations de la fonction $f' sur$ $[0; 1]$. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$

b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une solution unique α

Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$

3) On se propose de déterminer une valeur approchée de α

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que : pour tout n de N ; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis , démontrer que : pour tout n de N : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

En déduire que pour tout n de N ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

4) Ne connaissant pas la primitive de la fonction f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

a) Justifier l'existence de I et donner une interprétation graphique

b) On pose :$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)e^x dx \quad et \quad K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$. Vérifier que $4I = J + K$

c) Calculer I

SUITES NUMERIQUES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définition et propriétés :

On appelle suite numérique toute fonction de N vers R et on note (u_n) avec $n \in N$

Formes d'écritures d'une suite numérique :

Il y'a deux formes d'écritures en suite qui sont :

●**Forme récurrente :** Toute suite qui s'écrit sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

●**Forme explicite :** Toute suite qui s'écrit sous la forme $u_n = f(n)$

Monotonie d'une suite : Soit (u_n) une suite numérique et K un intervalle

●Si $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante sur K

●Si $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est (u_n) décroissante sur K

●Si $u_{n+1} - u_n = 0 \iff u_{n+1} = u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors la suite (u_n) est constante sur K

SUITES ARITHMETIQUES :

Soit r la raison et u_p le premier terme da suite arithmétique (u_n)

●**Formule récurrente :** $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$

●**Formule explicite :** $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$

●**Somme des termes d'une suite arithmétique :**

$$\mathbf{S_n = \frac{nombre\ de\ termes}{2}(1^{er} terme + dernier\ terme)}$$

Si $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)}$

Si $\boldsymbol{S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)}$ **avec** $\boldsymbol{p \neq 0}$

Démonstration :

Comme $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$; ……… $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$; $u_n = u_0 + nr$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr)$$

$$S_n = (n+1)u_0 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)r = (n+1)u_0 + \Delta_n r$$

$$\begin{cases} \Delta_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ \Delta_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$$

$$2\Delta_n = (n+1) + (n+1) + \ \ldots + (n+1) + (n+1) = n(n+1) \iff \Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\left(u_0 + \frac{n}{2}r\right) = (n+1)\left(\frac{2u_0 + nr}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \iff \boxed{\mathbf{S_n = \frac{(n+1)}{2}\ (u_0 + u_n)}}$$

●**Progression arithmétique :** a ; b et c forment une progression arithmétique si et seulement si $\mathbf{2b = a + c}$

●**Sens de variations :**

Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante

Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante

●**Insertion de n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b**

Insérer n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b, c'est déterminer une progression arithmétique de $n+2$ termes dont les termes extrêmes soient $a\ et\ b$

La raison de la progression cherchée est $\boldsymbol{r = \frac{b-a}{n+1}}$

SUITES GEOMETIQUES :

Soit q la raison et u_p le premier terme da suite géométrique (u_n)

●**Formule récurrente :** $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$

●**Formule explicite :** $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

●**Somme des termes d'une suite géométrique :**

$$\mathbf{S_n = 1^{er}terme\,\frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}}$$

Si $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Si $\boldsymbol{S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$ **avec** $\boldsymbol{p \neq 0}$

Démonstration :

Comme $u_1 = qu_0$; $u_2 = q^2u_0$; ……… $u_{n-1} = q^{n-1}u_0$; $u_n = q^nu_0$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^{n-1}u_0 + q^nu_0$$

$$S_n = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n) = u_0\Delta_n$$

$$\begin{cases} \Delta_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ -q\Delta_n = -q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} \end{cases}$$

$$\Delta_n - q\Delta_n = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow (1-q)\Delta_n = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow \Delta_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0\Delta_n = u_0\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{S_n = u_0\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}}$$

●**Produit des termes d'une suite géométrique :**

$\mathbf{P_n = (1^{er}\ terme)^{nombre\ de\ termes} \times (raison)^{\frac{(n-k)(n+1-k)}{2}}}$ où k est l'indice du 1er treme

Si $\mathbf{P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = (u_0)^{n+1} \times (q)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

Si $\mathbf{P_n = u_k \times u_{k+1} \times \ldots \times u_n = \left(u_p\right)^{n-p+1} \times (q)^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}}}$ **avec** $\mathbf{k \neq 0}$

●**Progression géométrique :** a ; $b\ et\ c$ forment une progression géométrique si et seulement si $\mathbf{b^2 = a \times c}$

●**Sens de variations :**

Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante

Si $q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est strictement constante

●**Insertion de n moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b**

Insérer n moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b(a et b non nuls), c'est déterminer une progression arithmétique de $n+2$ termes dont les termes extrêmes soient a et b. La solution du problème est donnée par la détermination de la raison q:

Si n est pair ; il y'a une seule solution : $\boldsymbol{q} = \sqrt[n+1]{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}$

Si n est impair : $\begin{cases} \frac{b}{a} < 0 \text{ alors pas de solution} \\ \frac{b}{a} > 0 \text{ alors il y'a deux solutions } q = \pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \end{cases}$

Suite de la forme $aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0$ (E)

Le terme général de cette suite est la somme de deux suites géométriques
Pour l'obtenir, on pose :$U_n = U_0 q^n$; soit $U_{n+1} = U_0 q^{n+1}$ et $U_{n+2} = U_0 q^{n+2}$
Dans (E) on a : $aU_0q^nq^2 + bU_0q^nq + cU_0q^n = 0 \Longrightarrow U_0q^n(aq^2 + bq + c) = 0$
Soit $aq^2 + bq + c = 0$ l'équation caractéristique ; on a : $\Delta = b^2 - 4ac$

●Si $\Delta > 0; on\ a:\ q_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $alors$ $U_n = \alpha {q_1}^n + \beta {q_2}^n$ $avec\ n \geq 1$

Pour déterminerα et β, il suffit de résoudre le système : $\begin{cases} U_1 = \alpha q_1 + \beta q_2 \\ U_2 = \alpha {q_1}^2 + \beta {q_2}^2 \end{cases}$

● Si $\Delta = 0$; on a : $q_1 = q_2 = \frac{-b}{2a}$ alors $U_n = (\alpha + n\beta)q^n$ avec $n \geq 1$

Pour déterminerα et β, il suffit de résoudre le système : $\begin{cases} U_1 = (\alpha + \beta)q \\ U_2 = (\alpha + 2\beta)q^2 \end{cases}$

● Si $\Delta < 0$; $on\ a$: $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ alors

$$U_n = \rho^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \text{ avec } n \geq 0$$

Pour déterminerα et β, il suffit de résoudre le système : $\begin{cases} U_1 = \rho(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta) \\ U_2 = \rho^2(\alpha \cos 2\theta + \beta \sin 2\theta) \end{cases}$

Inégalité des accroissements finis :

Soit $y = f(x)$ une fonction continue et dérivable sur $[a; b]$. Dans ces conditions, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

U est la suite définie par : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in N$ on a $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}$

1) Calculer U_1 *et* U_2
2) V est la suite définie par : $\forall n \in N$ *on a* $V_n = U_n\sqrt{2} - n$

Démontrer que V est une suite géométrique

3) Calculer V_n *puis* U_n en fonction de n. Etudier la convergence de la suite U

Calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} S_n$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Calculons U_1 *et* U_2

Pour $n = 0;$ *on a* $u_1 = \frac{1}{2}U_0 + \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ *d'où* $u_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour $n = 1;$ *on a* $u_2 = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1+2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}$ *d'où* $u_2 = \frac{1}{6} + \sqrt{2}$

2) V est la suite définie par : $\forall n \in N$ *on a* $V_n = U_n\sqrt{2} - n$

Démontrons que V est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1}\sqrt{2} - (n+1) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}\right) - (n+1) = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \frac{n+2}{2} - (n+1)$$

$$V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \frac{n+2-2n-2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\left(U_n\sqrt{2} - n\right) = \frac{1}{2}V_n$$

$$d'où\ \boldsymbol{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n}\quad \boldsymbol{cqfd}$$

Alors V est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^er terme $V_0 = U_0\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

●D'après la formule explicite de V , on a : $V_n = V_p q^{n-p} = V_0 q^n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2\sqrt{2}}{3\times2^n}$

D'où $V_n = \frac{\sqrt{2}}{3\times2^{n-1}}$

●Comme $V_n = U_n\sqrt{2} - n$ alors $U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_n + n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{3\times2^{n-1}} + n\right) = \frac{1}{3\times2^{n-1}} + \frac{n}{\sqrt{2}}$

D'où $U_n = \frac{1}{3\times2^{n-1}} + \frac{n}{\sqrt{2}}$

Etudions la convergence de la suite U

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{3\times2^{+\infty-1}} + \frac{+\infty}{\sqrt{2}} = +\infty \quad d'où \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

Alors u n'est pas convergente

Calculons la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Comme $U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_n + n)$ *alors* $S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_0 + 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + 1) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}}(V_n + n)$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_0 + 0 + V_1 + 1 + \cdots + V_n + n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{V_0 + V_1 + \cdots + V_n}_{\Delta_n} + \underbrace{0 + 1 + 2 + \cdots + n}_{\Gamma_n}\right)$$

$$●\Delta_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$D'où\quad \Delta_n = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3\times2^{n+1}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3\times2^{n-1}}$$

$\bullet \Gamma_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Alors $S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_n + \Gamma_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3\times 2^{n-2}} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3\times 2^{n-2}} + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}$

D'où $S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3\times 2^{n-1}} + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3\times 2^{+\infty-1}} + \frac{+\infty(+\infty+1)}{2\sqrt{2}} = +\infty \quad alors \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

++

EXERCICE 2:

On considère la suite U définie par : $U_0 = 8 \;\; et \; \forall n \in N \;\; on \; a \; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$

1) Etablir un tableau de valeurs de la suite pour n variant de 0 à 9. Tracer la représentation graphique en «chemin» de la suite. Donner une conjecture de la limite éventuelle de la suite U
2) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$

Résoudre l'équation$f(x) = x$. Faire apparaitre la solution sur le graphique

3) On pose $V_n = U_n - 4$. Montrer que la suite V est une suite géométrique
4) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = 4 + \frac{4}{2^n}$
5) Déterminer la limite de la suite (U_n)
6) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n \;\; et \;\; \lim_{n\to+\infty} S_n$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Etablissons un tableau de valeurs de la suite pour n variant de 0 à 9.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U_n	8	6	5	4,5	4,25	4,125	4,0625	4,03125	4,015625	4,0078125

Traçons la représentation graphique en «chemin» de la suite.

Voir figure

Donnons une conjecture de la limite éventuelle de la suite U

On considère la droite (Δ) d'équation y=x

Voire la figure ci-dessus pour la conjecture et on constate que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

2) Déterminons la fonction f telle que $\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$

On pose $U_n = x \; et \; on \; a : f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

Résolvons l'équation$\boldsymbol{f(x) = x}$. Faisons apparaitre la solution sur le graphique

$$f(x) = x \Longrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = x \Longrightarrow \frac{1}{2}x - x = -2 \Longrightarrow x = 4$$

3) On pose $\boldsymbol{V_n = U_n - 4}$. Montrons que la suite V est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}U_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}U_n - 2 = \frac{1}{2}(U_n - 4) = \frac{1}{2}V_n \Longrightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

D'où la suite V est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $V_0 = U_0 - 4 = 8 - 4 = 4$

4) Exprimons $\boldsymbol{V_n}$ en fonction de n et en déduire que $\boldsymbol{U_n = 4 + \frac{4}{2^n}}$

●D'après la formule explicite de V on a : $V_n = V_p q^{n-p} = V_0 q^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow V_n = \frac{4}{2^n}$

●Comme $V_n = U_n - 4 \Longrightarrow U_n = V_n + 4 \Longrightarrow U_n = 4 + \frac{4}{2^n}$ **cqfe**

5) **Déterminons la limite de la suite (U_n)**

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 4 + \frac{4}{2^{+\infty}} = 4 \quad d'où \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = 4$$

6) Exprimons en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} S_n$

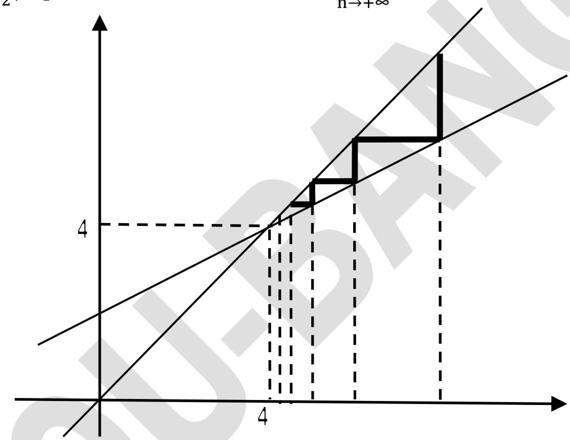
Comme $\mathrm{U_n = V_n + 4}$ alors $\mathrm{S_n = V_0 + 4 + V_1 + 4 + \cdots + V_n + 4 \Rightarrow}$

$$\mathrm{S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 4(n+1) = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 4(n+1) \Rightarrow}$$

$$\mathrm{S_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + 4(n+1) = 4\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}\right) + 4(n+1) = 8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)}$$

$$\mathrm{\Rightarrow S_n = 8 - \frac{1}{2^{n-2}} + 4(n+1)}$$

$$\mathrm{\lim_{n\to+\infty} S_n = 8 - \frac{1}{2^{+\infty-2}} + 4(+\infty+1) = +\infty \quad d'où \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$



++

EXERCICE 3:

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

b) Démontrer que la suite (U_n)est strictement croissante

c) Soit la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Prouver que $S_n = -\ln(n+1)$

d) En déduire la limite de la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) **Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$**

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{n}{n}\right)\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

b) **Démontrons que la suite (U_n)est strictement croissante**

1ère Méthode : Vérifions si $U_{n+1} - U_n > 0$

$$U_{n+1}-U_n=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)=\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$$

Comme $n^2+2n+1>n^2+2n\ alors\ \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1 \Longrightarrow \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)>\ln 1 \Longrightarrow$

$$\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)>0\quad cqfd$$

2ème Méthode : Etudions le sens de variations de la fonction $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)'=\frac{det\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}\quad d'où\ f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}>0$$

Alors la suite (U_n) est strictement croissante

c) Soit la somme $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$. Prouvons que $S_n=-\ln(n+1)$

$$S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}\Longrightarrow$$

$$S_n=-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 4+\cdots+\ln(n-1)-\ln n+\ln n-\ln(n+1)\Longrightarrow$$

$$D'où\quad \boldsymbol{S_n=-\ln(n+1)}\ \ \textbf{cqfp}$$

d) Déduisons-en la limite de la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\ln(+\infty)=-\infty\quad d'où\quad \lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{S_n=-\infty}$$

++

EXERCICE 4:

1) Soit n un entier naturel

Résoudre dans R l'équation d'inconnue x : $\ln(7^n.x)=2n$

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\ln(7^n.U_n)=2n$

a) Calculer $U_0\ et\ U_1$

b) Démontrer que la suite U_n est une suite géométrique et déterminer sa raison

3) La suite (U_n)admet-elle une limite ?

4) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier $n>n_0;\ U_n>100$

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

1) Soit n un entier naturel. Résolvons dans R l'équation d'inconnue x : $\ln(7^n.x)=2n$

$$\ln(7^n.x)=2n\Longrightarrow 7^n x=e^{2n}\Longrightarrow x=\frac{e^{2n}}{7^n}$$

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\ln(7^n.U_n)=2n$

a) Calculons $U_0\ et\ U_1$

On constate que $U_n=\frac{e^{2n}}{7^n}$

●Pour $n=0\Longrightarrow U_0=\frac{e^0}{7^0}=1\Longrightarrow U_0=1$ ●Pour $n=1\Longrightarrow U_1=\frac{e^2}{7}$

b) Démontrons que la suite U_n est une suite géométrique et déterminons sa raison

Comme $U_n=\frac{e^{2n}}{7^n}\Longrightarrow U_n=\left(\frac{e^2}{7}\right)^n$ alors U_n est une suite géométrique de raison q $=\frac{e^2}{7}$

3) La suite (U_n)admet-elle une limite ?

Oui U_n admet une limite car $q=\frac{e^2}{7}>1$ et sa limite est : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

4) Déterminons un entier n_0 tel que pour tout entier $n > n_0$; $U_n > 100$

$$U_n > 100 \Longrightarrow \left(\frac{e^2}{7}\right)^n > 100 \Longrightarrow \ln\left(\frac{e^2}{7}\right)^n > \ln 100 \Longrightarrow n\ln\frac{e^2}{7} > 2\ln 10 \Longrightarrow$$

$$n(2-\ln 7) > 2\ln 10 \Longrightarrow\ n > \frac{4{,}605}{0{,}054} \Longrightarrow\ n > 85{,}27\ \ d'où\ \ n_0 = 86$$

++

EXERCICE 5:

Les termes d'une suite arithmétique vérifient $S_5 = u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 45\ \ et\ \ u_9 = 6$

a) Calculer $u_1\ et\ la\ raison\ r$

b) Trouver n tel que : $s_n = 66$

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Les termes d'une suite arithmétique vérifient $S_5 = u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 45\ \ et\ \ u_9 = 6$

a) Calculons $\mathbf{u_1}$ et la raison r

●D'après la formule explicite, on a : $u_n = u_p + (n-p)r = u_1 + (n-1)r$

Pour $n = 9, on\ a$: $u_9 = u_1 + 8r = 6\ \ d'où\ \ u_1 + 8r = 6$

●D'après la formule de la somme, on a :

$$S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)r) =$$

Pour $n = 5, on\ a$: $S_5 = \frac{5}{2}(2u_1 + 4r) = 45\ \ \ d'où\ \ u_1 + 2r = 9$

D'où le système : $\begin{cases} u_1 + 8r = 6 \\ u_1 + 2r = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -u_1 - 8r = -6 \\ \ \ u_1 + 2r = 9 \end{cases} \Longrightarrow 6r = -3 \Longrightarrow r = -\frac{1}{2}$

Alors $u_1 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \Longrightarrow u_1 = 4 + 6 = 10 \Longrightarrow\ \ u_1 = 10$

b) Trouvons n tel que : $\boldsymbol{s_n = 66}$

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)r) = \frac{n}{2}\left(2(10) + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{n}{2}\left(20 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = 66 \Longrightarrow$$

$$n\left(\frac{40-n+1}{2}\right) = 132 \Longrightarrow n(41-n) = 264 \Longrightarrow -n^2 + 41n - 264 = 0 \Longrightarrow$$

$$n^2 - 41n + 264 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{n} = \{\mathbf{8}; \mathbf{33}\}$$

++

EXERCICE 6:

1) Soit la suite géométrique v_n vérifient $v_1 = 54\ \ et\ v_4 = 16$

Calculer la raison q et la somme $S_5 = v_1 + v_2 + \cdots + v_5$

2) Soit la suite géométrique telle que : $v_3 = 3\ \ et\ \ v_8 = \frac{3}{32}$

a) Calculer la raison q et le premier terme v_0

b) Calculer la somme $S_{10} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Soit la suite géométrique $\boldsymbol{v_n}$ vérifient $\boldsymbol{v_1 = 54\ \ et\ v_4 = 16}$

Calculons la raison q et la somme $\boldsymbol{S_5 = v_1 + v_2 + \cdots + v_5}$

D'après la formule explicite, on a : $v_n = v_p \times q^{n-p} = v_1 \times q^{n-1} = 54q^{n-1}$

Pour $n = 4$ $on\ a$: $v_4 = 54q^3 = 16 \Longrightarrow q^3 = \frac{16}{54} = \frac{1}{8} \Longrightarrow q = \frac{1}{2}$

Calculons la somme S_5:

$$S_5 = v_1 + v_2 + \cdots + v_5 = v_1 \frac{1 - q^{5-1+1}}{1-q} = 54\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}\right) = 54\frac{\frac{2^5-1}{2^5}}{\frac{1}{2}} = 108\left(\frac{31}{2^5}\right) \Longrightarrow$$

$$S_5 = 27 \times \frac{31}{8} = \frac{837}{8} \quad d'où\ \ S_5 = \frac{837}{8}$$

2) Soit la suite géométrique telle que : $v_3 = 3$ et $v_8 = \frac{3}{32}$

a) Calculons la raison q et le premier terme v_0

D'après la formule explicite, on a : $v_n = v_p \times q^{n-p} = v_0 \times q^n$

Pour $n = 3$ $on\ a$: $v_3 = v_0q^3 = 3 \Longrightarrow v_0 = \frac{3}{q^3}$

Pour $n = 8$ $on\ a$: $v_8 = v_0q^8 = \frac{3}{32} \Longrightarrow v_0 = \frac{3}{32q^8}$

On pose $v_0 = v_0$; $on\ a$: $\frac{3}{32q^8} = \frac{3}{q^3} \Longrightarrow q^5 = \frac{1}{32} \Longrightarrow q = \frac{1}{2}$

Alors $v_0 = \frac{3}{q^3} = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 3 \times 8 = 24$ $d'où$ $v_0 = 24$

c) Calculons la somme $S_{10} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$

$$S_{10} = v_0 + v_2 + \cdots + v_{10} = v_0\frac{1-q^{10+1}}{1-q} = 24\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 24\frac{\frac{2^{11}-1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = 48\left(\frac{2^{11}-1}{2^{11}}\right) \Longrightarrow S_{10} =$$

$$3 \times \frac{2047}{2^7} = \frac{6141}{128} \quad d'où\ S_{10} = \frac{6141}{128}$$

+++

EXERCICE 7:

On considère la suite (U_n) définie par : $\mathrm{U_0 = e^3}$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{U_{n+1} = e\sqrt{U_n}}$

1) Calculer U_1 ; U_2; U_3 et U_4
2) On pose $v_n = \ln U_n - 2$
   a) Démontrer que la suite v_n est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
   b) Exprimer v_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
3) En déduire la limite de (U_n)et (v_n)

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par :$U_0 = e^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $on\ a$ $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

1) Calculons U_1 ; U_2; U_3 et U_4

●Pour $n = 0$ $on\ a$: $U_1 = e\sqrt{U_0} = e\sqrt{e^3} = e^2\sqrt{e} \Longrightarrow U_1 = e^2\sqrt{e}$

●Pour $n = 1$ $on\ a$: $U_2 = e\sqrt{U_1} = e\sqrt{e^2\sqrt{e}} = e^2\sqrt{\sqrt{e}} \Longrightarrow U_2 = e^2\sqrt{\sqrt{e}}$

●Pour $n = 2$ $on\ a$: $U_3 = e\sqrt{U_2} = e\sqrt{e^2\sqrt{\sqrt{e}}} = e^2\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}} \Longrightarrow U_3 = e^2\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}$

●Pour $\mathrm{n} = 3$ on a : $\mathrm{U_4 = e\sqrt{U_3} = e\sqrt{{}^2\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}} = e^2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}} \Longrightarrow U_1 = e^2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}}}$

2) On pose $v_n = \ln U_n - 2$

a) Démontrons que la suite v_n est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

$$v_{n+1} = \ln U_{n+1} - 2 = \ln\left(e\sqrt{U_n}\right) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln U_n - 2 = \frac{1}{2}\ln U_n - 1 = \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$$

$$\boldsymbol{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \quad cqfd}$$

D'où V est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = \ln U_0 - 2 = 1$

c) Exprimons v_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n

●D'après la formule explicite de V on a :$\mathrm{v_n = v_p \times q^{n-p} = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ alors $\mathrm{v_n = \frac{1}{2^n}}$

●Comme $v_n = \ln U_n - 2$ *alors* $U_n = e^{v_n+2} = e^{\frac{1}{2^n}+2} = e^2 \times e^{\frac{1}{2^n}}$ *d'où* $U_n = e^{2+\frac{1}{2^n}}$

d) Déduisons-en la limite de (U_n)et (v_n)

$$\bullet \lim_{n\to+\infty} \mathrm{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{v_n} = 0$$

$$\bullet \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U_n} = e^2 \times e^{\frac{1}{2^{+\infty}}} = e^2 \times e^0 = e^2 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U_n} = e^2$$

++

EXERCICE 8:

On considère la suite (U_n) définie par : $U_1 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $U_{n+1} = U_n - n$

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

1) Exprimer v_n en fonction de n
2) En déduire la somme $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
3) Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n

En déduire (U_n) en fonction de n

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par :$U_1 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $U_{n+1} = U_n - n$

On considère la suite (v_n) définie par : $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

1) Exprimons v_n en fonction de n

$$V_n = U_{n+1} - U_n = U_n - n - U_n = -n \quad d'où \quad V_n = -n$$

2) Déduisons-en la somme $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

$$S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = -(0 + 1 + 2 + \cdots + n) = -\frac{n(n+1)}{2} \quad d'où \; S_n = -\frac{n(n+1)}{2}$$

3) Utilisons la relation (1) pour trouvons une autre expression de S_n

Comme $V_n = U_{n+1} - U_n$ *alors* $S_n = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \cdots + U_n - U_{n-1} + U_{n+1} - U_n$

D'où $S_n = -U_0 + U_{n+1} = -3 + U_{n+1} = -3 - n + U_n \Longrightarrow S_n = -3 - n + U_n$

Déduisons-en (U_n) en fonction de n

On pose $S_n = S_n \Longrightarrow -3 - n + U_n = -\frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow U_n = n + 3 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{-n^2+n+6}{2}$

4) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{-\infty}{2} = -\infty \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

++

EXERCICE 9:

Calculer la somme :$s_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11 \cdots 1$

Le dernier nombre de cette somme étant formé de n chiffres de 1

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

$s_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11 \cdots 1$ en multipliant les deux membres par 9 ; on a :

$$9s_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + 99 \cdots 9 = (10 - 1) + (10^2 - 1) + \cdots + (10^n - 1)$$

$$9s_n = 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n = 10\frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n = \frac{10 - 10^{n+1}}{-9} - n \Longrightarrow$$

$$9s_n = \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9} \Longrightarrow s_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$$

+++

EXERCICE 10:

A –) Soit $(p_n) et\ (q_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} p_0 = q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ \forall n \in \mathbb{N};\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$

1) Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n									
q_n									

2) a) Démontrer que : $\forall n \in N;\ p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}$

b) Conjecturer les limites des suites $(p_n) et\ (q_n)$; en déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$

3) Soit(U_n) la suite de terme général : $U_n = \frac{p_n}{q_n}$

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et donner une définition par récurrence de la suite (U_n)

b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (U_n), puis démontrer que cette suite converge vers $\sqrt{2}$

B-) Soit $(a_n) et\ (b_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} a_0 = b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$ et la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{a_n}{b_n}$

Donner une définition par récurrence de la suite (v_n), puis démontrer que cette suite converge également vers $\sqrt{2}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

1) Complétons le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
q_n	2	5	12	29	70	169	408	985	2378

2) a) Démontrons que : $\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N};\ \mathbf{p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}}$

On démontre par récurrence :

●Vérifions pour certaines valeurs de n que la relation est vraie :

Pour $n = 0$; on a : $p_0^2 - 2q_0^2 = (-1)^{0+1} \Longrightarrow 1 - 2 = -1$ alors $-1 = -1$ vraie

Pour $n = 1$; on a : $p_1^2 - 2q_1^2 = (-1)^{1+1} \Longrightarrow 3^2 - 2(2^2) = 1$ alors $1 = 1$ vraie

●Supposons que la relation est vraie dans le rang de n : $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}$

●Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 :

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (-1)^{n+2} \Longrightarrow (p_n + 2q_n)^2 - 2(p_n + q_n)^2 \overset{?}{=} (-1)^{n+2} \Longrightarrow$$

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = p_n^2 + 4p_nq_n + 4q_n^2 - 2p_n^2 - 4p_nq_n - 2q_n^2 = -p_n^2 + 2q_n^2 = -(p_n^2 - 2q_n^2)$$

D'après la 2ème étape on a : $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1} \Longrightarrow -(p_n^2 - 2q_n^2) = (-1)(-1)^{n+1}$

$$\text{D'où } p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (-1)^{n+2} \quad \text{cqfd}$$

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N};\ \mathbf{p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}} \textbf{ la relation est toujours vraie}$$

b) Conjecturons les limites des suites (p_n)et (q_n) ;

●D'après le tableau, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$

●Déduisons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$

Comme $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1} \Longrightarrow p_n^2 = 2q_n^2 + (-1)^{n+1} \Longrightarrow \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{q_n^2}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = 2 \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{q_n^2} = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$$

3) Soit(U_n) la suite de terme général : $U_n = \frac{p_n}{q_n}$

a) Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n et donnons une définition par récurrence de la suite (U_n)

$$U_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \frac{q_n\left(\frac{p_n}{q_n} + 2\right)}{q_n\left(\frac{p_n}{q_n} + 1\right)} = \frac{U_n + 2}{U_n + 1} \quad \text{d'où } U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 1}$$

D'où la définition de récurrence : $\begin{cases} U_0 = \frac{p_0}{q_0} = 1 \\ \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{U_{n+1}} = \frac{U_n+2}{U_n+1} \end{cases}$

b) Représentons graphiquement les premiers termes de la suite (U_n), puis démontrons que cette suite converge vers $\sqrt{2}$

Soit le tableau de quelques termes :

n	1	2	3	4	5	6	7
U_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$ on a :

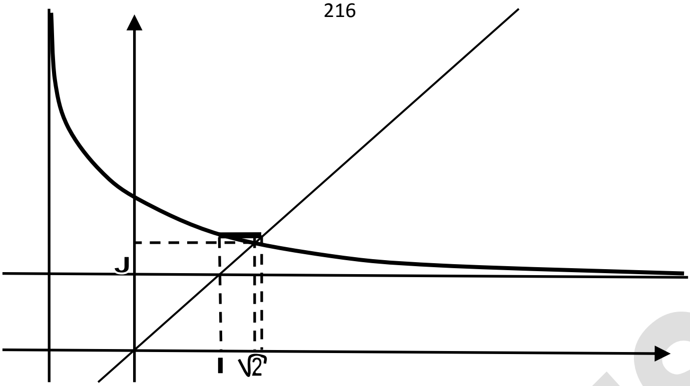
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

f étant une fonction homographique alors on a : $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$

alors f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

On pose $f(x) = x$ on a : $\frac{x+2}{x+1} = x \Longrightarrow x + 2 = x^2 + x \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x \pm \sqrt{2}$

D'où la suite (U_n) converge vers $\sqrt{2}$ avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \sqrt{2}$



B-) Soit $(a_n) et\ (b_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} a_0 = b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$ et la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{a_n}{b_n}$

Donnons une définition par récurrence de la suite (v_n), puis démontrons que cette suite converge également vers $\sqrt{2}$

$$v_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + 2b_n^2}{2a_n b_n} = \frac{b_n^2\left(\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 + 2\right)}{2a_n b_n} = \frac{(v_n)^2 + 2}{2v_n} \quad d'où\ v_{n+1} = \frac{(v_n)^2 + 2}{2v_n}$$

D'où on a : $\begin{cases} v_0 = \frac{a_0}{b_0} = 1 \\ v_{n+1} = \frac{(v_n)^2+2}{2v_n} \end{cases}$

Soit le tableau de quelques termes :

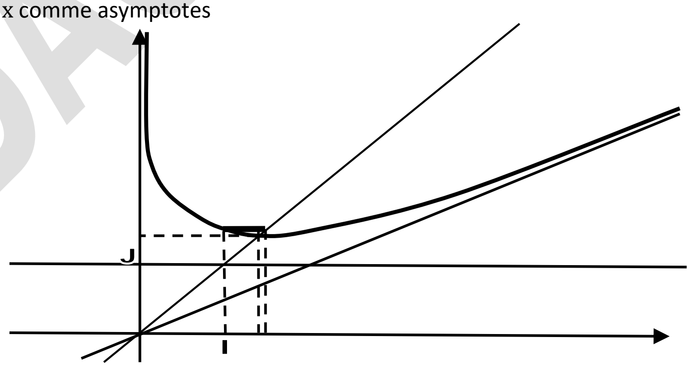
n	1	2	3
v_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$ on a :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$

Alors on a : $f'(x) = \left(\frac{x^2+2}{2x}\right)' = \frac{2x(2x)-2(x^2+2)}{4x^2} = \frac{2x^2-4}{4x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2}$

f est décroissante sur $]0;\ \sqrt{2}[$ et croissante sur $]\sqrt{2};\ +\infty[$ et on a deux droites $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}x$ comme asymptotes



On pose $f(x) = x$ on a : $\frac{x^2+2}{2x} = x \Longrightarrow x^2 + 2 = 2x^2 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x \pm \sqrt{2}$

D'où la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$

++

EXERCICE 11:

Soit la suite u_n définie par : $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout $n > 0$

1) Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite u_n est majorée par 3
2) Etudier le sens de variations de la suite u_n
3) On considère la suite v_n définie par pour tout entier naturel n non nul : $v_n = n(3 - u_n)$

Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Soit la suite u_n définie par : $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout $n > 0$

1) Montrons, en raisonnant par récurrence, que la suite u_n est majorée par 3

• Vérifions que la relation est vraie pour certaines valeurs de n :

Pour n=1 :$\boldsymbol{u_1 = -1} < 3$ $(vraie)$

• Supposons que la relation est vraie dans le rang de n, c'est-à-dire : $u_n \leq 3$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 : $u_{n+1} \leq 3$

Pour cela, on étudie le signe de $u_{n+1} - 3$:

$$u_{n+1} - 3 = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - 3 = \frac{n\,u_n + 3(n+2) - 6(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n\,u_n + 3n + 6 - 6n - 6}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n(u_n - 3)}{2(n+1)} \Longrightarrow \boxed{u_{n+1} - 3 = \frac{n(u_n - 3)}{2(n+1)}}$$

NB : Le signe de $\frac{n(u_n-3)}{2(n+1)}$ dépend de $u_n - 3$; or $u_n \leq 3$ $alors$ $u_n - 3 \leq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\boxed{u_{n+1} - 3 = \frac{n(u_n-3)}{2(n+1)} \leq 0}$ alors la relation proposée est vraie dans le rang de $n+1$:

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$est majorée par 3

2) Etudions le sens de variations de la suite u_n

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$; on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n = \frac{n\,u_n + 3(n+2) - 2(n+1)u_n}{2(n+1)}$$

$= \frac{-(n+2)u_n+3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$ Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 3 \leq 0 \Longrightarrow 3 - u_n \geq 0 \Longrightarrow$

$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)} \geq 0}$; donc la suite u_n est strictement croissante

3) On considère la suite v_n définie par pour tout entier naturel n non nul : $v_n = n(3 - u_n)$

Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $v_n = n(3 - u_n) \Longrightarrow v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1}) = (n+1)\left(3 - \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$

$$= (n+1)\left(\frac{n(3 - u_n)}{2(n+1)}\right) \Longrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}\,n(3 - u_n) \Longrightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

Ceci montre que v_n est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_1 = 1(3-u_1) = 3-(-1) = 4 \Rightarrow v_1 = 4$

4) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n

•Comme v_n est une suite géométrique alors :

$$v_n = v_1.q^{n-1} \Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2.\frac{1}{2^{n-1}} = 2^2.2^{1-n} = 2^{3-n} \Rightarrow \boxed{v_n = 2^{3-n}}$$

$$\bullet v_n = n(3-u_n) \Rightarrow \frac{1}{n}v_n = 3-u_n \Rightarrow u_n = 3-\frac{1}{n}v_n = 3-\frac{1}{n}2^{3-n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3n-2^{3-n}}{n}}$$

+++

EXERCICE 12:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$
2) Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par : $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

   Exprimer (u_n)en fonction de n
3) Montrer que (u_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ?

   Calculer la limite u_n lors que n tend vers $+\infty$
4) On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   a. Calculer s_1, s_2 et s_3 et exprimer s_n en fonction de n
   b. Calculer la limite s_n lors que n tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminons une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$ on a la forme de $(\ln(U))' = \frac{U'}{U}$ alors la primitive de f(x) est

$$F(x) = \ln(e^x+1) + c$$

2) Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par : $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

Exprimons (u_n) en fonction de n

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx = [\ln(e^x+1)\ ]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = \ln(e^{\ln(n+1)}+1) - \ln(e^{\ln n}+1)$$

$$= \ln(n+1+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Rightarrow \mathbf{u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$$

3) Montrons que (u_n) est une suite décroissante positive.

<u>1ère méthode</u> : Pour cela étudions le sens de variation de la fonction $f(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$$f'(n) = \left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)' = \frac{\det\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1-2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

<u>2ème méthode</u> : Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)$$

$$\text{mais } \forall n > 0\ ; n^2+4n+3 < n^2+4n+4 \Rightarrow \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1 \Rightarrow \ln\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 0 \Rightarrow$$

$$d'où\ \mathbf{u_{n+1}} - \mathbf{u_n} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

●Comme $u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$; $\forall n > 0; n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0 \Rightarrow \mathbf{u_n} > 0$

D'où $\mathbf{u_n}$ est positive

On peut-on en déduire que comme (u_n) est une suite décroissante positive alors elle minorée.

4) On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a) Calculons s_1, s_2 et s_3 et exprimons s_n en fonction de n

$$s_1 = u_1 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s_1 = \ln\frac{3}{2}}$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow \boldsymbol{s_2 = \ln 2}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \ln 2 + \ln\frac{5}{4} = \ln\frac{5}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s_3 = \ln\frac{5}{2}}$$

$$■\ s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\frac{n+2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s_n = \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

b) Calculons la limite $\mathbf{s_n}$ lors que n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln\frac{+\infty+2}{2} = +\infty \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty}$$

++

EXERCICE 13:

1) Résoudre dans R l'équation : $x^2 = x + 1 \quad (E)$

2) Donner la valeur exacte à 10^{-2} près de la racine positive

3) On note par φ cette racine positive, et on pose : $\varphi^2 = \varphi + 1$

a) Démontrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$

b) Déterminer deux réels a_4 *et* b_4 *tels que* : $\varphi^4 = a_4\varphi + b_4$

4) Pour $n \geq 2$; on pose $\varphi^n = a_n\varphi + b_n$

a) Exprimer φ^{n+1} en fonction de φ ; de a_n *et* b_n

b) En déduire que : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ *on pose* $a_0 = a_1 = 1$

c) Vérifier que : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

d) Montrer que : $a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

1) Résolvons dans R l'équation : $\boldsymbol{x^2 = x + 1 \quad (E)}$

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \Delta = 5$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2) Donnons la valeur exacte à $\mathbf{10^{-2}}$ près de la racine positive

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+1{,}72}{2} = \frac{2{,}72}{2} = 1{,}615 \approx 1{,}62$$

3) On note par φ cette racine positive, et on pose : $\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}$

a) Démontrons que $\boldsymbol{\varphi^3 = 2\varphi + 1}$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \Longrightarrow \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \Longrightarrow \varphi^3 = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi^3 = 2\varphi + 1}$$

c) Déterminons deux réels $\boldsymbol{a_4}$ *et* $\boldsymbol{b_4}$ *tels que* : $\boldsymbol{\varphi^4 = a_4\varphi + b_4}$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1 \Longrightarrow \varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi \Longrightarrow \varphi^4 = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2 \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi^4 = 3\varphi + 2}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi^4 = a_4\varphi + b_4} \\ \boldsymbol{\varphi^4 = 3\varphi + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_4 = 3 \ \ et \ \ b_4 = 2}$$

4) Pour $\boldsymbol{n \geq 2}$; on pose $\boldsymbol{\varphi^n = a_n\varphi + b_n}$

a) Exprimons $\boldsymbol{\varphi^{n+1}}$ en fonction de $\boldsymbol{\varphi}$; de $\boldsymbol{a_n}$ *et* $\boldsymbol{b_n}$

$$\varphi^n = a_n\varphi + b_n \Leftrightarrow \varphi^{n+1} = a_n\varphi^2 + b_n\varphi \Longrightarrow \varphi^3 = a_n\varphi + a_n + b_n\varphi = (a_n + b_n)\varphi + a_n$$

$$\boldsymbol{\varphi^{n+1} = (a_n + b_n)\varphi + a_n}$$

b) Déduisons-en que : $\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + b_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = a_n} \end{cases}$ *on pose* $\boldsymbol{a_0 = a_1 = 1}$

Comme $\varphi^n = a_n\varphi + b_n \Leftrightarrow \varphi^{n+1} = a_{n+1}\varphi + b_{n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^{n+1} = a_{n+1}\varphi + b_{n+1} \\ \varphi^{n+1} = (a_n + b_n)\varphi + a_n \end{cases} \Leftrightarrow$

Par comparaison, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$

c) Vérifions que : $\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$

Comme $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$

d) Montrons que : $\boldsymbol{a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}$

Comme $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $et\ r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On a : $a_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$; comme $\boldsymbol{a_0 = a_1 = 1} \Leftrightarrow$

Pour n=0 ; on a : $a_0 = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow A + B = 1 \Longrightarrow A = 1 - B$

Pour n=1 ; on a : $a_1 = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \Leftrightarrow A(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2$

$$(1 - B)(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} - B(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$2B\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow A = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$a_n = -\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

D'où $\boldsymbol{a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}$

++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**++++++++++++++++++++++++++

Calculer les trois termes consécutifs $a, b\ et\ c$ d'une suite arithmétique tel que :

$a)\ \begin{cases} a+b+c=9 \\ 2a+b-c=0 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} a+b+c=9 \\ abc=\frac{80}{3} \end{cases}$ et la suite est décroissante

$c)\ \begin{cases} a+b+c=-3 \\ abc=15 \end{cases}$ et la suite est croissante $\quad d)\ \begin{cases} a+b+c=15 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{33}{40} \end{cases}$ et la suite est décroissante

++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Soit une suite géométrique décroissante v_n telle que :

$\begin{cases} v_1+v_2+v_3=3+\sqrt{2} \\ v_1.v_2.v_3=2\sqrt{2} \end{cases}$ Calculer $v_1, v_2\ et\ v_3$

2) Calculer les trois termes consécutifs $a, b\ et\ c$ d'une suite géométrique telle que :

$a)\ \begin{cases} a+b+c=\frac{1}{27} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=13 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} a+b+c=19 \\ abc=216 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par :$U_0\ \ et\ \forall n\in N\ \ on\ a$

$U_{n+1}=aU_n+b\ \ où\ a, b\ et\ U_0$ sont des nombres réels donnés

1) Soit $a=1\ \ et\ b\neq 0$
   a) Quelle est dans ce cas la nature de la suite U_n
   b) Exprimer alors U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
2) Soit $a\neq 0\ \ et\ b=0$
   a) Quelle est dans ce cas la nature de la suite U_n
   b) Exprimer alors U_n en fonction de n
3) Soit $a\neq 1\ \ et\ b\neq 0$
   a) Si on pose $V_n=U_n+\alpha$, démontrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la suite V_n est géométrique de raison a
   b) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de la suite V_n, puis celle de U_n dans le cas où $|a|<1$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit $(u_n)_{n\in N^*/\{1\}}$ la suite définie pour tout entier naturel non nul et différent de 1, par

$$u_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$$

Calculer les trois premiers termes de la suite puis le 99ième terme de la suite

++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le sens de variations de la suite $(n^n e^{-n})_{n\in N^*}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 6 :++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le sens de variations de la suite $(n-(\ln n)^2)_{n\in N^*}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 7 :++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le sens de variations de la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in N^*}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 8 :++++++++++++++++++++++++++

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie pour tout entier naturel n par

$u_n = \frac{e^{-n^2+n+1}}{n+2}$ est bornée

++++++++++++++++++++++++Exercice 9 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par :$U_0 = \frac{3}{4}$ $et\ \forall n \in N\ \ on\ a\ U_{n+1} = 3U_n - 2$

1) Etablir un tableau de valeurs de la suite pour n variant de 0 à 9. Tracer la représentation graphique en «chemin» de la suite. Donner une conjecture de la limite éventuelle de la suite U
2) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$

Résoudre l'équation$f(x) = x$. Faire apparaitre la solution sur le graphique

3) On pose $V_n = U_n - 1$. Montrer que la suite V est une suite géométrique
4) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
5) Déterminer la limite de la suite (U_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice10 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par : $U_0 = 2{,}5$ $et\ \forall n \in N\ \ on\ a\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$
   Montrer que l'équation $f(x) = x$ a deux solutions α et β (avec α>β)
2) Donner un tableau de valeurs de la suite pour n variant de 1 à 9
3) Etudier la fonction f sur l'intervalle $]-4;\ +\infty[$. Tracer la représentation graphique en «chemin» de la suite U pour n variant 0 à 5
4) Donner une conjecture sur la convergence de la suite U
5) On pose $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$.
   Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier termeV_0
6) Exprimer V_n et U_n en fonction de n
7) Démontrer que la suite (U_n) est convergente

++++++++++++++++++++++++Exercice11 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par : $U_0 = 6$ $et\ \forall n \in N\ \ on\ a\ U_{n+1} = \frac{4U_n-1}{U_n+2}$

1) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α
2) Etudier la fonction f sur l'intervalle $]-2;\ +\infty[$. Tracer la représentation graphique en «chemin» de la suite U pour n variant 0 à 6. Donner une conjecture sur la convergence de la suite U

3) On pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$. Montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{3} + V_n$

Donner une expression de (V_n) en fonction de n. En déduire une expression de (U_n) en fonction de n

4) Démontrer que la suite (U_n) converge vers un nombre que l'on précisera

++++++++++++++++++++++++Exercice12 :+++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par : $U_0 = 2 \;\; et\; \forall n \in N \;\; on\; a\; U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3n + \frac{7}{4}$

1) On pose $V_n = U_n - 4n + 3$. Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 . Exprimer V_n en fonction de n

2) Montrer que pour tout n, $U_n = \frac{5}{4^n} + 4n - 3$

3) Déterminer la limite de la suite (U_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 13:+++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par :$U_0 = 5 \;\; et\; \forall n \in N \;\; on\; a\; U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{3U_n - 2}$

1) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α
2) On pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$. Démontrer que la suite V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 .
3) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
4) Etudier la monotonie de la suite V_n

++++++++++++++++++++++++Exercice 14 :+++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite U définie par : $U_0 = 0{,}5 \;\; et\; \forall n \in N \;\; on\; a\; U_{n+1} = \frac{5U_n + 4}{U_n + 2}$

1) Déterminer la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ a deux solutions α et β (avec α>β)

2) On pose $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1}$.

Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

3) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
4) Etudier la monotonie de la suite V_n
5) Donner la représentation graphique en chemin de la suite (U_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 15:+++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2 \;\; et\; \forall n \in N \;\; on\; a\; U_{n+1} = \frac{U_n}{3} - 1$

1) Calculer $U_1;\; U_2;\; U_3\; et\; U_4$
2) (V_n) est la suite définie par : $V_n = U_n + \frac{3}{2}$
   a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique
   b) Exprimer (V_n) explicitement en fonction de n
3) a) En déduire une expression explicite de (U_n)
   b)Etudier la limite de la suite (U_n)
4) On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n \;\; et \;\; \Sigma_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

Exprimer explicitement S_n puis Σ_n en fonction de n

+++++++++++++++++++++++Exercice 16 :++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $\mathrm{U}_1 = 4$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{U}_{\mathrm{n}+1} = \frac{5\mathrm{U}_\mathrm{n}+3}{\mathrm{U}_\mathrm{n}+3}$

1) Dans le plan muni du repère orthogonal (O ; I ; J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite (U_n)
2) (V_n) est la suite définie par : $V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n élément de $\mathbb{N}^*$, $U_n \neq -1$
b) Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_1
c) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
d) En déduire la limite de la suite (U_n)
e) Etudier les variations et la convergence de la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_1 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{5w_n+3}{w_n+3} \end{cases}$

+++++++++++++++++++++++Exercice 17 :++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $\mathrm{U}_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{U}_{\mathrm{n}+1} = \frac{2}{-\mathrm{U}_\mathrm{n}+3}$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite (U_n)
2) Démontrer que la suite (U_n)est minorée par 1 et majorée par 3
3) Quel est le sens de variation de la suite (U_n)
4) Démontrer que la suite $V_n = \frac{U_n-1}{-U_n+2}$ est géométrique
5) En déduire que (U_n) converge vers 1

+++++++++++++++++++++++Exercice 18:++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = -4$ $\mathit{et}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\mathit{on\ a}\ U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} - 3$

1) Déterminer α pour que $V_n = U_n + \alpha$ soit géométrique
2) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et leurs limites
3) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $\Sigma_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n et leurs limites

+++++++++++++++++++++++Exercice 19 :++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 6 \ \mathit{et}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \mathit{on\ a}\ 5U_n - 4U_{n-1} = 5 \text{(R)}$$

1) Déterminer deux réels α et β pour que la relation de récurrence (R) s'écrive :
$$(U_n - \alpha) = \beta(U_{n-1} - \alpha)$$
2) On pose $V_n = U_n - \alpha$

a) Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0
b) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
c) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $\Sigma_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n et leurs limites

+++++++++++++++++++++++Exercice20 :++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par :$U_1 = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ on\ a\ U_{n+1} = \frac{U_n+3}{2}$

1) Calculer $U_2; U_3\ et\ U_4$
2) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? justifier votre réponse.
3) Pour tout $n \geq 1, on\ pose\ v_n = 3 - U_n$
   a) Démontrer que la suite v_n est géométrique de raison $\frac{1}{2}$
   b) Exprimer v_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
   c) En déduire la limite de (U_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 21 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0\ \ et\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ on\ a\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^n}$

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

1) Démontrer que la suite v_n est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
2) En déduire la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
3) Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n
   En déduire (U_n) en fonction de n
4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

++++++++++++++++++++++++Exercice 22 :++++++++++++++++++++++++++

Sur une droite (D) muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}), A_0\ et\ B_0$ sont les points d'abscisses respectives $-4\ et\ 3$. Pour tout entier naturel n, on note :

A_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 1);\ (B_n; 4)\}$ et B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 3);\ (B_n; 2)\}$

1- Placer les points $A_0;\ \ B_0;\ A_1 et\ B_1$
2- Les points $A_n\ et\ B_n$ ont pour abscisses $a_n\ et\ b_n$ respectivement. Ainsi $a_0 = -4\ et\ b_0 = 3$

Démontrer que, pour tout n de N, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)\ \ \ et\ \ \ b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3- a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$
   b- En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n\ \ et\ \ b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$
4- a- Exprimer $a_n\ \ et\ \ b_n$ en fonction de n
   b- Déterminer les limites de $a_n\ \ et\ \ b_n$ quand n tend vers $+\infty$
   c- Interpréter ce résultat à l'aide des points $A_n\ \ et\ \ B_n$

++++++++++++++++++++++++Exercice 23 :++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U) définie sur N par : $u_0 = 6\ \ et\ \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ On pose $v_n = u_n - 3$

1- a- Montrer que la suite (V) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison
   b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
   a- En déduire en utilisant la question précédente $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
   b- Calculer la somme $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

2- On constante, que pour tout n appartient à N, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme w_0 et la raison

3- a- Exprimer w_n en fonction de n

b- Calculer la somme $s_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

c- Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln 27^2 - \ln 9$?

+++++++++++++++++++++++Exercice 24 :+++++++++++++++++++++++++

La somme des termes d'une suite arithmétique d'entiers impairs consécutifs (positif ou négatif) est égal à 7^3. Quels sont les termes de cette suite

+++++++++++++++++++++++Exercice 25 :+++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $\mathrm{U_0 = a}$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n^2 + n}$ (R)

1) Déterminer un polynôme P(n) vérifiant (R)
2) Montrer que $V_n = U_n - P(n)$ est géométrique
3) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
4) En déduire la limite de (U_n)

+++++++++++++++++++++++Exercice 26 :+++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $on\ a$ $U_n - 2U_{n+1} = 2n + 3$ (R)

1) Déterminer un polynôme P(n) vérifiant (R)
2) En déduire $U_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$
3) Montrer que $V_n = U_n - P(n)$ est géométrique
4) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $\Sigma_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n et leurs limites

+++++++++++++++++++++++Exercice 27 :+++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $on\ a$ $U_{n+1} = 3U_n - n^2 + n$

1) Déterminer le polynôme P du second degré tel que la suite de terme général $a_n = P(n)$ vérifie la relation de récurrence précédente
2) Démontrer que la suite de terme général $V_n = U_n - a_n$ est une suite géométrique
3) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n
4) Etudier la convergence des suites V_n et U_n

+++++++++++++++++++++++Exercice 28:+++++++++++++++++++++++++

Soit$(u_n)et$ (v_n) les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \ et \ v_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ \forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

1) On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$
   a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison
   b) Déterminer la limite de la suite w
2) a) Montrer que la suite u est croissante

b) Montrer que la suite v est décroissante

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les suites u et v convergent et qu'elles ont la même limite que l'on notera l

4) On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de l

+++++++++++++++++++++++Exercice 29:+++++++++++++++++++++++++

Déterminer une progression arithmétique, sachant que la somme s_n de ses n premiers termes est quelques soit n ; égale à $3n^2 + 4n$

Certains termes de cette progression sont de carrés parfaits, donner l'expression générale de ces termes et calculer les six premiers entre eux.

+++++++++++++++++++++++Exercice 30:+++++++++++++++++++++++++

Soit A, B et C les mesures des angles d'un triangle compris entre 0 et π

Montrer que $\cot A$; $\cot B$ et $\cot C$ sont en progression arithmétique si et seulement si il en est de même $\sin^2 A$; $\sin^2 B$ et $\sin^2 C$

+++++++++++++++++++++++Exercice 31:+++++++++++++++++++++++++

Montrer que, si trois nombres $x; y$ et z sont en progression géométriques, on a ; quel que soit l'entier n (positif ou négatif) non nul :

$$(1):\ (x^n + y^n + z^n)(x^n - y^n + z^n) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}$$

Application : Déterminer trois nombres en progression géométrique, sachant que la somme de leurs inverses est égale 26 et que la somme des carrés de leurs inverses est égale à 364

+++++++++++++++++++++++Exercice 32:+++++++++++++++++++++++++

Soit $(u_n)et\ (v_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 2\ \ et\ \ v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ \ u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ \forall n \in \mathbb{N};\ \ v_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n + v_n) \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et v_1 $puis$ v_2
2) Démontrer que la suite $a_n = u_n + v_n$ est constante
3) Démontrer que la suite $b_n = u_n - v_n$ est géométrique
4) a) Exprimer b_n en fonction de n et en déduire u_n et v_n en fonction de n
   c) Montrer qu'elles convergent vers la même limite

+++++++++++++++++++++++Exercice 33:+++++++++++++++++++++++++

On considère la suite (U_n) définie par : $\mathrm{U}_1 = 1$ et $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{U}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{a}}\mathrm{U}_{\mathrm{n}} + 1$

1) Déterminer la valeur de a pour que la suite (U_n) soit arithmétique
2) Déterminer dans ce cas la somme $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ puis la limite de s_n
3) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a > 0$
   a) Calculer $U_2; U_3;\ U_4$ et U_5
   b) Démontrer par récurrence que $\mathrm{U_n} = 1 + \mathrm{e^a} + \mathrm{e^{2a}} + \mathrm{e^{3a}} + \cdots + \mathrm{e^{(n-1)a}}$
4) On pose $\mathrm{v_n} = \mathrm{U_n} - \frac{1}{1-\mathrm{e^a}}$

a) Démontrer que la suite v_n est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n

5) Etudier le sens de variation puis la convergence de (U_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 34:++++++++++++++++++++++++++

Soit S l'ensemble des suites vérifiant : $9U_{n+2} - 6U_{n+1} + U_n = 0;\ n \in N$

1) Trouver une suite géométrique de premier terme 1 et élément de S

2) Montrer que la suite $\Gamma_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $n \in N$ est un élément de S

3) Soit U_n la suite de S telle que : $U_0 = U_1 = 1$. Exprimer son terme général U_n en fonction de n

4) Quelle est la nature de U_n ?

5) Si U_n est convergente, déterminer sa limite

++++++++++++++++++++++++Exercice 35:++++++++++++++++++++++++++

Soient les suites $(a_n)\ et\ (b_n)$ définies sur N par ; $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4} \end{cases}$

1) Calculer $a_1\ et\ b_1$

2) Soit la suite (d_n) définie sur N par : $d_n = b_n - a_n$

a) Démontrer que (d_n) est une suite géométrique
Déterminer le premier terme d_0 et la raison q

b) En déduire une expression de (d_n) en fonction de n
Puis en déduire que :$\forall n \in N;\ d_n > 0$

c) Calculer la limite de la suite (d_n)

3) a) Démontrer que, $\forall n \in N, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}\ \ et\ \ b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$
En déduire les variations des suites $(a_n)\ et\ (b_n)$
b) Démontrer que $\forall n \in N^*: a_0 < a_n < b_n < b_0$
c) Déduire des questions 3)a) et 3)b) que les suites $(a_n)\ et\ (b_n)$ sont convergentes

4) a) Déduire de la question 3)a) que : $\forall n > 1;\ a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_n)$
b) Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n)

++++++++++++++++++++++++Exercice 36:++++++++++++++++++++++++++

Soit α un nombre entier

Soit la suite (a_n) définie sur N par : $a_0 = \alpha\ et\ a_{n+1} = \frac{\alpha}{1+a_n}$

On veut étudier la suite (a_n) pour $\alpha = 2, puis\ pour\ \alpha = -\frac{1}{4}$

1) On pose $\alpha = 2$;

On étudie la suite (a_n), à termes positifs, telle que : $a_0 = 2\ et\ a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$

La suite (w_n) est définie par : $\forall n \in N\ \ w_n = \frac{a_n-1}{a_n+2}$

a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et calculer sa limite éventuelle

b) En déduire l'expression de la suite a_n et w_n en fonction de n ; puis calculer la limite de la suite (a_n)

2) On pose $\alpha = -\frac{1}{4}$;

On étudie la suite (a_n), telle que : $a_0 = -\frac{1}{4}$ et $a_{n+1} = -\frac{1}{4+4a_n}$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in N, a_n \neq -\frac{1}{2}$

b) On considère (v_n) la suite définie par : $\forall n \in N, v_{n+1} = -\frac{1}{a_n+\frac{1}{2}}$

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et calculer son premier terme

c) Exprimer (v_n) en fonction de n

d) Exprimer l'expression de la suite a_n en fonction de v_n ; puis en déduire l'expression de la suite (a_n) en fonction de n

e) En déduire la limite de la suite a_n

++++++++++++++++++++++++Exercice 37:+++++++++++++++++++++++++++

Soit a un nombre réel non nul. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ , \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in N: \ au_{n+1} = (a+1)u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

1) Pour quelle valeur de a la suite U est –elle arithmétique ?
Dans la suite de l'exercice, on suppose que a est différent de 1

2) Démontrer que la suite V définie pour tout entier naturel n par : $V_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$
b) Pour tout entier naturel non nul n ; calculer u_n en fonction de n et de a
c) Pour quelle valeur de a, la suite U est-elle convergente ?
Préciser alors la limite de U en fonction de a

4) On choisit $a = 2$
Trouver le plus petit entier naturel p tel que : $|u_p - 2| < 10^{-3}$
On donne $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\ln 5 \approx 1{,}61$

++++++++++++++++++++++++Exercice 38:+++++++++++++++++++++++++++

<u>PARTIE A</u> : Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2}$

1- Vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2+x}$

2- Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

3- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0; 1]$

4- Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1)| = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(2+u_n)}|u_n - (\sqrt{2} - 1)|$

5- En déduire que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right|$ puis que pour tout entier naturel n, $\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^n}$

6- Quelle est la limite de la suite (u_n+1) ?

<u>PARTIE B</u> : Propriétés de la suite (u_n)

1- Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et n

2- Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est nombre rationnel

3- Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante

4- On pose pour $n \geq 1$; $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ ou p_n *et* q_n sont des entiers naturels premiers entre eux

(Rappel : deux nombres p et q sont premiers entre eux s'il existe deux entiers c et d tels que cp+dq=1)

Sachant que $p_0 = 0$ *et* $q_0 = 1$

a- Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors b et a+2b sont aussi premiers entre eux . Cela revient à montrer qu'il existe deux entiers u' et v' tels que ; (a+2b)u'+bv'=1 sachant qu'il existe deux nombres réels u et v tels que : au+bv=1

b- En déduire que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = q_n$ *et* $q_{n+1} = 2q_n + p_n$

c- Calculer q_n en fonction de n

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 39:</u>++++++++++++++++++++++++++++

<u>PARTTIE A :</u> Soit f et g deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$$

1- Etablir les variations de f et g sur $[0;+\infty[$

2- En déduire un encadrement de $\ln(1+x)$

<u>PARTIE B :</u> On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombre réel définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1- Montrer que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n non nul

2- Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3- On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$

Montrer que : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

4- Calculer S_n *et* T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

5- Etude de la convergence de la suite u_n

a- Montrer que la suite u_n est strictement croissante

b- En déduire que u_n est convergente. Soit l sa limite

c- En déduire un encadrement de l

INTEGRALES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définitions : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle E et F sa primitive sur E. On considère par a et b deux points de E

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, le nombre réel I défini par :

$$I = F(b) - F(a)$$

Notation : $I = \int_a^b f(x)dx \quad ou \quad I = [F(x)]_a^b$

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle E et a, b et c trois points de E

● $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

● **Relation de Chasles** $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

● **Linéarité** $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad avec \ \alpha \in R$$

Quelques formules usuelles des intégrales indéfinies:

$$\int adx = ax + c \qquad \int axdx = \frac{1}{2}ax^2 + c \qquad \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \times \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c \qquad \int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int cotan\, x\, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int chxdx = shx + c \qquad \int shxdx = chx$$

$$\int thxdx = \ln|chx| + c \qquad \int cothxdx = \ln|shx| + c$$

$$\int ch(ax+b)dx = \frac{1}{a}sh(ax+b) + c \qquad \int sh(ax+b)dx = \frac{1}{a}ch(ax+b) + c$$

$$\int th(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|ch(ax+b)| + c \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{\mathrm{a}}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int \coth(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\ln|sh(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a}+c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotan} x + c \qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

$$\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)|+c$$

<u>Calcul d'intégrales</u>

●Changement de variables affines :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, $\alpha\ et\ \beta$ sont deux réels tels que $\alpha \neq 0$

$\int_a^b f(t)dt = \alpha\int_{\frac{a-\beta}{\alpha}}^{\frac{b-\beta}{\alpha}} f(\alpha x+\beta)dx$ car on pose $t = x\alpha+\beta \implies dt = \alpha dx$

Pour $t = a\ \ alors\ \ x = \frac{a-\beta}{\alpha}\ \ et\ \ pour\ \ t = b\ \ alors\ \ x = \frac{b-\beta}{\alpha}$

D'où $\int_a^b f(t)dt = \alpha\int_{\frac{a-\beta}{\alpha}}^{\frac{b-\beta}{\alpha}} f(\alpha x+\beta)dx$

●Intégration par parties :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; on a ;

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

<u>Démonstration :</u>

Comme $d(uv) = vdu + udv \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu \Leftrightarrow$

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Leftrightarrow \int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

<u>INTEGRALES DE TYPE</u> $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$:

Pour calculer l'intégrale de ce type, on procède comme suit :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}$$

■Si $\Delta > 0$ *alors, on a*: $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{2\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} \ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right| + c \Leftrightarrow$

$$\boxed{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + c}$$

■Si $\Delta < 0$ *alors, on a*: $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2} \Leftrightarrow$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}}\right) + c = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + c \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + c}$$

■Si $\Delta = 0$ alors, on a: $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \left(x+\frac{b}{2a}\right)^{-2} dx$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{ax+\frac{b}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}} + \mathbf{c}}$$

INTEGRALES DE TYPE $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

Pour calculer l'intégrale de ce type, on procède comme suit :

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}}$$

■Si $\Delta \neq 0$ alors, on a: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|x+\frac{b}{2a} + \sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right| + c$

■Si $\Delta = 0$ alors, on a: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{x+\frac{b}{2a}}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| + c}$$

INTEGRALES DE TYPE $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$:

Pour calculer l'intégrale de ce type, on procède comme suit :

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \alpha\sqrt{ax^2+bx+c} + \beta\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

En dérivant membre è membre, on a :

$$\left(\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\right)' = \left(\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \beta\left(\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)'$$

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \alpha\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2a\alpha x+\alpha b+2\beta}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{Par comparaison:}$$

$$\begin{cases} 2a\alpha = 2m \\ \alpha b + 2\beta = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{m}{a} \\ \beta = n - \frac{mb}{2a} \end{cases}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathbf{mx+n}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} + \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{mb}}{\mathbf{2a}}\right)\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}}$$

INTEGRALES DE TYPE $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ où $P_n(x)$est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$)

Pour calculer l'intégrale de ce type, on procède comme suit :

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \beta\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

On dérive membre à membre et on fait la comparaison et on intègre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Exemple : Calculons l'intégrale suivante : $I = \int \frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$

$$\mathrm{I} = \int \frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx = (ax+b)\sqrt{3-6x-x^2} + \beta\int \frac{dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$$

$$\left(\int \frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx\right)' = \left((ax+b)\sqrt{3-6x-x^2}\right)' + \beta\left(\int \frac{dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}\right)'$$

$$\frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}} = a\sqrt{3-6x-x^2} - \frac{(ax+b)(3+x)}{\sqrt{3-6x-x^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{3-6x-x^2}}$$

$$\frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}} = \frac{3a-6ax-ax^2-3ax-ax^2-3b-bx+\beta}{\sqrt{3-6x-x^2}}$$

$$\frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}}=\frac{-2ax^2-(9a+b)x-3b-3a+\beta}{\sqrt{3-6x-x^2}}$$ Par comparaison, on a:

$$\begin{cases}-2a=2\\-(9a+b)=5\\-3b-3a+\beta=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\\\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx=(-x+4)\sqrt{3-6x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$$

Mais $$\int\frac{dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x^2+6x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x+3)^2+9}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x^2+6x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-(x+3)^2}}=\arcsin\frac{x+3}{2\sqrt{3}}+c$$

D'où $$\boxed{I=(-x+4)\sqrt{3-6x-x^2}+\arcsin\frac{x+3}{2\sqrt{3}}+c}$$

Application aux calculs d'aires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; (O,I,J) un repère orthonormé du plan.

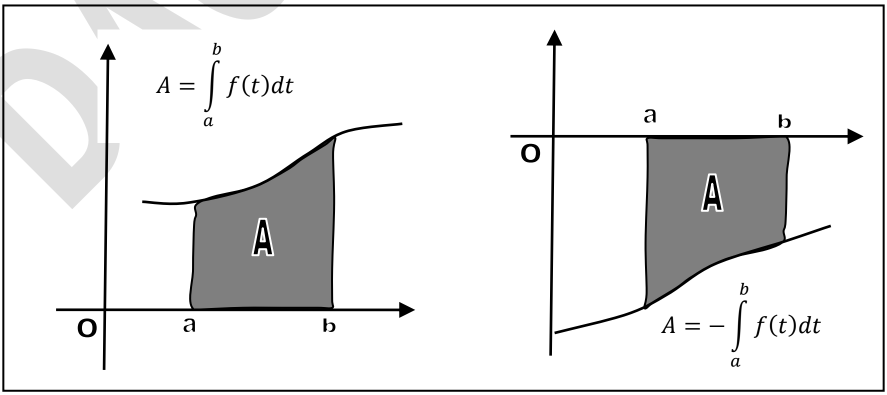
Propriétés fondamentales :

●Si $\forall x\in[a,b]; f(x)\geq 0$, l'aire géométrique A de l'ensemble plan défini par :

$$\begin{cases}a\leq x\leq b\\0\leq y\leq f(x)\end{cases}\text{ alors } A=\int_a^b f(t)dt$$

●Si $\forall x\in[a,b]; f(x)\leq 0$, l'aire géométrique A de l'ensemble plan défini par :

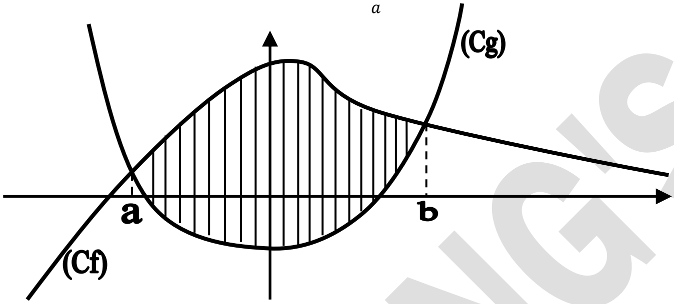
$$\begin{cases}a\leq x\leq b\\f(x)\leq y\leq 0\end{cases}\ alors\ A=-\int_a^b f(t)dt$$



L'aire est exprimée en unité d'aire $u.a=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

NB : Si le domaine est limité par deux courbes (C_f) et (C_g) d'équations respectives $y = f(x)$ *et* $y = g(x)$ sur un intervalle $[a; b]$ alors son aire se calcule comme suit :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ alors } A = \int_a^b \big(f(t) - g(x)\big)dt$$



Inégalité de la moyenne:

Si $[m; M]$ (avec $m < M$) est l'image par f du segment $[a; b]$ $(a \neq b)$, alors :

$$\mathbf{m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M}$$

Valeur moyenne:

Il existe un réel c de $]a; b[$ tel que : $\mathbf{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)}$

$\mathbf{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)}$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a; b]$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

$$A = \int_1^2 \ln x \, dx \quad B = \int_1^2 \ln(4x-1)dx \quad C = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$D = \int_3^5 \ln \frac{x-1}{x} dx \quad E = \int_{-2}^1 xe^x dx \quad F = \int_{-1}^1 (1+x)e^x dx$$

$$G = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^x} dx \quad H = \int_0^2 (2x+4)e^{x-1} dx \quad I = \int_0^\pi x \cos x \, dx$$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Calculons les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

•$A = \int_1^2 \ln x \, dx \quad posons \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow A = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx$

$$A = 2\ln 2 - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1 \Rightarrow \quad A = 2\ln 2 - 1$$

•$B = \int_1^2 \ln(4x-1)dx \quad Posons \begin{cases} u = \ln(4x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{4}{4x-1} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$

$$B = [x\ln(4x-1)]_1^2 - \int_1^2 \frac{4x}{4x-1} dx = 2\ln 7 - \ln 3 - \int_1^2 \frac{4x-1+1}{4x-1} dx$$

$$B = \ln \frac{49}{3} - \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{4x-1}\right) dx = \ln \frac{49}{3} - \left[x + \frac{1}{4}\ln(4x-1)\right]_1^2$$

$$B = \ln \frac{49}{3} - \left(2 + \frac{1}{4}\ln 7 - 1 - \frac{1}{4}\ln 3\right) = \ln \frac{49}{3} - 1 - \frac{1}{4}\ln 7 + \frac{1}{4}\ln 3 \Rightarrow$$

$$B = \frac{7\ln 7 - 3\ln 3 - 4}{4}$$

•$C = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \quad posons \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$

$$C = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$C = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$$

•$D = \int_3^5 \ln \frac{x-1}{x} dx \quad posons \begin{cases} u = \ln \frac{x-1}{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x(x-1)} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$

$$D=\left[x\ln\frac{x-1}{x}\right]_3^5-\int_3^5\frac{1}{x-1}dx=5\ln\frac{4}{5}-3\ln\frac{2}{3}-[\ln(x-1)]_3^5$$

$$D=5\ln\frac{4}{5}-3\ln\frac{2}{3}-\ln 4+\ln 2=5\ln\frac{4}{5}-3\ln\frac{2}{3}-\ln 2\Longrightarrow$$

$$D=6\ln 2-5\ln 5+3\ln 3$$

•$E=\int_{-2}^{1}xe^x dx$ posons $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Longrightarrow E$

$$=[xe^x]_{-2}^{1}-\int_{-2}^{1}e^x dx\Longrightarrow$$

$$E=2e^{-2}+e-[e^x]_{-2}^{1}=2e^{-2}+e+e^{-2}-e\Longrightarrow\ E=3e^{-2}$$

•$F=\int_{-1}^{1}(1+x)e^x dx$ posons $\begin{cases}u=1+x\\dv=e^x dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Longrightarrow$

$$F=[(1+x)e^x]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^x dx=2e-[e^x]_{-1}^{1}=2e-e+e^{-1}\Longrightarrow F=e-e^{-1}$$

•$G=\int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{e^x}dx$ posons $\begin{cases}u=2x+1\\dv=e^{-x}dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=-e^{-x}\end{cases}\Longrightarrow$

$$G=[-(2x+1)e^{-x}]_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}e^{-x}dx=-3e^{-1}-e-2[e^{-x}]_{-1}^{1}$$

$$G=-3e^{-1}-e-2e^{-1}+2e=-5e^{-1}+e\Longrightarrow\ G=e-5e^{-1}$$

•$H=\int_{0}^{2}(2x+4)e^{x-1}dx$ posons $\begin{cases}u=2x+4\\dv=e^{x-1}dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=e^{x-1}\end{cases}\Longrightarrow$

$$H=[(2x+4)e^{x-1}]_0^2-2\int_0^2 e^{x-1}dx=8e-4e^{-1}-2[e^{x-1}]_0^2$$

$$=8e-4e^{-1}-2e+2e^{-1}\Longleftrightarrow H=6e-2e^{-1}$$

•$I=\int_0^{\pi}x\cos x\,dx$ posons $\begin{cases}u=x\\dv=\cos x\,dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\sin x\end{cases}\Longrightarrow$

$$I=[x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[\cos x]_0^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-1-1=-2\Longrightarrow \boldsymbol{I=-2}$$

++

EXERCICE 2:

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_2^3\left(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\qquad B=\int_0^3\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{1+x}+\frac{2}{2x+2}\right)dx$

$C=\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$ $\qquad D=\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$ $\qquad E=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{cos^2 x}dx$

$F=\int_0^1(2x-5)(x^2-5x+1)dx$ $\qquad G=\int_{-3}^{0}\frac{x+3}{(x^2+6x-1)^3}dx$

$H=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ $\qquad I=\int_2^5\left(2x-5-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$ $\qquad J=\int_{-3}^{-2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$K = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \qquad L = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad M = \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{ln^2 x}{x}\right) dx$

$$N = \int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \qquad O = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cos x} \sin x \; dx$$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

Calculons les intégrales suivantes :

$\bullet A = \int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_2^3 x^2 dx + \int_2^3 \sqrt{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$

$A = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right]_2^3 = \frac{1}{3}3^3 + \frac{2}{3}3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3}2^3 + \frac{2}{3}2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow$

$A = 9 + 4\sqrt{3} - \frac{8}{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2} = \frac{19}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{19}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2}$

$\bullet B = \int_0^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{2x+2}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + 2\ln|1+x| + \ln|x+1|\right]_0^3 \Rightarrow$

$$B = \left[\frac{1}{4}x^2 + 3\ln|1+x|\right]_0^3 = \frac{1}{4}3^2 + 3\ln|1+3| - \left(\frac{1}{4}0^2 + 3\ln|1+0|\right)$$

$$= \frac{9}{4} + 3\ln 4 \Rightarrow B = \frac{9}{4} + 3\ln 4$$

$\bullet C = \int_0^\pi \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\sin 2\pi - \frac{1}{2}\sin 2(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\bullet D = \int_0^\pi \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{2}\cos 2(0) = 0 \Rightarrow \quad D = 0$

$\bullet E = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^\pi = \frac{1}{\cos \pi} - \frac{1}{\cos 0} = -1 - 1$

$$E = -2$$

$\bullet\ F = \int_0^1 (2x-5)(x^2-5x+1) dx = \left[\frac{1}{2}(x^2-5x+1)^2\right]_0^1$

$F = \frac{1}{2}\left((1^2 - 5 + 1)^2 - (0^2 - 0 + 1)^2\right) = \frac{1}{2}(9-1) = 4 \Rightarrow F = 4$

$\bullet G = \int_{-3}^0 \frac{x+3}{(x^2+6x-1)^3} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x^2+6x-1)^2}\right]_{-3}^0 =$

$G = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(0^2+0-1)^2} - \frac{1}{((-3)^2+6(-3)-1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{200}$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{99}{200}$$

$\bullet H = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx = [\ln|e^x + e^{-x}|]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$$H = \ln\left|e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}\right| - \ln\left|e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}\right| = \ln\left(3+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(2+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln\frac{10}{3} - \ln\frac{5}{2} = \ln\frac{10}{3}\times\frac{2}{5} = \ln\frac{4}{3} \Longrightarrow \quad H = \ln\frac{4}{3}$$

$$\bullet I = \int_2^5 \left(2x-5-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x^2-5x+\frac{1}{x+2}\right]_2^5$$

$$I = 5^2 - 5\times 5 + \frac{1}{5+2} - \left(2^2-5\times 2+\frac{1}{2+2}\right) = \frac{1}{7}+\frac{23}{4} = \frac{165}{28} \Longrightarrow I = \frac{165}{28}$$

$$\bullet\ J = \int_{-3}^{-2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx \ = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{-3}^{-2} = \sqrt{3}-\sqrt{8} \Longrightarrow \quad J = \sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

$$\bullet K = \int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \Longrightarrow$$

$$K = \frac{\pi}{12}$$

$$\bullet L = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e^1) - \ln(1+e^0) = \ln(1+e) - \ln 2$$

$$L = \ln\left(\frac{e-1}{2}\right)$$

$$\bullet M = \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx = \int_{e^{-1}}^1 (\ln x + \ln^2 x)\, d(\ln x) = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_{e^{-1}}^1$$

$$M = \frac{1}{2}(\ln 1)^2+\frac{1}{3}(\ln 1)^3 - \left(\frac{1}{2}(\ln e^{-1})^2+\frac{1}{3}(\ln e^{-1})^3\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \Longrightarrow$$

$$M = -\frac{1}{6}$$

$$\bullet N = \int_2^1 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int_2^1 \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_2^1 = -e^{\frac{1}{1}}+e^{\frac{1}{2}} = -e+\sqrt{e} \Longrightarrow$$

$$N = \sqrt{e} - e$$

$$\bullet\ O = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cos x}\sin x\ dx = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x)' e^{2\cos x}\ dx = -\frac{1}{2}\left[e^{2\cos x}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$O = -\frac{1}{2}\left(e^{2\cos\frac{\pi}{2}} - e^{2\cos\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{2(0)} - e^{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = -\frac{1}{2}(1-e) \Longrightarrow O = \frac{e-1}{2}$$

+++

EXERCICE 3:

On considère les intégrales $I\ \ et\ \ J$ ci-déssous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \qquad et \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$$

1) Calculer $I + J\ \ et\ \ I - J$
2) En déduire $I\ \ et\ \ J$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

On considère les intégrales I et J ci-déssous :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \qquad et \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$$

1) Calculons $I+J$ et $I-J$

$$\bullet I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \Rightarrow$$

$$I+J=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{3}0^3=\frac{\pi^3}{24}\Longrightarrow \boxed{I+J=\frac{\pi^3}{24}}$$

$$\bullet I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\, dx \quad on\ pose \begin{cases} u=x^2 \\ dv=\cos 2x\, dx\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases} \Longrightarrow$$

$$I-J=\left[\frac{x^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx \quad on\ pose \begin{cases} u=x \\ dv=\sin 2xdx\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases} \Longrightarrow I-J=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx \Longrightarrow$$

$$I+J=-\frac{\pi}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi \Longrightarrow I-J=\frac{\pi}{4}$$

2) Déduisons-en I et J

$$\begin{cases} I-J=\frac{\pi}{4} \\ I+J=\frac{\pi^3}{24}\end{cases} \Longrightarrow 2I=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{24} \Longrightarrow \boxed{I=\frac{\pi^3+6\pi}{24}};\ J=I-\pi=\frac{\pi^3+6\pi}{24}-\pi$$

$$D'\text{où}\ \boxed{J=\frac{\pi^3-18\pi}{24}}$$

++

EXERCICE 4:

1) Déterminer les a, b et c tels que : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$

2) Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x(x^2+1)}dx$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

1) Déterminons les a, b et c tels que : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

$$on\ pose\ \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \Longrightarrow 1+b=0 \Longrightarrow b=-1 \Longrightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

2) Calculons $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \ln|1| - \frac{1}{2}\ln|1^2+1| - \left(\ln\left|\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right|\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{5}{4} + \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} \Longrightarrow \boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}}$$

++

EXERCICE 5:

On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x ainsi définie sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x\ de\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on ait :

$$f(x) = b\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + a$$

2) Soit α un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Calculer l'intégrale ;

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx$$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++

On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x ainsi définie sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1- Démontrons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout

$x\ de\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on ait : $\mathrm{f(x) = b\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + a}$

$$\mathrm{f(x) = b\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + a = \frac{b\cos x - b\sin x + a\sin x + a\cos x}{\sin x + \cos x}} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{f(x) = \frac{(a+b)\cos x + (a-b)\sin x}{\sin x + \cos x}} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{a+b=0} \\ \mathrm{a-b=1} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{2a = 1} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{a = \frac{1}{2}\ \ et\ b = -\frac{1}{2}\ \ alors}\ \boxed{\mathbf{f(x) = -\frac{\cos x - \sin x}{2(\sin x + \cos x)} + \frac{1}{2}}}$$

2- Soit α un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Calculons l'intégrale ;

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\right)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{2}dx$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx = -\frac{1}{2}[\ln|\sin x + \cos x|]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} + \frac{1}{2}[x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right| - \ln|\sin\alpha + \cos\alpha|\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln|\cos\alpha + \sin\alpha| - \ln|\sin\alpha + \cos\alpha|) + \frac{\pi}{4} - \alpha \Rightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \mathbf{f(x)dx} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{\alpha}}$$

++

EXERCICE 6:

On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x ainsi définie par

$$f(x) = \frac{-6x+5}{x^2+4x+13}$$

Calculer l'intégrale : $\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x ainsi définie par

$$f(x) = \frac{-6x+5}{x^2+4x+13}$$

Calculer l'intégrale : $\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx$

Comme $(x^2+4x+13)' = 2x+4$ alors $-6x+5 = -3(2x+4)+17$

$$\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{-3(2x+4)+17}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{-3(2x+4)}{x^2+4x+13} dx + \int \frac{17}{x^2+4x+13} dx$$

$$\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx = -3\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx + 17\int \frac{1}{x^2+4x+13} dx$$

$$\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx = -3\ln|x^2+4x+13| + 17\int \frac{1}{(x+2)^2-4+13} dx$$

$$\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx = -3\ln|x^2+4x+13| + 17\int \frac{1}{(x+2)^2+9} dx$$

$$\boxed{\int \frac{-6x+5}{x^2+4x+13} dx = -3\ln|x^2+4x+13| + \frac{17}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + c}$$

++

EXERCICE 7:

Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in N}$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x\, dx$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; on a : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \tan x \leq x^n$ en intégrant membre à membre on a ;

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{+\infty+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{+\infty+1}$ comme $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

++

EXERCICE 8:

Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_1^2 x2^{-x^2}dx \qquad B = \int_1^2\left(x^{\sqrt{5}} - \sqrt{5}^x\right)dx \qquad C = \int_0^{\pi} 2^{\sin x}\cos x\,dx$$

+++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

$$A = \int_1^2 x2^{-x^2}dx = \int_1^2 xe^{-x^2\ln 2}dx = -\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 (2x\ln 2)e^{-x^2\ln 2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\ln 2}\left[e^{-x^2\ln 2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2\ln 2}\left[2^{-x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2\ln 2}\left(2^{-2^2} - 2^{-1^2}\right) = -\frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{A = \frac{7}{32\ln 2}}$$

$$B = \int_1^2\left(x^{\sqrt{5}} - \sqrt{5}^x\right)dx = \int_1^2\left(x^{\sqrt{5}} - e^{x\ln\sqrt{5}}\right)dx = \left[\frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\ln\sqrt{5}}\sqrt{5}^x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\ln\sqrt{5}}\sqrt{5}^2 - \left(\frac{1^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\ln\sqrt{5}}\sqrt{5}^1\right) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{B = \frac{2^{\sqrt{5}+1} - 1}{\sqrt{5}+1} - \frac{5-\sqrt{5}}{\ln\sqrt{5}}}$$

$$C = \int_0^{\pi} 2^{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^{\pi} e^{\sin x\ln 2}\cos x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\pi}\cos x\ln 2\, e^{\sin x\ln 2}dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[e^{\sin x\ln 2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\ln 2}\left[2^{\sin x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\ln 2}\left(2^{\sin\pi} - 2^{\sin 0}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(2^0 - 2^0\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\mathbf{C = \int_0^{\pi} 2^{\sin x}\cos x\,dx = 0}$$

++

EXERCICE 9:

Soit $(I_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$

1) Calculer I_0 et I_1
2) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x\,dx$

En déduire l'expression de $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n, puis la valeur de $I_2;\ I_3;\ I_4\ et\ I_5$

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

Soit $(I_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

1- Calculons I_0 et I_1

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^0}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx$$

$$I_0 = \frac{1}{2}[-\ln|1-\sin x| + \ln|1+\sin x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+\sin\frac{\pi}{3}}{1-\sin\frac{\pi}{3}}\right| - \ln\left|\frac{1+\sin 0}{1-\sin 0}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{I_0 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

2- Calculons l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n d(\sin x) = \left[\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{(\sin\frac{\pi}{3})^{n+1}}{n+1} - \frac{(\sin 0)^{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

$$d'o\grave{u} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{(\sin x)^n \cos x \, dx = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}$$

Déduisons-en l'expression de $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n, puis la valeur de $I_2;\ I_3;\ I_4 \ et\ \ I_5$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2} - (\sin x)^n}{\cos x} dx$$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n(\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n \cos^2 x}{\cos x} dx$$

$$\boldsymbol{I_{n+2} - I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x \, dx = -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}$$

$$n = 0 \Leftrightarrow I_2 - I_0 = -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{0+1}}{(0+1)2^{0+1}} \Leftrightarrow I_2 = I_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{I_2 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$n = 1 \Leftrightarrow I_3 - I_1 = -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{1+1}}{(1+1)2^{1+1}} \Leftrightarrow I_3 = I_1 - \frac{3}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx - \frac{3}{8} = -[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = \ln 2 - \frac{3}{8}}}$$

$$n = 2 \Leftrightarrow I_4 - I_2 = -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2+1}}{(2+1)2^{2+1}} \Leftrightarrow I_4 = I_2 - \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow I_4 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{I_4 = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{5\sqrt{3}}{8}}$$

$$n = 3 \Leftrightarrow I_5 - I_3 = -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{3+1}}{(3+1)2^{3+1}} \Leftrightarrow I_5 = I_3 - \frac{9}{64} \Leftrightarrow I_4 = \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{I_5 = \ln 2 - \frac{33}{64}}$$

++

EXERCICE 10:

Pour tout entier naturel $n \geq 2$; on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

a) Calculer I_2 et , démontrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

b) Etablir que pour tout entier naturel $x \in [1;2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

c) En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la limite eventuelle de la suite I_n

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

Pour tout entier naturel $n \geq 2$; on considère l'intégrale I_n définie par :

$$\boldsymbol{I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx}$$

a) Calculons I_2

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx\,; \Rightarrow I_2 = -\int_1^2 d\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e\right) \Rightarrow I_2 = e - \sqrt{e}$$

Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\boldsymbol{I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n}$$

$$\mathrm{I_n} = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx\,; \text{on pose } \mathrm{I_{n+1}} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx \text{ et } \mathrm{I_{n+2}} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} dx$$

alors calculons $\mathrm{I_{n+2}}$:

$$\mathrm{I_{n+2}} = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \quad \text{on pose } \begin{cases} u = \frac{1}{x^n} \\ dv = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{n}{x^{n+1}} dx \\ v = -e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I_{n+2}} = -\left[\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - n\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx \Rightarrow \mathrm{I_{n+2}} = -\left(\frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2}} - e\right) - n\mathrm{I_{n+1}}$$

$$\mathrm{I_{n+2}} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^n} - n\mathrm{I_{n+1}} \Rightarrow \mathrm{I_{n+2}} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^n} - n\mathrm{I_{n+1}}$$

$$\text{on pose : } n = n-1 \text{ ; on a } I_{n-1+2} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - (n-1)I_{n-1+1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n cqfd}}$$

b) Etablissons que pour tout entier naturel $x \in [1;2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

On a : • $\forall x \in [1;2], e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} \leq e$, donc $0 < e^{\frac{1}{x}} \leq e$ $(*)$

•$\forall x \in [1;2]$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$; $\frac{1}{x^n} > 0$ En multipliant $(*)$ par $\frac{1}{x^n}$ on a :

$$\boxed{\mathbf{0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} cqfe}}$$

c) En déduisons un encadrement de I_n

$$0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \Longrightarrow 0 < \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx \Longrightarrow 0 < I_n \leq e \int_1^2 \frac{1}{x^n} dx \Longrightarrow$$

$$0 < I_n \leq e \left[\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}\right]_1^2 \Longrightarrow 0 < I_n \leq e\left(\frac{1}{(-n+1)2^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)}\right) \Longrightarrow$$

$$0 < I_n \leq e\left(\frac{2^{1-n}}{(-n+1)} - \frac{1}{(-n+1)}\right) \Longrightarrow \boxed{\mathbf{0 < I_n \leq e\left(\frac{2^{1-n} - 1}{1-n}\right)}}$$

Etudier la limite eventuelle de la suite I_n

Pour cela on a : lorsque $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to k} g(x) = \lim\limits_{x \to k} h(x) = l$

$$d'où \lim_{x \to k} f(x) = l$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e\left(\frac{2^{1-n}-1}{1-n}\right) = e\left(\frac{2^{1-\infty}-1}{1-\infty}\right) = e\left(\frac{0-1}{-\infty}\right) = 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$$

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

On note C la courbe représentative de f

1- Vérifier que la courbe C est un demi-cercle de centre O et de rayon 1

2- En déduire la valeur de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et g définie sur R par $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

1- Calculer $I_1 = \int_1^e f(x)dx$

2- Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2

++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive de f

$a)\ F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7 \quad et \quad f(x) = 6(2x-1)^2$;

$b)\ F(x) = -2\cos(3x+2) \quad et \quad f(x) = 6\sin(3x-2)$

$c)\ F(x) = \sqrt{2x+1} \quad et \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

$d)\ F(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^2 \quad et \quad f(x) = \frac{(x\sqrt{x}-1)(2+x\sqrt{x})}{x^3}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f de R vers R par : $f(x) = \frac{12x^2-37x+13}{(5x-2)(2x-1)^2}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f

2) Déterminer les nombres réels a, b tels que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \frac{a}{5x-2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$$

3) Donner une primitive à f sur $\left]-\infty; \frac{2}{5}\right[$. Calculer $\int_{-1}^0 f(x)dx$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx \quad \text{on pose } u(x) = x^3 + 2$$

$$B = \int_1^2 \frac{7x^2}{(x^3+2)^2}dx \quad \text{on pose } u(x) = x^3 + 2$$

$$C = \int_0^1 (1 + x)\sqrt{x}dx \qquad D = \int_0^1 e^x(e^x + 1)dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 6 :++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{2}{x^4}dx \qquad I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx \qquad I_3 = \int \sqrt[6]{x}dx \qquad I_4 = \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$$

$$I_5 = \int \sqrt{x\left(\sqrt[3]{x\left(\sqrt[4]{x}\right)}\right)}dx \qquad I_6 = \int x^2\left(\sqrt[\sqrt{2}]{x^2\left(\sqrt{x}\right)}\right)dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 7 :++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \left(x^2\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)dx \qquad I_2 = \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$I_3 = \int (\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x})dx \qquad I_4 = \int \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 8 :++++++++++++++++++++++++++

Utiliser le changement de variable et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int (x^2 + 3x - 2)(2x + 3)dx \qquad I_2 = \int (2x + 1)^{10}dx$$

$$I_3 = \int \frac{x}{(x^2 + 2)^5}dx \qquad I_4 = \int \frac{dx}{(5x + 2)^4}dx$$

$$I_5 = \int \frac{x^2}{\sqrt[6]{x^3 - 2}}dx \qquad I_6 = \int x\sqrt{x^2 + 2}dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 9 :++++++++++++++++++++++++++

Utiliser l'intégration par parties et calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \ln(1 + x^2)\, dx \qquad I_2 = \int x^n \ln x\, dx$$

$$I_3 = \int x \arcsin x\, dx \qquad I_4 = \int x \arctan x\, dx$$

$$I_5 = \int 3^x \cos x\, dx \qquad I_6 = \int x a^x dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 10 :++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}dx \qquad I_2 = \int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10} - 2}}dx$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 11 :++++++++++++++++++++++++++

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$; $\quad A = \int \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx \quad et\ J = A + I$

1- Calculer J puis I
2- En déduire A

++++++++++++++++++++++++**Exercice 12 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère les intégrales I et J ci-déssous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x\, cos^4 x dx \qquad et \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 x\, sin^4 x dx$$

1) Calculer $I + J$ et $I - J$ 2) En déduire I et J

++++++++++++++++++++++++**Exercice 13 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère les intégrales I et J ci-déssous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) cos^2 x dx \qquad et \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\, sin^2 x dx$$

1) Calculer $I + J$ et $I - J$ 2) En déduire I et J

++++++++++++++++++++++++**Exercice 14 :**++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes en linéarisant :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^2 5x\, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^4 x dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x cos^4\, x dx$$

$$D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2(2x) cos^2(3x) dx$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 15 :**++++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

$$A = \int_0^{\pi} (2x^2 - 1)\cos 3x\, dx \qquad B = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x\, dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 sin^2\, x dx$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x cos\ x\ \ dx \qquad F = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$$

$$G = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\, dx \qquad H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \cos x\, dx \qquad I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x} x^2 \sin 3x\, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx \qquad K = \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 3) e^x dx \qquad L = \int_1^2 ln^2 x dx$$

$$M = \int_{-2}^{1} (x^2+1) e^x dx \qquad N = \int_1^2 x \ln^2 x\, dx \qquad O = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \cos 3x\, dx$$

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 3x\, dx \qquad Q = \int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 16:**++++++++++++++++++++++++++

1) Démontrer que pour tout nombre réel x : $cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

2) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3xdx$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 17 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f de R vers R par : $f(x) = \frac{3x^3-5x^2+2x-1}{x^2-4x+4}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f
2) Déterminer les nombres réels $a, b, c\ et\ d$ tels que pour tout nombre réel x : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$
3) Donner une primitive à f sur $[-1; 1]$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

+++

APPROFONDISSEMENT

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 18 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Calculer $I_0 = \int_0^1 e^x dx \quad et \quad I_1 = \int_0^1 xe^x dx$

2) Pour tout n de N, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Au moyen d'une intégration par parties, obtenir une relation entre $I_{n+1} \quad et \quad I_n$

Vérifier cette relation pour $n = 0$. L'utiliser pour calculer I_5

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 19:**++++++++++++++++++++++++++++

Soit $n \in N$ et $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x\, dx$

1) Calculer I_n à l'aide d'une intégration par parties successives
2) Démontrer que la suite (I_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et I_0

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 20:**++++++++++++++++++++++++++++

Soit $(I_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx$

1) Calculer $I_0 \ \ et \ \ I_1$
2) Sans calculer I_n ; démontrer que la suite (I_n) est décroissante
3) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :$\forall n \in N$;

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4) a) Calculer I_9; $I_{10} \ \ et\ I_{11}$

   b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4\times7^2\times11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4\times5\times7^2}$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 22 :**++++++++++++++++++++++++++

1) On considère les intégrales $I \ \ et \ \ J$ ci-déssous :

$$I = \int_0^{\pi} cos^4xdx \qquad et \qquad J = \int_0^{\pi} sin^4xdx$$

a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire sous la forme

$$I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2x)dx$$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I = \int_0^{\pi} sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

c) Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

2) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $I - J = 0$

c) En déduire les intégrales $I\ et\ J$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 23 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit α un réel strictement positif

1) On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$

a. Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α

b. Déterminer $\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$

2) On pose $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$

a. En utilisant une intégration par parties, exprimer $J(\alpha)$ en fonction de α

b. Déterminer $\lim_{\alpha \to 0} J(\alpha)$

+++

EVERCICES DE PERFECTIONNEMENT

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 24 :**+++++++++++++++++++++++++++

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad et \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

1) a. Quelle est la dérivée de la fonction tangente

b. Calculer I

2) a. Soit la fonction : $f: \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow R$
$x \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

Démontrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b. Déduire du calcul précédent une relation de entre I et J, puis calculer J

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 25 :**+++++++++++++++++++++++++++

Le but du problème est la détermination de l'encadrement de π en calculant de deux façons l'intégrale : $I = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

I) Méthode donnant la valeur exacte de I

1) Calculer $\tan\theta$ en fonction de $t = \tan\frac{\theta}{2}$. En déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

2) Soit f l'application de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans R définie par : $f(x) = \tan x$

a) Tracer la courbe γ représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, i; j)$

b) Démontrer que f admet une fonction reciproque $f^{-1} = F\ de\ R\ dans\ \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Donner le tableau de variations de cette application et la représenter graphiquement dans le même graphiquement

3) Démontrer que F est dérivable sur R et que $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

En déduire que $I = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12}$

II) Méthode donnant un encadrement de I

1) a) Calculer $\left(2-\sqrt{3}\right)^3\ et\ \left(2-\sqrt{3}\right)^4$ en fonction de $\sqrt{3}$

b) Vérifier que $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}$

2) Calculer $J = \int_0^{2-\sqrt{3}} (1-x^2)dx$ en fonction de $\sqrt{3}$

3) On désigne par K l'intégrale : $K = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{x^4}{1+x^2}dx$

a) Montrer que pour tout réel positif x : $\frac{x^4}{1+x^2} \leq \frac{x^3}{2}$

b) En déduire que $0 \leq K \leq \frac{97}{8} - 7\sqrt{3}$

4) De l'intégrale $I = J + K$, déduire l'encadrement $4\sqrt{3} - \frac{20}{3} \leq I \leq \frac{131}{24} - 3\sqrt{3}$

Conclusion : Sachant que $1{,}73205 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}73206$; déduire des deux parties le meilleurs encadrement possible de π

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 26 :</u>+++++++++++++++++++++++++++

On pose pour tout entier naturel n: $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ où ln désigne la fonction logarithme népérien et : $I_0 = \int_1^e x^2 dx$

1- Calculer I_0

2- En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

En déduire I_2

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 27 :</u>+++++++++++++++++++++++++++

On considère pour tout entier naturel n, les intégrales :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\, dx$

1- Calculer I_0 et J_0

2- Pour tout entier naturel non nul

a- En utilisant une intégration par parties sur I_n et J_n, prouver que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n + \mathrm{n}J_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

b- En déduire , pour tout entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n

3- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 28:**+++++++++++++++++++++++++++

1) On pose pour tout entier naturel n non nul ; $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$

a. A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul ; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$

2) On considère la suite réelle (a_n), définie sur N^* par

$$a_1 = 0 \quad et \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a. Démontrer par récurrence que ; pour tout entier naturel non nul ,

$$a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 29 :**+++++++++++++++++++++++++++

Pour tout n entier naturel non nul, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) a. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1; e]$ et pour tout n entier naturel on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$

b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante

2) a. A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1

b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c. En déduire I_1 ; I_2 et I_3. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs exactes à 10^{-3} près par défaut

3) a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul ; $I_n \geq 0$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul ; $(n+1)I_n \leq e$

c. En déduire la limite de I_n

d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 30 :**+++++++++++++++++++++++++++

On définie la suite $(I_n)_{n\in N}$ par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et pour tout entier naturel non nul n ; $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1- Calculer I_0 et I_1
2- Montrer que pour tout entier naturel n ; $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$
3- Montrer par récurrence que ; $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 31 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1- Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
2- Soit a un réel strictement positif. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ puis $\int_1^a f(x)dx$
3- Soit k un entier naturel non nul. Démontrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$ puis en déduire que $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$
4- Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

Simplifier S_n , montrer que la suite S_n est convergente puis déterminer sa limite

5- Montrer que pour tout entier naturel non nul, $0 \leq \sum_{k=0}^{2n} f(k) \leq S_n$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n} f(k)\right)$

6- On considère la suite u_n définie par $u_n = \sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{k}\right)$. Exprimer $\sum_{k=0}^{2n} f(k)$ en fonction de u_n. En déduire que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite

+++++++++++++++++++++++++**Exercice 32 :**+++++++++++++++++++++++++++

On considère la suite u_n définie par $u_n = \int_0^1 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{t}{n}} dt$

1- Soit φ la fonction définie sur $[0; 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$. Etudier les variations de φ sur $[0; 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

Montrer que pour tout réel t dans $[0; 2]$, on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$. Par une intégration, en déduire que $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right)$. Montrer que, si u_n possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$

2- Vérifier que ; pour tout t de $[0; 2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt$. Montrer que pour tout réel t dans $[0; 2]$, on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq u_n \leq Ie^{\frac{2}{n}}$. Montrer que u_n converge et déterminer sa limite

++

LE DEFI

++++++++++++++++++++++++**Exercice 33 :**++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int \frac{\left(\tan\sqrt{x}\right)^2+2}{\left[\left(\tan\sqrt{x}\right)^4-1\right]\left(\cos\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}}dx \qquad b)\ \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-(\ln x)^2}}dx$$

$$c)\ \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{(\sin x)^2+4\sin x+1}}dx \qquad d)\ \int \frac{\sin 2x-\cos x}{\sqrt{2(\sin x)^2+\sin x-1}}dx$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 34 :**++++++++++++++++++++++++

Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\,dx \quad \text{on peut poser} \quad \mathrm{t}=\sqrt{\tan x}$$

$$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx \quad \text{on peut poser} \quad \mathrm{t}=\sqrt{\sin x}$$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 35 :**++++++++++++++++++++++++

Encadrer $\int_{1,5}^{2}\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)dx$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 36 :**++++++++++++++++++++++++

Soit f une fonction continue sur R et périodique de période T

Montrer que la fonction $\mathrm{g(x)}=\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x+T}}\mathrm{f(t)dt}$ est constante sur R

++++++++++++++++++++++++**Exercice 37 :**++++++++++++++++++++++++

Soit f_n *et* g_n les fonctions définies sur R par : $f_n(x)=x^n$ *et* $g_n(x)=\sqrt[n]{x}$

Les courbes représentatives de ces deux fonctions partagent le carré unité en trois domaines.

Déterminer n pour que les trois domaines aient la même aire

++++++++++++++++++++++++**Exercice 38 :**++++++++++++++++++++++++

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $a_n=\left(\int_0^1\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$

1- Calculer a_2

2- Démontrer que $a_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)$

A l'aide de la fonction $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$, calculer a_1

BONNE CHANCE A TOUS

++

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définitions : On appelle équation différentielle toute relation qui relie une fonction inconnue f et ses dérivées successives $f^{'}; f^{''}; f^{'''}; \dots ; f^{n}$

Equations du type $\boldsymbol{y^{'} = f(x)}$ et $\boldsymbol{y^{''} = g(x)}$:

● **Equations du type $\boldsymbol{y^{'} = f(x)}$:** Pour résoudre une équation de cette forme, on pose $y^{'} = \frac{dy}{dx}$ *et on a*: $y^{'} = f(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow dy = f(x)dx \Longrightarrow$
$\int dy = \int f(x)dx \Longrightarrow \boldsymbol{y = g(x) + c}$

● **Equations du type $\boldsymbol{y'' = g(x)}$:** Pour résoudre une équation de cette forme, on pose $y^{''} = \frac{dy^{'}}{dx}$ *et on a*: $y^{''} = g(x) \Longrightarrow \frac{dy^{'}}{dx} = g(x) \Longrightarrow dy^{'} = g(x)dx \Longrightarrow$
$\int dy^{'} = \int g(x)dx \Longrightarrow y^{'} = h(x) + c_1$ *et on pose* $y^{'} = \frac{dy}{dx}$ *et on a*: $y^{'} = h(x) + c_1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = h(x) + c_1 \Longrightarrow dy = (h(x) + c_1)dx \Longrightarrow \int dy = \int (h(x) + c_1)dx \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{y = i(x) + c_1 x + c_2}$$

Equations du type $\boldsymbol{y^{'} + ay = 0}$: Pour résoudre l'équation de cet type, on pose

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} \ \text{ et on a}: y^{'} + ay = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + ay = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -ay \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -adx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int adx \Longrightarrow \ln|y| = -ax + c \Longrightarrow e^{\ln|y|} = e^{-ax+c} \Longrightarrow |y| = e^{-ax}.e^{c} \Longrightarrow$$

$$y = \pm e^{c}.e^{-ax} \quad \text{on pose } k = \pm e^{c} \text{ alors } \boldsymbol{y = ke^{-ax}}$$

Equations du type $\boldsymbol{ay^{''} + by^{'} + cy = 0}$ $avec\ a \neq 0\ et\ (b,c) \in R^2$:

L'équation de cette forme est appelée « équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre »

On appelle équation caractéristique de $ay^{''} + by^{'} + cy = 0$ toute équation de la forme

$ar^2 + br + c = 0$ où r est l'inconnu. Pour résoudre cette équation, on résout l'équation caractéristique puis on a $\Delta = b^2 - 4ac$:

●$Si\ \Delta > 0\ alors\ r_1\ et\ r_2\ et\ y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

●$Si\ \Delta = 0\ alors\ r_1 = r_2\ et\ y = (Ax + B)e^{rx}$

●$Si\ \Delta < 0\ alors\ \begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases}\ et\ y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Résoudre sur l'intervalle K les équations différentielles suivantes :

$a)\ xy' + 1 = 0 \quad K \in]0, +\infty[\ ;$ $\quad b)\ x^3y' + x^2 + 1 = 0 \quad K \in]-\infty; 0[$

$c)\ e^x y' + e^{-x} = 0 \quad K \in R$ $\quad d)\ y' sinx - cosx = 0 \quad K \in]0, \pi[$

$e)\ 1 + 6x^2 + y'' = 0 \quad K \in R$ $\quad f)\ cos2x + 4y'' = 0 \quad K \in R$

$g)\ 2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0 \quad K \in R$ $\quad h)\ 2y'' = 1 + tan^2x \quad K \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Résolvons sur l'intervalle K les équations différentielles suivantes :

$a) xy' + 1 = 0 \;\; K \in]0, +\infty[\;\; xy' + 1 = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \Longrightarrow$

$$dy = -\frac{1}{x}dx \Longrightarrow \int dy = -\int \frac{1}{x}dx \Longrightarrow \boldsymbol{y = -\ln x + c}$$

$b) \;\; x^3y' + x^2 + 1 = 0 \quad K \in]-\infty; 0[\Longrightarrow x^3y' = -x^2 - 1 \Longrightarrow y' = -\frac{x^2+1}{x^3} \Longrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+1}{x^3} \Longrightarrow dy = -\frac{x^2+1}{x^3}dx$$

$$\int dy = -\int \frac{x^2+1}{x^3}dx \Longrightarrow y = -\int \left(\frac{1}{x} + x^{-3}\right)dx = -\left(\ln|x| - \frac{1}{2x^2}\right) + c \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{y = -\ln|x| + \frac{1}{2x} + c}$$

$c)\ e^x y' + e^{-x} = 0 \quad K \in R \;\; \Longrightarrow e^x y' = -e^{-x} \Longrightarrow y' = -e^{-2x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{-2x}$

$$dy = -e^{-2x}dx \Longrightarrow \int dy = -\int e^{-2x}dx \Longrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}e^{-2x} + c}$$

$d)\ y' sinx - cosx = 0 \quad K \in]0, \pi[\;\; \Longrightarrow y' \sin x = \cos x \Longrightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow dy = \frac{\cos x}{\sin x}dx \Longrightarrow \int dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \Longrightarrow \boldsymbol{y = \ln|\sin x| + c}$$

$e)\ 1 + 6x^2 + y'' = 0 \quad K \in R \;\; \Longrightarrow y'' = -6x^2 - 1 \Longrightarrow \frac{dy'}{dx} = -6x^2 - 1 \Longrightarrow$

$$dy' = -(6x^2 + 1)dx \Longrightarrow \int dy' = -\int (6x^2 + 1)dx \Longrightarrow y' = -2x^3 - x + c_1 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 - x + c_1 \Longrightarrow dy = (-2x^3 - x + c_1)dx \Longrightarrow$$

$$\int dy = \int (-2x^3 - x + c_1)\,dx$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2}$$

$f)\ cos2x + 4y'' = 0 \quad K \in R \ \Rightarrow \ 4y'' = -\cos 2x \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4}\cos 2x \Rightarrow$

$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{4}\cos 2x \Rightarrow dy' = -\left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)dx \Rightarrow \int dy' = -\int \left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)dx \Rightarrow$

$y' = -\frac{1}{8}\sin 2x + c_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8}\sin 2x + c_1 \Rightarrow dy = \left(-\frac{1}{8}\sin 2x + c_1\right)dx \Rightarrow$

$\int dy = \int \left(-\frac{1}{8}\sin 2x + c_1\right)dx \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{16}\cos 2x + c_1x + c_2}$

$g)\ 2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0 \quad K \in R \Rightarrow 2y'' = -e^{2x} + e^{-2x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) \Rightarrow$

$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) \Rightarrow dy' = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})dx \Rightarrow \int dy' = \frac{1}{2}\int (e^{2x} - e^{-2x})dx$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) + c_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) + c_1 \Rightarrow$$

$$dy = \left(\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}) + c_1\right)dx \Rightarrow \int dy = \frac{1}{4}\int (e^{2x} + e^{-2x})dx + c_1x \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{8}(e^{2x} - e^{-2x}) + c_1x + c_2}$$

$h)\ 2y'' = 1 + tan^2x \quad K \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2\frac{dy'}{dx} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow 2dy' = (1 + \tan^2 x)dx$

$$\int 2dy' = \int (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow 2y' = \tan x + c_1 \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = \tan x + c_1 \Rightarrow$$

$$2dy = (\tan x + c_1)dx \Rightarrow \int 2dy = \int (\tan x + c_1)dx \Rightarrow 2y = -\ln|\cos x| + c_1x + c_2$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-\ln|\cos x| + c_1x + c_2}{2}}$$

++

EXERCICE 2 :

Résoudre sur R les équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant la condition indiquée:

$a)\ y' - 3y = 0 \quad et\ y(0) = 1 \qquad b)\ y' + 3y = 0 \quad et\ y(1) = 1$

$c)\ 4y' - 3y = 0 \quad et\ y(-4) = 1 \qquad d)\ y' + y\ln 2 = 0 \quad et\ y(1) = -2$

$e)\ y'' - 2y' - 2y = 0 \ \ et \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad f)\ y'' - 4y' + 4y = 0 \ \ et \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$g)\ 2y'' - y = 0 \ \ et\ y(0) = y'(0) = 1 \ h)\ 9y'' + 4y = 0 \ \ et\ \ y(\pi) = y'(\pi) = 1$

+++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

Résolvons sur R les équations différentielles suivantes et déterminons la solution vérifiant la condition indiquée:

$a)\ y' - 3y = 0 \quad et\ y(0) = 1$

Soit l'équation caractéristique : $r - 3 = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \quad y = Ae^{3x}$

$$mais\ \ y(0) = 1 \Longrightarrow Ae^0 = 1 \Longrightarrow A = 1\ \ d'où\quad \boldsymbol{y = e^{3x}}$$

$b)\ y' + 3y = 0 \quad et\ y(1) = 1$

Soit l'équation caractéristique :$r + 3 = 0 \Longrightarrow r = -3 \Longrightarrow\ \ y = Ae^{-3x}$

$$mais\ \ y(1) = 1Ae^{-3} = 1 \Longrightarrow A = e^3\quad d'où\ \ \boldsymbol{y = e^{3-3x}}$$

$c)\ \ 4y' - 3y = 0 \quad et\ y(-4) = 1$

Soit l'équation caractéristique : $4r - 3 = 0 \Longrightarrow r = \frac{3}{4} \Longrightarrow y =$ $Ae^{\frac{3}{4}x}\ \ mais\ \ y(-4) = 1$

$$Ae^{-3} = 1 \Longrightarrow A = e^3\quad d'où\ \ \ y = \boldsymbol{e^{3+\frac{3}{4}x}}$$

$d)\ \ y' + y\ln 2 = 0 \quad et\ y(1) = -2$

Soit l'équation caractéristique : $r + \ln 2 = 0 \Longrightarrow r = -\ln 2 \Longrightarrow y = Ae^{-x\ln 2}$

$mais\ \ y(1) = -2$ alors $Ae^{-\ln 2} = -2 \Longrightarrow A = -4\quad d'où\ \ \ y = \boldsymbol{-4e^{-xln\,2}}$

$e)\ y'' - 2y' - 2y = 0\ \ et\ \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 - 2r - 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 + 8 = 12\ \Longrightarrow$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\ \text{ alors }\ \mathrm{r_1} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}\ \text{ et }\ \mathrm{r_1} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{D'où }\ \mathrm{y} = \mathrm{Ae^{r_1x}} + \mathrm{Be^{r_2x}} = \mathrm{Ae^{(1-\sqrt{3})x}} + \mathrm{Be^{(1+\sqrt{3})x}}$$

$$\bullet y(0) = 1 \Longrightarrow A + B = 1$$

$$\bullet y' = A(1 - \sqrt{3})e^{(1-\sqrt{3})x} + B(1 + \sqrt{3})e^{(1+\sqrt{3})x} \Longrightarrow y'(0) = 0$$

$$\Longrightarrow A(1 - \sqrt{3}) + B(1 + \sqrt{3}) = 0$$

D'où le système : $\begin{cases} A + B = 1 \Longrightarrow A = 1 - B \\ A(1 - \sqrt{3}) + B(1 + \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$(1 - \sqrt{3}) - B(1 - \sqrt{3}) + B(1 + \sqrt{3}) = 0 \Longrightarrow B(-1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

$$B = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \Longrightarrow A = 1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\text{D'où }\ \boldsymbol{y} = \left(\frac{\boldsymbol{3+\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}\right)\boldsymbol{e^{(1-\sqrt{3})x}} + \left(\frac{\boldsymbol{3-\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}\right)\boldsymbol{e^{(1+\sqrt{3})x}}$$

$f)\ y'' - 4y' + 4y = 0\ \ et\ \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0 \Longrightarrow \Delta = 16 - 16 = 0\ \Longrightarrow$

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Longrightarrow y = (Ax + B)e^{rx} = (Ax + B)e^{2x}$$

$$\bullet y(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$$

$$\bullet y' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{rx} \Longrightarrow y'(0) = 1 \Longrightarrow A + 2B = 1 \Longrightarrow A = 1$$

$$\text{D'où }\ \boldsymbol{y = xe^{2x}}$$

$$g)\ 2y'' - y = 0\ \ et\ y(0) = y'(0) = 1$$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0 \Longrightarrow r^2 = 1\ \Longrightarrow r = \pm 1$

$$\Rightarrow y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} = Ae^{x} + Be^{-x} \Rightarrow y = Ae^{x} + Be^{-x}$$

$$\bullet y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$$

$$y' = Ae^{x} - Be^{-x} \Rightarrow y'(0) = A - B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$B = 0$ D'où $\boldsymbol{y = e^{x}}$

$h)$ $9y'' + 4y = 0$ et $y(\pi) = y'(\pi) = 1$

Soit l'équation caractéristique : $9r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm\frac{2}{3}i$

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x \Rightarrow y = A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x$$

$$\bullet y(\pi) = y'(\pi) = 1 \Rightarrow A\cos\frac{2}{3}\pi + B\sin\frac{2}{3}\pi = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}A + B\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow A - B\sqrt{3} = 1$$

$$y' = -\frac{2}{3}A\sin\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}B\cos\frac{2}{3}x \Rightarrow y'(\pi) = -\frac{2}{3}A\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}B\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}A - \frac{1}{3}B = 1 \Rightarrow A\sqrt{3} + B = -1 \Rightarrow \begin{cases} A - B\sqrt{3} = 1 \\ A\sqrt{3} + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \\ B = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

D'où $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\cos\frac{2}{3}x - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\sin\frac{2}{3}x$

++

EXERCICE 3 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$

2) En déduire la solution qui satisfait aux conditions : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

3) Mettre cette solution sous la forme : $f(x) = a\cos(\omega x + \varphi)$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) Résolvons l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm 2i$

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = A\cos 2x + B\sin 2x \Rightarrow y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

2) Déduisons-en la solution qui satisfait aux conditions :

$$\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \;\; et \;\; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1}$$

$$\bullet f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{3} + B\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \Rightarrow A + B\sqrt{3} = 0$$

$$\bullet f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow A\cos\frac{2\pi}{3} + B\sin\frac{2\pi}{3} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}A + B\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \Rightarrow A - B\sqrt{3} = 1$$

$$\begin{cases} A + B\sqrt{3} = 0 \\ A - B\sqrt{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B\sqrt{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{D'où } \boxed{y = \mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2x}$$

3) Mettons cette solution sous la forme : $f(x) = a\cos(\omega x + \varphi)$

On pose $z = a + ib \Rightarrow z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $et \arg z = \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Alors $f(x) = |z|\cos(2x - \theta) \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

+++

EXERCICE 4 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 10y = 0$

2) En déduire la solution qui satisfait aux conditions :$f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 6 - \sqrt{3}$

3) Mettre cette solution sous la forme : $f(x) = re^{\alpha x}\sin(\omega x + \varphi)$

++++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++++

1) Résolvons l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 10y = 0$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 40 = -36 \Rightarrow$

$$\sqrt{\Delta} = 6i \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i \\ r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i \end{cases} y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

$$y = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

2) Déduisons-en la solution qui satisfait aux conditions :

$$\boldsymbol{f(0) = \sqrt{3}\ \ et\ \ f'(0) = 6 - \sqrt{3}}$$

$$\bullet f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow y = e^{-0}(A\cos 3(0) + B\sin 3(0)) = \sqrt{3} \Rightarrow A = \sqrt{3}$$

$$y' = -e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + e^{-x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) \Rightarrow$$

$$y'(0) = -e^{-0}(A\cos 0 + B\sin 0) + e^{-0}(-3A\sin 0 + 3B\cos 0) = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$-A + 3B = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} + 3B = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow B = 1$$

$$\text{D'où } y = f(x) = e^{-x}\left(\sqrt{3}\cos 6x + \sin 6x\right)$$

3) Mettons cette solution sous la forme : $f(x) = re^{\alpha x}\sin(\omega x + \varphi)$

On pose $z = a + ib \Rightarrow z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = 2$ $et \arg z = \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Alors $f(x) = e^{-x}|z|\cos(6x - \theta) \Rightarrow \boxed{\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\cos\left(6\mathrm{x} - \frac{\pi}{6}\right)}$

+++

EXERCICE 5 :

Soit$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + cos2\alpha)y'' - 2y'sin2\alpha + 2y = 0$$

++++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++++

Soit $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Résolvons l'équation différentielle :

$$(1 + cos2\alpha)y'' - 2y' sin2\alpha + 2y = 0$$

Soit l'équation caractéristique : $(1 + cos2\alpha)r^2 - 2rsin2\alpha + 2 = 0 \Longrightarrow$

$$\Delta = (-2\sin 2\alpha)^2 - 8(1 + \cos 2\alpha) = 4(\sin 2\alpha)^2 - 8(2\cos^2\alpha) =$$

$$\Delta = 4(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 - 16\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 16\cos^2\alpha =$$

$$\Delta = -16\cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) = -16\cos^4\alpha \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 4i\cos^2\alpha \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{2\sin 2\alpha - 4i\cos^2\alpha}{2(1 + cos2\alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha - 2i\cos^2\alpha}{1 + cos2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + cos2\alpha} - i\dfrac{2\cos^2\alpha}{1 + cos2\alpha} \\ r_2 = \dfrac{2\sin 2\alpha + 4i\cos^2\alpha}{2(1 + cos2\alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha + 2i\cos^2\alpha}{1 + cos2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + cos2\alpha} - i\dfrac{2\cos^2\alpha}{1 + cos2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} - i\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan\alpha - i \\ r_2 = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} - i\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan\alpha + i \end{cases} \quad y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \Longrightarrow$$

$$y = e^{x\tan\alpha}(A\cos x + B\sin x)$$

++

<u>EXERCICE 6 :</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 3cosx$

1) On pose $y = z + a$. Former l'équation à laquelle la fonction z. Déterminer a pour que cette équation se réduise à $z'' + 4z = 0$
2) Donner la solution générale de l'équation (E) puis la solution qui satisfait aux conditions suivantes : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 3cosx$

1- On pose $y = z + a$. Formons l'équation à laquelle la fonction z.

$$(z + a)'' + 4(z + a) = 3cosx \Longrightarrow z'' + 4z + a'' + 4a = 3\cos x$$

Déterminons a pour que cette équation se réduise à $z'' + 4z = 0$

On pose $a'' + 4a = 3\cos x$ et $a = A\cos x + B\sin x \Longrightarrow \begin{cases} a' = -A\sin x + B\cos x \\ a'' = -A\cos x - B\sin x \end{cases}$

$$-A\cos x - B\sin x + 4(A\cos x + B\sin x) = 3\cos x \Leftrightarrow$$

$$3\mathrm{A}\cos \mathrm{x} + 3\mathrm{B}\sin \mathrm{x} = 3\cos \mathrm{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mathrm{A} = 3 \\ 3\mathrm{B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 1 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases} \text{ alors } \boxed{\mathbf{a = \cos x}}$$

3) Donnons la solution générale de l'équation (E) puis la solution qui satisfait aux conditions suivantes : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

$$z'' + 4z = 0 \Leftrightarrow r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r = \pm 2i$$

$$z = A\cos 2x + B\sin 2x \Leftrightarrow y = z + a \Leftrightarrow \boldsymbol{y = A\cos 2x + B\sin 2x + \cos x}$$
$$y(0) = 0 \Leftrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 + \cos 0 = A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = -1$$
$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - \sin x \Leftrightarrow -2A\sin\pi - 2B\cos\pi - \sin\pi = 0$$
$$2B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\cos 2x + \cos x}$$

++

EXERCICE 7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$a)\ x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0$

$b)\ y'' + 2y' + 5y = 0$ et déterminer la solution f qui vérifie $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Résolution des équations différentielles :

$a)\ x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0 \ \Rightarrow 2x^2y' = x^2 + y^2 \ \Rightarrow y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\ (*)$,

posons $z = \frac{y}{x}$, donc $y = xz\ et\ y'z + xz'$ La relation (*) devient $z'x + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow$

$$z'x = \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{2} \Rightarrow z'x = \frac{(z-1)^2}{2} \Rightarrow \frac{2z'}{(z-1)^2} = \frac{1}{x}\ \ mais\ z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{on a: } \frac{2dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{z-1}\right) = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{z-1} = \ln|cx| \Leftrightarrow z = 1 - \frac{2}{\ln|cx|} \text{ et la solution y de l'équation est:}$$

$$y = zx = \left(1 - \frac{2}{\ln|cx|}\right)x \Rightarrow \boxed{y = x - \frac{2x}{\ln|cx|}} \text{ où c } \in \mathbb{N}^*$$

$b)\ y'' + 2y' + 5y = 0$;

l'équation caractéristique associée est: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$\Delta = -16 = 16i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16i \Rightarrow r_1 = -1 - 2i\ \ et\ r_2 = -1 + 2i$$

d'où la solution générale de l'équation est $\boxed{y = e^{-x}(Acos2x + Bsin2x)}$ A et B sont des constantes arbitraires

Déterminons la solution particulière :

$$f(0) = 1 \Rightarrow e^0(Acos0 + Bsin0) = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$
$$f'(0) = -1 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(Acos2x + Bsin2x) + e^{-x}(-2Asin2x + 2Bcos2x) \Rightarrow$$
$$f'(0) = -A + 2B = -1 \Rightarrow 2B = -1 + A \Rightarrow 2B = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

la fonction f ainsi trouvée est $\boxed{f(x) = e^{-x}cos2x}$

++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**++++++++++++++++++++++++++

Résoudre sur R les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 6y = 0$ b) $y'' - 4y' + 8y = 0$ c) $y'' + 4y' - 5y = 0$

d) $\frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0$ e) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$ f) $9y'' + 6y' + y = 0$

g) $y'' - 6y' + 2y = 0$ h) $4y'' + 4y' + y = 0$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants vérifier que la fonction f est la solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ (E): $2(y + y') = x^2$ et $K = R$

b) $f - x) = (2x - 1)e^x$ (E): $y' - y = 2e^x$ et $K = R$

c) $f(x) = (1 + x)^2$ (E): $\frac{y'}{2y} = \frac{1}{1 + x}$ et $K =]-1; +\infty[$

d) $f(x) = \sqrt{2x}$ (E): $yy' = 1$ et $K =]0; +\infty[$

e) $f(x) = x\cos x$ (E): $y - xy' = x^2 \sin x$ et $K = R$

f) $f(x) = x\ln x - x$ (E): $xy' - y = x$ et $K =]0; +\infty[$

g) $f(x) = e^x + e^{2x}$ (E): $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ et $K = R$

h) $f(x) = e^{-x} + x$ (E): $y''' + y'' = 0$ et $K = R$

i) $f(x) = \frac{2}{x}$ (E): $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ et $K =]0; +\infty[$

j) $f(x) = \tan x$ (E): $y' - y^2 = 1$ et $K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

k) $f(x) = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ (E): $y'' + x(y')^2 = 0$ et $K =]-1; 1[$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit l'équation différentielle (E) : $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

1) Vérifier que les fonctions $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$ et $h(x) = e^{2x}$ sont solutions sur R de (E)

2) Démontrer que pour tous nombre réels a, b et c la fonction $x \to ae^{-x} + be^x + ce^{2x}$ est solution sur R de (E)

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre sur R les équations différentielles $y' = e^x \sin x$ et $y' = e^x \cos x$

2) En déduire la résolution sur R de chacune des équations différentielles suivantes : $a)\ y'' = e^{x}sinx \quad et \quad b)\ y' = e^{x}cosx$

++++++++++++++++++++++++Exercice 5 :++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$

2) Déterminer la résolution particulière qui prend la valeur 1 pour $x = \pi$ et la valeur -1 pour $x = 2\pi$

++++++++++++++++++++++++Exercice 6 :++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$

2) En déduire la solution qui satisfait aux conditions :$f(0) = 1 \ \ et \ \ f(0) = 4$

3) Déterminer les réels $a\ et\ b$ tels que : $f(x) = \sqrt{2}\cos(ax + b)$

4) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$

++++++++++++++++++++++++Exercice 7 :++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $4y'' - 4y' + y = 0$

2) Déterminer la fonction f dont la courbe passe par A(0 ; 4) et la tangente au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur zéro

3) Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative. Unité graphique : 2cm

4) Calculer l'aire de la région du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0\ et\ x = 4$

++++++++++++++++++++++++Exercice 8 :++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 8y = 0$

2) Déterminer la fonction f dont la courbe passe par A(0 ; 4) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses

3) Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative. Unité graphique : 2cm sur (OI) et 3cm sur (OJ)

4) Calculer l'aire du plan limité par $x = -ln5, x = -ln2$, la courbe et (OI)

5) Calculer la valeur de cette aire à 10^{-2} près

++++++++++++++++++++++++Exercice 9 :++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$

2) Déterminer la fonction f dont la courbe passe par $O\ et\ A\left(\frac{\pi}{2};\ e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

3) Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[0, \pi]$. Unité graphique : 2cm sur (OI) et 4cm sur (OJ)

4) Calculer l'aire de la région du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0\ et\ x = \pi$

++++++++++++++++++++++++Exercice 10 :++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$

1) Vérifier que la fonction $g(x) = (x+1)e^{-2x}$ est solution sur R de l'équation (E)
2) Démontrer que qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation $y' + 2y = 0$
3) En déduire les solutions sur R de (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 11:+++++++++++++++++++++++++

Soit la fonction $f(x) = (x+1)e^{-2x}$

1) Déterminer les nombres réels $a \ et \ b$ pour que f soit solution sur R de l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$
2) Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E)
3) Déterminer parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 12:+++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$

2) Déterminer la solution f qui vérifie : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \ \ et \ f'(\pi) = 8$

3) Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = \sqrt{2}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 13 :+++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$

1) Vérifier que la fonction $y = e^x$ est une solution particulière de (E)
2) On pose : $y = ze^x$

Former l'équation du second ordre à laquelle satisfait la fonction z(x). Donner la solution générale de cette équation et en déduire celle de (E)

+++

APPROFONDISSEMENT

++++++++++++++++++++++++Exercice 14:+++++++++++++++++++++++++

On considère le système suivant, d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$$

Dans le quel y et z désignent deux fonctions inconnues de x

1) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait la fonction $y(x)$
2) Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système. Préciser celle des solutions pour laquelle on a$y = 1 \ et \ z = -1 \ pour \ x = 0$

++++++++++++++++++++++++Exercice 15:+++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = 2x + 1 \qquad (E)$

1) On pose $y = z + ax + b, z$ étant une nouvelle fonction de x. Former l'équation différentielle à laquelle satisfait z.

Calculer $a\ et\ b$ pour que cette équation se réduise à $(E^{'}) z^{'} - 2z = 0$

2) Intégrer l'équation (E') et en déduire la solution générale de (E). Préciser celle des solutions de (E) pour laquelle on a $y(0) = 0$

++++++++++++++++++++++++Exercice 16 :++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle : $2y^{'} + y = 5e^{2x}$ $\quad (E)$

1) Faire dans cette équation, le changement de fonction définie par : $y = z + e^{x}$

2) Intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue et en déduire la solution générale de l'équation (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 17:++++++++++++++++++++++++++

Déterminer trois fonctions $x, y\ et\ z$ d'une même variable t, sachant qu'elle satisfait le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x^{'} = y + z - 2x \\ y^{'} = z + x - 2y \\ z^{'} = x + y - 2z \end{cases} \quad (S)$$ et que, pour $t = 0, on a\ x = 0, y = -1\ \ et\ z = 4$

++++++++++++++++++++++++Exercice 18:++++++++++++++++++++++++++

On considère l'équation différentielle : $y^{'''} - 6y^{''} + 12y^{'} - 8y = 0 \quad (E)$

1) Vérifier que la fonction $y = e^{2x}$est solution de (E)
2) Soit la fonction f trois fois dérivable sur R et g la fonction $g(x) = f(x)e^{-2x}$
   a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si : $g^{'''} = 0$
   b) En déduire sur R les solutions de (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 20:++++++++++++++++++++++++++

<u>PARTIE A :</u> 1) On considère l'équation différentielle : $y^{''} + 2y^{'} + y = 0$ $\quad$ (E)

Déterminer les solutions générales de (E)

2) Soit (E') l'équation différentielle $y^{''} + 2y^{'} + y = 2e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution de (E')

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E') si et seulement si $g = f - h$ est une solution de (E)

c) Déterminer toutes les solutions de (E)

d) Déterminer la solution de (E') qui vérifie $f(0) = 4\ \ et\ \ f^{'}(0) = 0$

<u>PARTIE B :</u> 1) Etudier les variations et tracer la courbe de la fonction

$$f(x) = (x + 2)^2e^{-x}$$

2) En remarquant que f est une solution de (E'), déterminer une primitive F de f sur R en calculant $\int_0^x \left(f^{''}(t) + 2f^{'}(t) + f(t)\right) dt$

3) On pose $I_n = \int_0^n f(t)dt$

a) Exprimer I_n en fonction de n et interpréter graphiquement le résultat

b) Etudier la convergence de la suite I_n puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :$x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$

++++++++++++++++++++++++Exercice 21:++++++++++++++++++++++++++

1) Résoudre l'équation différentielle : $16y'' + y = 0$

2) En déduire la solution qui satisfait aux conditions :$f(0) = 1$ et $f(2\pi) = -\sqrt{3}$

3) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

++++++++++++++++++++++++Exercice 22:++++++++++++++++++++++++++

1)Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + \pi^2 y = 0$

2) On considère par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point $P\left(1;\ -\sqrt{2}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a) En utilisant les données ci-dessus, préciser f(1) et f'(1)

b) Déterminer f

c) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$

Montrer que f est périodique, de période 6.

++++++++++++++++++++++++Exercice 23:++++++++++++++++++++++++++

A-) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$

1) a) Quelles sont les solutions de (E)

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{-3x}$?

On dit que (C) et (C') sont tangentes

2) Représenter dans un repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives

3) λ étant un nombre réel strictement positif

Soit h_λ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$

a) Montrer que h_λ est solution de (E)

b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Apres avoir calculé, en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'') d'équations $y = e^{3x}$, montrer que ces courbes sont tangentes en ce point

B-) Soit (E') l'équation différentielle: $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

1) Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E')

2) On pose $\mathrm{f(x) = g(x)} - \frac{1}{2}\mathrm{x^2 - x}$

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)

En déduire les fonctions f solutions de (E')

3) Déterminer les solutions de (E') dont la courbe représentative passe par le point $A(0;2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1

++++++++++++++++++++++++**<u>Exercice 24:</u>**+++++++++++++++++++++++++++

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$a)\ x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0$

$b)\ y'' + 2y' + 5y = 0$ et déterminer la solution f qui vérifie

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = -1$$

BONNE CHANCE A TOUS

CONIQUES

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

Définition géométrique : Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un nombre réel strictement positif

On appelle conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e, l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\frac{MF}{MH} = e$, ou H est le projeté orthogonal de M sur (D)

√ $Si\ e = 1$ alors (Γ) est une parabole

√ $Si\ 0 < e < 1$ alors (Γ) est une ellipse

√ $Si\ e > 1$ alors (Γ) est une hyperbole

● Autrement dit, on appelle conique tout ensemble de points M(x ; y) dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ dont les coordonnées vérifient la relation de la forme :

$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ où A, B, C, D et E sont des réels tels que $|A| + |B| \neq 0$

CLASSIFICATION DES CONIQUES :

1er Cas : Si $A.B = 0 \quad avec\ \ B = 0\ \ et\ \ A \neq 0$ dans ce cas on a une **PARABOLE** d'équation réduite $X^2 - 2pY = 0 \Longrightarrow X^2 + 2pY\ \ avec\ \ p = -\frac{D}{A}$; $X = x + \frac{C}{A}\ \ et\ \ Y = y - \frac{C^2 - EA}{2DA}$

\# **Sommet :** $S\left(-\frac{C}{A}; \frac{C^2-EA}{2DA}\right)$

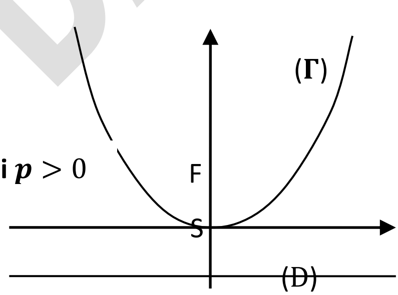
\# **Paramètre :** $|p|$

\# **Axe focal :** La droite de repère $(S;\vec{\jmath})$

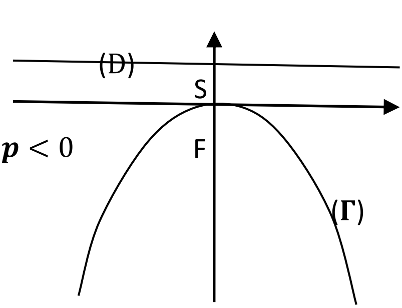
\# **Foyer :** $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$

\#**Directrice :** (D): $y = -\frac{p}{2}$

Si $\boldsymbol{p} > 0$



Si $\boldsymbol{p} < 0$



●Si $A.B = 0 \;\; avec \;\; B \neq 0 \;\; et \;\; A = 0$ dans ce cas on a une **PARABOLE** d'équation réduite $X^2 - 2pY = 0 \Longrightarrow X^2 = 2pY \;\; avec \;\; p = -\frac{C}{B}$; $Y = y + \frac{D}{B} \;\; et \;\; X = x - \frac{D^2 - BE}{2CB}$

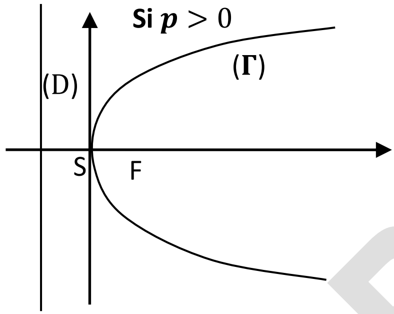
\# **Sommet :** $S\left(\frac{D^2-BE}{2CB} \; ; \; -\frac{D}{B}\right)$

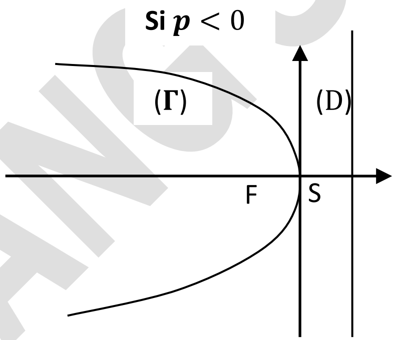
\# **Paramètre :** $|p|$

\# **Axe focal :** La droite de repère $(S; \vec{I})$

\# **Foyer :** $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

\# **Directrice :** (D): $y = -\frac{p}{2}$





●**<u>Equation de la tangente en un point de la parabole :</u>**

Soit (P) la parabole d'équation $x^2 = 2py$. La tangente en un point $M(x_0;\; y_0)$ a pour équation : $xx_0 = a(y + y_0)$

Lors que (P) a pour équation $y^2 = 2px$, la tangente en un point $M(x_0;\; y_0)$ a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$

<u>2ème Cas</u> : $Si\; A.B \neq 0$ alors on a : $A\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{B}\right)^2 = \frac{C^2B + D^2A - EAB}{AB}$

On pose $X = x + \frac{C}{A}$; $Y = y + \frac{D}{B} \quad et \quad K = \frac{C^2B + D^2A - EAB}{AB}$

Soit $S\left(-\frac{C}{A}; -\frac{D}{B}\right) \; et \; M(x;y)$ un point du repère $(S;\; \vec{\imath};\; \vec{\jmath})$. L'équation de $(\boldsymbol{\Gamma})$ de ce repère est : $AX^2 + BY^2 = K$

●Si $A > 0 \;\; et \;\; B > 0$, alors on a :

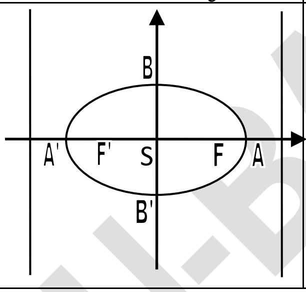
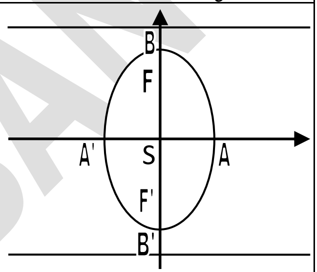
$$\# \; K = 0; \;\; \text{alors} \;\; (\Gamma) \text{ est le point } O(0;0)$$

$$\# \; K < 0; \;\; \text{alors} \;\; (\Gamma) \text{ est un ensemble vide}$$

$$\# \; K > 0; \;\; \text{alors} \;\; (\Gamma) \text{ est une ellipse d'équation } AX^2 + BY^2 = K \Longrightarrow$$

$$\frac{AX^2}{K} + \frac{BY^2}{K} = 1 \Longrightarrow \frac{X^2}{\frac{K}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{K}{B}} = 1 \Longrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \;\; avec \;\; a = \sqrt{\frac{K}{A}} \;\; et \;\; b = \sqrt{\frac{K}{B}}$$

<u>Eléments caractéristiques d'une ellipse:</u>

	$a > b$	$b > a$
Equations	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	
Centre	$S\left(-\frac{C}{A};-\frac{D}{B}\right)$	
Demi-distance focale	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
Excentricité	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
Sommets	$A(a;0)-A'(-a;0)-B(0;b)-B'(0;\ -b)$	
Axe focal	Droite de repère $(S;\vec{\imath})$	Droite de repère $(S;\vec{\jmath})$
Foyers	$F(c;0)$ et $F'(-c;0)$	$F(0;c)$ et $F'(0;-c)$
Directrices	$(D): x=\frac{a^2}{c}$; $(D'): x=-\frac{a^2}{c}$	$(D): y=\frac{b^2}{c}$; $(D'): y=-\frac{b^2}{c}$
Courbes		

●Equation de la tangente en un point d'une ellipse :

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$. La tangente en un point $M(x_0;\ y_0)$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

● Représentation paramétriques d'une ellipse :

Une ellipse d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\cos t+\alpha \\ y = b\sin t+\beta \end{cases}$$

●Définition bifocale de l'ellipse :

Soit (E) une ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \ avec\ \ (a>b>0)$ de foyers F et F'

(E) est l'ensemble des points M du plan tels que $MF'+MF=2a\ \ avec\ \ FF'=2c$

<u>**3ème Cas**</u> : $Si\ A.B<0$ alors on a : $A\left(x+\frac{C}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{D}{B}\right)^2=\frac{C^2B+D^2A-EAB}{AB}$

On pose $X=x+\frac{C}{A}$; $Y=y+\frac{D}{B}$ et $K=\frac{C^2B+D^2A-EAB}{AB}$

Soit $S\left(-\frac{C}{A};-\frac{D}{B}\right)$ et $M(x;y)$ un point du repère $(S;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. L'équation de $(\boldsymbol{\Gamma})$ de ce repère est : $AX^2+BY^2=K$

●Si $A > 0$ et $B < 0$, alors on a :

$K = 0$; alors (Γ) est la réunion de deux droites d'équations respectives

$$y = \sqrt{\frac{A}{|B|}}x \ et \ y = -\sqrt{\frac{A}{|B|}}x$$

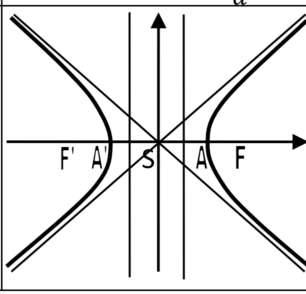
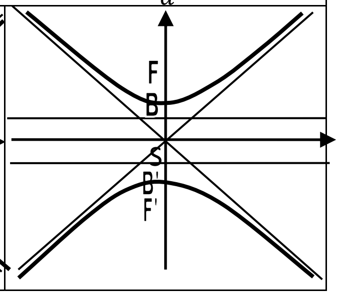
$K < 0$; alors (Γ) est une hyperbole d'équation $AX^2 - |B|Y^2 = -K \Longrightarrow$

$$-\frac{AX^2}{|K|} + \frac{BY^2}{|K|} = 1 \Longrightarrow -\frac{X^2}{\frac{|K|}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{|K|}{B}} = 1 \Longrightarrow -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ avec \ \ a = \sqrt{\frac{K}{A}} \ \ et \ \ b = \sqrt{\frac{K}{|B|}}$$

$K > 0$; alors (Γ) est une hyperbole d'équation $AX^2 - |B|Y^2 = K \Longrightarrow$

$$\frac{AX^2}{K} - \frac{|B|Y^2}{K} = 1 \Longrightarrow \frac{X^2}{\frac{K}{A}} - \frac{Y^2}{\frac{K}{|B|}} = 1 \Longrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ avec \ \ a = \sqrt{\left|\frac{K}{A}\right|} \ \ et \ \ b = \sqrt{\left|\frac{K}{B}\right|}$$

Eléments caractéristiques d'une hyperbole :

Equations	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
Centre	$S\left(-\frac{C}{A}; -\frac{D}{B}\right)$	
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A(a; 0) - A'(-a; 0)$	$B(0; b) - B'(0; -b)$
Axe focal	Droite de repère $(S; \vec{\imath})$	Droite de repère $(S; \vec{\jmath})$
Foyers	$F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$	$F(0; c)$ et $F'(0; -c)$
Directrices	$(D): x = \frac{a^2}{c}$; $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$	$(D): y = \frac{b^2}{c}$; $(D'): y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	$(\Delta): y = \frac{b}{a}x$; $(\Delta'): y = -\frac{b}{a}x$	
Courbes		

●**Equation de la tangente en un point d'une hyperbole :**

Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. La tangente en un point $M(x_0;\ y_0)$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Si (H) a pour équation$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ alors la tangente en un point $M(x_0;\ y_0)$ a pour équation : $-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

● **Représentation paramétriques d'une hyperbole :**

Une hyperbole d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ a pour représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t}+\alpha \\ y=b\tan t+\beta \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=achx+\alpha \\ y=bshx+\beta \end{cases}$$

●**Définition bifocale de l'hyperbole :**

Soit (E) une ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1\ \ avec\ \ (a>0;\ b>0)$ de foyers F et F'

(H) est l'ensemble des points M du plan tels que

$$|MF'+MF|=2a\ \ avec\ \ FF'=2c$$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Dans chacun des cas suivants, démontrer que (E) est une équation d'une conique dont on précisera la nature, le centre, l'axe focal et les sommets situés sur cet axe focal

$$a)\ (E): x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0 \quad b)\ (E):\ 3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$
$$c)\ \ (E):\ 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0 \quad d)\ \ (E): -x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0$$
$$e)\ (E):\ x^2 + 4x + 4y = 0 \quad f)\ (E):\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, démontrons que (E) est une équation d'une conique dont on précisera la nature, le centre, l'axe focal et les sommets situés sur cet axe focal

$$a)\ (E): x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2y^2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 2y^2 = 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

●**<u>La nature :</u>** (E) est une ellipse

●**<u>Eléments caractéristiques :</u>** Comme $a > b$

\# **<u>Le centre :</u>** $\Omega(1;0)$

\# **L'axe focal** : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{i})$

\# **Les sommets** : $A(2;0)\ et\ A'(-2;0)$

Dans le repère (O ; I; J) ; on a : $A(3;0)\ \ et\ \ A'(-1;0)$

$$b)\ (E):\ 3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + y^2 - 4y = -4 \Rightarrow$$
$$3((x+1)^2 - 1) + (y-2)^2 - 4 = -4 \Rightarrow 3(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3 \Rightarrow$$
$$\frac{3(x+1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

●**<u>La nature :</u>** (E) est une ellipse

●**<u>Eléments caractéristiques :</u>** Comme $a < b$

\# **Le centre** : $\Omega(-1;2)$

 # L'axe focal : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{j})$

\# **Les sommets** : $B\left(0.\sqrt{3}\right)\ et\ B'\left(0.-\sqrt{3}\right)$

Dans le repère (O ; I; J) ; on a : $B\left(-1;2+\sqrt{3}\right)\ \ et\ \ B'\left(-1;2-\sqrt{3}\right)$

$$c)\ \ (E):\ 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 - (y^2 + 4y) = 12 \Rightarrow$$

$$2x^2 - (y+2)^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1$$

●**La nature :** (E) est une hyperbole

●**Eléments caractéristiques :**

Le centre : $\Omega(0; -2)$

L'axe focal : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{i})$

Les sommets : $A\left(2\sqrt{2}; 0\right)\ et\ A'\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$

Dans le repère (O ; I; J) ; on a : $A\left(2\sqrt{2}; -2\right)\ et\ A'\left(-2\sqrt{2}; -2\right)$

$d)\ (E): -x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x + y^2 + 2y = 16 \Rightarrow$

$$-(x^2 - 6x) + (y+1)^2 - 1 = 16 \Rightarrow -(x-3)^2 + 9 + (y+1)^2 = 17 \Rightarrow$$

$$-(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8 \Rightarrow -\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{(x-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

●**La nature :** (E) est une hyperbole

●**Eléments caractéristiques :**

Le centre : $\Omega(-3; -1)$

L'axe focal : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{j})$

Les sommets : $B\left(0;\ 2\sqrt{2}\right)\ et\ B'\left(0;\ -2\sqrt{2}\right)$

Dans le repère (O ; I; J) ; on a : $B\left(-3; -1 +\ 2\sqrt{2}\right)\ et\ B'\left(-3; -1\ - 2\sqrt{2}\right)$

$e)\ (E):\ x^2 + 4x + 4y = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 = -4y \Rightarrow (x+2)^2 = -4(y-1)$

●**La nature :** (E) est une parabole

●**Eléments caractéristiques :**

Le centre : $\Omega(-2;\ 1)$ # **L'axe focal** : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{j})$

$f)\ (E):\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \Rightarrow 2y = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4 = 2y \Rightarrow$

$$(x-1)^2 = 2y - 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 2\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

●**La nature :** (E) est une parabole

●**Eléments caractéristiques :**

Le centre : $\Omega\left(1; \frac{3}{2}\right)$ # **L'axe focal** : La droite de repère $(\Omega;\ \vec{j})$

++

EXERCICE 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique

$$a)\begin{cases}x=\frac{1}{2}cos\theta-1\\y=\frac{3}{4}sin\theta+2\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x=2cos\theta-3\\y=3sin\theta+1\end{cases}$$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminons une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique

$$a)\begin{cases}x=\frac{1}{2}cos\theta-1\\y=\frac{3}{4}sin\theta+2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+1=\frac{1}{2}cos\theta\\y-2=\frac{3}{4}sin\theta\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x+1)^2=\frac{1}{4}cos^2\theta\\(y-2)^2=\frac{9}{16}sin^2\theta\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}}=cos^2\theta\\\frac{(y-2)^2}{\frac{9}{16}}=sin^2\theta\end{cases}\Longrightarrow\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{9}{16}}=sin^2\theta+cos^2\theta\Longrightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{2}^2}+\frac{(y-2)^2}{\frac{3}{4}^2}=1$$

$$b)\begin{cases}x=2cos\theta-3\\y=3sin\theta+1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+3=2cos\theta\\y-1=3sin\theta\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x+3)^2=(2cos\theta)^2\\(y-1)^2=(3sin\theta)^2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{(x+3)^2}{4}=(cos\theta)^2\\\frac{(y-1)^2}{9}=(sin\theta)^2\end{cases}\Longrightarrow\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=(sin\theta)^2+(cos\theta)^2\Longrightarrow$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

++

EXERCICE 3 :

1) Soit A(2 ; -1) et A'(-2 ; 3). Déterminer une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=1$

2) Déterminer une équation de l'image de (C) :

a) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\imath})$ et de rapport $\frac{2}{3}$

b) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\jmath})$ et de rapport 2

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

1) **Soit A(2 ; -1) et A'(-2 ; 3). Déterminons une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que:** $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=1}$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=1\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A'M}=1\Rightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}=1\Rightarrow$$

$$(x-2)(x+2)+(y+1)(y-3)=1\Rightarrow x^2+(y-1)^2=9$$

D'où (C) est un cercle de centre $\Omega(0\ ;1)$ et de rayon R=3

2) Déterminons une équation de l'image de (C) :

a) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\imath})$ et de rapport $\frac{2}{3}$

Soit M(x ; y) un point du plan et M'(x' ; y') son image, on a : $\overrightarrow{HM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$ où H est le projété orthogonal de M sur $(O,\vec{\imath})$ $on\ a$:

$\begin{cases}x'=x\\y'=\frac{2}{3}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=\frac{3}{2}y'\end{cases}$ en remplaçant x et y par leurs expressions dans (C) on a :

$$x'^2+\left(\frac{3}{2}y'-1\right)^2=9\Rightarrow\frac{x'^2}{9}+\frac{\left(y'-\frac{2}{3}\right)^2}{4}=1$$

D'où (C') est une ellipse de centre $\Omega'\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$

b) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\jmath})$ et de rapport 2

Soit M(x ; y) un point du plan et M'(x' ; y') son image, on a : $\overrightarrow{HM'}=2\overrightarrow{HM}$ où H est le projété orthogonal de M sur $(O,\vec{\jmath})$ $on\ a$: $\begin{cases}x'=2x\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}x'\\y=y'\end{cases}$ en remplaçant x et y par leurs expressions dans (C) on a :

$$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2+(y'-1)^2=9\Rightarrow\frac{x'^2}{36}+\frac{(y'-1)^2}{9}=1$$

D'où (C') est une ellipse de centre $\Omega'(0\ ;\ 1)$

++

EXERCICE 4 :

Soit $Z=13|z|^2-5z^2+8(z+\overline{z})-64\ \ avec\ z\in\mathbb{C},|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. Soit M(x ; y) l'image de z dans le plan complexe

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur
3) En déduire l'ensemble des points M(x ; y) tels que :$\arg Z=-\frac{\pi}{2}$
4) Résoudre l'équation Z=0 et préciser les images de ses solutions

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++

Soit $Z=13|z|^2-5z^2+8(z+\overline{z})-64\ \ avec\ z\in\mathbb{C},|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. Soit M(x ; y) l'image de z dans le plan complexe

Ecrivons d'abord Z sous la forme algébrique :

On pose $z=x+iy\ \ on\ a\ Z=13(x^2+y^2)-5(x^2+2ixy-y^2)+8(2x)-64$

$$Z = 8x^2 + 16x + 18y^2 - 64 - 10ixy$$

1) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel

On pose $Im(Z) = 0 \Longrightarrow -10xy = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

D'où l'ensemble des points M du plan est la réunion des droites d'équations respectives $x = 0 \ \ et \ \ y = 0$

2) Déterminons et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur

On pose $Re(Z) = 0 \Longrightarrow 8x^2 + 16x + 18y^2 - 64 = 0 \Longrightarrow$

$$8(x+1)^2 - 8 + 18y^2 = 64 \Longrightarrow 8(x+1)^2 + 18y^2 = 72 \Longrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1 \ avec \ \begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points M du plan est une ellipse (E) d'éléments caractéristiques :

●**<u>Le centre</u>** :$\Omega(-1 \ ; \ 0)$; comme $a > b$ alors on a :

●**<u>La demi-distance focale</u>** : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

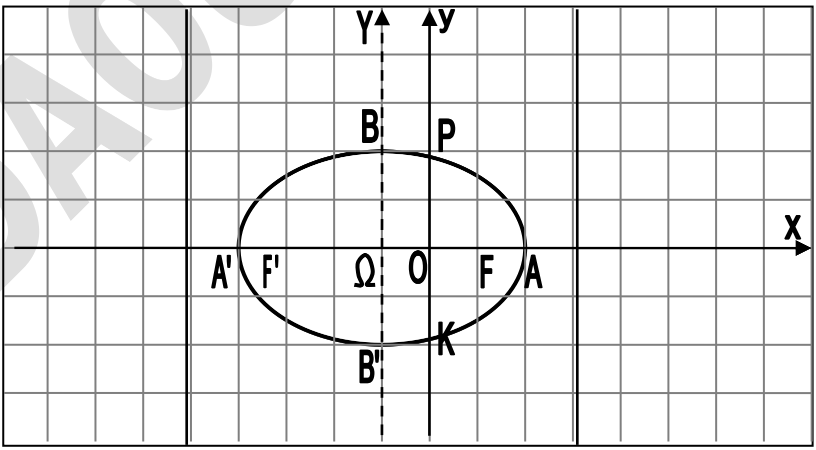
●**<u>Les sommets</u>** : $A(3;0); A^{'}(-3;0) \ ; B(0;2) \ et \ \ B^{'}(0; \ -2)$

●**<u>Axe focal</u>** : La droite de repère $(\Omega; \ \vec{\imath})$

●**<u>Les foyers :</u>** $F\left(\sqrt{5};0\right) \ \ et \ \ F^{'}\left(-\sqrt{5};0\right)$

●**<u>Les directrices :</u>** $(D): x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \quad et \ \ (D'): x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}} = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$

Dans le repère (O ; I ; J) ; on a : $\begin{cases} A(2;0); A^{'}(-4;0) \ ; B(-1;2) \ et \ \ B^{'}(-1; \ -2) \\ F\left(-1+\sqrt{5};0\right) \ \ et \ \ F^{'}\left(-1-\sqrt{5};0\right) \end{cases}$



3) Déduisons-en l'ensemble des points M(x ; y) tels que :$\arg Z = -\frac{\pi}{2}$

On pose

$$\begin{cases} 8x^2+16x+18y^2-64=0 \text{ alors M appartient à } (E) \\ -10xy<0 \implies xy>0 \implies (x>0\ et\ y>0)\ où\ (x<0\ et\ y<0) \end{cases}$$

L'ensemble des points M est donc formé par les arcs $\widehat{AP}$ et $A'B'K$ de l'ellipse (E) privés des points A ; A' ; P et K qui sont les images des solutions de l'équation Z=0

4) Résolvons l'équation Z=0 et précisons les images de ses solutions

$$Z=8x^2+16x+18y^2-64-10ixy=0 \implies$$

$$\begin{cases} 8x^2+16x+18y^2-64=0 \\ -10xy=0 \implies xy=0 \text{ avec } (x=0\ \ ou\ \ y=0) \end{cases}$$

●Pour $x=0\ \ on\ a: 18y^2-64=0 \implies y^2=\frac{64}{18}=\frac{32}{9} \implies y=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$

●Pour $y=0\ \ on\ a: 8x^2+16x-64=0 \implies x^2+2x-8=0 \implies \Delta=4-4(-8)=36$

$$\text{alors } x_1=\frac{-2-6}{2}=-4 \text{ et } x_1=\frac{-2+6}{2}=2$$

D'où $z_0=\frac{4\sqrt{2}}{3}i\ :\ z_1=-\frac{4\sqrt{2}}{3}i\ ;\ z_2=2\ \ et\ \ z_3=-4$ avec leurs images respectives P ; K ; A et A' (voir le schéma)

++

EXERCICE 5 :

Soit (Γ) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x ;y) vérifient :

$$\begin{cases} x=2e^t+e^{-t} \\ y=2e^t-e^{-t} \end{cases} (t\in R)$$

Démontrer que (Γ) est une partie d'hyperbole que l'on précisera. Tracer (Γ)

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Soit (Γ) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x; y) vérifient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=2e^t+e^{-t}} \\ \boldsymbol{y=2e^t-e^{-t}} \end{cases} (\boldsymbol{t\in R})$$

Démontrons que (Γ) est une partie d'hyperbole que l'on précisera puis Traçons $(\boldsymbol{\Gamma})$

$$\begin{cases} x^2=(2e^t+e^{-t})^2=4e^{2t}+4e^{t-t}+e^{-2t}=4e^{2t}+e^{-2t}+4 \\ y^2=(2e^t-e^{-t})^2=4e^{2t}-4e^{t-t}+e^{-2t}=4e^{2t}+e^{-2t}-4 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x^2=4e^{2t}+e^{-2t}+4 \\ -y^2=-4e^{2t}-e^{-2t}+4 \end{cases} \implies x^2-y^2=8 \implies \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1\ \ cqfd$$

Eléments caractéristiques :

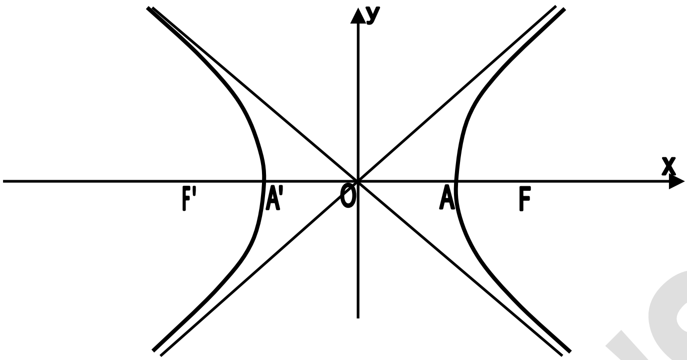
●Le centre : O(0 ; 0)

●La demi-distance focale : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$

●Axe focal : La droite de repère $(O;\ \vec{\imath})$ ●Les foyers : $F(4;0)\ et\ F'(-4;0)$

●Les sommets : $A(2\sqrt{2};0)\ \ et\ \ A'(-2\sqrt{2};0)$

●Les asymptotes : $(\Delta): y=\frac{b}{a}x=x\ \ et\ \ (\Delta'): y=-\frac{b}{a}x=-x$



++

EXERCICE 6 :

Soit α un nombre réel tel que : $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre dans C l'équation (E): $z^2cos^2\alpha - zsin2\alpha + 2 - cos^2\alpha = 0$
2) Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive
   a) Démontrer que M appartient à une hyperbole (H) dont on donnera une équation
   b) Tracer (H) et déterminer la partie de (H) décrite par M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

+++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Soit α un nombre réel tel que : $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1) Résolvons dans C l'équation (E): $z^2cos^2\alpha - zsin2\alpha + 2 - cos^2\alpha = 0$

$$\Delta = (-\sin 2\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha\,(2-\cos^2\alpha) = \sin^2 2\alpha - 8\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha$$

$$\Delta = (2\cos\alpha\sin\alpha)^2 - 8\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha = 4\cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 8\cos^2\alpha$$

$$\Delta = 4\cos^2\alpha - 8\cos^2\alpha = -4\cos^2\alpha \implies \sqrt{\Delta} = 2i\cos\alpha$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sin 2\alpha - 2i\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha - 2i}{2\cos\alpha} = \tan\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha}i \\ z_2 = \dfrac{\sin 2\alpha + 2i\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha + 2i}{2\cos\alpha} = \tan\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}i \end{cases}$$

$$S = \left\{\tan\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}i;\ \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}i\right\}$$

2) **Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive**
   a) **Démontrons que M appartient à une hyperbole (H) dont on donnera une équation**

$$M\left(\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}i\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\tan\alpha\\ y=\dfrac{1}{\cos\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ y^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2=-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ y^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow$$

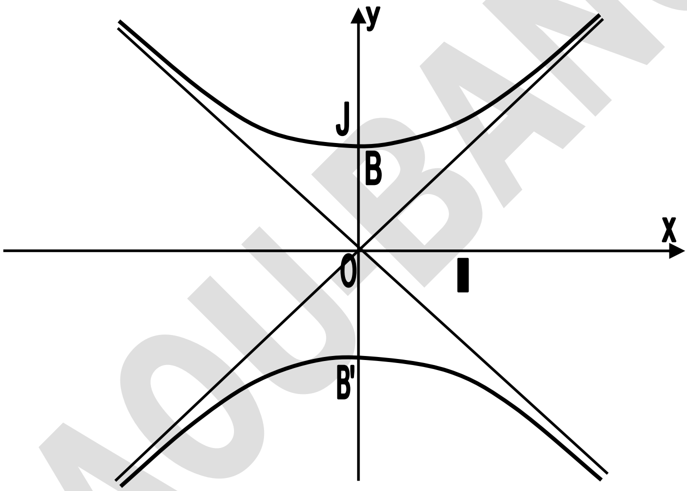
$$-x^2+y^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1\Leftrightarrow$$
$$-x^2+y^2=1$$

b) Traçons (H) et déterminons la partie de (H) décrite par M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

(H) est une hyperbole équilatérale de sommets B(0 ; 1) et B'(0 ;-1)

Lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; y décrit $[1;+\infty[$ et M décrit la branche d'hyperbole située au dessus de l'axe des abscisses

(H) a pour asymptotes (Δ): $y=-x$ $\;et\;$ (Δ'): $y=x$



++

EXERCICES PROPOSES

APPRENTISSAGE

++++++++++++++++++++++++Exercice 1 :+++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e

$a)\ F(1;0)(D): x = 5\ \ et\ e = \frac{1}{3}$ $b)\ F(1,-2)(D): y = 1\ \ et\ e = \frac{1}{2}$

$c)\ F(2;1)(D): x = -1\ \ et\ \ e = 2$ $d)\ F(4,-1)\ \ (D): y = 0\ \ et\ \ e = 3$

$e)\ F(2;0)\ \ (D): x = 1\ \ et\ e = 1$ $f)\ F(-1;2)\ \ (D): y = 3\ \ et\ e = 1$

++++++++++++++++++++++++Exercice 2 :+++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique

$$a)\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}cos\theta - 1 \\ y = \frac{3}{4}sin\theta + 2 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x = 2cos\theta - 3 \\ y = 3sin\theta + 1 \end{cases}$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 3 :+++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'ellipse (E)

$a)\ (E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ $b)\ (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ $c)\ (E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

++++++++++++++++++++++++Exercice 4 :+++++++++++++++++++++++++++

Déterminer le centre et les sommets, puis tracer les hyperboles d'équations :

$$a)\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\ \ ;\ \ b)\ (x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4\ \ ;$$

$$c)\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1\ \ ;\ \ d)\ -\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

++++++++++++++++++++++++Exercice 5 :+++++++++++++++++++++++++++

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Déterminer une équation de l'hyperbole ayant pour sommets les foyers de (E) et pour foyers les sommets de (E) situés sur l'axe focal

++++++++++++++++++++++++Exercice 6 :+++++++++++++++++++++++++++

Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

Déterminer une équation de l'ellipse ayant pour foyers les sommets de (H) et pour excentricité $\frac{1}{\sqrt{3}}$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 7 :**++++++++++++++++++++++++++

Soit (P) la parabole d'équation : $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de (P) et tracer (P)
2) Déterminer une équation de l'image de (P) par chacune des transformations suivantes :
   a) La symétrie orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$
   b) La symétrie de centre O
   c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

++

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

++++++++++++++++++++++++**Exercice 8 :**+++++++++++++++++++++++++++

Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que : $y^4 - 9 = 9x^4 - 18x^2$

Démontrer que (Γ) est la réunion de deux coniques dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques. Tracer (Γ)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 9 :**++++++++++++++++++++++++++

Dans chacun des cas suivants, déterminer et tracer l'ensemble (Γ) des points M tels que : $a)$ $4x^2 + y|y| = 9$ $b)$ $25x|x| + 16y^2 = 64$

$c)$ $4x|x| + 9y|y| = 144$ $d)$ $9y^2 = |4x^2 - 16x|$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 10:**++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que le système $\begin{cases} x = \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ y = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$ $(\theta \in R)$ est une représentation paramétrique d'une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques

++++++++++++++++++++++++**Exercice 11:**++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que le système $\begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in R)$ est une représentation paramétrique d'une partie de parabole que l'on précisera

++++++++++++++++++++++++**Exercice 12:**++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que le système $\begin{cases} x = \frac{1}{cos2\theta} - 1 \\ y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} tg2\theta \end{cases}$ $\left(\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right)$ est une représentation paramétrique d'une partie d'hyperbole que précisera

++++++++++++++++++++++++**Exercice 13:**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la transformation du plan qui à tout M(x ; y) associe M'(x' ; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f
2) Soit (E) l'ellipse d'équation : $4x^2 + y^2 = 4$

Déterminer et équation de (E'), image de (E) par f

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (E')
   Tracer (E) et (E') sur un même graphique

++++++++++++++++++++++++Exercice 14:++++++++++++++++++++++++++

On désigne par z l'affixe d'un point M. Soit le nombre complexe

$$z' = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\overline{z} - 1$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$a)$ $|z'| = 1$; b) la partie réelle de z'^2 est égale à 1 ;

c) la partie imaginaire de z'^2 est égale à 1

++++++++++++++++++++++++Exercice 15:++++++++++++++++++++++++++

1) Soit (E) l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$10z\overline{z} + 3(z^2 + \overline{z}^2) = 4$$

Démontrer que (E) est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques

2) Déterminer une équation de (E'), image de (E) par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$

3) Déterminer la nature de (E'), ses axes et ses sommets. Tracer (E) et (E') sur un même graphique

++++++++++++++++++++++++Exercice 16:++++++++++++++++++++++++++

Soit M le point d'affixe Z

1) a) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overline{z} + z + 4 = 0$ est une droite (D)

b) Démontrer que pour tout point M, la distance de M à (D) est : $\frac{1}{2}(\overline{z} + z + 4)$

2) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\left|\frac{z-1-i}{\overline{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité

++++++++++++++++++++++++Exercice 17:++++++++++++++++++++++++++

A tout point M d'affixe z non nulle du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel
2) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2
   a) Vérifier que : $z = 2e^{i\theta},\ (\theta \in R)$
   b) Démontrer que M' décrit une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques

++++++++++++++++++++++++**Exercice 18:**++++++++++++++++++++++++++

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m, la nature de l'ensemble (Γ_m)des points M(x, y) tels que :

$$2mx^2 + 8mx - (m-1)y^2 + 7m - 2 = 0$$

2) Déterminer m pour que (Γ_m) soit:

a) un cercle b) une hyperbole équilatère

3) Tracer (Γ_m) pour $m = \frac{1}{2}$ $et\ m = 2$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 19:**++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x\sqrt{3}}$ et (Γ) sa courbe représentative

1) Etudier f et tracer sa courbe (Γ)
2) On pose : $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$
   a) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   b) En déduire que (Γ) est une hyperbole et déterminer les coordonnées de ses foyers dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 20:**++++++++++++++++++++++++++

Le repère est orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient l'équation : $x^2 + 11y^2 - 10xy\sqrt{3} + 16 = 0$

1) Soit θ un nombre réel et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le repère orthonormé image du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par la rotation de centre o et d'angle θ. On désigne par (X, Y) les coordonnées de M dans ce repère

Déterminer θ pour que l'équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit de la forme : $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

2) En déduire la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques. Tracer (Γ)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 21:**++++++++++++++++++++++++++

Soit (Γ) l'ensemble des points d'équation paramétriques : $\begin{cases} x = 3cos\theta \\ y = 2sin\theta \end{cases}$ $\vartheta \in R$

1) Quelle est la nature de (Γ). Donner ses éléments caractéristiques et tracer (Γ)
2) Soit (D) la droite d'équation $x = \frac{9\sqrt{5}}{5}, M(m, p)$ un point de (Γ) et H le projeté orthogonal de M sur (D)
   a) Calculer p^2, MF^2 et MH^2 en fonction de m
   b) Montrer que $\frac{MF^2}{MH^2}$ est un nombre indépendant de m

++++++++++++++++++++++++**Exercice 22:**++++++++++++++++++++++++++

Soit $Z = 5|z|^2 + 3z^2 - 8(z + \overline{z}) - 24 \quad avec\ z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. Soit M(x ; y) l'image de z dans le plan complexe

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur
3) En déduire l'ensemble des points M(x ; y) tels que :$\arg Z = -\frac{\pi}{2}$
4) Résoudre l'équation Z=0 et préciser les images de ses solutions

++++++++++++++++++++++++Exercice 23:++++++++++++++++++++++++++

Soit $Z = z - 2(\overline{z})^2 \quad avec\ z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. Soit M(x ; y) l'image de z dans le plan complexe

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur
3) En déduire l'ensemble des points M(x ; y) tels que :$\arg Z = -\frac{\pi}{2}$
4) Résoudre l'équation Z=0 et préciser les images de ses solutions

++++++++++++++++++++++++Exercice 24:++++++++++++++++++++++++++

Soit $Z = 2z^2 + iz \quad avec\ z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. Soit M(x ; y) l'image de z dans le plan complexe

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur
3) En déduire l'ensemble des points M(x ; y) tels que :$\arg Z = -\frac{\pi}{2}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 25:++++++++++++++++++++++++++

Soit (C) l'ensemble des points M(x, y) vérifiant l'équation :

$$(P):\ x^2 + 4x + 4y(|y| - 4) - 16 = 0$$

1) Montrer que (C) est la réunion d'une partie d'une ellipse (E) et d'une partie d'une hyperbole (H)
2) Préciser le centre, l'axe focal et les sommets de (E)
3) Préciser le centre, l'axe focal et les sommets et les asymptotes de (H)
4) Construire (C)

+++

LE DEFI

++++++++++++++++++++++++Exercice 26:++++++++++++++++++++++++++

1- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J) d'unité graphique 1cm, on considère l'hyperbole H d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

a- Déterminer ses sommets et ses asymptotes

b- Tracer H

2- θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

$$(\cos^2\theta)z^2 - (4\cos\theta)z + 5 - \cos^2\theta = 0$$

Résoudre l'équation (E)

On montrera que l'une des solutions s'écrit sous la forme $\frac{2}{\cos\theta} + i\tan\theta$

3- Soit M' et M'' les points du plan complexe dont les affixes respectives sont les nombres z' et z'', solutions de l'équation (E)

Montrer que lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ les points M' et M'' appartiennent à une branche (à préciser) de l'hyperbole H définie à la question 1

++++++++++++++++++++++++Exercice 27:+++++++++++++++++++++++++++

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J) d'unité graphique 6cm

Les points M_θ de coordonnées (x ; y) définies par : $\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta} \\ y = \frac{\sin\theta}{2+\cos\theta} \end{cases}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$

1- Calculer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à à la droite D d'équation $x = 1$

2- En déduire que, pour tout réel $\theta \in [0; 2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont on précisera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées

3- Tracer l'ellipse (E)

++++++++++++++++++++++++Exercice 28:+++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

Soit Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J) et Δ le domaine limité par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = 1$

1- a) Montrer que Γ est incluse dans la courbe H d'équation :

$$2y^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

b) Montrer que H est une hyperbole

Donner son axe focal, son centre et ses sommets. Tracer H et Γ

2- Soit u un nombre réel de $[0; 1]$; on pose : $\begin{cases} A = 1 + \frac{u}{2} + \sqrt{1+u} \\ B = 1 + \frac{u}{2} - \sqrt{1+u} \end{cases}$

Calculer le produit AB. En déduire que : $(1) \quad 0 \leq 1 + \frac{u}{2} - \sqrt{1+u} \leq \frac{u^2}{8}$

3- Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$; (on ne demande pas à calculer cette intégrale)

a- Utiliser (1) pour démontrer que, pour tout x de $[0; 1]$:

$$1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 \leq \sqrt{1 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq 1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

b- En déduire un encadrement de I

c- Donner une interprétation graphique de l'intégrale I

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 29:</u>++++++++++++++++++++++++++

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad avec \quad a > b$

Soit U et V deux points de coordonnées respectives $\left(0;\ \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ et $\left(0;\ -\sqrt{a^2 - b^2}\right)$

Calculer la somme des carrés des distances de U et V à une tangente à E

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 30:</u>++++++++++++++++++++++++++

Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'une parabole qui contiennent le foyer ?

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 31:</u>++++++++++++++++++++++++++

Deux tangentes données à une parabole déterminent sur une tangente variable un segment $[MM']$. Montrer que la projection orthogonale de $[MM']$ sur la directrice est à une longueur constante

++++++++++++++++++++++++<u>Exercice 32:</u>++++++++++++++++++++++++++

Démontrer que le point de contact d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment que les asymptotes découpent sur elle

BONNE CHANCE A TOUS

++

PROBABILITE

++++++++++ESSENTIEL DU COURS++++++++++++++

A-) <u>OUTILS DE DENOMBREMENT</u>

<u>P-uplet d'ensemble :</u>

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un nombre entier naturel no nul

On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble Ep. Leur nombre est n^p

<u>Arrangement de p éléments d'un ensemble</u>

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un nombre entier naturel no nul et $n \geq p$. On appelle arrangement de p éléments de E, tous p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts. Leur nombre est $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$

<u>Permutation</u>

Soit E un ensemble ayant n éléments

On appelle permutation de E, tout arrangement des n éléments de E

Leur nombre est $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$

<u>Combinaison :</u>

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un nombre entier naturel no nul et $n \geq p$

On appelle combinaison de p éléments de E, tout sous-ensemble de E ayant p éléments. Leur nombre est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

Echantillonnage :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Nombre total de tirage
Tirage successif avec remise	Oui	Non	P-uplet n^p
Tirage successif sans remise	Oui	Oui	Arrangement A_n^p
Tirage simultané	Non	Oui	Combinaison C_n^p

B-) <u>PROBABILITE</u>

<u>Définition :</u>

On appelle probabilité, un nombre réel compris entre 0 et 1 qui évalue les chances de réalisation d'une expérience

●Si la probabilité d'un événement est égal à 0, alors cet événement est impossible

●Si la probabilité d'un événement est égal à 1, alors cet événement est certain

Propriétés :

Pour chaque événement A ; $0 \leq P(A) \leq 1$ $avec$ $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de A est égale à 1

$\overline{A}$ étant l'événement contraire de A, on a : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Soient A et B deux événements :

●Si $A \cap B = \emptyset$ $alors$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

●S'ils sont quelconques : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deux événements A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Equiprobabilité

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité de l'évènement A est :

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{\text{card A}}{\text{card }\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas fovorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}}$$

Variable aléatoire :

Soit X la variable aléatoire telle que : $X = \{x_0;\ x_1; \cdots;\ x_n\}$

●**La loi de probabilité :**

x_i	x_0	x_1	....	x_n
$P(X = x_i)$	P_0	P_1	....	P_n

Avec $\sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$

●**Espérance mathématique d'une variable aléatoire**

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i = x_0 P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n$$

●**La variance et l'Ecart type :**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad et \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Epreuve de Bernoulli :

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve aléatoire ne compte que 2 éventualités (le succès p et l'échec q) avec $p + q = 1$ à n expériences

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

La loi Binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Soit p la probabilité du succès et q celle de l'échec

Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de succès

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq \qquad et \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

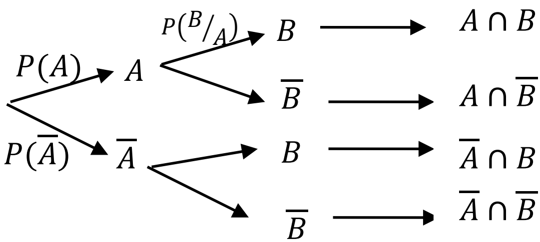
Probabilité conditionnelle :

Soient deux événements A et B de probabilités non nulles telle que $A \cap B \neq \emptyset$

L a probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B

$P\left(A/_B\right) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ avec $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

Soit l'arbre pondéré permettant de calculer les probabilités totales et conditionnelles



NB : ●La somme des probabilités issues de même nœud est égale à 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \quad P\left(B/_A\right) + P\left(\overline{B}/_A\right) = 1; \quad P\left(B/_{\overline{A}}\right) + P\left(\overline{B}/_{\overline{A}}\right) = 1$$

●La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \ ; \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

Le schéma de cet arbre peut élargie sur trois évènements et plus comportant chacun deux éventualités (un évènement et son contraire) et les mêmes règles s'appliques

●La probabilité totale : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

Indépendance entre deux évènements

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si la réalisation de l'un ne conditionne pas l'autre

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car $\begin{cases} P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \\ P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) \end{cases}$

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte et on note les évènements :

A « Obtenir la carte de roi »

B« Obtenir la carte de cœur »

$A \cap B$ « Obtenir la carte roi de cœur »

Montrons que les évènements A et B sont indépendants

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

Preuve : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} \quad d'où \ \ P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

Alors A et B sont indépendants

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 :

Résoudre dans N les équations suivantes :

- **a)** $C_n^{n-2} = 28$
- **b)** $C_{n-1}^{n-5} = 3C_{n-3}^{n-7}$
- **c)** $X^2 - C_n^p X + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Résolvons dans N les équations suivantes :

a) $C_n^{n-2} = 28$ on pose $n - 2 \geq 0 \Longrightarrow n \geq 2$

$$\frac{n!}{(n-2)!\,(n-n+2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Longrightarrow n^2 - n = 56 \Longrightarrow$$

$$n^2 - n + 56 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(56) = 225 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 15$$

$$n_1 = \frac{1-15}{2} = -7 \text{ à rejeter} \quad n_2 = \frac{1+15}{2} = 8 \quad \text{d'où } n = 8$$

b) $C_{n-1}^{n-5} = 3C_{n-3}^{n-7}$ on pose $n - 7 \geq 0 \Longrightarrow n \geq 7$

$$\frac{(n-1)!}{(n-5)!\,(n-1-n+5)!} = 3\frac{(n-3)!}{(n-7)!\,(n-3-n+7)!} \Longrightarrow$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{4(n-5)!} = 3\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)!}{4(n-7)!} \Longrightarrow$$

$$(n-1)(n-2) = 3(n-5)(n-6) \Longrightarrow n^2 - 3n + 2 = 3n^2 - 33n + 90 \Longrightarrow$$

$$2n^2 - 30n + 88 = 0 \Longrightarrow n^2 - 15n + 44 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-15)^2 - 4(44) = 49$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7 n_1 = \frac{15-7}{2} = 4 \text{ à rejeter} \quad n_2 = \frac{15+7}{2} = 11 \quad \text{d'où } n = 11$$

d) $X^2 - C_n^p X + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$

$$\Delta = \left(C_n^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p \text{ comme } C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \text{ alors}$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p = \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)^2 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{C_n^p - \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)}{2} = \dfrac{C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}{2} = C_{n-1}^p \\ X_1 = \dfrac{C_n^p + \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)}{2} = \dfrac{C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2} = C_{n-1}^{p-1} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad S = \left\{C_{n-1}^{p-1};\ C_{n-1}^p\right\}$$

+++

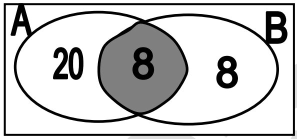
EXERCICE 2 :

Dans une classe de 40 élèves, 28 apprennent l'anglais, 16 l'allemand et 8 les deux langues

On choisi au hasard un élève dans cette classe et on considère les évènements :
A « l'élève choisi apprend l'anglais » et B « l'élève choisi apprend l'allemand »
Calculer les probabilités des évènements suivants : A ; B ; $A \cap B$ $A \cup B$ et $\overline{A} \cup B$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

Calculons les probabilités des évènements suivants : $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A \cap B}$ $\boldsymbol{A \cup B}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\overline{A} \cup B}$



$\bullet P(A) = \frac{28}{40} = 0{,}7$ alors $P(A) = 0{,}7$

$\bullet P(B) = \frac{16}{40} = 0{,}4$ alors $P(B) = 0{,}4$

$\bullet P(A \cap B) = \frac{8}{40} = 0{,}2$ alors $P(A \cap B) = 0{,}2$

$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}9$ alors $P(A \cup B) = 0{,}9$

$\bullet P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$ avec $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Longrightarrow$
$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ et

On sait que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Longrightarrow$
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$ alors

$$P(\overline{A} \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5 \Longrightarrow P(\overline{A} \cup B) = 0{,}5$$

++

EXERCICE 3 :

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

1) La somme des numéros obtenus est égale à 6
2) La somme des numéros obtenus est impaire
3) La somme des numéros obtenus est supérieure à 8
4) La somme des numéros obtenus est inférieure à 4

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

On note par r le numéro des faces du 1er dé et par s celui du second dé et S la somme de numéros obtenus

$r+s$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Soit Ω l'univers : $card\Omega = 6^2 = 36$

Calculons la probabilité des évènements suivants :

1) **La somme des numéros obtenus est égale à 6**

$$P(S=6) = \frac{\text{card}(S=6)}{\text{card}\Omega} = \frac{5}{36} \Longrightarrow P(S=6) = \frac{5}{36}$$

2) **La somme des numéros obtenus est impaire**

$$P(S=\text{impair}) = \frac{\text{card}(S=\text{impair})}{\text{card}\Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \Longrightarrow P(S=\text{impair}) = \frac{1}{2}$$

3) **La somme des numéros obtenus est supérieure à 8**

$$P(S>8) = \frac{\text{card}(S>8)}{\text{card}\Omega} = \frac{10}{36} \Longrightarrow P(S>8) = \frac{5}{18}$$

4) La somme des numéros obtenus est inférieure à 4

$$P(S<4) = \frac{card(S<4)}{card\Omega} = \frac{3}{36} \Longrightarrow P(S>8) = \frac{1}{12}$$

++

EXERCICE 4 :

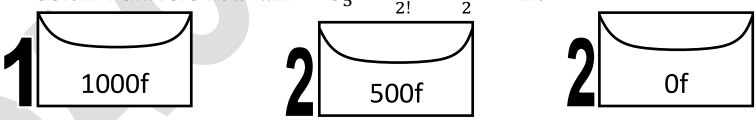
A la kermesse du lycée, un jeu consiste à tirer 2 enveloppes parmi 5 dont une contient un billet de 1000f, 2 contiennent chacune un billet de 500f et les 2 autres contiennent chacune une feuille sans valeur

Les enveloppes sont identiques et non transparentes

1) Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2) Quelle est la probabilité de gagner exactement 500f
3) Quelle est la probabilité de gagner exactement 1000f

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Soit Ω l'univers : $card\Omega = C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$



1) Soit A « l'évènement de ne rien gagner »

$$P(A) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

2) Soit B « l'évènement de gagner exactement 500f »

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{10} = \frac{2\times2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

3) Soit C « l'évènement de gagner exactement 1000f »

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_2^2}{10} = \frac{1\times2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

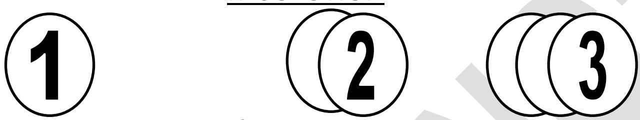
++

EXERCICE 5 :

Un sac contient un jeton marqué 1, deux jetons marqués 2 et trois jetons marqués 3. On tire du sac simultanément et au hasard 2 jetons. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe la somme des numéros marqués sur les deux jetons.

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X
3) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$ et l'écart type $\delta(X)$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++



Soit Ω l'univers : $\text{card}\Omega = C_6^2 = \frac{A_6^2}{2!} = \frac{6\times5}{2} = 15$

X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros tirés

$$1+2=3 \quad ; \quad 1+3=4 \quad ; \quad 2+2=4\,; \quad 2+3=5 \quad et \quad 3+3=6$$

Alors X prend les valeurs : $\{3; 4; 5; 6\}$

1) Déterminons la loi de probabilité de X

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{15} = \frac{2}{15} \;\; ; \;\; P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{15} = \frac{3+1}{15} = \frac{4}{15} \; ;$$

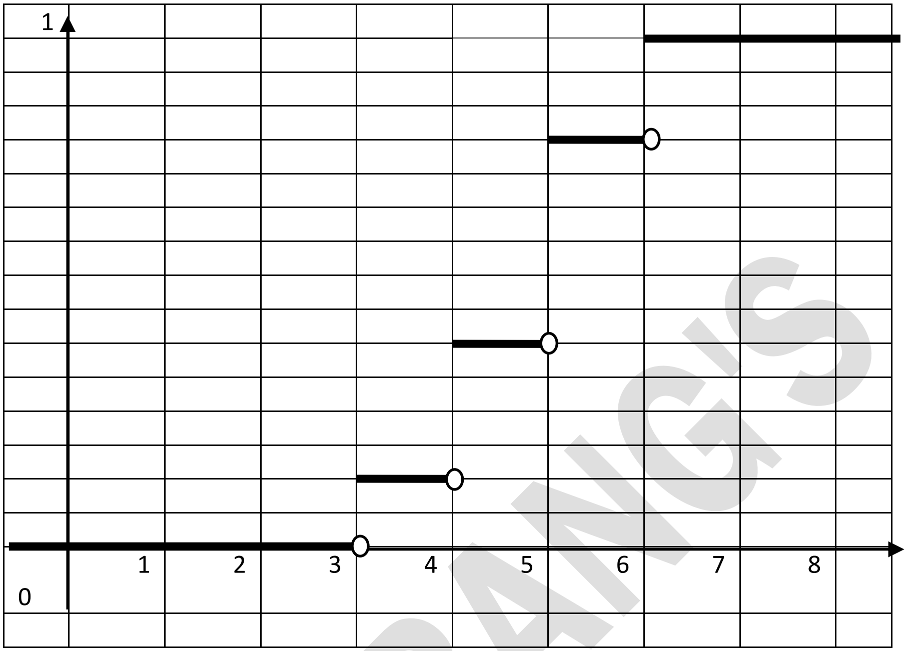
$$P(X=5) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{15} = \frac{2\times3}{15} = \frac{6}{15} \quad et \;\; P(X=6) = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

x_i	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{5}$

2) Déterminons et représentons graphiquement la fonction de répartition de X

Comme $F(X) = P(X \le x_i)$

$$\mathrm{F(X)} = \begin{cases} \mathrm{x} < 3 \;\; alors \;\; P(\mathrm{x}<3) = 0 \\ 3 \le \mathrm{x} < 4 \;\; alors \;\; P(3 \le \mathrm{x} < 4) = \frac{2}{15} \\ 4 \le \mathrm{x} < 5 \;\; alors \;\; P(4 \le \mathrm{x} < 5) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \\ 5 \le \mathrm{x} < 6 \;\; alors \;\; P(5 \le \mathrm{x} < 6) = \frac{6}{15} + \frac{6}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \\ \mathrm{x} \ge 6 \;\; \mathrm{alors} \;\; \mathrm{P(x \ge 6)} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \end{cases}$$



3) Calculons son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$

•$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{6}{15} + 6 \times \frac{3}{15} = \frac{6+16+30+18}{15}$

$$E(X) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3} = 4{,}66$$

$$E(X) = 4{,}66$$

•$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ *avec* $E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 P_i$

$$E(X^2) = 3^2 \times \frac{2}{15} + 4^2 \times \frac{4}{15} + 5^2 \times \frac{6}{15} + 6^2 \times \frac{3}{15} = \frac{18 + 64 + 150 + 108}{15}$$

$$= \frac{340}{15} = \frac{68}{3}$$

$$V(X) = \frac{68}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{68}{3} - \frac{196}{9} = \frac{204 - 196}{9} = \frac{8}{9} \Longrightarrow V(X) = 0{,}889$$

•$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}889} = 0{,}942 \Longrightarrow \sigma(X) = 0{,}942$

+++

EXERCICE 6 :

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1; 2; 3 *et* $(m \in R^*)$.On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note P_1; P_2; P_3 et $P_m$les probabilités respectives de tirer le jeton marqué 1 ;2 ;3 et m.

P_1; P_2; P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$

1) a) Montrer que : $P_1 = \frac{1}{16}$

b) Calculer P_2; P_3; P_m

2) On considère X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré

a) Définir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer m sachant que l'espérance mathématique de X vaut 2

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Comme P_1; P_2; P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$ alors on pose: $P_n = P_1 + (n-1)r = P_1 + (n-1)\frac{1}{8}$

$P_2 = P_1 + \frac{1}{8}$; $P_3 = P_1 + \frac{2}{8}$ et $P_m = P_1 + \frac{3}{8}$

1) a) Montrons que : $\boldsymbol{P_1 = \frac{1}{16}}$

•$\mathrm{P_1 + P_2 + P_3 + P_m = 1 \Longrightarrow P_1 + P_1 + \frac{1}{8} + P_1 + \frac{2}{8} + P_1 + \frac{3}{8} = 1 \Longrightarrow}$

$$4\mathrm{P_1} = 1 - \frac{1+2+3}{8} \Longrightarrow 4\mathrm{P_1} = \frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \mathbf{P_1 = \frac{1}{16}} \text{ cqfm}$$

b) Calculons $\boldsymbol{P_2}$; $\boldsymbol{P_3}$; $\boldsymbol{P_m}$

•$P_2 = P_1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \Longrightarrow P_2 = \frac{3}{16}$

•$P_3 = P_1 + \frac{2}{8} = \frac{1}{16} + \frac{2}{8} = \frac{5}{16} \Longrightarrow P_3 = \frac{5}{16}$

•$P_m = P_1 + \frac{3}{8} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16} \Longrightarrow P_m = \frac{7}{16}$

2) On considère X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré : $X = \{1; 2; 3\ et\ m\}$

a) La loi de probabilité de la variable X

x_i	1	2	3	m
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

b) Calculons m sachant que l'espérance mathématique de X vaut 2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = 2 \Longrightarrow \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{15}{16} + \frac{7m}{16} = 2 \Longrightarrow \frac{7}{16}m = 2 - \frac{22}{16} = \frac{10}{16} \Longrightarrow$$

$$m = \frac{10}{7}$$

+++

EXERCICE 7 :

Trois Messieurs appelés A, B et C entrent au restaurant et déposent leurs chapeaux notés a, b et c au vestiaire. Lorsqu'ils sortent, chacun des Messieurs reprend l'un des trois chapeaux sans vérifier si c'est le sien

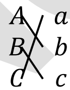
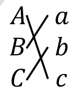
1) Combien ya-il de repartitions possibles des trois chapeau entre les trois Messieurs ?
2) On suppose que chacune de ces repartitions a la même probabilite de survenir. Quelle est la probabilité pour que :
   a) Aucun des Messieurs n'ait son propre chapeau
   b) Un seul ait son chapeau
   c) Deux aient leur chapeau
   d) Les trois aient aient leur chapeau

Additionner les probabilité de a) , b), c) et expliquer le résultat trouvé

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++

1) Le nombre de répartition est : $N = 3! = 6$
2) Calculons la probabilité des évènements :
   a. A « Aucun des Messieurs n'ait son propre chapeau »

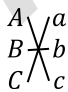
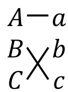
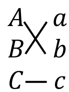
$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{card(A)}}{6}$ le nombre de répartition est

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}$$

   b. B «Un seul ait son chapeau »

$\mathrm{P(B)} = \frac{\mathrm{card(B)}}{6}$ le nombre de répartition est

$$\mathrm{P(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathrm{P(B)} = \frac{1}{2}$$

   c. C « Deux aient leur chapeau »

$\mathrm{P(C)} = \frac{\mathrm{card(C)}}{6}$ le nombre de répartition est $\begin{array}{l} A - a \\ B - b \\ C - c \end{array}$ $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}$

   d. D « Les trois aient aient leur chapeau »

$\mathrm{P(D)} = \frac{\mathrm{card(D)}}{6}$ le nombre de répartition est $\begin{array}{l} A - a \\ B - b \\ C - c \end{array}$ $\mathrm{P(D)} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \mathrm{P(D)} = \frac{1}{6}$

Additionnons les probabilité de a) , b), c) et expliquons le résultat trouvé

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} + \mathrm{P(C)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2+3+1}{6} = 1$$

Ce résultat était attendu car, car A, B et C sont trois évènements deux à deux incompatibles dont l'union est l'évènement certain Ω

+++

EXERCICE 8:

Deux amis se sont donnés rendez-vous entre 12h et 13h et ont décidés qu'ils ne s'attendraient pas plus de 10 minutes.

Calculer la probabilité pour qu'ils se rencontrent

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Soit Ω l'univers : $\mathrm{card}(\Omega) = 60^2 = 3600$ car $13\mathrm{h} - 12\mathrm{h} = 1\mathrm{h} = 60\mathrm{minutes}$

Soit A « l'évènement des rencontre des deux amis » $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$

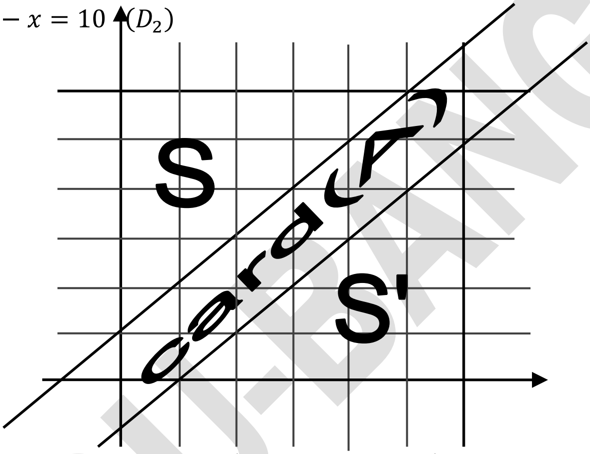
Calculons $\mathrm{card(A)}$: **Choix des inconnus**

Soit x le temps d'arrivé du premier et y celui de l'autre

Mise en équations

Ils ne s'attendraient pas plus de 10 minutes : $|x - y| \leq 10 \Longrightarrow \begin{cases} x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 10 & (D_1) \\ y - x = 10 & (D_2) \end{cases}$



On constate que $\mathrm{S + card(A) + S' = S_c}$ mais $\mathrm{S = S'}$ alors $\mathrm{card(A) = S_c - 2S}$

$$\mathrm{card(A)} = 3600 - 2 \times \frac{50 \times 50}{2} = 3600 - 2500 = 1100 \Longrightarrow \mathrm{card(A)} = 1100$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36} \quad \mathrm{d'où} \quad \mathrm{P(A)} = \frac{11}{36}$$

+++

EXERCICE 9:

Les faces d'un dé cubique sont numérotés respectivement 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 et 3. On suppose que lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est kx; x étant le numéro de chaque face et k un nombre réel

1) Montrer que $k = \frac{1}{30}$
2) On lance 4 fois ce dé, qu'elle est la probabilité d'obtenir 2 le numéro 6 ?

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

1) Montrons que $k = \frac{1}{30}$

Soit Ω l'univers associé à l'expérience ; on a :$\Omega = \{3; 4; ; 5; 6; 6; 6\}$ *et*

$$P(\Omega) = P(3) + P(4) + P(5) + 3P(6)$$

La probabilité de l'apparition d'un numéro x est

$$P(x) = xk, donc : P(3) = 3k, P(4) = 4k, P(5) = 5k \ et \ P(6) = 6k$$

D'où $P(\Omega) = 3k + 4k + 5k + 3 \times 6k = 12k + 18k = 30k = 1 \implies 30k = 1 \implies \boxed{k = \frac{1}{30}}$

2) Calculons la probabilité de l'évènement A: « Obtenir 2 fois le numéro 6 au cours de 4 lancers » On utilise le schéma de Bernoulli pour chaque lancer, avec deux éventualités :

•Le succès : le numéro obtenu est 6 ; la probabilité est $p = 3 \times 6k = 18k = 18 \times \frac{1}{30} = \frac{3}{5}$

•L'échec : le numéro obtenu n'est pas 6, la probabilité est $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

D'où la probabilité de 2 succès sur les 4 lancers est :

$$P(A) = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{4-2} = 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 6 \times \frac{9}{25} \times \frac{4}{25} = \frac{216}{625} \implies \boxed{P(A) = \frac{216}{625}}$$

++

EXERCICE 10:

On compose un jury en tirant au sort trois personnes parmi sept volontaires : quatre hommes et trois femmes

X désigne la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de femme qu'il présente

1) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique
2) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une femme dans le jury

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit Ω l'univers : $\text{card}(\Omega) = C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$

1) Déterminons la loi de probabilité de X

La variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3

•$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{35} = \frac{4}{35}$ $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_4^2}{35} = \frac{18}{35}$ $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{35} = \frac{12}{35}$ $P(X = 3) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35}$

D'où le tableau de probabilité :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Calculons son espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i.p_i = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7} \implies \boxed{E(X) = \frac{9}{7}}$$

2) Calculons la probabilité pour qu'il y ait au moins une femme dans le jury

Soit A « l'évènement d'avoir au moins une femme dans le jury »

$$P(A) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{18}{35} + \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{31}{35} \implies \boxed{P(A) = \frac{31}{35}}$$

++

EXERCICE 11:

Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces médecins

1) Quelle est la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé ?
2) Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = 3^4 = 81$

1) Calculons la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé

Soit A l'évènement « les quatre malades appellent un seul médecin » $P(A) = \frac{3^1}{81} = \frac{3}{81} \Longrightarrow$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{27}}$$

2) Calculons la probabilité pour que les trois médecins soit appelés

Soit B l'évènement « les trois médecins sont appelés »

$P(B) = \frac{card(B)}{81}$; Mais dans ce cas un médecin sera appelé deux fois donc on a le nombre d'appel reçu par un médecin : $C_4^2 \times A_2^2 = 12$ alors $\mathrm{card(B)} = 3 \times 12 = 36$; d'où

$$\mathrm{P(B)} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{P(B)} = \frac{4}{9}}$$

+++

EXERCICE 12:

Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille

1) Quelle est la probabilité de pouvoir faire un drapeau République de Guinée :
   a) En prenant simultanément 3 cubes ?
   b) En prenant simultanément 4 cubes ?
2) Quelle est la probabilité en prenant 3cubes successivement, l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée

+++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**++++++++++++++++++++++++++

Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille

1) Calculons la probabilité de pouvoir faire un drapeau République de Guinée :

a) En prenant simultanément 3 cubes

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = C_{35}^3 = \frac{A_{35}^3}{3!} = \frac{35\times34\times33}{3\times2} = 35 \times 17 \times 11 = 6545$ $alors$ $card(\Omega) = 6545$

Soit A l'événement « prendre simultanément 3 cubes »

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \text{ avec } \mathrm{card(A)} = C_{10}^1 \times C_{20}^1 \times C_5^1 = 10 \times 20 \times 5 = 1000 \text{ alors } \mathrm{P(A)} = \frac{1000}{6545}$$

$$= \frac{200}{1309} \Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{200}{1309}}$$

b) En prenant simultanément 4 cubes

Soit Ω l'univers : $\mathrm{card}(\Omega) = C_{35}^4 = \frac{A_{35}^4}{4!} = \frac{35\times34\times33\times32}{4\times3\times2} = 35 \times 17 \times 11 \times 8 = 6545$

$$\text{alors } \mathrm{card}(\Omega) = 52360$$

Soi B l'événement « prendre simultanément 4 cubes »

$$P(B) = \frac{\mathrm{card(B)}}{\mathrm{card}(\Omega)} \text{ avec } \mathrm{card(B)} = C_{10}^2 \times C_{20}^1 \times C_5^1 + C_{10}^1 \times C_{20}^2 \times C_5^1 + C_{10}^1 \times C_{20}^1 \times C_5^2$$

$$\mathrm{card(B)} = \frac{A_{10}^2}{2!} \times 100 + \frac{A_{20}^2}{2!} \times 50 + \frac{A_5^2}{2!} \times 200 = 45 \times 100 + 190 \times 50 + 200 \times 10 =$$

$$\mathrm{card(B)} = 4500 + 9500 + 2000 = 16000 \text{ alors } \mathrm{P(B)} = \frac{16000}{52360} = \frac{400}{1309} \Longrightarrow \boxed{P(B) = \frac{400}{1309}}$$

2) Calculons la probabilité en prenant 3 cubes successivement, l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = A_{35}^{3} = 35 \times 34 \times 33 \;\; alors \;\; card(\Omega) = 39270$

Soi C l'événement « prendre successivement sans remise 3 cubes»

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} \;\; avec \;\; card(C) = A_{10}^{1} \times A_{20}^{1} \times A_{5}^{1} = 10 \times 20 \times 5 = 1000$$

$$alors \;\; P(C) = \frac{1000}{39270} = \frac{100}{3927} \Longrightarrow \boxed{P(C) = \frac{100}{3927}}$$

++

EXERCICE 13:

Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un des cafés du village qui en compte cinq. Chaque personne choisi au hasard l'un des cinq cafés

1) Calculer la probabilité pour que chacune des cinq personnes ait choisi un café différent
2) Calculer probabilité pour que ces cinq personnes se retrouvent dans le même café

Calculer la probabilité pour qu'au moins deux se retrouvent dans le même café

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++

Soit Ω l'univers associé à l'expérience : $\mathrm{card}(\Omega) = 5^5 = 3125 \Longrightarrow \boxed{card(\Omega) = 3125}$

1) Calculons la probabilité pour que chacune des cinq personnes ait choisi un café différent

Soit A l'évènement « chacune des cinq personnes ait choisi un café différent »

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)} \;\; ; \mathrm{card(A)} = \mathrm{A}_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120; \quad \text{alors } \mathrm{P(A)} = \frac{120}{3125} = \frac{24}{625}$$

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{24}{625}}$$

2) Calculons la probabilité pour que ces cinq personnes se retrouvent dans le même café

Soit B l'évènement « ces cinq personnes se retrouvent dans le même café »

$$\boxed{\mathrm{P(B)} = \frac{\mathrm{card(B)}}{\mathrm{card}(\Omega)} \;\; ; \quad \mathrm{card(B)} = \mathrm{A}_5^1 = 5 \;\; \text{alors } \mathrm{P(B)} = \frac{5}{3125} = \frac{1}{625} \Longrightarrow \mathrm{P(B)} = \frac{1}{625}}$$

3) Calculons la probabilité pour qu'au moins deux se retrouvent dans le même café

Soit C l'évènement « au moins deux se retrouvent dans le même café »

Les évènements A et C sont contraires alors ;

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(C)} = 1 \Longrightarrow \mathrm{P(C)} = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - \frac{24}{625} = \frac{601}{625} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{P(C)} = \frac{601}{625}}$$

++

EXERCICE 14:

Deux chasseurs Moussa et Mamadou aperssoivent ensemble un lièvre et tire simultanement

1) Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5

Quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?

2) En fait ; Mamadou a tiré le premier.

a) Quelle est la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitiée ?

Dans ces conditions : Mamadou tire le premier, puis Moussa ; quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper saint et sauf ?

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

Deux chasseurs Moussa et Mamadou aperssoivent ensemble un lièvre et tire simultanement

1) Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5

•Soit A « l'evenement pour que Moussa atteint le lièvre » $P(A) = \frac{5}{6}$

•Soit A « l'evenement pour que Mamadou atteint le lièvre » $P(B) = \frac{4}{5}$

Calculons la probabilité pour que le lièvre soit tué

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \text{ mais } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{alors } P(A \cup B) = \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{25 + 24 - 20}{30} = \frac{29}{30} \Longrightarrow P(A \cup B) = \frac{29}{30}$$

2) En fait ; Mamadou a tiré le premier.

a) Calculons la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitiée

$$P(A' \cap \overline{B}) = P(A') \times P(\overline{B}) \text{ mais } \begin{cases} P(A') = \frac{1}{2} P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \\ P(B) + P(\overline{B}) = 1 \Longrightarrow P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A' \cap \overline{B}) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{12} \Longrightarrow \boldsymbol{P(A' \cap \overline{B}) = \frac{1}{12}}$$

b) Dans ces conditions : Mamadou tire le premier, puis Moussa ; calculons la probabilité pour le lièvre d'en échapper saint et sauf

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) \Longrightarrow \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \left(1 - \frac{5}{12}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{60} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}'} \cup \overline{\mathbf{B}}\right) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{60}}$$

+++

<u>EXERCICE 15:</u>

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

1) Calculer a, b et c et la variance $V(X)$
2) Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (Δ)
   a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1), (B, 2), (C, 4)\}$
   b) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de $((\Delta)$.
   Montrer que $\varphi(G) = V(X)$

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^{a}, e^{b} et e^{c} où a, b et c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

1) Calculons a, b et c et la variance $V(X)$

•D'après la loi de la probabilité $e^{a} + e^{b} + e^{c} = 1 \quad (1)$

•Comme $E(X) = 1 \Rightarrow e^{a} - e^{b} + 2e^{c} = 1 \quad (2)$

1[ère] Méthode : Comme a, b et c sont en progression arithmétique alors : $\begin{cases} \mathrm{b = a + r} \\ \mathrm{c = a + 2r} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} e^{a} + e^{b} + e^{c} = 1 \\ e^{a} - e^{b} + 2e^{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a} + e^{a+r} + e^{a+2r} = 1 \\ e^{a} - e^{a+r} + 2e^{a+2r} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a}(1 + e^{r} + e^{2r}) = 1 \\ e^{a}(1 - e^{r} + 2e^{2r}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{a} = \dfrac{1}{1 + e^{r} + e^{2r}} \\ e^{a} = \dfrac{1}{1 - e^{r} + 2e^{2r}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 + e^{r} + e^{2r}} = \frac{1}{1 - e^{r} + 2e^{2r}} \Leftrightarrow$$

$$1 + e^{r} + e^{2r} = 1 - e^{r} + 2e^{2r} \Rightarrow 2e^{r} - e^{2r} = 0 \Rightarrow e^{r}(2 - e^{r}) = 0 \Rightarrow r = \ln 2$$

Avec $e^{a} = \frac{1}{1+e^{\ln 2}+e^{2\ln 2}} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow a = -\ln 7$

D'où $b = a + r = -\ln 7 + \ln 2 = \ln\frac{2}{7}$ $\; et \; c = a + 2r = -\ln 7 + 2\ln 2 = \ln\frac{4}{7}$

2[ème] Méthode : Comme a, b et c sont en progression arithmétique alors : $\mathrm{2b = a + c} \Rightarrow$ $\mathrm{e^{2b} = e^{a+c}} \quad (3)$

D'où le système

$$\begin{cases} \mathrm{e^{a} + e^{b} + e^{c} = 1} \quad (1) \\ \mathrm{e^{a} - e^{b} + 2e^{c} = 1} \quad (2) \\ \quad \mathrm{e^{2b} = e^{a+c}} (3) \end{cases} \Rightarrow \text{de } (1) + (2) \text{on a : } \; \mathrm{2e^{a} + 3e^{c} = 2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{e^{a}} = \frac{\mathrm{2 - 3e^{c}}}{2} = 1 - \frac{3}{2}\mathrm{e^{c}} \quad (4)$$

Dans (3)on a :

$$e^{2b-c} = e^{a} \Rightarrow e^{2b-c} = 1 - \frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow \frac{e^{2b}}{e^{c}} = 1 - \frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow e^{2b} = e^{c} - \frac{3}{2}e^{2c} (5)$$

De $(1) - (2)$, on a : $2e^{b} - e^{c} = 0 \Rightarrow e^{b} = \dfrac{1}{2}e^{c} (6)$

De (6) dans (5)on a $\left(\frac{1}{2}e^{c}\right)^{2} = e^{c} - \frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^{2c} = e^{c} - \frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^{c} = 1 - \frac{3}{2}e^{c} \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)e^{c} = 1 \Rightarrow \frac{7}{4}e^{c} = 1 \Rightarrow e^{c} = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = \ln\frac{4}{7}}}$

et dans (6)on a: $e^{b} = \dfrac{1}{2}e^{\ln\frac{4}{7}} = \dfrac{1}{2} * \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{7} \Rightarrow e^{b} = \dfrac{2}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = \ln\frac{2}{7}}}$ *et dans* (4) *on a* :

$$e^{a} = 1 - \frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow e^{a} = 1 - \frac{3}{2}e^{\ln\frac{4}{7}} = 1 - \frac{3}{2} * \frac{4}{7} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = \ln\frac{1}{7}}}$$

x	1	-1	2
$P(X = x_i)$	$e^{\ln\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{7}$	$e^{\ln\frac{2}{7}} = \dfrac{2}{7}$	$e^{\ln\frac{4}{7}} = \dfrac{4}{7}$

D'où : $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=1^2\times\frac{1}{7}+(-1)^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{4}{7}-1^2=\frac{1+2+16}{7}-1=\frac{19-7}{7}=\frac{12}{7}\Longrightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X)=\frac{12}{7}}}$$

2) Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (Δ)

a) Calculons l'abscisse du point G barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{1}),(\boldsymbol{B},\boldsymbol{2}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{4})\}$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta X_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1\times1-1\times2+4\times2}{1+2+4}=\frac{7}{7}=1\ \ alors\ \ x_G=1$$

b) On pose : $\boldsymbol{\varphi(M)=\frac{1}{7}\left(MA^2+2MB^2+4MC^2\right)}$, $\boldsymbol{o}$ù $\boldsymbol{M}$ est un point de ((Δ).

Montrer que $\boldsymbol{\varphi(G)=V(X)}$ Posons $M=G, on\ a$:

$\varphi(G)=\frac{1}{7}(GA^2+2GB^2+4GC^2)=\frac{1}{7}(0^2+2\times2^2+4\times1^2)=\frac{1}{7}(12)$

$$d'où\ \varphi(G)=V(X)=\frac{12}{7}$$

c) Déterminer l'ensemble $(\boldsymbol{\Gamma})$ des points M de (Δ) tels que $\boldsymbol{\varphi(M)=3}$

Introduisons le point G :

$$\varphi(M)=\frac{1}{7}(MA^2+2MB^2+4MC^2)=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2}{7}$$

$$=\frac{7MG^2+GA^2+2GB^2+4GC^2}{7}=3\Longrightarrow MG^2+\varphi(G)=3\Longrightarrow MG^2+\frac{12}{7}=3$$

$$MG^2=3-\frac{12}{7}=\frac{21-12}{7}=\frac{9}{7}\Longrightarrow MG=\sqrt{\frac{9}{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}\Longrightarrow MG=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

(Γ) est un cercle de centre G et de rayon $r=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

EXERCICES PROPOSES

ANALYSE COMBINATOIRE

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 1 :**++++++++++++++++++++++++++++

Résoudre dans N les équations suivantes :

a) $C_n^{-2} = 36$

b) $C_n^{n-1} = C_{n-2}^{n-4}$

$c)$ $X^2 - A_n^p X + A_{n-1}^p\left(pA_{n-1}^{p-1}\right) = 0$

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 2 :**++++++++++++++++++++++++++++

Dans un groupe d'individus, on sait que les deux cinquièmes aiment les fraise, deux tiers aiment les poires, un cinquième n'aime ni l'un ni l'autre et 144 aiment les deux. De combien de personnes est constitué le groupe ?

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 3 :**++++++++++++++++++++++++++++

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot AVIONS qui commencent ;

a. par la lettre A ?
b. par les lettres AV ?

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 4 :**++++++++++++++++++++++++++++

Un voyageur de commerce veut se rendre dans les quatre villes suivantes : France-Allemagne-Italie-Portugal. Il peut commencer et terminer par la ville qu'il veut. Combien de voyage peut-il réalisé ?

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 5 :**++++++++++++++++++++++++++++

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On lance trois fois de suite ce dé et on note à chaque lancer le chiffre inscrit sur face supérieure. On appelle résultat le triplet des trois chiffres obtenus

1) Combien y'a-t-il de résultats possibles ?
2) Combien y'a-t-il de résultats qui n'ont pas de chiffre 1 ?
3) Combien y'a-t-il de résultats qui ont exactement deux fois le chiffre 1 ?
4) Combien y'a-t-il de résultats qui ont au moins une fois le chiffre 6 ?
5) Combien y'a-t-il de résultats dont la somme des trois chiffres est égale à 9 ?
6) Combien y'a-t-il de résultats dont les trois chiffres forment une suite arithmétique ?
7) Combien y'a-t-il de résultats dont les trois chiffres forment une suite géométrique ?

++++++++++++++++++++++++++**Exercice 6 :**++++++++++++++++++++++++++++

Un sac contient 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement sans remise six lettres du sac et on forme un mot.

a. Combien peut-on former de mots différents au total ?
b. Combien de ces mots commencent par un M ?
c. Combien de ces mots commencent par MATHS ?

+++++++++++++++++++++++Exercice 7 :+++++++++++++++++++++++++

Combien d'équipes de football peut-on constitué avec vingt personnes si on ne tient pas compte des places qu'occupent les joueurs ? et avec trente personnes ?

(Une équipe de football comporte 11 joueurs)

+++++++++++++++++++++++Exercice 8 :+++++++++++++++++++++++++

Une classe comporte 18 filles et 12 garçons. On veut choisir 5 représentants de la classe pour la fête de fin d'année. Combien y'a-t-il de choix possibles :

a. Si on les choisit parmi les filles ?
b. Si on les choisit parmi les garçons ?
c. Si on veut avoir un groupe constitué de 3 filles et 2 garçons ?

+++++++++++++++++++++++Exercice 9 :+++++++++++++++++++++++++

Une course met en compétition 15 chevaux
Un joueur mise sur les trois premiers (tiercé) et on suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo. Combien y'a-t-il :

a. De tiercé possibles ?
b. De tiercé donnant les trois chevaux gagnants dans l'ordre ?
c. De tiercé qui donnant les trois chevaux gagnants dans un autre ordre ?

+++++++++++++++++++++++Exercice 10 :+++++++++++++++++++++++++

On tire simultanément une main de 13 cartes dans un jeu de 52 cartes

1) Combien de mains différentes peut-on former ?
2) a. Combien de mains ne comportent que des cartes rouges ?
   b. Combien de mains ne comportent que des cartes noires ?
3) Combien de mains comportent :
   a. Le roi de pique ?
   b. Le roi et la dame de pique ?
   c. Le roi, la dame et le valet de pique ?
   d. Pour seuls piques le roi, la dame et le valet ?

+++++++++++++++++++++++Exercice 11 :+++++++++++++++++++++++++

Soit n un entier naturel supérieur où égale à 4. On appelle diagonale du polygone à n cotés, tout segment joignant deux sommets non consécutifs

a. Montrer que le nombre de diagonales est $\frac{n(n-3)}{2}$
b. Quelle figure comporte 170 diagonales ?

CALCULS DE PROBABILITE

++++++++++++++++++++++++**Exercice 12 :**++++++++++++++++++++++++++

On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tiré. La probabilité d'apparition de 6est le triple de celle de 1 et les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont la même probabilité d'apparition

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro
2) Calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un numéro pair »
3) Calculer la probabilité de l'évènement « obtenir 2 ou 4 »

++++++++++++++++++++++++**Exercice 13 :**++++++++++++++++++++++++++

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer

On considère alors l'équation du second degré : $x^2 + ax + b = 0$

Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues)

++++++++++++++++++++++++**Exercice 14 :**++++++++++++++++++++++++++

BAC TSE 1999

Un plongeur de restaurant lave 30 verres, dix de chaque type A, B et C. Au cours de la vaisselle, deux verres sont cassés au hasard.

1) a) Quelle est la probabilité pour que les deux verres cassés soient de même type

b) Quelle est la probabilité de casser au moins un verre du type A

c) Quelle est la probabilité de casser un verre du type B et un verre du type C

2) Soit X la variable aléatoire composant le nombre de verre de type A cassés

a) Quelle est la loi de probabilité de X

b) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 15 :**++++++++++++++++++++++++++

Un tireur vise une cible. La probabilité pour qu'il touche la cible est 0,7. Il tire trois fois de suite. On note X le nombre de fois ou il a atteint la cible. Déterminer la loi de probabilité de X

++++++++++++++++++++++++**Exercice 16 :**++++++++++++++++++++++++++

Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2.

Une urne v contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules

1) Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X
2) Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$
3) Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$
4) Déterminer la plus petite valeur de n pour la quelle $E(X) < 4{,}8$

++++++++++++++++++++++++Exercice 17 :++++++++++++++++++++++++++

Une urne contient 10 boules : quatre rouges et six blanches.

1) On extrait simultanément trois boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour le nombre de boules rouges extraites.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X)

2) On effectue cinq tirages successifs de trois boules avec remise avant chaque tirage.

Calculer la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois trois boule rouges

3) On effectue deux tirages successifs de trois boules avec remise.

Calculer la probabilité de l'événement : «la somme des nombres de boules rouges obtenues lors des deux tirages est égale à trois»

++++++++++++++++++++++++Exercice 18 :++++++++++++++++++++++++++

1) Etudier les variations de la fonction $f(x) = 36x^2 - 2x^3$ sur l'intervalle $[0; 18]$ et déterminer la valeur de x pour la quelle f atteint, sur cet intervalle son maximum.

2) On considère une urne contenant 36 boules indiscernables au toucher, dont n sont rouges, n sont blanches et toutes les autres sont vertes $(1 \leq n \leq 17)$
On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne

a) Démontrer que le nombre de tirage donnant une boule de chaque couleur est égale à f(n)

b) Soit P(n) la probabilité de tire une boule de chaque couleur. Exprimer P(n) en fonction f(n) et en déduire la valeur n pour laquelle P(n) est maximum

++++++++++++++++++++++++Exercice 19 :++++++++++++++++++++++++++

BAC TSE 2008

Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. Parmi eux on sait que deux seulement sont des menteurs, mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard sur le fait considéré de façon indépendante. Quelle probabilité a-t-on :

1) D'obtenir à chaque fois une description véridique des faits
2) D'obtenir deux versions contradictoires

3) D'obtenir deux versions fausses

++++++++++++++++++++++++Exercice 20 :++++++++++++++++++++++++++

Deux joueurs, Daouda et Kemoko lancent simultanément chacun un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ont la même probabilité de sortie. Le gagnant est celui qui obtient un nombre supérieur à celui de l'autre. La partie est nulle si les deux obtiennent le même numéro

1) Quelle est la probabilité que Daouda gagne ?
2) Quelle est la probabilité que Kemoko gagne ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 21 :++++++++++++++++++++++++++

M ISSA possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

- Si pendant le mois noté n il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$
- Si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{2}{5}$

Pour n entier naturel strictement positif, On désigne par A_n l'évènement « M ISSA a dépassé son forfait le mois n » et B_n l'évènement contraire

On pose $p_n = p(A_n)\ et\ q_n = p(B_n)\ ; on\ a\ p_1 = \frac{1}{2}$

Tous les résultats seront donnés sous de fractions irréductibles

1) a) Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et A_{n+1} sachant que B_n est réalisé
b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies : $p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}p_n \quad et \quad p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}q_n$
En déduire l'égalité suivante : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$
2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{1}{3}$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1

3) Ecrire $u_n\ et\ p_n$ en fonction de n. Déterminer la limite de p_n

++++++++++++++++++++++++Exercice 22:++++++++++++++++++++++++++

Dans une urne il y'a n boules rouges et $2n$ boules blanches

On tire simultanément p boules de l'urne $p < n$

1) Si $n = 5\ et\ p = 4$; calculer les probabilités des évènements suivants :

A : Obtenir deux boules blanches et deux boules rouges

B : Obtenir au moins une blanche

(On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles)

2) On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que : $n \geq 2$

a) Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur

b) Démontrer que la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1

Quel est le sens de variations de $(P_n)_{n\geq 2}$?

c) Déduire de la question précédente que $(P_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite

++++++++++++++++++++++++Exercice 23:+++++++++++++++++++++++++

Un carré ABCD de coté 35cm, est divisé en 1225 (soit 35^2) petit carré de 1cm de coté par un segment régulièrement espacés et parallèle soit au segment $[AB]$, soit au segment $[AD]$

1) On appelle « nœud « tout point d'intersection de deux segment de ce quadrillage qui n'est pas situé sur les cotés du carré ABCD

a) Combien y'a-t-il de nœuds dans le quadrillage ?

b) On choisi au hasard un de ses nœuds et on le note M. Soit I le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et J le projeté orthogonal de M sur la droite (AD)

Déterminer la probabilité de chacun des événements :

b-1 : le quadrillage AIMJ est un carré

b-2 : le quadrillage AIMJ est un rectangle de périmètre 24 cm

2) n étant un entier naturel non nul, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

a) Démontrer que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Combien y a-t-il d'entiers naturels non n tels que : $S_n \leq 1225$?

3) Les petits carrés du quadrillage sont numérotés de 1 à 1225

a) On choisi au hasard un des carrés, et on note son numéro k

Quelle est la probabilité pour qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $\mathrm{S_n} = \mathrm{k}$?

Un tel événement est appelé « succès »

b) On réalise 5 fois l'épreuve précédente

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois « succès » ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 24:+++++++++++++++++++++++++

Une urne contient cinq boules indiscernables : deux vertes et trois rouges. On répète n fois l'épreuve consistant à tirer une boule de l'urne, noter sa couleur et remettre dans l'urne

a) Calculer la probabilité P_n de n'obtenir que des boules rouges lors des n tirages

b) Démontrer que la suite P_n est décroissante et calculer $\lim_{n\to+\infty} P_n$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 25 :**+++++++++++++++++++++++++

Dans un jeu de 32 cartes, on distingue quatre couleurs : pique, cœur, carreau et trèfle et dans chaque couleur, huit hauteurs : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit et sept

On dispose les cartes en quatre paquets contenant chacun les huit cartes d'une même couleur, et on tire au hasard une carte de chaque paquet (exemple de tirage : as de pique , sept de cœur, roi de carreau, sept de trèfle)

1) a) Combien y a-t-il de tirage possibles ?

   b) Calculer la probabilité pour que le tirage contienne :

   - ●quatre cartes de même hauteur ;
   - ●au moins une dame ;
   - ●trois rois et un valet

On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible, puis on indiquera une valeur approchée

2) Un tirage est gagnant lorsqu'il contient au moins deux As. Le joueur reçoit 1000f si le tirage contient les quatre as, 30f si le tirage contient exactement trois as, 2f si le tirage contient exactement deux as.

Calculer les probabilités d'obtenir ces différents gains.

On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible

3) La réglementation des jeux de hasard indique que : « les gains doivent-être inversement proportionnels à leur probabilité ».

Examiner si les sommes attribuées pour tirages gagnants respectent ce principe.

++++++++++++++++++++++++**Exercice 26:**+++++++++++++++++++++++++

Une urne contient cinq boules : trois blanches et deux noires. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On considère les événements :

A : « au moins une boule blanche »

B : « au moins une boule noire »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 27:**+++++++++++++++++++++++++

La production d'une usine est assurée a 60% par une machine A et à 40% par une machine B. La machine A fabrique 1% de pièces défectueuse et la machine B, 3%

On choisit une pièce au hasard à la sortie de l'usine.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire
2) Quelle est la probabilité que :
   a) Cette pièce soit défectueuse et produite par B ?
   b) Cette pièce soit défectueuse ?

c) Cette pièce ait été produite par B sachant qu'elle est défectueuse ?

++++++++++++++++++++++++**Exercice 28 :**++++++++++++++++++++++++++

Une urne contient 2n boules : n boules blanches et n boules noires. On tire au hasard n boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) En déduire la relation : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + \left(C_n^p\right)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

c) Dans le cos où $n = 4$, calculer $E(X) et\ \sigma(X)$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 29:**++++++++++++++++++++++++++

On considère un groupe de seize fourmis parmi lesquelles quatre ont une caractéristique C

Ces quatre fourmis seront dites « de type C ». On prend simultanément et au hasard cinq fourmis dans ce groupe

1) Calculer la probabilité :
   a) p_a de n'avoir, parmi ces cinq fourmis, aucun de type C
   b) p_b d'avoir exactement une fourmi de ce type
   c) p_c d'avoir au moins deux fourmis de ce type

On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible, puis on indiquera une valeur approchée à 10^{-4} près

2) On constate, après enquête, que, dans la population entière, la répartition des fourmis de type C est de 1 sur 4. On estime la population suffisamment nombreuse pour que le tirage de n fourmis soit assimilable à n tirages successifs indépendants avec remise

On prend au hasard n fourmis $(n \geq 2)$ et on rappelle X la variable aléatoire donnant le nombre de celles de type C

a) Calculer $p(X = 0)\ \ et\ \ p(X = 1)$ en fonction de n et en déduire la probabilité p_n d'avoir au moins deux fourmis de type C

b) Démontrer que $p_n > 0{,}9$ si et seulement si $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) < 0{,}1$

c) On pose $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)$

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et démontrer que (u_n) est une suite décroissante

d) Trouver la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0{,}9$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 30 :**++++++++++++++++++++++++++

Une boite contient 60 boules blanches et 40 boules noires

On effectue dans cette boite des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche

PARTIE A : Dans cette partie, on ira au maximum à 4 tirages

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages

1) Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0
2) Calculer la probabilité pour que X soit égale à k , k valant successivement 1 ; 2 ; 3 et 4

PARTIE B : Dans cette partie, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul

De même, on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les n tirages

1) Calculer la probabilité pour que X soit égale à k , k valant successivement 1 ; 2 ; 3 et n
2) On considère la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

Soit E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Montrer que :$E(X) = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$

3) On sait que , pour tout réel x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

   a) En dérivant les deux membres de l'égalité précédente, en déduire une expression de : $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$
   b) En déduire que : $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$

++++++++++++++++++++++++**Exercice 31 :**+++++++++++++++++++++++++++

On considère le système de deux équations à deux inconnues (x ; y)

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

$où\ a$, $b\ et\ c$ sont trois nombres tirés successivement au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ grâce à un dé cubique parfaitement équilibré.

Calculer les probabilités des événements :

1) A : Le système a un couple unique de solutions
2) B : Le système a une infinité de solutions

3) C : Le système n'a pas de solution
4) D : Le système admet le couple unique de solution (3 ; 0)
5) E : Le système admet le couple unique de solution (0 ; 3)

+++++++++++++++++++++++**Exercice 32 :**+++++++++++++++++++++++++

Donner deux lois de probabilités, définies sur le même univers avec la même espérance mathématique et des variances différentes

+++++++++++++++++++++++**Exercice 33 :**+++++++++++++++++++++++++

A-) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2+11x+24}{(x+5)^2}$

1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal ($\|\vec{\imath}\| = 1cm\ \ et\ \ \|\vec{\jmath}\| = 6cm$)
Préciser la position relative de (C) et la droite d'équation $y = 1$
2) Déterminer $a, b\ et\ c$ tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+5} + \frac{c}{(x+5)^2}$
3) Calculer en cm², l'aire du domaine plan, ensemble des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

B-) Soit n un entier naturel ; on place dans une urne (n+10) boules blanches et (2n+5) boules rouges. Un joueur tire une boule (toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées). S'il tire une boule blanche, il gagne, si non il perd

1) Quelle probabilité, $P(n)$ le joueur a-t-il de gagner à ce jeu ?
2) Etudier g, fonction numérique de x, variable réelle, définie par : $g(x) = 2P(x)$

Tracer la courbe représentative ($\boldsymbol{\Gamma}$) dans le même repère. Déterminer les coordonnées des points communs de (C) et ($\boldsymbol{\Gamma}$)

C-) Dans une seconde urne, on place (n+1) boules rouges, (n+3) boules blanches et 6 boules noires. Le joueur tire une boule, l'observe, la remet et effectue un second tirage (à chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées). Il gagne dans les deux cas suivants :

●Lors du premier tirage, la boule extraite est blanche

●Lors du premier tirage, la boule extraite est noire et lors du second, la boule extraite est blanche

1) Démontrer que la probabilité, $Q(n)$ de gagner cette partie est $\frac{1}{2}f(n)$

2) Déduire du paragraphe A-) la valeur de n pour laquelle $Q(n)$ est maximale, et déterminer ce maximum de $Q(n)$

3) Démontrer qu'il existe n_0, entier naturel à déterminer, tel que pour tout n entier, $n \geq n_0$, le joueur a au moins autant de chances de gagner au second jeu qu'au premier

++++++++++++++++++++++++**Exercice 34 :**+++++++++++++++++++++++++

Un sac contient 6 boules, numérotées de 0 à 5. On extrait simultanément 2 boules qui portent respectivement les numéros $a\ et\ b$. A chaque résultat de ce tirage on associe :

–Le nombre $\frac{a+b}{2}$ si $a\ et\ b$ sont pairs

–Le nombre 0 si $a\ et\ b$ sont impairs

–Le nombre $|a-b|$ si $a\ et\ b$ sont parités différentes

1) Quelles les valeurs de la variable aléatoire X ainsi définie ?
2) Définir la loi de probabilité
3) Calculer l'espérance mathématique de X et la variance de X

++++++++++++++++++++++++**Exercice 35:**+++++++++++++++++++++++++

Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 moteurs sont les plus surs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

On désigne par P la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

***A-)** Dans cette partie $P = 0{,}1$

1) Calculer la probabilité pour qu'un avion à deux moteurs s'écrase
2) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne
3) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
4) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase

B-) On revient au cas général

1) On désigne par $f(P)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que $f(P) = P^2$
2) On désigne par $g(P)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Démontrer que $g(P) = P^2(-3P^2 + 4P)$
3) On pose $h(P) = f(P) - g(P)$

a) Etudier le signe de $h(P)$ en fonction de P

b) En déduire, suivant les valeurs de P, dans quels avions il vaut mieux monter

++++++++++++++++++++++++**Exercice 36:**+++++++++++++++++++++++++

Un sac contient six jetons ; 2 jetons portent le numéro 1 ; 3 jetons portent le numéro 2 et 1 jeton porte le numéro 3

On suppose que les jetons ont la même probabilité d'apparition

1) On tire simultanément 3 jetons dans le sac. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros portés par les jetons
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Définir et représenter la fonction de repartition de X
   c) Calculer l'espérance mathématique et la variance
2) On tire successivement avec remise 3 jetons du sac. Soit Y la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros portés par les jetons
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y
   b) Calculer l'espérance mathématique de Y

+++++++++++++++++++++++Exercice 37:+++++++++++++++++++++++++

PARTIE A

Lors de la préparation du concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.

On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément et au hasard 2 papiers

On donnera les réponses sous la forme de fraction irréductible

1) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2) Quelle est la probabilité qu'il connaisse ces deux sujets ?
3) Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

PARTIE B

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inferieur où égale à 100)

1) Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2) Déterminer l'entier naturel n tels que p_n soit supérieur où égale à 0,95.

+++++++++++++++++++++++Exercice 38:+++++++++++++++++++++++++

WAWA débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une flèche. Lors qu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lors qu'elle manque la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de manquer
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n : WAWA atteint la cible au $n^{ième}$ coup

B_n : WAWA rate la cible au $n^{ième}$ coup

On pose :$p_n = p(A_n)$

Pour les questions 1) et 2) on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré

1) Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$
2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2, p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$
3) Pour $n \geq 1,$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$

Montrer que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme u_1

4) Ecrire u_n puis p_n en fonction de n
5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

++++++++++++++++++++++++Exercice 39:++++++++++++++++++++++++++

On lance trois dés, D_1; D_2 et D_3 cubiques équilibrés. Les faces de chacun des dés est numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6

a. Calculer la probabilité des évènements :

A « les trois dés donnent 1 »

B « les trois dés donnent le même numéro »

C « deux dés donnent seulement le numéro 1 »

D « deux dés donnent le même résultat et l'autre un résultat différent »

Pour chaque résultat, on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale à 10^{-3} près

b. On répète n fois l'expérience et on note p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois trois

++++++++++++++++++++++++Exercice 40:++++++++++++++++++++++++++

Un sac contient 10 objets : n objets sont noirs et les autres sont blancs. On extrait simultanément 2 objets du sac. Les tirages étant équiprobables, quelles sont les probabilités d'obtenir :

1) Deux objets de couleurs différentes
2) Deux objets noirs
3) Deux objets blancs

Calculer n pour que cette dernière probabilité soit égale à $\frac{7}{15}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 41 :++++++++++++++++++++++++++

Dans un concours de pronostics, il s'agit de prévoir les résultats de 10 parties de football, on inscrit les prévisions sur une feuille de réponse. Pour chaque partie 3 pronostics sont possibles : victoire de l'un des autres adversaires, victoire de l'autre et la partie nulle

1) De combien de façons différentes peut-on remplir cette feuille de réponses ?

2) Un participant au concours ne connait rien au football et remplit au hasard la feuille de réponses

   Quelle est la probabilité pour qu'il donne :

   a) Les dix réponses exactes ?
   b) Les dix réponses fausses ?
   c) Au moins une réponse exacte ?

On donnera de chaque probabilité demandée une valeur approchée sous la forme décimale avec 6 décimales exactes pour la première et 3 décimales exactes pour deux autres

+++++++++++++++++++++++Exercice 42 :++++++++++++++++++++++++

Une boite contient six boules vertes et n boules blanches

Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boite. Si les deux boules sont de même couleur le joueur gagne 1F et si elles sont de couleurs différentes le joueur perd 1F

1) Dans cette question, on suppose que n=3

   Calculer la probabilité d'obtenir

   a) Deux boules de même couleurs
   b) Deux boules de couleurs différentes

2) Dans cette question l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2, et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage des deux boules, associe le gain algébrique du joueur

a) Exprimer, en fonction de n, les probabilités des évènements

$$(\mathrm{X}=1) \text{ et } (\mathrm{X}=-1)$$

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est :$E(X)=\frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $E(X)=0$?

   Pour quelles valeurs de n a-t-on : $E(X)<0$?

+++++++++++++++++++++++Exercice 43:++++++++++++++++++++++++

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher.

On tire une boule, toutes les boules ayant la probabilité d'être tirée, on note sa couleur et on remet dans l'urne

On effectue ainsi n tirages à la suite ($n\geq 2$)

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages

1- Déterminer la loi de probabilité de la variable X. Donner la valeurs de E(X) et V(X)

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$\begin{cases} Y = k, & \text{si on obtient une boule blanche pour la première fois au k} - \text{ième tirage} \\ Y = 0, & \text{si les n boules tirées sont noires} \end{cases}$

2- Pour $k = \{1; 2; 3; \dots \dots ; n\}$. Calculer $P(Y = k)$
3- Calculer $P(Y = 0)$
4- Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$
5- Soit x un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul , on pose $\varphi(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
   a- Donner une autre écriture de $\varphi(x)$
   b- En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$
   c- En déduire que : $E(Y) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

++++++++++++++++++++++++Exercice 44:+++++++++++++++++++++++++

1- Soit (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$
   a- Soit (v_n), définie pour $n \geq 1\ par$; $v_n = u_n - \frac{2}{5}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
   b- En déduire l'ex/pression (v_n) en fonction de n puis celle de (u_n),
2- On considère deux dés notées A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change le dé. Puis on relance et ainsi de suite.
On désigne par A_n l'évènement « On utilise le dé A au n$^{\text{ième}}$ lancer »
Par $\bar{A}_n$ l'évènement contraire de A_n
Par R_n l'évènement « On obtient rouge au n$^{\text{ième}}$ lancer » ; Par $\bar{R}_n$ l'évènement contraire de R_n
Par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n

a- Déterminer a_1 b- Déterminer r_1
   c- En remarquant que, pour tout $n \geq 1, R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \bar{A}_n)$. Montrer de : $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$
   d- Montrer que, pour tout $n \geq 1, A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\bar{R}_n \cap \bar{A}_n)$.
   e- En déduire que pour tout $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n
   f- En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis limite de r_n

++++++++++++++++++++++++Exercice 45 :+++++++++++++++++++++++++

1- On considère les polynômes :

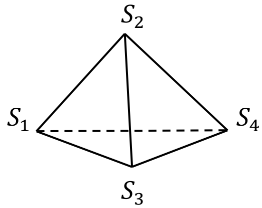
$$f(x) = x - 1 \ \ ; \ \ g(x) = 5x - 4 \ \text{ et } \ h(x) = \left(5x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{163}{4}$$

a- Résoudre dans R les équations :

$$g(x)h(x) = 0 \ \text{ et } \ f(x)g(x)h(x) = 0$$

b- Développer réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x : $g(x)h(x)$ et $f(x)g(x)h(x)$

2- Soit $S_1;\ S_2;\ S_3\ et\ S_4$ les quatre sommets d'un dé tétraédrique :



On lance ce dé sur plan. On appelle p_1 la probabilité pour que le sommet S_1 ne soit pas en contact avec le plan, p_2 la probabilité pour que le sommet S_2 ne soit pas en contact avec le plan, de même pour $p_3\ \ et\ \ p_4$ pour les sommets $S_3\ \ et\ S_4$

a- Sachant que $p_1;\ p_2;\ p_3\ et\ p_4$ forment dans cet ordre une suite géométrique de raison q et de 1er terme $p_1 = \frac{125}{369}$

Calculer la raison q (on utilisera les résultats de la question 1)b et 1)a)

b- En déduire $p_2;\ p_3\ et\ p_4$ sous la forme d'une fraction irréductible

++++++++++++++++++++++++Exercice 46:+++++++++++++++++++++++++

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1) Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.

a) On suppose ici n=10. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnant parmi les deux choisis.

Déterminer la loi de probabilité de X.

b) On revient au cas général avec n supérieur où égal à 3.

Calculer la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2) Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a) On suppose ici n=10. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnant parmi les deux billets choisis.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) On revient au cas général avec n supérieur où égal à 3.

Calculer la probabilité, notée q_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a : $P_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

b) En remarque que pour tout entier n, n-2 inférieur à n-1, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $P_n - q_n < 10^{-3}$

c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 47:+++++++++++++++++++++++++

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches

On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A « On obtient des boules de deux couleurs »

B « On obtient au plus une blanche »

1. a) Calculer la probabilité de l'évènement :
   « Toutes les boules tirées sont de la même couleur »
   b) Calculer la probabilité de l'évènement :
   « On obtient exactement une boule blanche »
   c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B), p(A)$ *et* $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad et \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

1. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si : $2^{n-1} = n + 1$
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal 2 par :

$$u_n = 2^{n-1} - (n+1)$$

   Calculer $u_2;\ u_3\ et\ u_4$
   Démontrer que la suite u_n est strictement croissante
3. En déduire la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soient indépendants

++++++++++++++++++++++++Exercice 48:+++++++++++++++++++++++++

On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieur

1) Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) Une face blanche b) Une face noire
2) On jette ce dé quatre fois de suite
a) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche et une face blanche

b) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers

c) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au $4^{ème}$ lancer (une face noire pouvant apparaitre au cours des autres lancers)

3) Soit n un entier naturel non nul

a) Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geq 0{,}99$

+++++++++++++++++++++++Exercice 49:++++++++++++++++++++++++

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 50 euro et six pièces de 20 euro. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie

1) Calculer la probabilité de l'évènement A « tirer trois pièces de 50 euro »

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 50 euro figurant parmi les trois pièces tirées

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X

c) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque les trois pièces tirées dans le porte-monnaie

Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

+++++++++++++++++++++++Exercice 50:++++++++++++++++++++++++

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln a$; $\ln b$ *et* $\ln c$ *où* a, b *et* c sont en progression géométrique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

1) Calculer a, b *et* c et la variance $V(X)$

2) Soit A, B *et* C trois points d'abscisses respectives 1, -2 et 3 d'une droite graduée (Δ)

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, \ln a), (B, \ln b), (C, \ln c)\}$

b) On pose : $\phi(\mathrm{M}) = \frac{1}{6}\mathrm{MA}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{MB}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{MC}^2$, où M est un point de (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 9$

+++++++++++++++++++++++Exercice 51:++++++++++++++++++++++++

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points A(0 ;1) ; B(1 ;0) et C(-1 ;0) affectés des coefficients respectifs 1, b et c

1- Discuter l'existence du barycentre G de ce système de points suivant les valeurs de b et c. Quelles sont alors les coordonnées de G ?

2- Le couple (b ; c) est obtenu de la manière suivante : b est le résultat du premier jet d'un dé dont les faces portent les nombres -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; c est le résultat du second jet du même dé. Chaque couple a la même probabilité d'apparition a- Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1 ?

b- Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle

c- Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes de repère

++++++++++++++++++++++++Exercice 52:+++++++++++++++++++++++++

Dans un lycée, 62% des élèves sont des garçons ou passent leur baccalauréat à la fin de l'année, 77% sont des filles ou ne passent pas leur baccalauréat à la fin de l'année et 25% sont des garçons qui ne passent pas leur baccalauréat à la fin de l'année. Déterminer le pourcentage de filles et le pourcentage d'élèves passant leur baccalauréat

++++++++++++++++++++++++Exercice 53:+++++++++++++++++++++++++

Un examen se décompose de questions aux quelles il faut répondre par oui ou par non

Si un élève connait la réponse, il répond correctement, s'il ignore, il tire à pile ou face la réponse qu'il inscrira. Un étudiant donné connait 60% du programme. Quelle est la probabilité pour qu'une réponse juste soit due à ses connaissances plutôt qu'au hasard ?

++++++++++++++++++++++++Exercice 54:+++++++++++++++++++++++++

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7

Les tirs sont indépendants. (Tous les résultats sous la forme décimale)

1) Le tireur effectue 5 tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :
   a) Cinq fois
   b) Exactement deux fois
   c) Au moins une fois
2) Il tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité pour qu'il touche au moins une fois est égale à $1-(0{,}3)^n$

Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure où égale à $0{,}995$?

BONNE CHANCE A TOUS

+++

RESOLUTION DES SUJETS DE BAC

2001-2002-2003-2004-2005-2006-2007-2008-2009-2010-2011-2012-2013-2014-2015-2016-2017-2018

ANNALES
BAC TSM

COLLECTION PLANETE M DAOUDA BANGOURA TSM EDITION 2019

BACCALAUREAT 2001 Terminale Sciences Mathématiques

<u>SUJET :</u>A-)1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$a)\ x^2+y^2-2x^2y'=0$

$b)\ y''+2y'+5y=0$ et déterminer la solution f qui vérifie $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$

2) Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $tan^2\alpha=\frac{1-cos2\alpha}{1+cos2\alpha}$

b) Vérifier que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

c) En déduire la valeur de $\tan\frac{3\pi}{8}$

3) Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les points $A(3;1)\ et\ \ B(0;2)$

Soit a un nombre réel strictement positif ; trouver les coordonnées du point M tel que :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{3}{ln\,a}\vec{\imath}+3a\,ln\frac{1}{a}\vec{\jmath}$$

B-) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

1) Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que l'on a : $\forall x\in R,\ \ \frac{f(x)+f(-x)}{2}=\ln 2$
2) Etudier f et tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormé et montrer qu'elle admet un centre de symétrie.
3) Montrer que f est une bijection de R vers R

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

A-) 1) Résolution des équations différentielles :

$a)\ x^2+y^2-2x^2y'=0\ \Rightarrow 2x^2y'=x^2+y^2\ \Rightarrow y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2(*)$,

posons $z=\frac{y}{x}$, donc $y=xz\ et\ y'z+xz'$ La relation (*) devient $z'x+z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^2\Rightarrow$

$$z'x=\frac{1}{2}z^2-z+\frac{1}{2}=\frac{z^2-2z+1}{2}\Rightarrow z'x=\frac{(z-1)^2}{2}\Rightarrow\frac{2z'}{(z-1)^2}=\frac{1}{x}\ \ mais\ z'=\frac{dz}{dx}$$

on a: $\frac{2dz}{(z-1)^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow 2\int\frac{dz}{(z-1)^2}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow 2\left(-\frac{1}{z-1}\right)=\ln|x|+\ln|c|\Rightarrow-\frac{2}{z-1}=\ln|cx|$

$$z=1-\frac{2}{\ln|cx|}\text{ et la solution y de l'équation est:}$$

$$y=zx=\left(1-\frac{2}{\ln|cx|}\right)x\Rightarrow\boxed{y=x-\frac{2x}{\ln|cx|}}\text{ où c }\in\mathrm{N}^*$$

$b)\ y''+2y'+5y=0$; l'équationcaractéristique associée est: $r^2+2r+5=0\ \Rightarrow$

$$\Delta=-16=16i^2\Rightarrow\ \sqrt{\Delta}=16i\Rightarrow\ r_1=-1-2i\ \ et\ r_2=-1+2i$$

d'où la solution générale de l'équation est $\boxed{y=e^{-x}(Acos2x+Bsin2x)}$ A et B sont des constantes arbitraires

Déterminons la solution particulière : $f(0)=1\Rightarrow e^0(Acos0+Bsin0)=1\Rightarrow\boxed{A=1}$

$$f'(0)=-1\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}(Acos2x+Bsin2x)+e^{-x}(-2Asin2x+2Bcos2x)\Rightarrow$$

$$f'(0)=-A+2B=-1\Rightarrow 2B=-1+A\Rightarrow 2B=-1+1=0\Rightarrow\boxed{B=0}$$

la fonction f ainsi trouvée est $\boxed{f(x)=e^{-x}cos2x}$

2) $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ a) **Montrons que** $\boldsymbol{tan^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{1+cos2\alpha}}$

On sait que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ mais $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$ et $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$ alors $\tan^2\alpha = \frac{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}$ $d'où$ $\boxed{\tan^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}$

b) **Vérifions que** $\boldsymbol{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$

D'après la propriété précédente $tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-cos2\frac{\pi}{8}}{1+cos2\frac{\pi}{8}} \Longrightarrow tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}$ $mais\ cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2} \Longrightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$$

c) En déduisons la valeur de $\boldsymbol{tan\frac{3\pi}{8}}$

Comme $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$ sont complémentaires alors on a :

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 \Longrightarrow \boxed{\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1}$$

<u>2ème méthode :</u> on sait que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

alors $\tan\frac{3\pi}{8} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8}}$ mais $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ alors on a :

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\right)}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+1 \text{ d'où } \boxed{\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1}$$

4) **Déterminons les coordonnées de M** : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{3}{\ln a}\vec{\imath} + 3a\ln\frac{1}{a}\vec{\jmath}$ avec $M(x;y);\ A(3;1)\ et\ B(0;2)$

$$2Z_A - 2Z_M + Z_B - Z_M = \frac{3}{\ln a} + 3ia\ln\frac{1}{a} \Longrightarrow -3Z_M = \frac{3}{\ln a} + 3ia\ln\frac{1}{a} - 2(3+i) - 2i \Longrightarrow$$

$$-3Z_M = -6 + \frac{3}{\ln a} + 3ia\ln\frac{1}{a} - 4i \Longrightarrow Z_M = 2 - \frac{1}{\ln a} + i\left(\frac{4}{3} - a\ln\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{M\left(2-\frac{1}{lna};\ \frac{4}{3}-aln\frac{1}{a}\right)}$$

B-) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}$$

1) **Domaine de définition de f :**

$D_f = \left\{\forall x \in R\ ;\ x+\sqrt{x^2+4} > 0\right\}$ $on\ a\ x+\sqrt{x^2+4} > 0 \Longrightarrow; d'où$ $\boxed{D_f = R =]-\infty;+\infty[}$

Montrons que $\forall x \in R;\ \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \ln 2\ ;on\ a:$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln\left[\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]}{2} = \frac{\ln(x^2+4-x^2)}{2} = \frac{\ln 4}{2}$$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2\ d'où\ \forall x \in R; \boxed{\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \ln 2}$$

2) Etudions les variations de f :

•<u>Limites aux bornes de D_f :</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x+|x|)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(x-x) = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x+|x|)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln 2x = \ln(+\infty) = +\infty \quad d'où \ \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty} \quad et \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

•<u>Dérivée et sens de variations de f :</u> f est dérivable sur R, sa dérivée est :

$$f'(x) = (\ln(x+\sqrt{x^2+4}))' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)'}{x+\sqrt{x^2+4}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Longrightarrow$$

$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$ avec $f'(x) > 0, \forall x \in R$

•<u>Tableau De variations :</u>

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

•<u>Branches infinies :</u>AV: ∄ ; AH: ∄ $AO: y = ax + b$ $avec\ a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

En $-\infty, on\ a$: $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2}\right)}{x} = 0 \quad d'où \ a = 0$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OI)

•<u>Représentation graphique :</u>$-(C)\cap(x'Ox): f(x) = 0 \Longrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) = 0 \Longrightarrow x + \sqrt{x^2+4} = 1 \Longrightarrow \sqrt{x^2+4} = 1 - x \Longrightarrow x = -\frac{3}{2} d'où\ A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$

$-(C)\cap(y'Oy): x = 0 \Longrightarrow f(0) = \ln\left(0+\sqrt{0^2+4}\right) = \ln 2\ d'où \quad \mathrm{B}(0; \ln 2)$

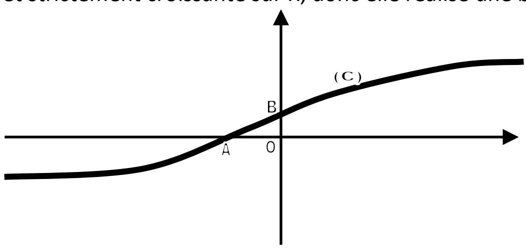
•Montrons que (C) admet un centre de symetrie :

Soit $\mathrm{M}(\mathrm{x}; \mathrm{f}(\mathrm{x}))$ et $\mathrm{M}'(-\mathrm{x}; \mathrm{f}(-\mathrm{x}))$ deux points de (C). Calculons les coordonnées du milieu K segment $[MM']$; on a :

$x_K = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \quad et \quad y_K = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \ln 2\ d'où\ \ K(0; \ln 2)$, les coordonnées de x sont indépendantes de x, donc $K(0; \ln 2)$ est un centre de symétrie de (C)

3) Montrons que f est une bijection de R vers R

f étant continue et strictement croissante sur R, donc elle réalise une bijection de R vers R



BACCALAUREAT 2002 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-) Soit ABCD un losange de centre O avec OB=2.OA

1- Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$

2- Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2+MC^2-2MD^2=-6.OA^2$

B-) On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln|x^2-1|$

1- Etudier le sens de variations de la fonction f

2- On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Montrer que (C) admet un centre de symétrie

3- Démontrer que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=2\ln|x|+\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Donner une interprétation de cette limite

4- Construire (C)

C-) On pose : $u_n=\int_{n\pi}^{n+1} sinx\, e^{-x}dx$

1) Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties

2) Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique, indiquer la raison et le premier terme

3) On note $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

Calculer s_n et calculer sa limite quand x tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

A-)ABCD est un losange de centre O avec OB=2.OA

3) **Déterminons l'ensemble des points M tels que :**

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$$

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ $\quad et \quad$ $\vec{v}=2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ Réduisons $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

•$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$, Puis que (1+1-2=0) alors introduisons le point O milieu du segment $[AC]$ $\vec{u}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DO}\Longrightarrow\vec{u}=2\overrightarrow{DO}$

•$\vec{v}=2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, Puis que (2-1+1= $2\neq0$) alors introduisons le barycentre $G=bar\begin{matrix}B & C & D\\ 2 & -1 & 1\end{matrix}$ $\vec{v}=2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{MG}\Longrightarrow\vec{v}=2\overrightarrow{MG}$

D'où $\vec{u}.\vec{v}=0\Longrightarrow 2\overrightarrow{DO}.2\overrightarrow{MG}=0\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{MG}=0}$ alors $(DO)\perp(MG)\Longrightarrow$l'ensemble des points M recherché est la droite (D) passant par G perpendiculaire à la droite (DO)

•G est tel que : $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ $\Longrightarrow$ G est le milieu du segment [BA]

4) **Déterminons l'ensemble des points M tels que :**

$$MA^2+MC^2-2MD^2=-6.OA^2$$

Puis que (1+1-2=0) alors introduisons le point O milieu du segment $[AC]$

$$(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2-2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})^2=-6.OA^2$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD})+OA^2+OC^2-2OD^2=-6.OA^2\Longrightarrow$$

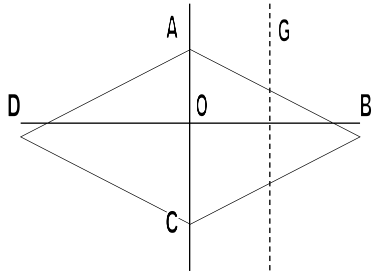
$$mais\ \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}\ ;\ OA=OC\ \ et\ \ OD=2OA\Longrightarrow MA^2+MC^2-2MD^2$$

$$=2\overrightarrow{MO}(-2\overrightarrow{OD})+2OA^2-8OA^2\Longrightarrow$$

$$MA^2+MC^2-2MD^2=-4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}-6.OA^2\ alors\ on\ a:\ -4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}-6.OA^2=-6.OA^2$$

$$\Longrightarrow\boxed{-\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}=0}$$

$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (OD) \perp (MO) \Rightarrow$L'ensemble des points M du plan est la droite (D') perpendiculaire à (OD) passant par O.



B-) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln|x^2 - 1|$

1) Etudions le sens de variations de la fonction f

•<u>Domaine de définition de f :</u>

$$D_f = \{\forall x \in R; x^2 - 1 \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[}$$

•<u>Calculons les limites aux bornes de D_f :</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln|x^2 - 1| = +\infty \, ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln|x^2 - 1| = +\infty \, ;$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to1^{\pm}} \ln|x^2 - 1| = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to-1^{\pm}} \ln|x^2 - 1| = -\infty$$

•<u>Dérivée et sens de variations de f :</u>

$f'(x) = (\ln|x^2 - 1|)' = \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}}$ on pose $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Tableau de signe de la dérivée

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	

<u>Extremum</u> : $f(0) = 0$

•<u>Tableau de variations :</u>

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) Montrons que (C) admet un axe de symétrie :

$\mathrm{f(x)} = \ln|\mathrm{x}^2 - 1|$ et $\mathrm{f(-x)} = \ln|(-\mathrm{x})^2 - 1| = \ln|\mathrm{x}^2 - 1| = \mathrm{f(x)} \Rightarrow \boxed{\mathrm{f(x) = f(-x)}}$ alors f est une fonction paire , donc (C) admet la droite d'équation $\mathrm{x} = 0$ (axe des données) pour axe de symétrie

3) Démontrer que pour tout$x \in D_f$ **,** $f(x) = 2\ln|x| + \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|$

$$f(x) = \ln|x^2 - 1| = \ln\left|x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right| = \ln x^2 + \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right| \Rightarrow \boxed{f(x) = 2\ln|x| + \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|}$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ **:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln|x|+\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|}{x}\right)=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$$

Ceci montre que (C) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$

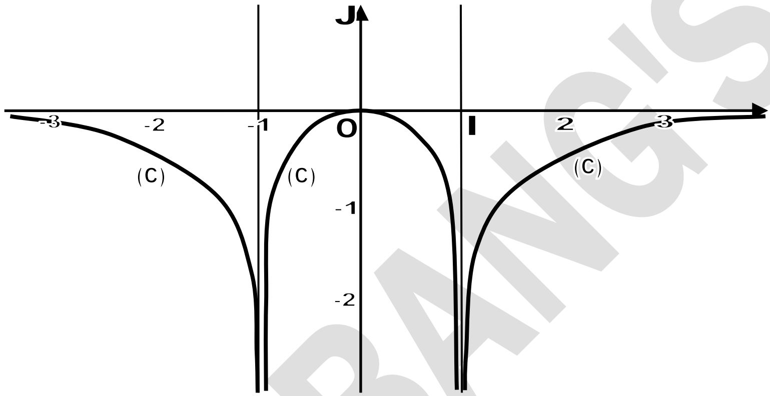
4) Construisons (C) :

Intersection avec les axes :

$-(C)\cap(x'Ox): f(x)=0\Longrightarrow \ln|x^2-1|=\ln 1\Longrightarrow |x^2-1|=1\Longrightarrow\begin{cases}x^2-1=1\\x^2-1=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

$\Longrightarrow O(0\,;0),\ \ A\left(-\sqrt{2};0\right)\ et\ \ B(\sqrt{2},0)$

$-(C)\cap(y'Oy): x=0\Longrightarrow f(0)=\ln|0^2-1|=0\Longrightarrow O(0\,;0)$



C-) On pose : $u_n=\int_{n\pi}^{n+1} sinx\, e^{-x}dx$

1) Calculons u_n à l'aide d'une intégration par parties Posons $\begin{cases}\mathrm{u}=\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\\ \mathrm{dv}=\mathrm{sinxdx}\end{cases}\Longrightarrow$

$\begin{cases}\mathrm{du}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}\\ \mathrm{v}=-\mathrm{cosx}\end{cases}$ on a: $\int \mathrm{udv}=\mathrm{uv}-\int \mathrm{vdu}\Longrightarrow \mathrm{u_n}=[-\mathrm{cosxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}-\int_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}\mathrm{cosxe}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$;

notons $\mathrm{j}=\int_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}\mathrm{cosxe}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}\ \mathrm{u_n}=[-\mathrm{cosxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}-\mathrm{j}$

Calculons j en utilisant à nouveau, l'intégration par parties:

Posons $\begin{cases}\mathrm{u}=\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\\ \mathrm{dv}=\mathrm{cosxdx}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{du}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}\\ \mathrm{v}=\mathrm{sinx}\end{cases}\Longrightarrow \mathrm{j}=[\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}-\int_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}(-\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}})\mathrm{dx}\Longrightarrow$

$\mathrm{j}=[\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}+\int_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}=[\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}+\mathrm{u_n}$ On a dans la relation de $\mathrm{u_n}$:

$\mathrm{u_n}=[-\mathrm{cosxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}-[\mathrm{sinxe}^{-\mathrm{x}}]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}-\mathrm{u_n}\Longrightarrow 2\mathrm{u_n}=-[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}(\mathrm{cosx}+\mathrm{sinx})]_{\mathrm{n}\pi}^{(\mathrm{n}+1)\pi}\Longrightarrow$

$$2\mathrm{u_n}=-\left[(-\mathrm{e})^{-(\mathrm{n}+1)\pi}-(-\mathrm{e})^{-\mathrm{n}\pi}\right]\Longrightarrow \mathrm{u_n}=-\frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-\pi})^{\mathrm{n}}(-\mathrm{e}^{-\pi}-1)\Longrightarrow\boxed{\mathrm{u_n}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}(-\mathrm{e}^{-\pi})^{\mathrm{n}}}$$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique

$u_n=\frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n$Est sous la forme $u_n=u_0.q^n\ avec\ u_0=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\ \ et\ \ q=-e^{-\pi}$

Donc u_n est une suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$ et de raison $q=-e^{-\pi}$

3) Calculons la somme $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

Trouvons u_1 : $u_1=\frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^1=\frac{e^{-\pi}(-e^{-\pi}-1)}{2}$ et on a : $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=$

$u_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{e^{-\pi}(-e^{-\pi}-1)}{2}\times\frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+E^{-\pi}}\Longrightarrow\boxed{s_n=\frac{e^{-\pi}}{2}[(-e^{-\pi})^n-1]}$

Calculons $\lim_{x\to+\infty} s_n$: $\lim_{x\to+\infty} s_n = \lim_{x\downarrow+\infty}\left(\frac{e^{-\pi}}{2}[(-e^{-\pi})^n - 1]\right) = \frac{e^{-\pi}}{2}[(-e^{-\pi})^{+\infty} - 1]$

$$= \frac{e^{-\pi}}{2}[0-1] = -\frac{e^{-\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} s_n = -\frac{e^{-\pi}}{2}}$$

BACCALAUREAT 2003 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-) Les faces d'un dé cubique sont numérotés respectivement 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 et 3. On suppose que lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est kx; x étant le numéro de chaque face et k un nombre réel

1) Montrer que $k = \frac{1}{30}$
2) On lance 4 fois ce dé, qu'elle est la probabilité d'obtenir 2 le numéro 6 ?

B-) 1) La fonction numérique g est définie sur $]0,+\infty[$ par : $\mathrm{g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6}$
En utilisant le sens de variations de g, déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$

2) La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $\mathrm{f(x)} = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Utiliser les résultats de la question 1) pour déterminer le sens de variations de f

3) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$ et (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan
Montrer que (D) est asymptote à (C) et étudier la position relative de (C) et (D)

4) Tracer (C) et (D)

+++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

A-)1) Montrons que $k = \frac{1}{30}$

Soit Ω l'univers associé à l'expérience ; on a :$\Omega = \{3; 4; ; 5; 6; 6; 6\}$ *et*

$$P(\Omega) = P(3) + P(4) + P(5) + 3P(6)$$

La probabilité de l'apparition d'un numéro x est

$$P(x) = xk, donc : P(3) = 3k, P(4) = 4k, P(5) = 5k\ et\ P(6) = 6k$$

D'où $P(\Omega) = 3k + 4k + 5k + 3\times 6k = 12k + 18k = 30k = 1 \ \Rightarrow 30k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{30}}$

2) Calculons la probabilité de l'évènement A: « Obtenir 2 fois le numéro 6 au cours de 4 lancers » On utilise le schéma de Bernoulli pour chaque lancer, avec deux éventualités :

•Le succès : le numéro obtenu est 6 ; la probabilité est $p = 3\times 6k = 18k = 18\times\frac{1}{30} = \frac{3}{5}$

•L'échec : le numéro obtenu n'est pas 6, la probabilité est $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

D'où la probabilité de 2 succès sur les 4 lancers est :

$$P(A) = C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{4-2} = 6\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 6\times\frac{9}{25}\times\frac{4}{25} = \frac{216}{625} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{216}{625}}$$

B-)1) La fonction numérique g est définie sur $]0,+\infty[$ par : $\mathbf{g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6}$

En utilisant le sens de variations de g, déterminons suivant les valeurs de x, le signe de $\mathbf{g(x)}$

•<u>Calcul de limites :</u> $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x} + \frac{6}{x}\right) = +\infty(+\infty) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

$\lim_{x\to0^+}\mathrm{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\left(2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6\right) = 0 - (-\infty) + 6 = +\infty \ \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to0^+}\mathrm{g(x)} = +\infty}$

•<u>Calcul de dérivée de g :</u>$\mathrm{g'(x)} = \left(2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6\right)' = 2\sqrt{x} + 2x.\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3.\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{\mathrm{g'(x)} = \frac{3(x\sqrt{x}-1)}{x}}$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x\sqrt{x}-1$;on a $g(1)=2+6=8$

x	0	1	$+\infty$
$x\sqrt{x}-1$	$-$		$+$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	8	$\nearrow +\infty$

<u>Signe de g(x) :</u> Dans le tableau ci-dessus la plus petite valeur de g(x) est 8 alors ceci montrer que $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) > 0$

2) La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1\right) = \frac{3\ln 0^+}{\sqrt{0}}+0-1=-\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1\right) = \frac{3\ln +\infty}{\sqrt{+\infty}}+\infty-1=+\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty}$$

b) Sens de variations de f :

<u>Calcul de dérivée de f et son signe :</u> $f'(x)=\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1\right)'=\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}\right)'+1$

$f'(x)=\frac{\frac{3}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}.3\ln x}{x}+1=\frac{\frac{6x-3x\ln x}{2x\sqrt{x}}}{x}+1=\frac{6-3\ln x}{x\sqrt{x}}+1 \Longrightarrow f'(x)=\frac{2x\sqrt{x}-3\ln x+6}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}g(x)$ Or $2x\sqrt{x}>0$ et $g(x)>0, \forall x \in]0,+\infty[$ alors $f'(x)>0, \forall x \in]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

3) **Montrons que (D) est asymptote à (C)**

Vérifions si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1-(x-1)\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{3\ln+\infty}{\sqrt{+\infty}}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0 \quad \boldsymbol{cqfm}$$

Étudions la position relative de (C) et (D)

Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)-y=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

Tableau de signe de $\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$:

x	0	1	$+\infty$
$3\ln x$	$-$		$+$
$\sqrt{x}$	$+$		$+$
$f(x)-y$	$-$		$+$
Positions relatives	(C) est au dessous de (D)		(C) est au dessus de (D)

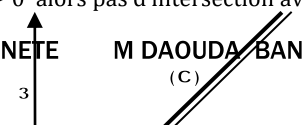
Si $x=1$ (C) et (D) sont confondus ou elles se coupent

4) **Construisons (C) et (D) :**

<u>Branches infinies :</u> $AV: x=0$; $AH: \nexists$ et $AO: y=x-1$

<u>Intersection avec les axes :</u> $-(C)\cap(x'Ox): f(x)=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow A(1;0)$

$-(C)\cap(y'Oy): x>0$ alors pas d'intersection avec $(y'Oy)$ et (D) : $y=x-1$:



.

BACCALAUREAT 2004 Terminale Sciences Mathématiques

<u>SUJET :</u>A-) 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$

2) Résoudre dans Z² l'équation (E) : $45x - 28y = 1$

3) Résoudre dans Z² l'équation (E') : $45x - 28y = 6$

B-) On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire que (C) admet comme asymptote l'un des axes de coordonnées en $-\infty$

2) Etudier les variations de f et construire (C)

3) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = -1 \ et \ x = 1$$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

A-) 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminons deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$

$45 = 28 \times 1 + 17 \Rightarrow 17 = 45 - 28 \times 1;$ $28 = 17 \times 1 + 11 \Rightarrow 11 = 28 - 17 \times 1$

$17 = 11 \times 1 + 6 \Rightarrow 6 = 17 - 11 \times 1$ $11 = 6 \times 1 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6 \times 1$

$6 = 5 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5 \times 1$ $5 = 1 \times 5 + 0 \Rightarrow$

En remplaçant les restes dans relations précédentes on a :

$$6 - 5 \times 1 = 1 \Rightarrow 6 - (11 - 6 \times 1) = 1 \Rightarrow 2 \times 6 - 11 \times 1 = 1 \Rightarrow$$

$$2(17 - 11 \times 1) - 11 \times 1 = 2 \times 17 - 3 \times 11 = 1 \Rightarrow$$

$2 \times 17 - 3(28 - 17 \times 1) = 5 \times 17 - 3 \times 28 = 1 \Rightarrow 5(45 - 28 \times 1) - 3 \times 28 = 5 \times 45 - 8 \times 28 = 1 \Rightarrow 45(5) - 28(8) = 1$ $\begin{cases} 45x - 28y = 1 \\ 45(5) - 28(8) = 1 \end{cases}$ Par comparaison $x = 5$ et $y = 8$

$d'où$ la solution de l'équation est (5 ; 8)

2) Résolvons dans Z² l'équation (E) : $45x - 28y = 1$

Comme (5 ; 8) est une solution particulière de (E) on a : $\begin{cases} 45x - 28y = 1 \\ 45(5) - 28(8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$

$$45x - 28y = 45(5) - 28(8) \Rightarrow 45(x - 5) = 28(y - 8) \Rightarrow \frac{x-5}{28} = \frac{y-8}{45} = k$$

$$(\text{théorème de Gauss})\ k \in Z \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 28k \\ y - 8 = 45k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 28k \\ y = 8 + 45k \end{cases}$$

D'où l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \{(5 + 28k; 8 + 45k)\} \quad avec\ k \in Z}$

3) Résolvons dans Z² l'équation (E') : $45x - 28y = 6$

De la relation $45(5) - 28(8) = 1$ on a : $45(30) - 28(48) = 6$ on a

$$\begin{cases} 45x - 28y = 6 \\ 45(30) - 28(48) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 = 6\ on\ a : 45x - 28y = 45(30) - 28(48) \Rightarrow$$

$$45(x - 30) = 28(y - 48) \Rightarrow \frac{x - 30}{28} = \frac{y - 48}{45} = k \Rightarrow \begin{cases} x - 30 = 28k \\ y - 48 = 45k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 + 28k \\ y = 48 + 45k \end{cases}$$

D'où l'ensemble de solution est $\boxed{S = \{(30 + 28k; 48 + 45k)\} \quad avec\ k \in Z}$

B-) On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = (x - 1)e^{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé

1) Etudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$D_f = R =]-\infty, +\infty[$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1)e^{x+1} = (-\infty - 1)e^{-\infty+1} = -\infty e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

cette limite montre que $y = 0$ est asymptote à (C)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1)e^{x+1} = (+\infty - 1)e^{+\infty+1} = +\infty e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) Etudier les variations de f et construire (C)

<u>Calcul de dérivée de f et son signe :</u>

$$f'(x) = \left((x - 1)e^{x+1}\right)' = e^{x+1} + (x - 1)e^{x+1} = xe^{x+1} \Rightarrow f'(x) = xe^{x+1}$$

Posons $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad et \quad f(0) = (0 - 1)e^{0+1} = -e \Rightarrow f(0) = -e$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-e$	$\nearrow +\infty$

Construction de (C) :

<u>Branches infinies :</u>$AV: \nexists \quad AH: y = 0 \ \ à - \infty \quad et \quad AO: y = ax + b; \quad a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

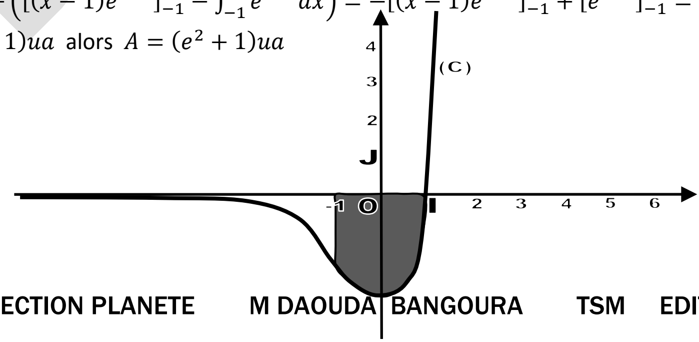
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)e^{x+1}}{x} = +\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)

<u>Intersection avec les axes :</u>$-(C) \cap (x'Ox): f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1; 0)$

$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \Rightarrow f(0) = -e \Rightarrow B(0; -e)$

3) Calculons l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1\ \ et\ \ x = 1$ $\quad A = -\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\int_{-1}^{1}(x - 1)e^{x+1}dx$; posons: $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^{x+1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x+1} \end{cases} \Rightarrow$

$A = -\left([(x - 1)e^{x+1}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{x+1}dx\right) = -[(x - 1)e^{x+1}]_{-1}^{1} + [e^{x+1}]_{-1}^{1} = 2 + e^2 - 1 =$ $(e^2 + 1)ua$ alors $A = (e^2 + 1)ua$



BACCALAUREAT 2005 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-) 1)a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929

b) Trouver les couples (a,b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation $x^2-91x+588=0$

2) Démontrer que $A=3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5

B-) Soit la suite u_n définie par : $u_1=-1$ et $u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout entier n non nul

5) Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite u_n est majorée par 3
6) Etudier le sens de variations de la suite u_n
7) On considère la suite v_n définie par pour tout entier naturel n non nul : $v_n=n(3-u_n)$

Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

8) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

C-) Soit θ un nombre réel tel que $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

1) Résoudre dans C, l'équation : $z^2cos^2\theta-2zsin\theta cos\theta+1=0$
2) Déterminer le module et l'argument de chaque solution de cette équation
3) Résoudre l'équation différentielle : $(1+cos2\theta)y''-(2sin2\theta)y'+2y=0$ *où y* représente la fonction de variable x

D-) Soit ABC un triangle

4) Construire I, J, K tels que :

$I=bar\{(A,2);(C,1)\}$, $J=bar\{(A,1);(B,2)\}$ *et* $K=bar\{(C,1);(B,-4)\}$

5) Démontrer que :
   d) Le point B est le barycentre de $\{(C,1);(K,3)\}$
   e) Le point J est le barycentre de $\{(A,2);(C,1);(K,3)\}$
   f) Le milieu du segment $[IK]$ est le point J
6) Soit L et M les milieux respectifs de $[CI]$ *et* $[CK]$. Démontrer que $IJML$ est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de $\{A,B,C\}$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

A-) 1)a) Trouvons l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929

$$5929=7^2\times 11^2 \quad alors \quad d_{5929}=(2+1)(2+1)=3\times 3=9$$

on a les diviseurs de 5929: $(7^0;\ 7^1;\ 7^2)(11^0;11^1;11^2)=(1;7;49)(1;11;121)\Longrightarrow$

$$\boxed{D_{5929}=(1;7;11;49;77;121;539;847;5929)}$$

b) Trouvons les couples (a,b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation $x^2-91x+588=0$

On trouve le PGCD et PPCM en résolvant l'équation :$x^2-91x+588=0$; on a :

$$\Delta=b^2-4ac=(-91)^2-4(588)=5929=77^2 \text{ alors } \sqrt{\Delta}=77\Longrightarrow$$

$$x_1=\frac{91-77}{2}=7 \ et\ x_2=\frac{91+77}{2}=84$$

NB : On sait que $PPCM(a;b)>PGCD(a;b)$; alors $PPCM(a;b)=84$ et $PGCD(a;b)=7$

Recherche des couples de solutions : $\begin{cases} PPCM(a;b) = 84 \\ PGCD(a;b) = 7 \end{cases}$

$$PGCD(a;b) = 7 \ \exists(x,y) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ tels que: } \begin{cases} a = 7x \\ b = 7y \end{cases} \quad \text{avec } \mathrm{PGCD}(x;y) = 1$$

D'après la Propriété Fondamentale du PPCM, on a :

$$PPCM(a\,;b) \times PGCD(a\,;b) = a.b \Longrightarrow a.b = 84 \times 7 = 588 \Longrightarrow$$

$7x.7y = 588 \Longrightarrow xy = 12$, d'où le tableau des valeurs suivantes :

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

D'où : $(x;y) = \{(1;12);\ (3;4);\ (4;3);\ (12;1)\}$

Alors $\boxed{(a;b) = \{(7x;7y)\} = \{(7;84);\ (21;28);\ (28;21);\ (84;7)\}}$

2) Démontrons que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5

Cela revient à montrer que $A \equiv 0[5]; on\ a$:

$3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5] \Longrightarrow 3^{3n} \times 3^2 + 2^n \times 2^4 \equiv 0[5] \Longrightarrow 27^n \times 9 + 2^n \times 16 \equiv 0[5]$ mais $\dot{27} = \dot{2}$; $\dot{9} = \dot{4}$ et $\dot{16} = \dot{1}$ dans $Z/5Z$ alors $2^n \times 4 + 2^n \times 1 \equiv 0[5]$ $\Longrightarrow 2^n(4+1) \equiv 0[5] \Longrightarrow$

$2^n \times 5 \equiv 0[5]$ mais $\dot{5} = \dot{0}$ dans $Z/5Z$ d'où $2^n \times 0 \equiv 0[5] \Longrightarrow \boxed{0 \equiv 0[5]}$ **cqfd**

Ceci montre que A est divisible par 5

B-) Soit la suite u_n définie par : $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout entier n non nul

5) Montrons, en raisonnant par récurrence, que la suite u_n est majorée par 3

• Vérifions que la relation est vraie pour certaines valeurs de n :

<u>Pour n=1 :</u> $\boldsymbol{u_1 = -1} < 3 \quad (vraie)$

• Supposons que la relation est vraie dans le rang de n, c'est-à-dire : $u_n \leq 3$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 : $u_{n+1} \leq 3$

Pour cela, on étudie le signe de $u_{n+1} - 3$:

$$u_{n+1} - 3 = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - 3 = \frac{n\,u_n + 3(n+2) - 6(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n\,u_n + 3n + 6 - 6n - 6}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n(u_n - 3)}{2(n+1)} \Longrightarrow \boxed{u_{n+1} - 3 = \frac{n(u_n - 3)}{2(n+1)}}$$

<u>NB :</u> Le signe de $\frac{n(u_n-3)}{2(n+1)}$ dépend de $u_n - 3$; or $u_n \leq 3\ \ alors\ \ u_n - 3 \leq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_{n+1} - 3 = \frac{n(u_n-3)}{2(n+1)} \leq 0}$ alors la relation proposée est vraie dans le rang de $n+1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$ est majorée par 3

6) Etudions le sens de variations de la suite u_n

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$; on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n = \frac{n\,u_n + 3(n+2) - 2(n+1)u_n}{2(n+1)}$$

$= \frac{-(n+2)u_n + 3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$ Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 3 \leq 0 \Longrightarrow 3 - u_n \geq 0 \Longrightarrow$

$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)} \geq 0}$; donc la suite u_n est strictement croissante

7) On considère la suite v_n définie par pour tout entier naturel n non nul : $v_n = n(3-u_n)$

Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $v_n = n(3-u_n) \Longrightarrow v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1}) = (n+1)\left(3-\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$

$$= (n+1)\left(\frac{n(3-u_n)}{2(n+1)}\right) \Longrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}\,n(3-u_n) \Longrightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

Ceci montre que v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_1 = 1(3-u_1) = 3-(-1) = 4 \Longrightarrow v_1 = 4$

8) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n

•Comme v_n est une suite géométrique alors :

$v_n = v_1.q^{n-1} \Longrightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2.\frac{1}{2^{n-1}} = 2^2.2^{1-n} = 2^{3-n} \Longrightarrow \boxed{v_n = 2^{3-n}}$

•$v_n = n(3-u_n) \Longrightarrow \frac{1}{n}v_n = 3-u_n \Longrightarrow u_n = 3-\frac{1}{n}v_n = 3-\frac{1}{n}2^{3-n} \Longrightarrow \boxed{u_n = \frac{3n-2^{3-n}}{n}}$

C-) Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

1) Résolvons dans C, l'équation : $z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-2\cos\theta\sin\theta)^2 - 4\cos^2\theta = 4\cos^2\theta\sin^2\theta - 4\cos^2\theta = 4\cos^2\theta(\sin^2\theta-1) = -4\cos^2\theta\cos^2\theta = -4\cos^4\theta \;\; alors\; \Delta = 4i^2(\cos^2\theta)^2\sqrt{\Delta} = 2i\cos^2\theta$ les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\cos\theta\sin\theta - 2i\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta - i\cos\theta)\;\; et$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\cos\theta\sin\theta + 2i\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta + i\cos\theta)$$

d'où $\boxed{S = \left\{\frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta - i\cos\theta); \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta + i\cos\theta)\right\}}$

2) Déterminons le module et l'argument de chaque solution de cette équation

•$z_1 = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta - i\cos\theta) = \frac{1}{\cos\theta}i(-\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{\cos\theta}(-i)(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta}$

$$= \frac{1}{\cos\theta}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \;\; \text{alors} \;\; \boxed{|z_1| = \frac{1}{\cos\theta} \;\; \text{et} \;\; \arg(z_1) = \theta - \frac{\pi}{2}}$$

•$z_1 = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta + i\cos\theta) = \frac{1}{\cos\theta}i(\cos\theta - i\sin\theta) == \frac{1}{\cos\theta}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\theta} = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\text{alors} \;\; \boxed{|z_1| = \frac{1}{\cos\theta} \;\; \text{et} \;\; \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} - \theta}$$

3) **Résolvons l'équation différentielle : $(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$**

Soit l'équation caractéristique associée à (E) : $(1+\cos 2\theta)r^2 - (2\sin 2\theta)r + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sin 2\theta)^2 - 4(1+\cos 2\theta)2 = 4\sin^2 2\theta - 8 - 8\cos 2\theta$$
$$= 4(2\sin\theta\cos\theta)^2 - 8(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 8$$
$$\Delta = 16\sin^2\theta\cos^2\theta - 8(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1) = 16\sin^2\theta\cos^2\theta - 8(2\cos^2\theta)$$
$$= 16\sin^2\theta\cos^2\theta - 16\cos^2\theta$$
$$\Delta = \cos^2\theta(\sin^2\theta - 1) = -16\cos^2\theta \cdot \cos^2\theta = -16\cos^4\theta = 16i^2\cos^4\theta \;\; alors \;\; \sqrt{\Delta} = 4i\cos^2\theta$$

Les solutions sont: $r_1 = \frac{2\sin 2\theta - 4i\cos^2\theta}{2(1+\cos 2\theta)} = \frac{4\sin\theta\cos\theta - 4i\cos^2\theta}{2(2\cos^2\theta)} = \frac{4\cos\theta(\sin\theta - i\cos\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta - i\cos\theta) = \tan\theta - i \;\; et \;\; r_2 = \frac{2\sin 2\theta + 4i\cos^2\theta}{2(1+\cos 2\theta)} = \frac{4\sin\theta\cos\theta + 4i\cos^2\theta}{2(2\cos^2\theta)} = \frac{4\cos\theta(\sin\theta + i\cos\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta + i\cos\theta) = \tan\theta + i$

D'où $r_1 = \ tan\theta - i \quad et \quad r_2 = tan\theta + i$ alors la solution de l'équation différentielle proposée est : $y = e^{\alpha x}(Acos\beta x + Bsin\beta x) \Longrightarrow \boxed{y = e^{xtan\theta}(Acosx + Bsinx)}$

D-) Soit ABC un triangle

4) **Construisons I, J, K tels que :**

$$\boldsymbol{I = bar\{(A,2);(C,1)\}\ ,\quad J = bar\{(A,1);(B,2)\}\quad et\quad K = bar\{(C,1);(B,-4)\}}$$

$$I = bar\{(A,2);(C,1)\} \Longrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$J = bar\{(A,1);(B,2)\} \Longrightarrow \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$K = bar\{(C,1);(B,-4)\} \Longrightarrow \overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{CK} = \tfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$$

5) **Démontrons que :**

d) Le point B est le barycentre de $\{(\boldsymbol{C},\boldsymbol{1});(\boldsymbol{K},\boldsymbol{3})\}$

Revient à montrer que $\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0}$

•Comme $\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$, alors introduisons le point B :

$\overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 4\overrightarrow{\mathrm{KB}} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 3\overrightarrow{\mathrm{KB}} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \vec{0}}$**cqfd**

e) Le point J est le barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{2});(\boldsymbol{C},\boldsymbol{1});(\boldsymbol{K},\boldsymbol{3})\}$

On sait que $\ J = bar\{(A,1);(B,2)\} \Longrightarrow \quad J = bar\{(A,2);(B,4)\}$ mais $B = \{(C,1);(K,3)\}$ alors d'après le théorème de barycentre partiel, on a : $J = bar\{(A,2);(B,4)\} = bar\{(A,2);(C,1);(K,3)\} \Longrightarrow$

$$\boxed{J = bar\{(A,2);(C,1);(K,3)\}\boldsymbol{cqfd}}$$

f) Le milieu du segment $[\boldsymbol{IK}]$ **est le point J**

Il s'agit de montrer que $J = \ bar\{(I,1);(K,1)\}$

On sait que : $J = bar\{(A,2);(C,1);(K,3)\}$et $I = bar\{(A,2);(C,1)\}$, alors d'après le théorème de barycentre partiel, on a :

$$\mathrm{J} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A},2);(\mathrm{C},1);(\mathrm{K},3)\} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{I},3);(\mathrm{K},3)\} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{I},1);(\mathrm{K},1)\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{J = \ bar\{(I,1);(K,1)\}\boldsymbol{cqfd}}$$

6) **Soit L et M les milieux respectifs de** $[\boldsymbol{CI}]\ \boldsymbol{et}\ [\boldsymbol{CK}]$**.**

Démontrons que $\boldsymbol{IJML}$ **est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de** $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$

Cela revient à montrer que $[JL]\ \ et\ \ [IM]$ ont le même milieu G et $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

•Posons G est le milieu du segment $[JL]$:

$G = bar\{(J,1);(L,1)\} = bar\{(J,6);(L,6)\}$, mais $\quad J = bar\{(A,1)\ ;(B,2)\} = bar\{(A,2)\ ;(B,4)\}\ \ et$

$L = bar\{(C,1);(I,1)\} = bar\{(C,3);(I,3)\}$, alors on a : $G = bar\{(J,6);(L,6)\} = bar\{(A,2)\ ;(B,4);(C,3);(I,3)\}$

De plus $\ K = bar\{(A,2);(C,1)\}$, alors on a : $G = bar\{(A,2)\ ;(B,4);(C,3);(I,3)\} = bar\{(A,2)\ ;(B,4);(C,3);(A,2);(C,1)\} \Longrightarrow G = bar\{(A,4);(B,4);(C,4)\} \Longrightarrow$

$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ (1)

•Posons G' le milieu du segment $[IM]$:

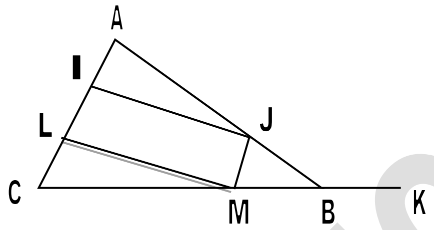
$G' = bar\{(I,1);(M,1)\} = bar\{(I,6);(M,6)\}$, mais $\quad I = bar\{(A,2)\ ;(C,1)\} = bar\{(A,4)\ ;(C,2)\}\ \ et \quad M = bar\{(C,1);(K,1)\} = bar\{(C,3);(K,3)\}$, alors on a : $G' = bar\{(I,6);(M,6)\} = bar\{(A,4);(C,2);(C,3);(K,3)\}$

De plus $K = bar\{(C,-1);(B,4)\}$, alors on a : $G = bar\{(A,4);(B,2);(C,3);(I,3)\} = bar\{(A,4);(C,2);(C,3);(C,-1);(B,4)\} \Longrightarrow G = bar\{(A,4);(B,4);(C,4)\}$

$G' = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\boxed{G = G' = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}}$

D'où $IJML$ est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre de $\{A,B,C\}$



BACCALAUREAT 2006 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-) On compose un jury en tirant au sort trois personnes parmi sept volontaires : quatre hommes et trois femmes

X désigne la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de femme qu'il présente

3) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique
4) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une femme dans le jury

B-) 1) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que : $8x \equiv 7[5]$

2) Résoudre l'équation $(x;y) \in Z \times Z$: $336x + 210y = 294$

C-) Soit le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O,I,J)

On désigne les points $A(1\,;5)$; $B(2\,;3)$ et $C(4\,;4)$

5) Déterminer le barycentre G_α des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1 ; $\alpha + 1$ et $-\alpha + 3$ avec $\alpha \in R$
6) Déterminer l'ensemble des points G_α quand α décrit R
7) Choisir α pour que G_α soit le point D(1 ;3)
8) On prend α=5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25$$

D-) Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1-x)(1+e^x)$ et **C** sa courbe représentative

5) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
6) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$ Préciser la position relative de (C) et (D)
7) Etudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f
8) Tracer (C)

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++++

A-) Soit Ω l'univers : $\mathrm{card}(\Omega) = C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$

3) Déterminons la loi de probabilité de X

La variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3

•$P(X=0)=\frac{C_4^3}{35}=\frac{4}{35}$ $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_4^2}{35}=\frac{18}{35}$ $P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_4^1}{35}=\frac{12}{35}$ $P(X=3)=\frac{C_3^3}{35}=\frac{1}{35}$

D'où le tableau de probabilité :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Calculons son espérance mathématique

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3}x_i.p_i=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}\Longrightarrow\boxed{E(X)=\frac{9}{7}}$$

4) **Calculons la probabilité pour qu'il y ait au moins une femme dans le jury**

Soit A « l'évènement d'avoir au moins une femme dans le jury »

$$P(A)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{31}{35}\Longrightarrow\boxed{P(A)=\frac{31}{35}}$$

B-) 1) Déterminons l'ensemble des entiers relatifs tels que : $8x\equiv 7[5]$

On sait que : $8\equiv 3[5]$ *et* $7\equiv 2[5]$ *alors* $3x\equiv 2[5]\Longrightarrow 2\times 3x\equiv 2\times 2[5]\Longrightarrow 6x\equiv 4[5]$

$$\Longrightarrow x\equiv 4[5]\Longrightarrow \boxed{x=4+5k}$$

2) Résolvons l'équation $(x;y)\in Z\times Z$: $336x+210y=294$

Vérifions l'existence de solutions : $PGCD(336;210)$

$336=1*210+126$,$210=1*126+84$, $126=1*84+42$, $84=2*42+0$

alors $\text{PGCD}(336;210)=42$

Comme $\frac{294}{42}=7$ alors cette admet de solutions, déterminons alors ces solutions :

En divisant toute l'équation par 42, on a : $8x+5y=7$

•En éliminant y , on obtient $8x\equiv 7[5]$; d'après **B-) 1)** $x=4+5k$

•Dans l'équation remplaçons x par son expression :

$$8(4+5k)+5y=7\Longrightarrow 5y=7-32-40k\Longrightarrow 5y=-25-40k\Longrightarrow y=-5-8k$$

$$d'où\quad \boxed{S=\{(4+5k;\ -5-8k)\}}\ avec\ \ k\in Z$$

C-) On désigne les points A(1 ;5) ; B(2 ;3) et C(4 ;4)

1) **Déterminons le barycentre $G_\alpha=\text{bar}\{(A,1),(B,1+\alpha),(C,-\alpha+3)\}$ α ∈ R**

Comme $1+\alpha+1-\alpha+3=5\neq 0$ alors G_α existe

$$\begin{cases}x_{G_\alpha}=\dfrac{1\times 1+(1+\alpha)\times 2+(-\alpha+3)\times 4}{5}=\dfrac{15-2\alpha}{5}\\ y_{G_\alpha}=\dfrac{1\times 5+(1+\alpha)\times 3+(-\alpha+3)\times 4}{5}=\dfrac{20-\alpha}{5}\end{cases}\Longrightarrow\boxed{G_\alpha\left(\frac{15-2\alpha}{5};\frac{20-\alpha}{5}\right)}$$

2) **Déterminons l'ensemble des points G_α quand α décrit R**

Soit $M(x\,,y)$ un point du plan tel que :

$$M=G_\alpha\ \text{alors on a :}\begin{cases}x=x_G\\ y=y_G\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{15-2\alpha}{5}\\ y=\dfrac{20-\alpha}{5}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}5x=15-2\alpha\\ 5y=20-\alpha\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{15-5x}{2}\\ \alpha=20-5y\end{cases}$$

on pose $\alpha=\alpha$ on a : $\frac{15-5x}{2}=20-5y\Longrightarrow 15-5x=40-10y\Longrightarrow -5x+10y-25=0$

$$\Longrightarrow\boxed{x-2y+5=0}$$

D'où l'ensemble des points M du plan est la droite d'équation : $x-2y+5=0$

3) **Choisissons α pour que G_α soit le point D(1 ;3)**

Pour cela on pose $D(1;3)=G_\alpha\left(\frac{15-2\alpha}{5};\frac{20-\alpha}{5}\right)$alors $\begin{cases}1=\frac{15-2\alpha}{5}\\ 3=\frac{20-\alpha}{5}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{15-5}{2}\\ \alpha=20-15\end{cases}\Longrightarrow\boxed{\alpha=5}$

4) On prend α=5. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\mathbf{MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25}$$

Comme α=5, vérifions si $G_\alpha = \text{bar}\{(A,1),(B,1+\alpha),(C,-\alpha+3)\}$
vérifie la relation scalaire de Leibniz donnée ; on a
$MA^2 + (1+5)MB^2 + (-5+3)MC^2 = 25 \Longrightarrow MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25$,
Comme cette relation vérifie pour α=5 alors introduisons le point G :
$(\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 = k \Longrightarrow (1+6-2)MG^2 + GA^2 + 6GB^2 - 2GC^2 = 25$
$5MG^2 + GA^2 + 6GB^2 - 2GC^2 = 25$; mais $G(1;3)$ alors :

$$GA^2 = (x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 = (1-1)^2 + (3-5)^2 = 4 ;$$

$$GB^2 = (x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2 = (1-2)^2 + (3-3)^2 = 1 ,$$

$$GC^2 = (x_G - x_C)^2 + (y_G - y_C)^2 = (1-4)^2 + (3-4)^2 = 9 + 1 = 10$$

$$\text{alors on a:} 5MG^2 + 4 + 6*1 - 2*10 = 25 \Longrightarrow$$

$$5MG^2 - 10 = 25 \Longrightarrow 5MG^2 = 35 \Longrightarrow MG^2 = 7 \Longrightarrow \boxed{MG = \sqrt{7}}$$

D'où l'ensemble des points M du plan est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{7}$

D-) Le repère (O, I, J) est orthonormé

Soit f la fonction définie par $\boldsymbol{f(x) = (1-x)(1+e^x)}$ et C sa courbe représentative

1- Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\mathbf{1}-\mathbf{x})(\mathbf{1}+\mathbf{e^x}) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x(1+e^x)\right) = +\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\mathbf{1}-\mathbf{x})(\mathbf{1}+\mathbf{e^x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x(1+e^x)\right) = -\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2- Démontrons que la droite (D) d'équation $\mathbf{y = -x + 1}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

Vérifions si $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} ((1-x)(1+e^x) - (1-x)) = \lim_{x\to-\infty} \left((1-x)(1+e^x-1)\right) = \lim_{x\to-\infty} \left((1-x)(e^x)\right) = +\infty e^{-\infty}$$

$$d'où \boxed{\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0} \boldsymbol{cqfd}$$

Précisons la position relative de (C) et (D)

Pour cela étudions le signe de $g(x) = f(x) - y = (1-x)(e^x)$ on a :

$$g(x) = 0 \Longrightarrow (1-x)(e^x) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
g(x)	+	−
Positions relatives	La courbe (C) est au dessus de la droite (D)	La courbe (C) est au dessous de la droite (D)

Si x=1 alors (C) et (D) sont confondues

3- Etudions les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f

$$f(x) = (1-x)(1+e^x) \Longrightarrow f'(x) = -(1+e^x) + (1-x)e^x = -1 - e^x + e^x - xe^x$$

$$= -xe^x - 1 \Longrightarrow \boxed{f'(x) = -xe^x - 1}$$

$\boxed{D_{f'} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$, et calculons les limites de f'(x) aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} (-xe^x - 1) = +\infty e^{-\infty} - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (-xe^x - 1)$$

$$= -\infty e^{+\infty} - 1 = -\infty$$

<u>Dérivons f'(x)</u> : $f'(x) = -xe^x - 1 \Longrightarrow f''(x) = -e^x - xe^x = (-1-x)e^x \Longrightarrow$

$f''(x) = (-1-x)e^x$ alors f''(x)=0 on a $x = -1 f'(-1) = e^{-1} - 1$d'où le tableau de signe et le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''(x)	$+$		$-$
f'(x)	-1 ↗	$e^{-1}-1$	↘ $-\infty$

D'où dans le tableau de variations on constate que : $\forall x \in R; f'(x) < 0$

Tableau de variations de f(x) :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

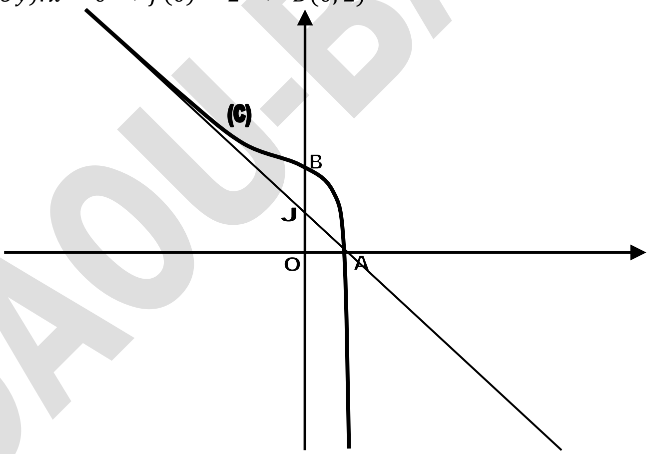
4- Traçons (C)

Branches infinies :$AV : \nexists$; $AH : \nexists$; $AO : y = -x + 1$ à $-\infty$ et cherchons à $+\infty$

$a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1-x)(1+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-(1+e^x)\right) = -\infty$alors (C) admet à $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

Intersection avec les axes :$-(C) \cap (x'Ox): f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1;0)$

$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2 \Longrightarrow B(0;2)$



BACCALAUREAT 2007 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-)1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

2) a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers

b) Résoudre dans N² l'équation : $x^3 - y^3 = 469$

B-) Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces médecins

3) Quelle est la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé ?

4) Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

C-) Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \ , si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 \ , si\ x > 1 \end{cases}$$

1) a) Démontrer que f est continue et dérivable au point $x = 1$

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f

c) Etudier les variations de f. Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C)

d) Tracer (C)

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;\ +\infty[$

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation de.

Tracer la courbe représentative de h^{-1}

D-)1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $u = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$

2) Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe z associe $f(z) = uz + (1+i)(1-u)$

Montrer que f est bijective et déterminer le nombre complexe $w\ tel\ que : f(w) = w$

3) Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes $w, z\ et\ f(z)$ respectivement

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$ et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM

On note F l'application qui, à tout point M associe le point M'

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques

4) Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$

On définie pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n)$. On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe

Calculer en fonction de n la distance IA_n. Quelle est la limite de cette distance quand $n \to +\infty$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++

A-) 1) Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

1ère Méthode : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n}(nk-k^2) = \sum_{k=1}^{n} nk - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n^2(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{3n^2(n+1) - n(n+1(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\left(3n^2 - n(2n+1)\right)}{6} = \frac{(n+1)(3n^2-2n^2-n)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \boldsymbol{cqfd}}$$

2ème Méthode : le raisonnement par récurrence :

•Vérifions que la relation est vraie pour certaines valeurs de n

Pour n=1 ; on a : $\sum_{k=1}^{1} k(1-k) = 1(1-1) = 0 = \frac{(1-1)1(1+1)}{6} = 0$ *alors* $\boxed{0=0}$ *vraie*

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = 1(n-1) + 2(n-2) + \cdots + n(n-n) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \frac{(n+1-1)(n+1)(n+1+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n+1} k(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(k(n-k)+k) = \sum_{k=1}^{n+1} k(n-k) + \sum_{k=1}^{n+1} k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(n-k) + (n+1)\left(n-(n+1)\right) + \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1) + 3n(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n(n-1)+3n)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1+3)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n+2)}{6} \Longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \boldsymbol{cqfd}$$

Conclusion : $\forall n \in N$, la relation est toujours vraie

2) a) Décomposons 469 en produit de facteurs premiers

On a $\boxed{469 = 7 \times 67}$

b) Résolvons dans N² l'équation : $x^3 - y^3 = 469$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 469 = 7 \times 67$:

On a donc : $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 469$ alors $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2 = 469 \end{cases}$ (S_1)

Ou bien : $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 7 \times 67$ alors $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2 = 67 \end{cases}$ (S_2)

Résolvons alors (S_1) et (S_2) :

• Pour le système (S_1), on a :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2 = 469 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ (1+y)^2+(1+y)y+y^2 = 469 \end{cases} \Longrightarrow 1+2y+y^2+y+y^2+y^2 = 469$$

$$\Longrightarrow 3y^2+3y-468 = 0 \Longrightarrow y^2+y-156 = 0 \Longrightarrow \Delta = 1^2 - 4\times 1(-156) = 625 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-1-25}{2} = -13 \text{ à } rejeter \\ y_2 = \dfrac{-1+25}{2} = 12 \end{cases} \quad alors\ \ x = 1 + 12 = 13 \Rightarrow \ (x;y) = \{(13;12)\}$$

•Pour le système (S_2), on a :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + y \\ (7+y)^2 + (7+y)y + y^2 = 67 \end{cases} \Rightarrow 49 + 14y + y^2 + 7y + y^2 + y^2 = 67$$

$$\Rightarrow 3y^2 + 21y - 18 = 0 \Rightarrow y^2 + 7y - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \times 1(-6) = 49 + 24 = 73 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{73} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-7-\sqrt{73}}{2} & \text{à rejeter} \\ y_2 = \frac{-7+\sqrt{73}}{2} & \text{à rejeter} \end{cases} \quad \text{D'où } \boxed{S = \{(13;12)\}}$$

B-) Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = 3^4 = 81$

3) Calculons la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé

Soit A l'évènement « les quatre malades appellent un seul médecin » $P(A) = \frac{3^1}{81} = \frac{3}{81} \Rightarrow$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{27}}$$

4) Calculons la probabilité pour que les trois médecins soit appelés

Soit B l'évènement « les trois médecins sont appelés »

$P(B) = \frac{card(B)}{81}$; Mais dans ce cas un médecin sera appelé deux fois donc on a le nombre d'appel reçu par un médecin : $C_4^2 \times A_2^2 = 12$ alors $\mathrm{card(B)} = 3 \times 12 = 36$; d'où $\mathrm{P(B)} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{\mathrm{P(B)} = \frac{4}{9}}$

C-) Soit f la fonction définie par : R vers R, qui à tout x associe f(x) telle que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}} \ \ , \boldsymbol{si\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{f(x) = 1 - (\ln x)^2} \ \ , \boldsymbol{si\ x} > 1 \end{cases}$$

4) a) Démontrons que f est continue et dérivable au point $x = 1$

•<u>Continuité :</u> f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\to 1^+} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(1)} = \mathrm{l} \ \ (\mathrm{l} \in \mathrm{R})$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1 - (\ln x)^2) = 1 - (\ln 1)^2 = \mathbf{1} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 - 1 + \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1}$ Alors f est continue en 1

•<u>Dérivabilité :</u> f est dérivable en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) = f'(1) = l \ \ (l \in R)$$

Le nombre dérivé à gauche et à droite en 1 est :

$$■ \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x - 1 + \frac{1}{x} - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{x}}{x - 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1-1}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) = 0$$

$$■ \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1 - (\ln x)^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{-(\ln x)^2}{x - 1}\right) = -\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) \times \lim_{x\to 1^+} (\ln x)$$

$$= -1 \times 0 = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = 0$$

Comme $\boxed{\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right) = f'(1) = 0}$ alors f est dérivable en 1

b) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f

•<u>Domaine de définition :</u> $D_f = \{\forall x \in R; x \neq 0\}$ *alors* $\boxed{D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$

•<u>Limites aux bornes de D_f :</u>

■ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$;

■ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - (\ln x)^2) = 1 - (+\infty)^2 = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

■ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) = 0 - 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty}$

■ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) = 0 - 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

•<u>Branches infinies de la courbe (C) :</u>

AV: $x = 0$ est asymptote car $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$; AH: $\nexists$ car $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ et AO: $y = ax + b$

• En $-\infty$, on a: $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ alors $a = 1$

$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x} - x \right) = -1$ d'où $\boxed{y = x - 1}$

Oubien $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ alors $y = x - 1$ est asymptote à $-\infty$

• En $+\infty$, on a: $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - (\ln x)^2}{x} \right) = 0$ alors (C) une branche parabolique de direction (OI)

c) Etudions les variations de f. Démontrons que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C)

<u>Dérivée de f et son signe :</u>

$$\begin{cases} f'(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right)' , si\ x \leq 1 \\ f'(x) = (1 - (\ln x)^2)' , si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad , si\ x \leq 1 \\ f'(x) = -\frac{2 \ln x}{x} \quad , si\ x > 1 \end{cases}$$

D'où le tableau de signe et le tableau de variations:

x	$-\infty$ → -1	-1 → 0	0 → 1	1 → $+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$-$	
$-2 \ln x$				$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -3	-3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	1 ↘ $-\infty$

Démontrons que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C)

Pour cela déterminons $f''(x)$: $f''(x) = \left(-\frac{2 \ln x}{x} \right)' = -\frac{2}{x^2}(1 - \ln x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$

•$f''(e) = -\frac{2}{e^2}(1 - \ln e) = -\frac{2}{e^2}(1 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{f''(e) = 0}$ ***cqfd***

$f(e) = 1 - (\ln e)^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(e) = 0$alors$\Omega(e; 0)$ est le point d'inflexion à (C)

d) Traçons (C)

<u>Intersection avec les axes :</u> $-(C) \cap (x'Ox): f(x) = 0 \Longrightarrow x = e \Longrightarrow A(e; 0)$

$-(C) \cap (y'Oy): x = 0 \Longrightarrow f(0) = \pm\infty \Longrightarrow$ pas d'intersectionavec cet axe

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$

a) Démontrons que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera

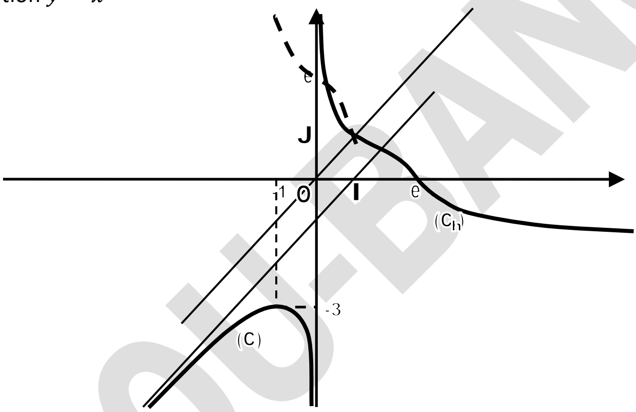
Comme h est strictement décroissante alors elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$vers $f(]1, +\infty[) =]-\infty; 1[$

b) En déduisons que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation de.

Traçons la courbe représentative de h^{-1}

h admet une fonction réciproque h^{-1} de $]-\infty; 1[$ $vers$ $]1; +\infty[$ de même sens de variation de que h

Dans le repère (O, I, J) les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



D-) 1) Déterminons le module et un argument du nombre complexe $u = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$

<u>Module de u :</u>$|u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{|u| = \frac{1}{2}}$

<u>Argument de u :</u> Soit θ un argument de u : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

5) Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe z associe

$$\boldsymbol{f(z) = uz + (1 + i)(1 - u)}$$

Montrons que f est bijective

Posons $f(z) = z'$; $z' \in C; on\ a :\ uz + (1 + i)(1 - u) = z' \Longrightarrow uz = z' - (1 + i)(1 - u) \Longrightarrow$

$$\boxed{z = \frac{z' - (1 + i)(1 - u)}{u}}$$

Sachant que $u \neq 0$ alors, $\forall z' \in C$; son antécédent z est unique alors f est bijective

Déterminons le nombre complexe $\boldsymbol{w\ tel\ que : f(w) = w}$

$$f(w) = w \Rightarrow wu + (1+i)(1-u) = w \Rightarrow wu - w = -(1+i)(1-u) \Rightarrow$$
$$w(u-1) = -(1+i)(1-u) \Rightarrow \boxed{w = 1+i}$$

6) Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes w, z et $f(z)$ respectivement

Donnons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$

$$(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) = \arg\left(\frac{f(z)-w}{z-w}\right) = \arg\left(\frac{uz + (1+i)(1-u) - (1+i)}{z-(1+i)}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{uz + (1+i)(1-u-1)}{z-(1+i)}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{uz - u(1+i)}{z-(1+i)}\right) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) = \arg\left(\frac{u(z-(1+i))}{z-(1+i)}\right) = \arg(u) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) = \frac{\pi}{6}}$$

Calculons la distance IM' en fonction de la distance IM

$$\frac{IM}{IM'} = \frac{1}{u} \Rightarrow \left|\frac{IM}{IM'}\right| = \left|\frac{1}{u}\right| = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow IM = 2IM' \Rightarrow \boxed{IM' = \frac{1}{2}IM}$$

On note F l'application qui, à tout point M associe le point M'

Précisons la nature de F et ses éléments caractéristiques

L'écriture $z' = uz + (1+i)(1-u)$ est de la forme $z' = az + b$; $(a,b) \in C \times C$ alors F est une similitude plane directe de rapport $k = \frac{1}{2}$ d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ et de centre $w = 1+i$

7) Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$

On définie pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n)$. On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe

Calculons en fonction de n la distance IA_n.

$$IA_n = |z_n - w|$$

<u>**1ère méthode :**</u>$z_{n+1} = f(z_n) = uz_n + (1+i)(1-u)$ et $f(w) = w \Rightarrow w = uw + (1+i)(1-u)$ *donc*

$$z_{n+1} - w = uz_n + (1+i)(1-u) - uw - (1+i)(1-u) \Rightarrow z_{n+1} - w = uz_n - uw$$
$$= u(z_n - w)$$
$$\Rightarrow \frac{z_{n+1}-w}{z_n - w} = u \Rightarrow \boxed{\frac{z_{n+1}-w}{z_n-w} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Ceci montre que la suite $z_n - w$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et de premier terme $z_0 - w = -1 + 2i - (1+i) = -2 + i$ alors $z_n - w$ peut s'écrire sous la forme : $z_n - w = (z_0 - w)q^n = (-2+i)\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$

Alors $IA_n = |z_n - w| = \left|(-2+i)\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{2}^n(-2+i)\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{(-2)^2+1^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{5} \Rightarrow$

$$\boxed{IA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{5}}$$

<u>**2ème méthode**</u> :$IA_n = |z_n - w| \Rightarrow IA_{n+1} = |z_{n+1} - w| = |uz_n + (1+i)(1-u) - w| = |uz_n + (1+i)(1-u) - (1+i)| \Rightarrow IA_{n+1} = |uz_n + (1+i)(1-u-1)| = |uz_n - u(1+i)| = |u(z_n - w)| = |u||z_n - w| = \frac{1}{2}IA_n \Rightarrow IA_{n+1} = \frac{1}{2}IA_n$

Alors IA_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme

$$IA_0 = |z_0 - w| = |-1 + 2i - 1 - i| = |-2 + i| = \sqrt{5}$$

D'où $IA_n = IA_0(q)^n = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow \boxed{IA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{5}}$

Calculons la limite de cette distance quand $n \to +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} IA_n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{5}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\sqrt{5} = 0 \times \sqrt{5} \Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} IA_n = 0}$$

BACCALAUREAT 2008 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-)1) Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a, b) tels que l'on ait :

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 42 \\ PPCM(a,b) = 1680 \end{cases}$$

2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que : $8x \equiv 7[5]$

3) Résoudre l'équation $(x; y) \in Z \times Z$: $336x + 210y = 294$

B-) Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille

1) Quelle est la probabilité de pouvoir faire un drapeau République de Guinée :
   a) En prenant simultanément 3 cubes ?
   b) En prenant simultanément 4 cubes ?
2) Quelle est la probabilité en prenant 3cubes successivement, l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée

C-) On considère la fonction f définie par $\mathrm{f(x)} = x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$ et **C** sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de cet ensemble de définition
2) Etudier les variations de f
3) a) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

Préciser la position relative de (D_1) et (C)

b) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

Préciser la position relative de (D_2) et (C)

4) Montrer que le point $I\left(\ln 2\ ; \ln 2 + \frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de (C)
5) Construire (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2cm)

D-) On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés $[AB]$ et $[AD]$ ont pour longueurs respectives a et b

Pour tout réel non nul m, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$$

Pour chacune des questions ci dessous on donnera une solution géométrique puis une solution analytique

4) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lors que m décrit R
5) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

6) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

A-) 1) Trouvons toutes les paires d'entiers naturels (a, b) tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(a, b) = 42} \\ \boldsymbol{PPCM(a, b) = 1680} \end{cases}$$

D'après la propriété fondamentale de PPCM, on a : $\Delta(a, b) \times \nabla(a, b) = a \times b \Longrightarrow 42 \times 1680 = ab$ alors $ab = 70560$

D'où on a : $\begin{cases} \Delta(a, b) = 42 \\ ab = 70560 \end{cases} \exists(x, y) \in N^{*2} tels\ que \begin{cases} a = 42x \\ b = 42y \end{cases}$ avec $\Delta(x, y) = 1$ on a :

$$42x \times 42y = 70560 \Longrightarrow 1764xy = 70560 \Longrightarrow xy = \frac{70560}{1764} = 40 \Longrightarrow xy = 40$$

x	1	2	4	5	8	10	20	40
y	40	20	10	8	5	4	2	1

D'où $(x, y) = \{(1; 40); (5; 8); (8; 5); (40; 1)\}$ mais $(a, b) = \{(42x; 42y)\}$

Alors $\boxed{(a, b) = \{(42; 1680); (210; 336); (336; 210); (1680; 42)\}}$

2) Déterminons l'ensemble des entiers relatifs tels que : $\boldsymbol{8x \equiv 7[5]}$

On sait que : $8 \equiv 3[5]$ *et* $7 \equiv 2[5]$ *alors* $3x \equiv 2[5] \Longrightarrow 2 \times 3x \equiv 2 \times 2[5] \Longrightarrow 6x \equiv 4[5] \Longrightarrow x \equiv 4[5] \Longrightarrow \boxed{x = 4 + 5k}$

3) Résolvons l'équation $(x; y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$: $\boldsymbol{336x + 210y = 294}$

Vérifions l'existence de solutions : $PGCD(336; 210)$

$$336 = 1 * 210 + 126\ , 210 = 1 * 126 + 84\ , 126 = 1 * 84 + 42\ ,\ 84 = 2 * 42 + 0$$

$$\text{alors PGCD}(336; 210) = 42$$

Comme $\frac{294}{42} = 7$ alors cette admet de solutions, déterminons alors ces solutions :

En divisant toute l'équation par 42, on a : $8x + 5y = 7$

•En éliminant y , on obtient $8x \equiv 7[5]$; $d'après\ \mathbf{B}-)\ \mathbf{1})\ \mathrm{x = 4 + 5k}$

•Dans l'équation remplaçons x par son expression :

$$8(4 + 5k) + 5y = 7 \Longrightarrow 5y = 7 - 32 - 40k \Longrightarrow 5y = -25 - 40k \Longrightarrow y = -5 - 8k$$

$$d'où\quad \boxed{S = \{(4 + 5k; -5 - 8k)\}}\ avec\ \ k \in Z$$

B-) Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille

3) Calculons la probabilité de pouvoir faire un drapeau République de Guinée :

c) En prenant simultanément 3 cubes

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = C_{35}^3 = \frac{A_{35}^3}{3!} = \frac{35\times34\times33}{3\times2} = 35 \times 17 \times 11 = 6545$ $alors\ \ card(\Omega) = 6545$

Soit A l'événement « prendre simultanément 3 cubes »

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \text{ avec card(A)} = C_{10}^1 \times C_{20}^1 \times C_5^1 = 10 \times 20 \times 5 = 1000 \text{ alors P(A)} = \frac{1000}{6545}$$

$$= \frac{200}{1309} \Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{200}{1309}}$$

d) En prenant simultanément 4 cubes

Soit Ω l'univers : $\text{card}(\Omega) = C_{35}^4 = \frac{A_{35}^4}{4!} = \frac{35\times34\times33\times32}{4\times3\times2} = 35 \times 17 \times 11 \times 8 = 6545$

$$\text{alors } \operatorname{card}(\Omega) = 52360$$

Soi B l'événement « prendre simultanément 4 cubes »

$$P(B) = \frac{\operatorname{card}(B)}{\operatorname{card}(\Omega)} \text{ avec } \operatorname{card}(B) = C_{10}^2 \times C_{20}^1 \times C_5^1 + C_{10}^1 \times C_{20}^2 \times C_5^1 + C_{10}^1 \times C_{20}^1 \times C_5^2$$

$$\operatorname{card}(B) = \frac{A_{10}^2}{2!} \times 100 + \frac{A_{20}^2}{2!} \times 50 + \frac{A_5^2}{2!} \times 200 = 45 \times 100 + 190 \times 50 + 200 \times 10 =$$

$$\operatorname{card}(B) = 4500 + 9500 + 2000 = 16000 \text{ alors } P(B) = \frac{16000}{52360} = \frac{400}{1309} \Longrightarrow \boxed{P(B) = \frac{400}{1309}}$$

4) Calculons la probabilité en prenant 3 cubes successivement, l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = A_{35}^3 = 35 \times 34 \times 33 \;\; alors \;\; card(\Omega) = 39270$

Soi C l'événement « prendre successivement sans remise 3 cubes»

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} \;\; avec \;\; card(C) = A_{10}^1 \times A_{20}^1 \times A_5^1 = 10 \times 20 \times 5 = 1000$$

$$alors \;\; P(C) = \frac{1000}{39270} = \frac{100}{3927} \Longrightarrow \boxed{P(C) = \frac{100}{3927}}$$

C-) On considère la fonction f définie par f(x)= $x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$ **et C sa courbe représentative**

1) Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D_f = \{\forall x \in R;\; e^x - 2 \neq 0\} \; alors \; e^x \neq 2 \implies x \neq \ln 2 \implies$$

$$\boxed{D_f = R \setminus \{ln\, 2\} =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2\,;\; +\infty[}$$

Calculons les limites aux bornes de cet ensemble de définition

. ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right) = -\infty + \frac{e^{-\infty}}{2(e^{-\infty}-2)} = -\infty \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right) = +\infty + \frac{e^{+\infty}}{2(e^{+\infty}-2)} = +\infty + \frac{+\infty}{+\infty}$ Forme indéterminée

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x-2)} = x + \frac{e^x}{2e^x(1-2e^{-x})} = x + \frac{1}{2(1-2e^{-x})} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{2(1-2e^{-x})}\right) = = +\infty + \frac{1}{2(1-2e^{-\infty})} = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

■ $\lim\limits_{x\to\ln 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\ln 2^-}\left(x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right) = \ln 2 + \frac{e^{\ln 2}}{2(e^{\ln 2}-2)} = \ln 2 + \frac{2}{0^-} = -\infty$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to\ln 2^-} f(x) = -\infty}$$

■ $\lim\limits_{x\to\ln 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\ln 2^+}\left(x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right) = \ln 2 + \frac{e^{\ln 2}}{2(e^{\ln 2}-2)} = \ln 2 + \frac{2}{0^+} = +\infty$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to\ln 2^+} f(x) = +\infty}$$

2) Etudions les variations de f

<u>Dérivons f(x) :</u> $f'(x) = \left(x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right)' = 1 + \frac{e^x 2(e^x-2) - 2e^x(e^x)}{4(e^x-2)^2} = 1 + \frac{2e^{2x} - 4e^x - 4e^{2x}}{4(e^x-2)^2}$

$$= 1 - \frac{e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x-2)^2} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x-2)^2}}$$

Posons $f'(x) = 0 \Longrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ comme $a + b + c = 0$

$$\text{alors} \begin{cases} e^{x_1} = 1 \\ e^{x_2} = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \ln 1 = 0 \\ x_2 = \ln 4 = 2\ln 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$
$e^{2x}-5e^x+4$	+	−	−	+	
$(e^x-2)^2$	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	−	‖ −	+	

Extremums : $f(0)=0+\frac{e^0}{2(e^0-2)}=\frac{1}{-2}\Rightarrow f(0)=-\frac{1}{2}$ et

$$f(2\ln 2)=2\ln 2+\frac{e^{\ln 4}}{2(e^{\ln 4}-2)}=2\ln 2+\frac{4}{4}=2\ln 2+1\Rightarrow f(2\ln 2)=2\ln 2+1$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	‖ −	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$2\ln 2+1$ ↗	$+\infty$

3) a) Démontrons que la droite (D₁) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

Vérifions si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right)=\frac{e^{-\infty}}{2(e^{-\infty}-2)}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0}\ \boldsymbol{cqfd}$$

Précisons la position relative de (D₁) et (C)

Etudions le signe de $g(x)=f(x)-y=\frac{e^x}{2(e^x-2)}\Rightarrow\begin{cases}e^x>0\\ e^x-2\neq 0\Rightarrow x\neq\ln 2\end{cases}$

x	$-\infty$ $\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	−	+
Positions relatives	(C) est au dessous de (D₁)	(C) est au dessus de (D₁)

b) Démontrons que la droite (D₂) d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

Vérifions si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2(1-2e^{-x})}-x-\frac{1}{2}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2(1-2e^{-x})}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2(1-2e^{-\infty})}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2(1-0)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0}\ \boldsymbol{cqfd}$$

Précisons la position relative de (D₂) et (C) Etudions le signe de

$$g(x)=f(x)-y=\frac{1}{2(1-2e^{-x})}-\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2e^{-x}}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-1+2e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{-x}>0\\ 1-2e^{-x}\neq 0\Rightarrow x\neq\ln 2\end{cases}$$

x	$-\infty$ $\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	−	+
Positions relatives	(C) est au dessous de (D₁)	(C) est au dessus de (D₁)

4) Montrons que le point $I\left(\ln 2\ ;\ln 2+\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

Vérifions si $f(2a-x)+f(x)=2b \Longrightarrow$

$$f(2\ln 2-x)+f(x)=2\ln 2-x+\frac{e^{2\ln 2-x}}{2(e^{2\ln 2-x}-2)}+x+\frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}=$$

$$=2\ln 2+\frac{4e^{-x}}{2(4e^{-x}-2)}+\frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}=2\ln 2+\frac{4}{2e^{x}(4e^{-x}-2)}+\frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}$$

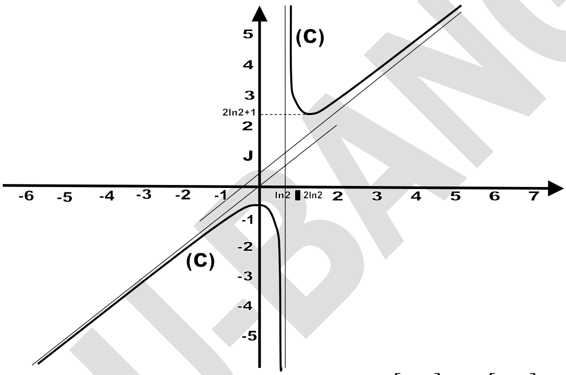
$$=2\ln 2+\frac{4}{2(4-2e^{x})}+\frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}=2\ln 2-\frac{2}{2(e^{x}-2)}+\frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}=2\ln 2+\frac{e^{x}-2}{2(e^{x}-2)}$$

$$=2\ln 2+\frac{1}{2}=2b \Longrightarrow \boxed{f(2\ln 2-x)+f(x)=2\ln 2+\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{cqfd}$$

5) Construisons (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2cm) On donne ln 2=0,69

<u>Intersection avec les axes :</u>$-(C)\cap(x'Ox): f(x)=0 \Longrightarrow$pas de solution alors pas d'intersection avec cet axe

$-(C)\cap(y'Oy): x=0 \Longrightarrow f(0)=0+\frac{e^{0}}{2(e^{0}-2)}=-\frac{1}{4} \Longrightarrow\ A\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$



D-) On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés $[AB]$ et $[AD]$ ont pour longueurs respectives a et b

Pour tout réel non nul m, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{m});(\boldsymbol{B},-\mathbf{1});(\boldsymbol{C},\mathbf{1})\}$$

Pour chacune des questions ci dessous on donnera une solution géométrique puis une solution analytique

4) Déterminons l'ensemble (E_1) des points $G_m$lors que m décrit R

<u>Méthode géométrique :</u>$G_m=bar\{(A,m);(B,-1);(C,1)\} \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{AG_m}=-\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{m}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{m}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}}$$

D'où l'ensemble (E_1) est la droite passant par le point A parallèle à la droite (BC) , c'est-à-dire l'ensemble (E_1) est la droite (AD)

<u>Méthode analytique :</u> Considérons le repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère sont respectivement : $A(0;0)$; $B(a;0)$; $C(a;b)$ et $D(0;b)$

Comme $\overrightarrow{AG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}$ alors on a :

$\begin{cases} x_{G_m}=\frac{0-a+a}{m}=0 \\ y_{G_m}=\frac{0+0+b}{m}=\frac{b}{m} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{G_m\left(0;\ \frac{b}{m}\right)}$Ainsi l'ensemble ($E_1$) est la droite d'équation $x=0$

C’est-à-dire la droite (AD)

5) Déterminons l’ensemble (E₂) des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Méthode géométrique : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$

Introduisons le point G_1, on a :

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}-\overrightarrow{MG_1}-\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{MG_1}$

mais $G_1=A$ alors $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}\Longrightarrow\boxed{MD=\sqrt{a^2+b^2}}$ Alors l’ensemble (E_2) des points M du plan est le cercle de centre D et de rayon $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Méthode analytique : Comme $MD=\sqrt{a^2+b^2}$, alors soit $M(x,y)$ un point du plan ; on a :

$(MD)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\Longrightarrow(x-0)^2+(y-b)^2=a^2+b^2\Longrightarrow\boxed{x^2+(y-b)^2=a^2+b^2}$

Ainsi l’ensemble (E_2) est le cercle de centre $D(0;b)$ et rayon $r=\sqrt{a^2+b^2}$

6) Déterminons l’ensemble (E₂) des points M du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$

Méthode géométrique : $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

Posons $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\quad et\quad\vec{v}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

- Introduisons D dans $\vec{u}$;$\vec{u}=\overrightarrow{MD}$et
- Introduisons le point G_2 dans $\vec{v}$;

$$\vec{v}=2\overrightarrow{MG_2}+2\overrightarrow{G_2A}-\overrightarrow{MG_2}-\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{MG_2}+\overrightarrow{G_2C}=2\overrightarrow{MG_2}\Longrightarrow\vec{v}=2\overrightarrow{MG_2}$$

$\overrightarrow{MD}\cdot2\overrightarrow{MG_2}=0\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0}$ Alors l’ensemble (E_3) des points M est le cercle de diamètre $[DG_2]$

Méthode analytique : Comme $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0$ alors on a $M(x,y),D(0,b)\;et\;\;G_2\left(0,\frac{b}{2}\right)$

(E_3): Introduisons le point I milieu du segment $[DG_2]$ on a :

$$MI=\sqrt{\frac{1}{2}DG_2{}^2}\Longrightarrow MI^2=\frac{1}{2}DG_2{}^2\ \text{ où }\ I\left(0,\frac{3b}{4}\right)$$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left((0-0)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2\right)\Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\boxed{x^2+\left(y-\frac{3b}{4}\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2}$$

D’où l’ensemble (E_3) des points M du plan est le cercle de centre $I\left(0,\frac{3b}{4}\right)$ et de rayon $r=\frac{b}{4}$

BACCALAUREAT 2009 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :

A-)1) En utilisant l'Algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 231 et 3311

2) Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $\begin{cases} A(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots n \\ B(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 \end{cases}$.

On rappelle que $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

a) Démontrer, par récurrence que $B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas le PGCD de$A(n) et\ B(n)$

c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas où $n = 21$

B-) Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un des cafés du village qui en compte cinq. Chaque personne choisi au hasard l'un des cinq cafés

1) Calculer la probabilité pour que chacune des cinq personnes ait choisi un café différent

2) Calculer probabilité pour que ces cinq personnes se retrouvent dans le même café

3) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux se retrouvent dans le même café

C-) Soit f la fonction numérique définie sur R par : $\begin{cases} f(x) = x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

b) On considère la fonction g définie sur $[1;\ +\infty[\ \ par\ \ g(x) = x \ln x$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
Etudier g et tracer (Γ)

c) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
Montrer que la courbe représentative (C) de f et (Γ) sont asymptotes et préciser leurs positions relatives

d) Déterminer$f'\ et\ \ f''$, puis étudier le sens de variations de f' et montrer que f' est positive
Achever l'étude de la fonction f et tracer (C) sur la même figure que (Γ)

D-) ABC est un triangle, on pose :$BC = a\ \ ;\ \ \ AC = b\ \ \ et\ \ \ AB = c$. A' est le milieu du segment $[BC]$; B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC

4) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

5) En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$, établissez que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

6) On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']\ et\ [BC]$

Montrer que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on déterminera le rayon en fonction de $a, b\ et\ c$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

A-) 1) En utilisant l'Algorithme d'Euclide, déterminons le PGCD des nombres 231 et 3311

$$3311 = 231 \times 14 + 77 \quad ; \quad 231 = 77 \times 3 + 0 \quad \text{alors} \quad \boxed{PGCD(3311; 231) = 77}$$

2) a) Démontrons par récurrence que $B(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

•Vérifions pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$\text{Pour } n = 3 \text{ on a, } B(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \quad \text{et}$$

$$B(3) = \frac{3(3+1)(2\times 3+1)}{6} = \frac{3\times 4\times 7}{6} = 14 \text{ alors } 14 = 14$$

•Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de $n+1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

D'après la 2ème étape $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ on a :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \text{ mais } 2n^2 + 7n + 6 = 2\left(n^2 + \frac{7}{2}n + 3\right) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)$$

$$= (n+2)(2n+3) \quad alors \ \boxed{\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}} \boldsymbol{cqfd}$$

D'où $\forall n > 2$ cette relation est toujours vraie

b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminons dans ce cas le PGCD de $\mathbf{A(n)}$ et $\mathbf{B(n)}$

On pose $n = 3k$ alors on a ; $\begin{cases} A(n) = A(3k) = \frac{3k(3k+1)}{2} \\ B(n) = B(3k) = \frac{3k(3k+1)(2\times 3k+1)}{6} = \frac{k(3k+1)(6k+1)}{2} \end{cases}$;

$$\text{d'où le } \boxed{PGCD\big(A(3k); B(3k)\big) = \frac{k(3k+1)}{2}}$$

Ou bien $n = 3k \Rightarrow k = \frac{n}{3}$ $alors\ PGCD\big(A(n); B(n)\big) = \frac{\frac{n}{3}\left(3\frac{n}{3}+1\right)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD\big(A(n); B(n)\big) = \frac{n(n+1)}{6}}$$

e) Vérifions le résultat obtenu dans le cas où $n = 21$

$$A(21) = \frac{21(21+1)}{2} = \frac{21\times 22}{2} = 21\times 11 = 231 \ et\ B(21) = \frac{21(21+1)(2\times 21+1)}{6} = \frac{21\times 22\times 43}{6} = 3311$$

•Comme $n = 21 = 3\times 7$ alors $k = 7 \Rightarrow$

$$PGCD\big(A(21); B(21)\big) = PGCD(231; 3311) = \frac{7(3\times 7+1)}{2} = \frac{7\times 22}{2} = 77$$

• $PGCD\big(A(21); B(21)\big) = \frac{21(21+1)}{6} = \frac{21\times 22}{6} = 77$ d'où $\boxed{PGCD\big(A(21); B(21)\big) = 77}$

B-) Soit Ω l'univers associé à l'expérience : $card(\Omega) = 5^5 = 3125 \Rightarrow \boxed{card(\Omega) = 3125}$

4) Calculons la probabilité pour que chacune des cinq personnes ait choisi un café différent

Soit A l'évènement « chacune des cinq personnes ait choisi un café différent »

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \quad ; card(A) = A_5^5 = 5! = 5\times 4\times 3\times 2 = 120; \quad \text{alors } P(A) = \frac{120}{3125} = \frac{24}{625}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{24}{625}}$$

5) Calculons la probabilité pour que ces cinq personnes se retrouvent dans le même café

Soit B l'évènement « ces cinq personnes se retrouvent dans le même café »

$$\boxed{P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}\quad;\quad card(B)=A_5^1=5\ \text{ alors } P(B)=\frac{5}{3125}=\frac{1}{625}\Longrightarrow P(B)=\frac{1}{625}}$$

6) Calculons la probabilité pour qu'au moins deux se retrouvent dans le même café

Soit C l'évènement « au moins deux se retrouvent dans le même café »

Les évènements A et C sont contraires alors ;

$$P(A)+P(C)=1\Longrightarrow P(C)=1-P(A)=1-\frac{24}{625}=\frac{601}{625}\Longrightarrow\boxed{P(C)=\frac{601}{625}}$$

C-) Soit f la fonction numérique définie sur R par : $\begin{cases}\boldsymbol{f(x)=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\ \ si\ x>0}\\ \boldsymbol{f(0)=0}\end{cases}$

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 1

Continuité en 1 : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=l;(l\in R)$

$f(1)=1\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)=\ln 2$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\ln 2}$ D'où f est continue en 1

Dérivabilité : $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=f'(1)=l;(l\in R)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\ln 2}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x-1}-\frac{\ln 2}{x-1}\right)=\ln 2$$

$\Longrightarrow\boxed{f'(1)=\ln 2}$ Alors f est dérivable en 1

b) On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ $\boldsymbol{par\ \ g(x)=x\ln x}$

Etudions g et traçons (Γ)

Calcul de limites de g :

■ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x\ln x=1\ln 1=0\Longrightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to1}f(x)=0}$;

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty\ln(+\infty)=+\infty\Longrightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty}$

Dérivons g(x) :$g'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1\Longrightarrow$ $\boxed{g'(x)=\ln x+}$

$\boxed{1\ \text{ alors } g'(x)>0}$

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

Branche infinies :AV: ∄ $\quad AH$: ∄ $\quad$ *et* AO: $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=\ln(+\infty)=+\infty$$

Alors AO n'existe pas mais (Γ) admet une branche parabolique de direction (OJ)

Intersection avec les axes :$(\Gamma)\cap(OX)$: $g(x)=0\Longrightarrow x\ln x=0\Longrightarrow x=1;A(1;0)$

c) Etudions la limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty\ln\left(+\infty+\frac{1}{+\infty}\right)=+\infty\ln(+\infty)=+\infty$$

$$\text{D'où }\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

Montrons que la courbe représentative (C) de f et (Γ) sont asymptotes

Pour cela vérifions si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right);$$

on pose $t=\left(\frac{1}{x}\right)^2$ et pour $x\to+\infty$ alors $t\to0$;

$$\text{d'où }\lim_{t\to0}\left(\sqrt{t}\times\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=\sqrt{0}\times\frac{\ln(1+0)}{0}=0\times1=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0}\ \textbf{cqfd}$$

Précisons leurs positions relatives

$f(x)-g(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)>0$ alors (C) est au dessus de (Γ) dans l'intervalle $[1;\ +\infty[$

d) Déterminons f' et f''

$$■f'(x)=\left(x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)'=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{x+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}}=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\Longrightarrow\boxed{f'(x)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

$$■f''(x)=\left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{x^4+4x^2\&-1}{x(x^2+1)^2}\Longrightarrow\boxed{f''(x)=\frac{x^4+4x^2-1}{x(x^2+1)^2}}$$

Etudier le sens de variations de f' et montrer que f' est positive

Calcul de limites :

$$■\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\ln\left(+\infty+\frac{1}{+\infty}\right)+1=+\infty+1=+\infty$$

$\Longrightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty}$

$$■\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\ln\left(0+\frac{1}{0}\right)+\frac{0^2-1}{0^2+1}=\ln(+\infty)-1=+\infty$$

$\Longrightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to0}f'(x)=+\infty}$

Posons $f''(x)=0\Longrightarrow x^4+4x^2-1=0\Longrightarrow t=x^2$; on a : $t^2+4t-1=0\Longrightarrow$

$t_1=-2-2\sqrt{5}$ et $t_2=-2+2\sqrt{5}$ alors $x=\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$ ainsi on a : $f'\left(\sqrt{-2+2\sqrt{5}}\right)=0{,}315$

x	0		$\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$		$+$	
$f'(x)$	‖ $+\infty$	↘	0,315	↗	$+\infty$

Dans ce tableau, $\forall x\in\ ]0;\ +\infty[\quad f'(x)>0$

Achevons l'étude de la fonction f et traçons (C) sur la même figure que (Γ)

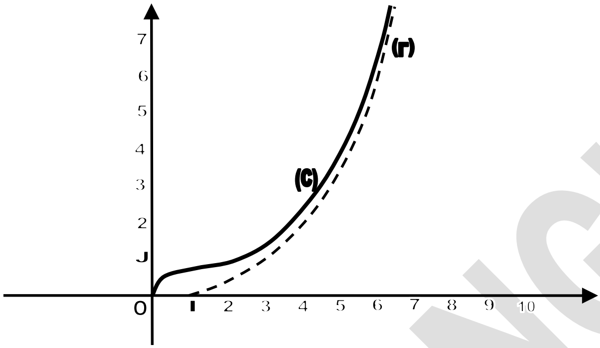
Tableau de variations de f(x) :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Branches infinies : AV : ∄ $\quad AH$: ∄ $\quad$ et AO : $y=ax+b$

$a = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(+\infty+\frac{1}{+\infty}\right) = +\infty$ Alors AO n'existe pas mais (Γ) admet une branche parabolique de direction (OJ)

Intersection avec les axes :$(C) \cap (x'Ox) : f(x) = 0$ alors $x = 0$ car $f(0) = 0$ on a : $O(0,0)$
$(C) \cap (y'Oy): x = 0$ alors $f(0) = 0$; on a $O(0,0)$



D-) ABC est un triangle, on pose :$BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$. A' est le milieu du segment $[BC]$; B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC

1- Montrons que pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Introduisons le point G dans $MA^2 + MB^2 + MC^2$ on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + f(G) = 3MG^2 + f(G) \text{ mais}$$

$$f(G) = \frac{\alpha\beta AB^2 + \gamma AC^2 + \beta\gamma BC^2}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3} \Longrightarrow f(G) = \frac{c^2+b^2+a^2}{3}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \text{ d'où } \boxed{MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

2- En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$, établissons que :

$$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

1ère façon :$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

$$= MA^2 + \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MA} + MB^2 + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\overrightarrow{MB} + MC^2$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} \Longrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} =$$

$$= 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}$$

Introduisons A' dans $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA'}$ *d'où* $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 =$

$$= 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MA'}\right) + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}}$$

2ème façon :$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$; introduisons le point G :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2 = \left((\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right)^2 = \left(3\overrightarrow{MG}\right)^2 = 9MG^2$$

Par comparaison : $3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 9MG^2 \Longrightarrow$

$$4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 9MG^2 - 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$4\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 6MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Longrightarrow \boxed{2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}}$ **cqfe**

3- On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ *et* $[BC]$

Montrons que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on déterminera le rayon en fonction de a, b *et* c

D'après $2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$; posons $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MA'} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = 0$ on a :

$$2(0) + 0 = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} \Longrightarrow 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} = 0 \Longrightarrow MG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{18} \Longrightarrow$$

$$\boxed{MG = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}}$$

D'où l'ensemble des points est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}$

BACCALAUREAT 2010 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :Exercice 1 :

A-) 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

2) a) Résoudre dans Z² ; l'équation : $661x - 991y = 1$

b) Soit (u_n) *et* (v_n) les suites arithmétiques définies par : $\begin{cases} u_0 = 3 \quad et \quad v_0 = 2 \\ \forall n \in N;\ u_{n+1} = u_n + 991 \\ \forall n \in N;\ v_{n+1} = v_n + 661 \end{cases}$

Déterminer tous les couples $(p; q)$ d'entiers naturels inférieurs à 2000 tels que $u_p = v_q$

B-) Soit ABCD un parallélogramme. P est le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A.

Démontrer que les points P, Q et R sont alignés

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$
2) Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ *par :* $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$
   Calculer u_1 *et* u_2 . Exprimer (u_n) *en fonction de n*
3) Montrer que (u_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ? Calculer la limite de cette suite
4) On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   a) Calculer s_1, s_2 *et* s_3 et exprimer s_n en fonction de n
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} s_n$

Problème : A-) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \quad si \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2) Soit φ la fonction dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$
   a) Etudier le sens de variations de φ
   b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que :
   $$(0{,}27 < \beta < 0{,}28 \quad et \quad \varphi(0{,}27) = -0{,}04 \quad et\ \varphi(0{,}28) = 0{,}007)$$
3) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$
   En déduire le sens de variations de f
   b) Vérifier que $f(\beta) = -\beta$
   c) Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
On placera en particulier les points d'abscisses : 1 ; 3 ; 4 ; e^2 et 12. On prendra
$$\ln(0{,}27) = -1{,}31;\ \ln(0{,}28) = -1{,}27\ ;\ \ln 2 = 0{,}7;\ \ln 3 = 1{,}1 \ et\ \ln 5 = 1{,}6$$
B-) 1) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in [3; 4]$; on prendra $f(3) = 0{,}82 \ et\ f(4) = 1{,}1$

b) Démontrer que les équations $f(x) = 1 \ et\ e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes
2) Soit g la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positive x par : $\mathrm{g(x)} = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{\mathrm{x}}}$
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3\ et$ la relation de récurrence, que : $u_{n+1} = g(u_n)$
Démontrer par récurrence, que $\forall n \in N;\ u_n \in [3; 4]$, sachant que $\forall \mathrm{x} \in [3; 4]$, $\mathrm{g(x)} \in [3; 4]$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

<u>**Exercice 1 :**</u>**A-) 1) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, non nul, on a :**
$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k2^{k-1}} = (\boldsymbol{n-1})\boldsymbol{2^n} + \boldsymbol{1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$
•Vérifions que cette relation est vraie pour certaines valeurs de n :
Pour n=1 ; on a : $1 = (1-1)2^1 + 1 = 1$ alors $1 = 1$ vraie
•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :
$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$
•Démontrons que cette relation est toujours vraie dans le rang de n+1 :
$1 + 4 + 12 + \cdots + n2^{n-1} + (n+1)2^n = n2^{n+1} + 1$d'après l'étape précédente on a :
$$(n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = (n+1+n-1)2^n + 1 = 2n2^n + 1 = n2^{n+1} + 1$$
D'où $\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1\ \boldsymbol{cqfd}$ Cette relation est vraie pour tout n

2) a) Résolvons dans Z² ; l'équation : $\boldsymbol{661x - 991y = 1}$

Déterminons le PGCD(661;991): $991 = 1 \times 661 + 330 \quad 661 = 2 \times 330 + 1$
alors $\mathrm{PGCD}(661; 991) = 1$ On a : $1 = 661 - 2 \times 330 \ \ et\ \ 330 = 991 - 1 \times 661$
$$\text{alors } 1 = 661 - 2(991 - 661) = 661 - 2 \times 991 + 2 \times 661$$
$$1 = 3 \times 661 - 2 \times 991\ ;\ \ 661(3) - 991(2) = 1$$
d'où (3 ; 2) est la solution particulière de cette équation alors on a:
$$\begin{cases} 661x - 991y = 1 \\ 661(3) - 991(2) = 1 \end{cases} \text{on pose } 1 = 1;\ \ 661x - 991y = 661(3) - 991(2) \Rightarrow$$
$$661(x-3) = 991(y-2) \Rightarrow \frac{x-3}{991} = \frac{y-2}{661} = k \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 991k \\ y - 2 = 661k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 991k + 3 \\ y = 661k + 2 \end{cases}$$

alors $S = \{(991k + 3; 661k + 2)\}$

b) Soit (u_n) *et* (v_n) les suites arithmétiques définies par : $\begin{cases} u_0 = 3 \quad et \quad v_0 = 2 \\ \forall n \in N;\ u_{n+1} = u_n + 991 \\ \forall n \in N;\ v_{n+1} = v_n + 661 \end{cases}$

Déterminons tous les couples $(p; q)$ d'entiers naturels inférieurs à 2000 tels que $u_p = v_q$

•La forme explicite de la suite (u_n) est :

$$u_n = u_p + (n - p)r \Longrightarrow u_n = u_0 + nr = 3 + 991n \Longrightarrow u_n = 991n + 3$$

Pour n=p on a : $u_p = 991p + 3$

• La forme explicite de la suite (v_n) est :

$$v_n = v_p + (n - p)r \Longrightarrow v_n = v_0 + nr = 2 + 661n \Longrightarrow v_n = 661n + 2$$

Pour n=q on a : $v_q = 661q + 2$

•On pose $u_p = v_q$ on a :

$$991p + 3 = 661q + 2 \Longrightarrow 661q - 991p = 1 \Longrightarrow (p; q) = (661k + 2; 991k + 3\ )$$

Les valeurs de k : $991k + 3 < 2000 \ \Longrightarrow\ k < \frac{1997}{991} \ \Longrightarrow\ k < 2{,}05 \ alors\ k = \{0; 1; 2\}$

Pour k=0 : $(p; q) = (2; 3\ )$ Pour k=1 : $(p; q) = (661 + 2; 991 + 3\ ) = (663; 994)$

Pour k=2 : $(p; q) = (661 \times 2 + 2; 991 \times 2 + 3\ ) = (1324; 1985) \Longrightarrow$

$$S = \{(2; 3); (663; 994); (1324; 1985)\}$$

B-) Cette partie a été supprimée car le point R n'a aucune information

<u>Exercice 2</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1- **Déterminons une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$**

$\mathrm{f(x)} = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$ on a la forme de $(\ln(U))' = \frac{U'}{U}$ alors la primitive de f(x) est

$$F(x) = \ln(e^x + 1) + c$$

2- **Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0\ par :\ \ u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$**

Exprimons (u_n) en fonction de n

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx = [\ln(e^x + 1)\ ]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = \ln(e^{\ln(n+1)} + 1) - \ln(e^{\ln n} + 1)$$

$$= \ln\,(n + 1 + 1) - \ln\,(n + 1) = \ln\left(\frac{n + 2}{n + 1}\right) \Longrightarrow \mathbf{u_n = \ln\left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)}$$

3- **Montrons que (u_n) est une suite décroissante positive.**

<u>**1ère méthode**</u> **:** Pour cela étudions le sens de variation de la fonction $f(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$$f'(n) = \left(\ln\left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)\right)' = \frac{\det\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{1 - 2}{(n + 1)(n + 2)} = -\frac{1}{(n + 1)(n + 2)} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

<u>**2ème méthode**</u> **: Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$**

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n + 3}{n + 2}\right) - \ln\left(\frac{n + 2}{n + 1}\right) = \ln\left(\frac{n + 3}{n + 2}\right)\left(\frac{n + 1}{n + 2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4}\right)$$

$$\text{mais } \forall n > 0\,;\, n^2+4n+3 < n^2+4n+4 \Rightarrow \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1 \Rightarrow \ln\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{d'o}\text{ù } \mathbf{u_{n+1}} - \mathbf{u_n} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

●Comme $u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$; $\forall n > 0; n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0 \Rightarrow \mathbf{u_n} > 0$

D'où $\mathbf{u_n}$ est positive

On peut-on en déduire que comme (u_n) est une suite décroissante positive alors elle minorée.

4- On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

d) Calculons s_1, s_2 et s_3 et exprimons s_n en fonction de n

$$s_1 = u_1 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s_1} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow \boldsymbol{s_2} = \mathbf{ln\,2}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \ln 2 + \ln\frac{5}{4} = \ln\frac{5}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{s_3} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$$\blacksquare s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\frac{n+2}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{s_n} = \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{n+2}}{\mathbf{2}}\right)$$

e) Calculons la limite $\mathbf{s_n}$ lors que n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln\frac{+\infty+2}{2} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{s_n} = +\infty}$$

<u>**Problème :**</u> **A-) Soit f la fonction définie par :** $\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x\ln x}}{\boldsymbol{x+1}} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{f(0)} = \mathbf{0} \end{cases}$

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

<u>Continuité de f en 0 :</u> $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = l\,, (l \in R)$

$f(0) = 0$ alors f est continue en 0

<u>Dérivabilité de f en 0 :</u> $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = l, (l \in R)$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x\ln x}{x+1}}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x\ln x}{x(x+1)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) = \frac{\ln 0^+}{0+1} = -\infty$$

alors $f'(0) = -\infty$ D'où f n'est pas dérivable en 0, mais (C) admet une demi-tangente verticale en ce point

2) Soit φ la fonction dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par : $\boldsymbol{\varphi(x)} = \mathbf{ln}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \mathbf{1}$

a) Etudions le sens de variations de φ

<u>Calcul de limites :</u>

$$\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = \ln 0^+ + 0 + 1 = -\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to0^+} \varphi(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x + x + 1) = \ln +\infty + \infty + 1 = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

<u>Dérivons φ(x) :</u>

$$\varphi'(x) = (\ln x + x + 1)' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} \Longrightarrow \varphi'(x) = \frac{x+1}{x};\ \ \forall x \in]0;\ +\infty[\ \ \varphi'(x) > 0$$

Alors φ est strictement croissante

b) Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que :
$(\mathbf{0,27} < \beta < 0{,}28\ \ et\ \ \varphi(\mathbf{0,27}) = -\mathbf{0,04}\ \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0,28}) = \mathbf{0,007})$

Comme φ est strictement monotone dans cet intervalle alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$\varphi(0{,}27) \times \varphi(0{,}28) < 0 \Longrightarrow -0{,}04 * 0{,}007 = -0{,}00028 < 0$ alors $0{,}27 < \beta < 0{,}28$ est l'unique solution de cette équations

3) a) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x+1}\right)' = \frac{(x\ln x)'(x+1) - (x+1)'(x\ln x)}{(x+1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}\ \text{d'où}\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$$

En déduire le sens de variations de f

Comme φ est strictement croissante, alors

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \beta[;\ \ f'(x) < 0;\ \ f\ est\ \ strictement\ \ décroissante \\ \forall x \in]\ \beta, +\infty[;\ \ f'(x) > 0;\ \ f\ est\ strictement\ \ croissante \end{cases}$$

b) Vérifions que $f(\beta) = -\beta$

•Comme β est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$, alors $\varphi(\beta) = 0 \implies$

$$\ln\beta + \beta + 1 = 0 \Longrightarrow \ \ln\beta = -(\beta + 1)$$

•$f(\beta) = \frac{\beta\ln\beta}{\beta+1} = \frac{-\beta(\beta+1)}{\beta+1} = -\beta\ \ d'où\ \ f(\beta) =) - \beta\ \ \boldsymbol{cqfv}$

c) Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x) = \ln(+\infty) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Dressons le tableau de variation de f

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\beta$	$\nearrow +\infty$

4) Traçons la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) On placera en particulier les points d'abscisses : 1 ; 3 ; 4 ; e^2 et 12.

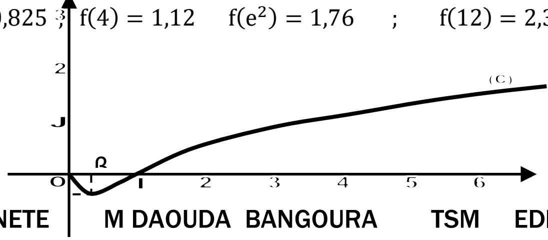
<u>Branches infinies :</u>AV : $\nexists$; AH : $\nexists$ et AO : $y = ax + b$ avec $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x\ln x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OI)

<u>Intersection avec les axes :</u>

•$(C) \cap (x'Ox)$: $f(x) = 0$ alors $x = 0$ car $f(0) = 0$ on a : $O(0,0)$ et $x = 1$; $A(1;0)$

• $(C) \cap (y'Oy)$: $x = 0$ alors $f(0) = 0$; on a $O(0,0)$

$f(1) = 0$; $f(3) = 0{,}825$; $f(4) = 1{,}12$ $f(e^2) = 1{,}76$; $f(12) = 2{,}3$



B-) 1) a) Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in [3; 4]$; on prendra $f(3) = 0,82$ et $f(4) = 1,1$ $f(x) = 1 \Longrightarrow f(x) - 1 = 0$;

posons $g(x) = f(x) - 1$; d'après le théoreme des valeurs intermediaires on a :

$g(3) * g(4) < 0 \Longrightarrow g(3) = f(3) - 1 = 0{,}82 - 1 = -0{,}18$ et $g(4) = f(4) - 1 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$

On a : $g(3) * g(4) = -0{,}18 * 0{,}1 = -{,}018 < 0 \Longrightarrow \alpha \in [3; 4]$ est l'unique solution de cette équation

b) Démontrons que les équations $f(x) = 1$ *et* $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \frac{x \ln x}{x+1} = 1 \Longrightarrow x \ln x = x + 1 \Longrightarrow \ln x = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Longrightarrow e^{\ln x} = e^{1+\frac{1}{x}} \Longrightarrow$$

$$x = e^{1+\frac{1}{x}} \boldsymbol{cqfd}$$

2) Soit g la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positive x par : $\mathbf{g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}}$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ *et* la relation de récurrence, que : $u_{n+1} = g(u_n)$

Démontrons par récurrence, que $\forall n \in N$; $u_n \in [3; 4]$, sachant que $\forall x \in [3; 4]$, $g(x) \in [3; 4]$

•Vérifions pour certaines valeurs de n que la relation est vraie :

$$n = 0 \Longrightarrow u_0 = 3 \in [3; 4] \;\; vraie \;\; et \;\; u_{0+1} = g(u_0) = e^{1+\frac{1}{u_0}} \Longrightarrow u_1 = e^{1+\frac{1}{3}} = e^{\frac{4}{3}} = 3{,}79$$
$$\Longrightarrow u_1 \in [3; 4] \;\; vraie$$

•Supposons que cette relation est vraie dans le rang de n ; $u_n \in [3; 4]$

•Démontrons qu' elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 ; $u_{n+1} \in [3; 4]$

On sait que $u_{n+1} = g(u_n)$ et $\forall x \in [3; 4]$, $g(x) \in [3; 4]$donc pour $u_n \in [3; 4]$;

$g(u_n) \in [3; 4] \Longrightarrow u_{n+1} \in [3; 4]$ ce qui montre que la relation proposée est vraie dans le rang de n+1

BACCALAUREAT 2011 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :A-) Dans un système de numération de base$a$, on considère les nombres :

$$A = \overline{211}; B = \overline{312} \; et \;\; C = \overline{133032}$$

1) Expliquer pourquoi a doit etre strictement supérieur à 3
2) a) Sachant que $C = A \times B$; montrer que :$a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduire que a divise 8

   b) Déterminer alors a
3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrit ce nombre en base 4
4) Dans cette question, on suppose que $a = 4$

a) Ecrire A, B et C dans le système décimal

b) Montrer alors que : $C = A \times B = PPCM(A;\ B)$

En déduire que l'équation $Ax + By = 1$ a des solutions dans Z²

5) On considère dans Z² l'équation : $37x + 54y = 1$

Vérifier que $(19;\ -13)$ est une solution de l'équation. Résoudre cette équation

B-) Deux chasseurs Moussa et Mamadou aperssoivent ensemble un lièvre et tire simultanement

1) Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5 Quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?

2) En fait ; Mamadou a tiré le premier.

a) Quelle est la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitiée ?

b) Dans ces conditions : Mamadou tire le premier, puis Moussa ; quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper saint et sauf ?

C-) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_g $de\ g$ et démontrer que :

$$\forall x \in D_g ; g(x) > x + |x|$$

b) En déduire le signe de $g\ sur\ D_g$

2) Etudier g et tracer sa courbe représentative

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

a) Résoudre l'équation : $f(x) = -\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ et démontrer que f est impaire

b) Etudier f et tracer sa courbe représentative

c) Montrer que f est une bijection de $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ et que $\forall n \in \mathrm{Z} ; f\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$; on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

a) Calculer I_2 et , démontrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n$

b) Etablir que pour tout entier naturel $x \in [1; 2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

c) En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la limite eventuelle de la suite I_n

D-) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct . Soit S la similitude directe de centre I transformant les points A et B d'affixes respectives $3 + i\ \ et\ \ 3 - i$ en A' et B' d'affixes respectives $2 + 5i\ et\ 4 + 3i$

3) Déterminer les éléments caractéristiques de S

4) Déterminer le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients 6 ; 1 ; et 1

En déduire le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++++

A-) Dans un système de numération de base$a$, on considère les nombres :

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{211}} ; \mathbf{B} = \overline{\mathbf{312}}\ \mathbf{et}\ \mathbf{C} = \overline{\mathbf{133032}}$$

1) Expliquons pourquoi a doit etre strictement supérieur à 3

Dans un système de b tous les chiffres qu'on doit utiliser doivent-être strictement inferieurs à cette base et positif ; c'est-à-dire ces chiffres représentent les restes successifs des divisions par b et pourtant ($0 \leq r < b$) alors a doit être strictement supérieur au plus grand chiffre qui composent ces nombres : "$a > 3$"

2) a) Sachant que $C = A \times B$; montrons que :$a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.

$A = \overline{211} = 2a^2 + a + 1$; $B = \overline{312} = 3a^2 + a + 2$ et $C = \overline{133032} = a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 3a + 2$

•$a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 3a + 2 = (2a^2 + a + 1)(3a^2 + a + 2) \Rightarrow a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ $\boldsymbol{cqfm}$

En déduire que a divise 8 Comme $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow$

$$a(a^2 - 3a - 2) = 8 \Rightarrow a^2 - 3a - 2 = \frac{8}{a}\boldsymbol{cqfe}$$

b) Déterminons alors a

• Comme a divise 8 cela veut dire que $a = \{1; 2; 4; 8\}$ et $a > 3$ *alors* $a = \{4; 8\}$

Pour $a = 4$: $4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$ et $\frac{8}{4} = 2$ alors $a = 4$

Pour $a = 8$: $8^2 - 3 \times 8 - 2 = 64 - 24 - 2 = 38$ et $\frac{8}{8} = 1$ alors $38 \neq 1$ d'où $a = 4$

3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrivons ce nombre en base 4

D'après les divisions successives de 214 par 4, on a : $214 = \overline{3112}$

4) Dans cette question, on suppose que $a = 4$

a) Ecrivons A, B et C dans le système décimal

$A = \overline{211} = 2 \times 4^2 + 4 + 1 = 37 \Rightarrow A = 37$; $B = \overline{312} = 3 \times 4^2 + 4 + 2 = 54 \Rightarrow B = 54$ et

$C = \overline{133032} = 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4 + 2 = 1998 \Rightarrow C = 1998$

b) Montrons alors que : $\mathbf{C = A \times B = PPCM(A;\ B)}$

$C = A \times B = 37 \times 54 = 1998$ *et* $PPCM(37; 54) = 37 \times 54 = 1998$ car 54 et 37 sont premiers entre eux

D'où $C = A \times B = PPCM(A;\ B) = 1998$ $\boldsymbol{cqfm}$

En déduisons que l'équation $\boldsymbol{Ax + By = 1}$ a des solutions dans Z²

Comme A et B sont premiers entre eux et que $PGCD(A, B) = 1$ divise 1 alors cette équation admet de solutions dans Z²

5) On considère dans Z² l'équation : $\boldsymbol{37x + 54y = 1}$

Vérifions que $(\mathbf{19};\ \mathbf{-13})$ est une solution de l'équation.

$$37x + 54y = 37(19) + 54(-13) = 703 - 702 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \ \boldsymbol{cqfv}$$

Résolvons cette équation

$\begin{cases} 37x + 54y = 1 \\ 37(19) + 54(-13) = 1 \end{cases}$ on pose $1 = 1$; on a : $37x + 54y = 37(19) + 54(-13) \Rightarrow$

$37(x - 19) = -54(y + 13) \Rightarrow \dfrac{x - 19}{54} = -\dfrac{y + 13}{37} = k \Rightarrow \begin{cases} x - 19 = 54k \\ y + 13 = -37k \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 54k + 19 \\ y = -37k - 13 \end{cases}$ D'où $S = \{(54k + 19\ ;\ -37k - 13)\}$ avec $k \in Z$

B-) Deux chasseurs Moussa et Mamadou aperssoivent ensemble un lièvre et tire simultanement

3) Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5

•Soit A « l'evenement pour que Moussa atteint le lièvre » $P(A) = \frac{5}{6}$

•Soit A « l'evenement pour que Mamadou atteint le lièvre » $P(B) = \frac{4}{5}$

Calculons la probabilité pour que le lièvre soit tué

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; mais $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3}$

$$\text{alors } P(A\cup B)=\frac{5}{6}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{25+24-20}{30}=\frac{29}{30}\Longrightarrow P(A\cup B)=\frac{29}{30}$$

4) En fait ; Mamadou a tiré le premier.

c) Calculons la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitiée

$$P(A'\cap\overline{B})=P(A')\times P(\overline{B}) \text{ mais } \begin{cases} P(A')=\frac{1}{2}P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12} \\ P(B)+P(\overline{B})=1\Rightarrow P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5} \end{cases}\Rightarrow$$

$$P(A'\cap\overline{B})=\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{12}\Rightarrow \boldsymbol{P(A'\cap\overline{B})=\frac{1}{12}}$$

d) Dans ces conditions : Mamadou tire le premier, puis Moussa ; calculons la probabilité pour le lièvre d'en échapper saint et sauf

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'}\cap\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'})\times\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}'}\cap\overline{\mathrm{B}})=\left(1-\frac{5}{12}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{60}\Rightarrow$$

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}'}\cup\overline{\mathbf{B}}\right)=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{60}}$$

C-) Soit g la fonction définie par : $\mathbf{g(x)}=\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{1}}$

1) a) Déterminons l'ensemble de définition $\mathbf{D_g}$ de g et démontrons que :

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{D_g};\ \mathbf{g(x)}>\mathrm{x}+|\mathbf{x}|$$

$\mathrm{D_g}=\{\forall\mathrm{x}\in\mathrm{R};\mathrm{x}^2+1\geq 0\}$; $\mathrm{x}^2+1=0\Rightarrow\mathrm{x}^2=-1$ pas de solution dans R alors

$$\mathbf{D_g}=\mathbf{R}=]-\infty;+\infty[$$

Démontrons que : $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D_g};\ \boldsymbol{g(x)}>x+|\boldsymbol{x}|$

On sait que $\forall\mathrm{x}\in\mathrm{R}$; $\mathrm{x}^2+1>\mathrm{x}^2\Rightarrow\sqrt{\mathrm{x}^2+1}>\sqrt{\mathrm{x}^2}\Rightarrow\sqrt{\mathrm{x}^2+1}>|\mathrm{x}|\Rightarrow \mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}>x+|\mathrm{x}|\Rightarrow \mathbf{g(x)}>x+|\mathbf{x}|$ **cqfd**

b) En déduisons le signe de g sur $\mathbf{D_g}$

Comme $\mathrm{g(x)}>x+|\mathrm{x}|$ alors $\mathrm{g(x)}\geq 0$; $\forall\mathrm{x}\in\mathrm{D_g}$; d'où g est strictement positive sur son ensemble de définition

2) Etudions g et traçons sa courbe représentative

<u>Limites aux bornes de $\mathrm{D_g}$:</u>

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{x}+|\mathrm{x}|)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{g(x)}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{x}+|\mathrm{x}|)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{g(x)}=+\infty$

<u>Dérivée de g(x) :</u>

$$\mathrm{g}'(\mathrm{x})=\left(\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}\right)'=1+\frac{2\mathrm{x}}{2\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}\Rightarrow\mathrm{g}'(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}} \text{ alors que}$$

$$\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}>0 \text{ d'où } \mathrm{g}'(\mathrm{x})>0$$

<u>Tableau de variations :</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
$\mathrm{g}'(\mathrm{x})$	+	
$\mathrm{g(x)}$	0 ↗	$+\infty$

<u>Branches infinies :</u> AV : ∄ ; AH ; ∄ $AO : y=ax+b$

$$a=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+|x|}{x}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+|x|}{x}\right)=0\end{cases}$$

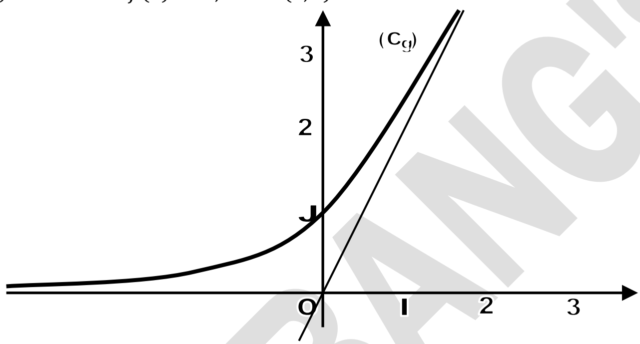
à $-\infty$ AO nexiste pas mais (C_g) admet une direction parabolique de direction (OI)

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0\ y=2x\ \text{à}+\infty$$

Intersection avec les axes :

$(C)\cap(x'Ox): f(x)=0\ alors\ x+\sqrt{x^2+1}=0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow 1\neq 0$ pas d'intersection avec cet axe

- $(C)\cap(y'Oy): x=0\ alors\ f(0)=1\ ;on\ a\ A(0,1)$



3) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

a) Résolvons l'équation : $f(x)=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$f(x)=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\Rightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

$=\frac{3+2\sqrt{2}}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}=3+2\sqrt{2}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=3+2\sqrt{2}\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1}=3+2\sqrt{2}-x\Rightarrow x=2\sqrt{2}$ D'où $\boldsymbol{S}=\left\{\mathbf{2\sqrt{2}}\right\}$

Démontrons que f est impaire

On vérifie que $f(-x)=-f(x)$; on a :

$$\begin{cases} f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\ -f(x)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\right)=\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}\right)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{cases}$$

D'où $f(-x)=-f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$ alors f est impaire

b) Etudions f et traçons sa courbe représentative

Domaine de définition :$D_f=R=]-\infty;\ +\infty[$

Calcul de limites :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}ln(x+|x|)=\ln 0^+=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}ln(x+|x|)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Dérivée de f(x) :$f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\ D'où f'(x)>0$ alors f est strictement croissante

Tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Branches infinies :$AV : \nexists$; AH ; $\nexists$ $AO : y = ax + b$

$$a = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+|x|)}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\ln(x+|x|)}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

alors AO n'existe pas mais (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI)

Intersection avec les axes :

•$(C) \cap \left(x'Ox\right) : f(x) = 0 \; alors \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow x =$ $0 \;\; alors \; O(0;0)$

• $(C) \cap (y'Oy) : x = 0 \; alors \; f(0) = 0 \; ; on \; a \; O(0;\; 0)$

c) Montrons que f est une bijection de $\boldsymbol{R \to R}$ *et que* $\boldsymbol{\forall n \in Z \; ; f\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2}\right) = n}$

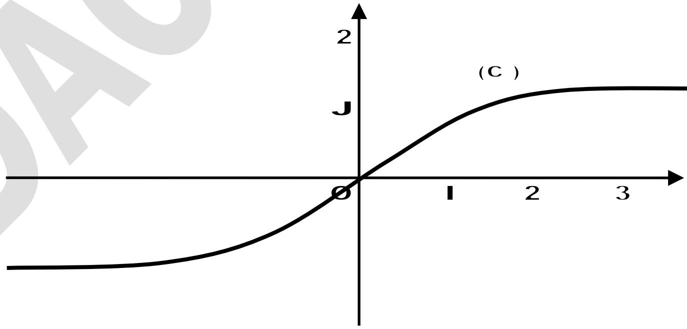
Comme f est strictement croissante sur R alors elle réalise une bijection de

$$]-\infty;+\infty[\;\; vers \;\; f(]-\infty;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$$

$$■ f\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2}\right)^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2n}-2+e^{-2n}}{4} + 1}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2} + \frac{e^n+e^{-n}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e^n}{2}\right) = \ln e^n = n$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2}\right) = n}}$$



5) Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq 2}$; on considère l'intégrale $\boldsymbol{I_n}$ définie par :

$$\boldsymbol{I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx}$$

a) Calculons $\boldsymbol{I_2}$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx\,; \;\Longrightarrow I_2 = -\int_1^2 d\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e\right) \Longrightarrow I_2 = e - \sqrt{e}$$

Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\boldsymbol{I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n}$$

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx\,; on\ pose\ I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx\ \ et\ I_{n+2} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} dx\ \ alors\ calculons\ I_{n+2}:$$

$$I_{n+2} = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \quad \text{on pose} \begin{cases} u = \dfrac{1}{x^n} \\ dv = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{n}{x^{n+1}} dx \\ v = -e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$I_{n+2} = -\left[\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - n\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx \Longrightarrow I_{n+2} = -\left(\frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2}} - e\right) - nI_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^n} - nI_{n+1}$$

$$\Longrightarrow I_{n+2} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^n} - nI_{n+1}$$

$$on\ pose : n = n-1\,; on\ a\ \ I_{n-1+2} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - (n-1)I_{n-1+1} \Longrightarrow$$

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n \boldsymbol{cqfd}$$

b) Etablissons que pour tout entier naturel $x \in [1;2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

On a : • $\forall\, x \in [1;2], e^{\frac{1}{x}} > 0\ \ et\ \ e^{\frac{1}{x}} \leq e\,,\ donc\ \ 0 < e^{\frac{1}{x}} \leq e\ \ (*)$

•$\forall\, x \in [1;2]\ \ et\ \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}\,;\ \frac{1}{x^n} > 0$ En multipliant $(*)\ par\ \frac{1}{x^n}\ \ on\ a : 0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \boldsymbol{cqfe}$

c) En déduisons un encadrement de I_n

$$0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \Longrightarrow 0 < \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx \Longrightarrow 0 < I_n \leq e\int_1^2 \frac{1}{x^n} dx \Longrightarrow$$

$$0 < I_n \leq e\left[\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}\right]_1^2 \Longrightarrow 0 < I_n \leq e\left(\frac{1}{(-n+1)2^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)}\right) \Longrightarrow$$

$$0 < I_n \leq e\left(\frac{2^{1-n}}{(-n+1)} - \frac{1}{(-n+1)}\right) \Longrightarrow 0 < I_n \leq e\left(\frac{2^{1-n}-1}{1-n}\right)$$

Etudier la limite eventuelle de la suite I_n

Pour cela on a : lorsque $\mathrm{g(x) \leq f(x) \leq h(x)}$alors $\lim\limits_{x\to k} \mathrm{g(x)} = \lim\limits_{x\to k} \mathrm{h(x)} = \mathrm{l}$

$$\text{d'où} \lim_{x\to k} \mathrm{f(x)} = \mathrm{l}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e\left(\frac{2^{1-n}-1}{1-n}\right) = e\left(\frac{2^{1-\infty}-1}{1-\infty}\right) = e\left(\frac{0-1}{-\infty}\right) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

D-) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct . Soit S la similitude directe de centre I transformant les points A et B d'affixes respectives $3 + i\ \ et\ \ 3 - i$ en A' et B' d'affixes respectives $2 + 5i\ et\ 4 + 3i$

3) Déterminons les éléments caractéristiques de S

On pose $z' = az + b$ et on a :

$$\begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 + 5i = a(3+i) + b \\ 4 + 3i = a(3-i) + b \end{cases} \Longrightarrow a = 1 + i\ \ et\ \ b = i$$

$$\text{D'où}\ \ \boldsymbol{z' = (1+i)z + i}$$

•<u>Le rapport :</u>$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow a = \sqrt{2}$

•<u>L'angle :</u> $\theta = \arg(a) \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

•<u>Le centre ou le point invariant :</u> On pose : $z_0 = z' = z \ on\ a$:

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-1-i} = \frac{i}{-i} = -1 \Longrightarrow \ z_0 = -1$$

4) Déterminons le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients 6 ; 1 ; et 1

$$z_G = \frac{6z_I + z_A + z_B}{6+1+1} = \frac{6(-1) + 3 + i + 3 - i}{8} = \frac{6-6}{8} = 0 \Longrightarrow z_G = 0 \ \Longrightarrow G(0;0)$$

En dédusons le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients

$$z_{G'} = \frac{6z_I + z_{A'} + z_{B'}}{6+1+1} = \frac{6(-1) + 2 + 5i + 4 + 3i}{8} = \frac{-6+6+8i}{8} = i \Longrightarrow z_{G'} = i$$

$$\boldsymbol{G'(0;1)}$$

BACCALAUREAT 2012 Terminale Sciences Mathématiques

<u>SUJET :Exercice 1:</u>1) Calculer le PGCD de $4^5 - 1 \ \ et \ \ 4^6 - 1$

2) Soit U_n la suite numérique définie par : $U_0 = 1$; $U_1 = 1 et$ pour tout entier naturel n

$$U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n.$$

Calculer les termes U_2 ; U_3 etU_4 de la suite U_n

3)a)Montrer que la suite U_n vérifie pour tout entier naturel n $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n U_n est un entier naturel.

c)En déduire ; pour tout entier naturel n, le PGCD de U_n et U_{n+1}

4) Soit V la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

a)Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Déterminer, pour tout entier naturel, le PGCD de 4^{n+1}-1 et 4^n-1.

<u>Exercice 2 :</u>Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1+i)Z + 1 + 4i$

4) Donner la nature de S et ses éléments caractéristiques
5) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1
6) Déterminer les équations des transformées par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (D) d'équation $y = x - 1$

<u>Problème :</u>A-) On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[\ par$:

$$g(0) = 1 \ \ et\ \forall x \in]0;\ +\infty[\ \ g(x) = 1 + x - x\ln x$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0
2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]0;\ +\infty[$
   b) Justifier que $3{,}5 < \beta < 3{,}6$

4) Tracer (C_g)

B-) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} + 2$, $\forall x \in]0;\ +\infty[$

1) a) Démontrer que , $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C_f)avec la droite (D) d'équation $y = 2$

3) Construire la courbe (C_f) dans le meme repère (O, I, J)

C-) a) Justifier que : $\ln \beta = \frac{\beta+1}{\beta}$

b) A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que : $\int_1^\beta x \ln x\, dx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++

<u>Exercice 1 :</u>1) Calculons le PGCD de $4^5 - 1$ et $4^6 - 1$

$4^5 - 1 = 1023$ et $4^6 - 1 = 4095$ alors d'apès lAlgorithme d'Euclide, on a :

$4095 = 4 \times 1023 + 3$ $\quad 1023 = 3 \times 341 + 0$ alors $PGCD(4^5 - 1; 4^6 - 1) = 3$

2) Soit U_n la suite numérique définie par : $U_0 = 1$; $U_1 = 1et$ pour tout entier naturel n $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

Calculons les termes U_2 ; U_3 etU_4 de la suite U_n

- $Pour\ n = 0;\ U_2 = 5U_1 - 4U_0 = 5 - 4 = 1 \quad U_2 = 1$
- $Pour\ n = 1;\ U_3 = 5U_2 - 4U_1 = 5 - 4 = 1 \quad U_3 = 1$
- $Pour\ n = 0;\ U_4 = 5U_3 - 4U_2 = 5 - 4 = 1 \quad U_4 = 1$

3)a)Montrons que la suite U_n vérifie pour tout entier naturel n $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

$$\text{Pour } n = n + 1;\ \text{ on a : } U_{n+2} = 4U_{n+1} + 1 \text{ mais } U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n; \text{on a: } 5U_{n+1} - 4U_n = 4U_{n+1} + 1 \Longrightarrow$$
$$5U_{n+1} - 4U_{n+1} = 4U_n + 1 \Longrightarrow U_{n+1} = 4U_n + 1 \ \ \mathbf{cqfm}$$

b) Montrons que pour tout entier naturel n U_n est un entier naturel.

Dans ce cas utilisons le raisonnement par recurrence :

• Vérifions pour certaines valeurs de n que la relation est vraie

$$Pour\ n = 0 \Longrightarrow U_0 = 1 \in N \quad vraie$$

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n : $U_n \in N$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 :

$$U_{n+1} = 4U_n + 1 \overset{?}{\in} N\ \ ,comme\ \ U_n \in N\ \ alors\ 4U_n \in N \Longrightarrow 4U_n + 1 \in N \Longrightarrow$$
$$U_{n+1} \in N \ \ \boldsymbol{cqfm}$$

c)En déduisons ; pour tout entier naturel n, le PGCD de U_n et U_{n+1}

D'après l'Algorithme d'Euclide ; on a : $PGCD(U_n;\ U_{n+1}) \Longrightarrow U_{n+1} = 4U_n + 1 \Longrightarrow$

$$PGCD(U_n;\ U_{n+1}) = 1$$

4) Soit V la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

a)Montrons que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

Pour $n = n + 1$; on a : $V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{3}$

$$\text{mais } V_{n+1} = 4U_n + 1 + \frac{1}{3} = 4U_n + \frac{4}{3} = 4\left(U_n + \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow V_{n+1} = 4V_n$$

D'où V est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Longrightarrow V_0 = \frac{4}{3}$$

b) Exprimons $V_n$puis U_n en fonction de n

• $V_n = V_0 * q^n \Longrightarrow V_n = \frac{4}{3}(4)^n \Longrightarrow V_n = \frac{4^{n+1}}{3}$

• $V_n = U_n + \frac{1}{3} \Longrightarrow U_n = V_n - \frac{1}{3} = \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{1}{3} \Longrightarrow U_n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$

e) Déterminons, pour tout entier naturel, le PGCD de$4^n - 1$ et $4^{n+1} - 1$

D'après l'Algorithme d'Euclide on a : $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$

Vérifions si $4^n - 1$ est un multiple de 3 : $4^n - 1 \equiv\ ?[3]$ mais $4 \equiv 1[3]$

$alors\ 1^n - 1 \equiv ?[3]\ \ 1 - 1 \equiv 0[3]\ \ alors\ \ 4^n - 1 \equiv 0[3]$, $ainsi\ 4^n - 1$ est divisible par 3

D'où $\text{PGCD}(4^n - 1;\ 4^{n+1} - 1) = 3$

<u>Exercice 2 :</u>Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1 + i)Z + 1 + 4i$

1- Donnons la nature de S

$|a| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ alors S est une similitude plane directe

Les éléments caractéristiques

•<u>Le rapport :</u> $k = |a| = \sqrt{2}$

•<u>L'angle θ :</u>$\theta = \arg(a) = \arg(-1 + i)$, on a $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ alors $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow$

$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

•<u>Le centre ou le point invariant $\Omega(w)$:</u>On pose $z_1 = z = w \Longrightarrow w = \frac{b}{1-a} = \frac{1+4i}{1-(-1+i)} = \frac{1+4i}{2-i} =$

$$w = \frac{2 + i + 8i - 4}{5} = \frac{-2 + 9i}{5} \Longrightarrow w = \frac{-2 + 9i}{5}$$

2- Calculons les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 On pose $z_1 = x_1 + iy_1\ \ et\ \ z = x + iy$, $on\ a$:

$x_1 + iy_1 = (-1 + i)(x + iy) + 1 + 4i = -x - iy + ix - y + 1 + 4i$

$= -x - y + 1 + i(x - y + 4)$

$\begin{cases} x_1 = -x - y + 1 & (1) \\ y_1 = x - y + 4 & (2) \end{cases} \Longrightarrow De\ (1) + (2), on\ a :\ x_1 + y_1 = -2y + 5 \Longrightarrow$

$$y = -\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 5)$$

$De\ (1) - (2)$ on a : $x_1 - y_1 = -2x - 3 \Longrightarrow\ \ x = -\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3)$

3- Déterminons les équations des transformées par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (D) d'équation$y = x - 1$

•Pour $x = 0$, $on\ a$: $0 = -\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3) \Longrightarrow\ x_1 - y_1 + 3 = 0 \Longrightarrow y_1 = x_1 + 3$

D'où l'équation de la transformée est $y = x + 3$

•Pour $y = x - 1$, $on\ a$:

$-x + y = -1 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3) - \frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 5) = -1 \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + 3 - x_1 - y_1 + 5) = -1 \Longrightarrow -2y_1 + 8 = -2 \Longrightarrow -2y_1 = -10 \Longrightarrow y_1 = 5$$

D'où l'équation de la transformée est $y = 5$

__Problème :__ A-) On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ $\boldsymbol{par}$:

$$\mathbf{g(0) = 1\ \ et\ \forall x \in]0;\ +\infty[\ \ g(x) = 1 + x - x\ln x}$$

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de g en 0

__Continuité :__ g est continue en 0 si et seulement si : $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = l\,;(l \in R)$

$g(0) = 1$ alors g est continue en 0

__Dérivabilité :__ g est dérivable en 0 si et seulement si :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x) - g(0)}{x}\right) = g'(0) = l\,;(l \in R)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x) - g(0)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1 + x - x\ln x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x - x\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(1 - \ln x) = -(-\infty)$$

$$= +\infty \ \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x) - g(0)}{x}\right) = +\infty$$

Alors g n'est pas dérivable en 0

2) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation

__Calcul de limites :__ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 + x - x\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x\right)$

$$= +\infty\left(\frac{1}{+\infty} + 1 - \ln(+\infty)\right) = +\infty(-\infty) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

__Dérivons g(x) :__$g'(x) = (1 + x - x\ln x)' = 1 - (\ln x + 1) \Longrightarrow g'(x) = -\ln x$

On pose $g'(x) = 0 \Longrightarrow -\ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1\ \ et\ \ g(1) = 1 + 1 - 1\ln 1 = 2$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$

3) a) Démontrons que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0};\ +\infty[$

•Comme g est structement décroissante de $]1;\ +\infty[$ alors g est une bijection reciproque de $]1;\ +\infty[\ vers\ ]-\infty; 2[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]1;\ +\infty[$; mais comme $]1;\ +\infty[\ \subset\ ]0;\ +\infty[$ alors $\beta \in]0;\ +\infty[$

b) Justifions que $\mathbf{3,5} < \beta < 3{,}6$

Comme $]3{,}5\ ;\ 3{,}6[\ \subset\ ]0;\ +\infty[$, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$g(3{,}5) \times g(3{,}6) < 0$$

4) Traçons $(\boldsymbol{C_g})$

__Branches infinies :__ $AV\ :\ \nexists\quad AH\ ;\ \nexists\quad AO\ : y = ax + b\quad avec\ \ a = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right) = +\infty$

alors AO n'existe pas mais (C_g) admet une branche parabolique de direction (OJ)

__Intersection avec les axes :__•$(C) \cap (x'Ox) : g(x) = 0\ alors\ \ g(\beta) = 0 \Longrightarrow x = \beta\ \ alors\ A(\beta; 0)$

• $(C) \cap (y'Oy): x = 0\ alors\ g(0) = 1\ ; on\ a\ B(0;\ 1)$

B-) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} + 2$, $\forall x \in]0;\ +\infty[$

1) a) Démontrons que , $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{1+x} + 2\right)' = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1+x-x\ln x}{x}}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x\ln x}{x(1+x)^2} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}\ \boldsymbol{cqfd}$$

b) Dressons le tableau de variations de f

Calcul de limites :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1+x} + 2\right) = \frac{\ln 0^+}{1+0} + 2 = -\infty \implies \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{1+x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + 2\right) = \frac{\ln +\infty}{+\infty} + 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$ alors cela veut dire que le signe de f'(x) dépend de g(x) :

$\forall x \in]0;\ \beta[\, f'(x) > 0\ \ et\ \ \forall x \in]\,\beta;\ +\infty[\, f'(x) < 0$ avec $f(\beta) = \frac{\ln \beta}{1+\beta} + 2$

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\beta)$	↘ 2

2) Déterminons les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C_f) avec la droite (D) d'équation $y = 2$

On pose $\mathrm{f(x) = y \Longrightarrow \frac{\ln x}{1+x} + 2 = 2 \Longrightarrow \frac{\ln x}{1+x} = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 = \ln 1 \Longrightarrow x = 1}$ alors $A(1;2)$

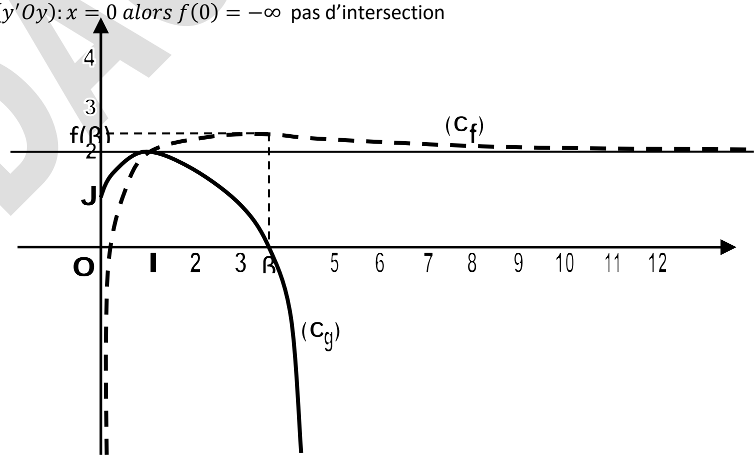
3) Construisons la courbe (C_f) dans le meme repère (O, I, J)

Branches infinies :AV : $x = 0$ AH ; $y = 2$ AO : $y = ax + b$ avec $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$

alors AO n'existe pas mais (C_g) admet une branche parabolique de direction (OI)

Intersection avec les axes :• $(C) \cap (x'Ox) : f(x) = 0\ alors\ \frac{\ln x}{1+x} + 2 = 0 \Rightarrow x \in]0;\ \beta[$

• $(C) \cap (y'Oy): x = 0\ alors\ f(0) = -\infty$ pas d'intersection



C-) a) Justifier que : $\ln\beta = \frac{\beta+1}{\beta}$

Comme β est solution de l'équation $g(x) = 0$ *alors*

$$g(\beta) = 0 \implies 1 + \beta - \beta\ln\beta = 0 \implies \beta\ln\beta = \beta + 1 \implies \ln\beta = \frac{\beta+1}{\beta}\boldsymbol{cqfj}$$

b) A l'aide d'une intégration par partie, démontrons que : $\int_1^\beta x\ln x\,dx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$

$$\int_1^\beta x\ln x\,dx \text{ on pose } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \text{ alors}$$

$$\int_1^\beta x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^\beta - \int_1^\beta \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\beta^2\ln\beta - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^\beta$$

$$= \frac{1}{2}\beta^2\ln\beta - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4} \text{ mais } \ln\beta = \frac{\beta+1}{\beta} \text{ alors} \int_1^\beta x\ln x\,dx *=$$

$$= \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) - \frac{\beta^2-1}{4} = \frac{1}{2}\beta(\beta+1) - \frac{\beta^2-1}{4} = \frac{2\beta^2+2\beta-\beta^2+1}{4}$$

$$= \frac{\beta^2+2\beta+1}{4} = \frac{(\beta+1)^2}{4} \implies \int_1^\beta x\ln x\,dx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$$

BACCALAUREAT 2013 Terminale Sciences Mathématiques

<u>SUJET : Exercice 1:</u>1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$; $(x; y) \in Z^2$

a) Donner une solution particulière de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier naturel tels qu'il existe un couple (a ;b) de nombres entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple (a ;-b) est solution de (E)

b) Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$; $(x; y) \in Z^2$

<u>Exercice 2 :</u>On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ *et* $AC = a$, où a est un nombre réel positif donné.

3) a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1)

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

4) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3 ; 1 et -2

<u>Problème :</u> On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x$ *si* $x \in]0; +\infty[$ *et* $f(0) = 0$.On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

A-) On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 - 2\ln x$$

1) Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$
2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée. Déterminer g' et étudier son signe. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variations. Vérifier que : $g(1) = 0$
3) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3;\ 4[$ et $g(\alpha) = 0$
4) Déduire des questions précédentes le signe de g(x) suivant les valeurs de x

B-) On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = 2\ln x + 1$

1) Démontrer que : $\forall x \in]3;\ 4[,\quad h(x) \in]3;\ 4[$
2) On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3{,}5 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$
   a) Démontrer que : $\forall x \in N,\quad u_n \in]3;\ 4[$
   b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de u_1. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente. (On admettra que $(u_n)_{n\in N}$ converge vers la valeur α précédente et on prendra$\alpha = 3{,}5$)

C-) 1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0

2) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse. En donner une interprétation graphique

3) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$

4) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat

5) La fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que : $\forall x \in]0;\ +\infty[\,, f'(x) = g(x)$

6) En utilisant les résultats de **A-)** déterminer le signe de f'(x) et dresser le tableau et variation de f. Tracer la courbe (C)

7) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A(t) de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = t\ \ et\ x = 1$.Calculer la limite de A(t) quand t tend vers 0

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>+++++++++++++++++++++++++++

<u>Exercice 1 :</u>1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$; $(x; y) \in Z^2$

a) Donnons une solution particulière de (E)

D'après le théorème de l'Algorithme d'Euclide, on a :

$$8 = 1\times 5 + 3 \implies 3 = 8 - 1\times 5\ ;\ \ 5 = 1\times 3 + 2 \implies 2 = 5 - 3\times 1\ ;\ \ 3 = 1\times 2 + 1$$

$$1 = 3 - 2\times 1 \implies 3 - (5 - 3\times 1) = 1 \implies 2\times 3 - 5 = 1 \implies 2(8 - 1\times 5) - 5 = 1$$

$$2\times 8 - 3\times 5 = 1 \implies 8(2) + 5(-3) = 1 \implies$$

$$\begin{cases} 8(2) + 5(-3) = 1 \\ 8x + 5y = 1 \end{cases} \text{ par comparaison } \ x = 2\ \ et\ y = -3 \implies S = \{(2;\ -3)\}$$

b) Résolvons l'équation (E)

$\begin{cases} 8(2)+5(-3)=1 \\ 8x+5y=1 \end{cases}$ on pose $1=1$ $8(2)+5(-3)=8x+5y \Longrightarrow 8(2-x)=5(y+3)$

$$\frac{2-x}{5}=\frac{y+3}{8}=k \Longrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{5}=k \\ \frac{y+3}{8}=k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2-x=5k \\ y+3=8k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-5k+2 \\ y=8k-3 \end{cases}$$

$$S=\{(-5k+2;8k-3)\} \text{ avec } k \in Z$$

3) Soit N un entier naturel tels qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} \boldsymbol{N=8a+1} \\ \boldsymbol{N=5b+2} \end{cases}$

a) Montrons que le couple (a ;-b) est solution de (E)

$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$ on pose $N=N$, on a : $8a+1=5b+2 \Longrightarrow 8a-5b=1$

$$\Longrightarrow 8(a)+5(-b)=1 \Longrightarrow$$

$\begin{cases} 8(a)+5(-b)=1 \\ 8x+5y=1 \end{cases}$ par comparaison , on a : $x=a$ et $y=-b$;

$$d'où\ S=\{(a;\ -b)\}\boldsymbol{cqfm}$$

b) Cherchons le reste de la division de N par 40

Comme la solution particulière de (E) est $(2;\ -3)$ et $(a,-b)$alors on pose :

$a=2$ et $-b=-3 \Longrightarrow b=3$ alors on a : $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} N=8(2)+1=16+1=17 \\ N=5(3)+2=15+2=17 \end{cases}$ $alors\ N=17 \Longrightarrow 17 \equiv 17[40]\ d'où\ \ \boldsymbol{r=17}$

3) Résolvons l'équation $\boldsymbol{8x+5y=100}$; $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{Z}^2$

$\begin{cases} 8(2)+5(-3)=1 \\ 8x+5y=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8(200)+5(-300)=100 \\ 8x+5y=100 \end{cases}$ $on\ pose\ 100=100; on\ a$

$$:8(200)+5(-300)=8x+5y8(200-x)=5(y+300) \Longrightarrow$$

$$\frac{200-x}{5}=\frac{y+300}{8}=k \Longrightarrow \begin{cases} \frac{200-x}{5}=k \\ \frac{y+300}{8}=k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 200-x=5k \\ y+300=8k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=-5k+200 \\ y=8k-300 \end{cases} \Longrightarrow \quad S=\{(-5k+200;8k-300)\}\ avec\ \ k \in Z$$

<u>**Exercice 2 :**</u> **On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $\boldsymbol{AB=2a}$ $\boldsymbol{et\ AC=a}$, où a est un nombre réel positif donné.**

3) a) Déterminons et construisons le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1) Comme $1-1+1=1 \neq 0$ alors G existe , on a : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$,

$$\text{introduisons le A}, \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

b) Déterminons et construisons l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\boldsymbol{\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|}$$

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

•Introduisons G dans $\vec{u}$: $\vec{u}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \Longrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{MG}$

•Comme 1+1-2=0 alors introduisons le point I milieu du segment [AB]

$\vec{v} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IC}$ alors $\vec{v} = -2\overrightarrow{IC}$

On a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Longrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|-2\overrightarrow{IC}\| \Longrightarrow \boldsymbol{MG = 2IC}$

Alors (C) est un cercle de centre G et de rayon $r = 2IC$

4) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

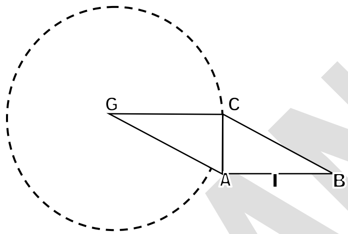
Démontrons que H est le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1), (C, -2)\}$

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, introduisons le point H $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$

$$2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{HC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Longrightarrow 3\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Longrightarrow -3\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

$\begin{cases} 3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0} \end{cases}$ Par comparaison $\alpha = 3, \beta = 1$ *et* $\gamma = -2$ ***cqfd***



<u>Problème :</u> On considère la fonction f définie par :

$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x}$ **si** $\mathbf{x \in]0;\ +\infty[}$ **et** $\mathbf{f(0) = 0}$**. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)**

A-) On considère la fonction numérique g définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$\mathbf{g(x) = x - 1 - 2\ln x}$$

1) Calculons les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 1 - 2\ln x) = 0 - 1 - 2\ln 0^+ = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x - 1 - 2\ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée. Déterminons g' et étudions son signe. En déduisons le sens de variation de g et dressons son tableau de variations.

$$g'(x) = (x - 1 - 2\ln x)' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{x-2}{x} \Longrightarrow g(2) = 1 - 2\ln 2$$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1 - 2\ln 2$	↗	$+\infty$

Vérifions que : $\mathbf{g(1) = 0}$ $g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0 \Longrightarrow g(1) = 0$ ***cqfv***

3) Démontrons qu'il existe un unique réel α tel que $\boldsymbol{\alpha \in]3;\ 4[}$ et $\boldsymbol{g(\alpha) = 0}$

La fonction g étant strictement croissante sur $]3;\ 4[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$g(3) \times g(4) < 0;\ g(3) = 3 - 1 - 2\ln 3 = 2 - 2{,}2 = -0{,}2 \text{ et } g(4) = 4 - 1 - 2\ln 4 = 3 - 2{,}8 = 0{,}2$$

D'où $-0{,}2 \times 0{,}2 = -0{,}04 < 0$ alors α est solution cette équation

4) Déduisons des questions précédentes le signe de g(x) suivant les valeurs de x

$\forall x \in]0; 1[\;\; g(x) > 0 \;\; ; \;\; \forall x \in]1; \alpha[\;\; g(x) < 0 \;\; ; \;\; \forall x \in]\alpha; +\infty[\;\; g(x) > 0$

B-) On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $\boldsymbol{h(x) = 2\ln x + 1}$

1) Démontrons que : $\forall x \in]3;\, 4[, \quad h(x) \in]3;\, 4[$

$\forall x \in]3; 4[\; alors \; 3 < x < 4 \Rightarrow h(3) < h(x) < h(4) \Rightarrow 2\ln 3 + 1 < h(x) < 2\ln 4 + 1 \Rightarrow 3{,}2 < h(x) < 3{,}8$ D'où $\forall x \in]3; 4[, \quad h(x) \in]3; 4[$ $\boldsymbol{cqfd}$

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3{,}5 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Démontrons que : $\forall x \in N, \quad u_n \in]3;\, 4[$

Utilisons le raisonnement par récurrence :

•Vérifions pour certaines valeurs de n que la relation est vraie :

$$n = 0 \Rightarrow u_0 = 3{,}5 \in]3;\, 4[\;\; \text{vraie}$$

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :$u_n \in]3;\, 4[$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 :

$$u_{n+1} = h(u_n) = (2\ln u_n + 1) \in]3;\, 4[$$

Comme $u_n \in]3;\, 4[$ alors $\forall x \in N, \quad u_{n+1} \in]3;\, 4[$ est vraie

b) Calculons l'arrondi d'ordre 3 de u_1.

Pour $n = 0$, on a : $u_{0+1} = h(u_0) \Rightarrow u_1 = h(3{,}5) = 2\ln 3{,}5 + 1 = 2 \times 1{,}252 + 1$
$= 2{,}504 + 1 = 3{,}504 \Rightarrow u_1 = 3{,}504$

Démontrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante

Pour cela montrons que $u_{n+1} \geq u_n \;\Rightarrow\; u_{n+1} - u_n \geq 0$

•Vérifons pour certaines valeurs de n que cette relation est vraie :

$$n = 0\,; on\ a : \; u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 3{,}504 - 3{,}5 = 0{,}004 \geq 0 \quad vraie$$

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :$u_{n+1} - u_n \geq 0$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1 :$u_{n+1} - u_n \geq 0$

c) En déduisons que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente. (On admettra que $(u_n)_{n\in N}$ converge vers la valeur α précédente et on prendra $\alpha = 3{,}5$)

u_n est croissante et majorée, donc $\forall n \in N$; la suite u_n est convergente et converge vers α, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \quad soit \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3{,}5$

C-) 1) Démontrons que la fonction f est continue à droite en 0

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0) = l, (l \in R)$; $f(0) = 0$ alors f est continue à droite en 0

2) Etudions la dérivabilité de f à droite en 0 : Justifions votre réponse.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = f'(0) = l; \;\; (l \in R);$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{2} + 1 - 2\ln x\right) = 0 + 1 - 2\ln 0^+ = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = +\infty$$

En donnons une interprétation graphique

Comme $f'(0) = +\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0 mais (C) admet une demi tangente verticale en ce point

3) Calculons la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = (+\infty)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty} - 2\frac{\ln +\infty}{+\infty}\right)$$
$$= +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4) Calculons la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interprétons graphiquement ce résultat

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2} + 1 - 2\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) =$$
$$= +\infty\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty} - 2\frac{\ln +\infty}{+\infty}\right) = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction (OJ)

5) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrons que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x\right)' = x + 1 - 2(\ln x + 1) = x + 1 - 2\ln x - 2 = x - 1 - 2\ln x \implies f'(x)$$
$$= x - 1 - 2\ln x = g(x)$$

6) En utilisant les résultats de A-) déterminons le signe de f'(x) et dressons le tableau et variation de f. Traçons la courbe

$f'(x)$a le même signe que la fonction $g(x)$ alors on a :

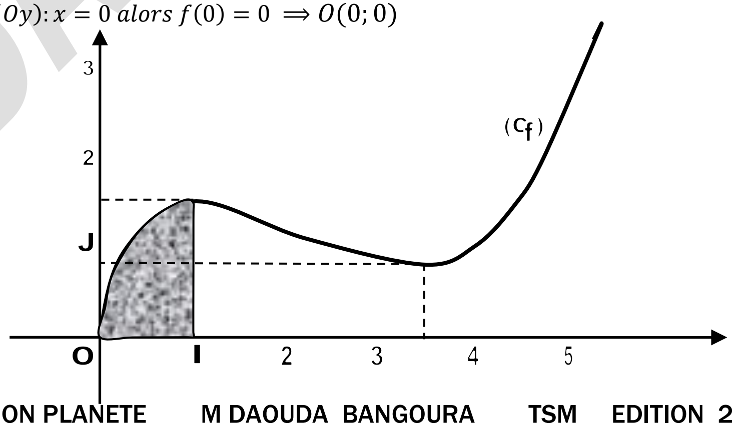
$$f(1) = \frac{1}{2} + 1 - 2\ln x = \frac{3}{2} \qquad et \quad f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha\ln\alpha = 0{,}875$$

x	0		1		α		$+\infty$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

<u>Intersection avec les axes :</u>

•$(C) \cap (x'Ox) : f(x) = 0$ *alors* $x = 0 \implies O(0; 0)$

• $(C) \cap (y'Oy) : x = 0$ *alors* $f(0) = 0 \implies O(0; 0)$



7) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$. En utilisant une intégration par parties, calculons l'aire A(t) de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$

$$A(t) = \int_1^t f(x)dx = \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^t - 2\int_1^t x\ln x dx$$

$$= \left(\frac{7}{6} - \frac{t^3}{6} - t^2 + t^2\ln t\right)u.a \implies A(t) = \left(\frac{7}{6} - \frac{t^3}{6} - t^2 + t^2\ln t\right)u.a$$

Calculons la limite de A(t) quand t tend vers 0

$$\lim_{t\to 0} A(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{7}{6} - \frac{t^3}{6} - t^2 + t^2\ln t\right) = \frac{7}{6}u.a \implies \boldsymbol{\lim_{t\to 0} A(t) = \frac{7}{6}u.a}$$

BACCALAUREAT 2014 Terminale Sciences Mathématiques

<u>SUJET :Exercices :</u>A-) On considère trois nombres entiers naturels a , b et c qui s'écrivent dans base n :$a = 111$; $b = 114$ et $c = 13054$

1) Sachant que $c = ab$, déterminer n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal

2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans Z² de l'équation : $ax + by = 1$

B-) Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

3) Calculer a, b et c et la variance $V(X)$
4) Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (Δ)
   d) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,4)\}$
   e) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de $((\Delta)$.
      Montrer que $\varphi(G) = V(X)$
   f) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$

<u>Problème :</u>

<u>Partie A :</u> On considère la fonction g dérivable sur R et définie par :

$$g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$$

1) a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1
   b) Déterminer la limite de g en $-\infty$

2) a) Démontrer que, pour tout x élément de R, $g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que l'équation $x \in R; g(x) = 0$ admet une unique solution α

b) Justifier que :$0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

<u>Partie B :</u>On considère la fonction f dérivable sur R et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique : 2cm

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) a) Démontrer que f est une primitive de g
   b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (D) et (C)

4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

6) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7) Justifier que, pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{-1}f(x)$

8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions

On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution

9) Tracer $(D), (T)$ et (C). On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$

Partie C : Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$

1) Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties
2) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lors que λ tend vers $+\infty$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Exercices :A-) On considère trois nombres entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans base n : $a = 111$; $b = 114$ et $c = 13054$

1) **Sachant que $c = ab$, déterminons n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal**

$$a = 111 = n^2 + n + 1 \;\; ; \;\; b = 114 = n^2 + n + 4 \;\; et$$

$$c = 13054 = n^4 + 3n^3 + 5n + 4 \;\; \text{avec } (n > 5)$$

$$c = ab \Longrightarrow n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 4) \Longrightarrow$$

$$n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = n^4 + 2n^3 + 6n^2 + 5n + 4 \Longrightarrow n^3 - 6n^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$n^2(n-6) = 0 \Longrightarrow \;\; n = 6$$

$$a = \overline{111} = 6^2 + 6 + 1 = 43 \Longrightarrow \boldsymbol{a = 43} \;\; ;$$

$$b = \overline{114} = 6^2 + 6 + 4 \;\; b = \mathbf{46}$$

$$c = \overline{13054} = 6^4 + 3(6)^3 + 5(6) + 4 \;\; \Longrightarrow \boldsymbol{c = 1978}$$

2) Vérifions en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.

Pour cela déterminons le $PGCD(a,b)$:

$$46 = 1 \times 43 + 3 \quad 43 = 3 \times 14 + 1 \;\; \text{alors } PGCD(a,b) = 1 \;\; \boldsymbol{cqfv}$$

Déduisons-en les solutions dans Z² de l'équation : $ax + by = 1$

$43 - 3 \times 14 = 1 \;\Longrightarrow\; 43 - 14(46 - 43) = 1 \;\Longrightarrow\; 43 - 14 \times 46 + 14 \times 43 = 1 \;\Longrightarrow$

$$43(15) + 46(-14) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} 43x + 46y = 1 \\ 43(15) + 46(-14) = 1 \end{cases} \;\; 1 = 1 \; on\; a$$

$$43x + 46y = 43(15) + 46(-14) \Longrightarrow 43(x - 15) = 46(-y - 14) \Longrightarrow$$

$$\frac{x - 15}{46} = \frac{-y - 14}{43} = k \Longrightarrow \begin{cases} x - 15 = 46k \\ -y - 14 = 43k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 46k + 15 \\ y = -43k - 14 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$S = \{(46k + 15;\ -43k - 14)\}$$

B-) Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont en progression arithmétique.
On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

3) **Calculons a, b et c et la variance $V(X)$**

•D'après la loi de la probabilité $e^a + e^b + e^c = 1 \quad (1)$

•Comme $E(X) = 1 \Rightarrow e^a - e^b + 2e^c = 1 \quad (2)$

1ère Méthode : Comme a, b et c sont en progression arithmétique alors : $\begin{cases} b = a + r \\ c = a + 2r \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} e^a + e^b + e^c = 1 \\ e^a - e^b + 2e^c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a + e^{a+r} + e^{a+2r} = 1 \\ e^a - e^{a+r} + 2e^{a+2r} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a(1 + e^r + e^{2r}) = 1 \\ e^a(1 - e^r + 2e^{2r}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^a = \dfrac{1}{1 + e^r + e^{2r}} \\ e^a = \dfrac{1}{1 - e^r + 2e^{2r}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 + e^r + e^{2r}} = \frac{1}{1 - e^r + 2e^{2r}} \Leftrightarrow$$

$$1 + e^r + e^{2r} = 1 - e^r + 2e^{2r} \Rightarrow 2e^r - e^{2r} = 0 \Rightarrow e^r(2 - e^r) = 0 \Rightarrow r = \ln 2$$

Avec $e^a = \frac{1}{1+e^{\ln 2}+e^{2\ln 2}} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow a = -\ln 7$

D'où $b = a + r = -\ln 7 + \ln 2 = \ln\frac{2}{7}$ et $c = a + 2r = -\ln 7 + 2\ln 2 = \ln\frac{4}{7}$

2ème Méthode : Comme a, b et c sont en progression arithmétique alors : $2b = a + c \Rightarrow$ $e^{2b} = e^{a+c} \quad (3)$

D'où le système

$$\begin{cases} e^a + e^b + e^c = 1 \quad (1) \\ e^a - e^b + 2e^c = 1 \quad (2) \Rightarrow \text{de } (1) + (2) \text{on a :} \quad 2e^a + 3e^c = 2 \Rightarrow \\ \qquad e^{2b} = e^{a+c} (3) \end{cases}$$

$$e^a = \frac{2 - 3e^c}{2} = 1 - \frac{3}{2}e^c \ (4)$$

Dans (3)on a :

$$e^{2b-c} = e^a \Rightarrow e^{2b-c} = 1 - \frac{3}{2}e^c \Rightarrow \frac{e^{2b}}{e^c} = 1 - \frac{3}{2}e^c \Rightarrow e^{2b} = e^c - \frac{3}{2}e^{2c} (5)$$

De $(1) - (2)$, on a : $2e^b - e^c = 0 \Rightarrow e^b = \dfrac{1}{2}e^c (6)$

De (6) dans (5)on a $\left(\frac{1}{2}e^c\right)^2 = e^c - \frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^{2c} = e^c - \frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^c = 1 - \frac{3}{2}e^c \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)e^c = 1 \Rightarrow \frac{7}{4}e^c = 1 \Rightarrow e^c = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{\mathbf{c = \ln\frac{4}{7}}}$

et dans (6)on a: $e^b = \dfrac{1}{2}e^{\ln\frac{4}{7}} = \dfrac{1}{2} * \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{7} \Rightarrow e^b = \dfrac{2}{7} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b = \ln\frac{2}{7}}}$ *et dans (4) on a :*

$$e^a = 1 - \frac{3}{2}e^c \Rightarrow e^a = 1 - \frac{3}{2}e^{\ln\frac{4}{7}} = 1 - \frac{3}{2} * \frac{4}{7} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a = \ln\frac{1}{7}}}$$

x	1	-1	2
$P(X = x_i)$	$e^{\ln\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$	$e^{\ln\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}$	$e^{\ln\frac{4}{7}} = \frac{4}{7}$

D'où : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 1^2 \times \frac{1}{7} + (-1)^2 \times \frac{2}{7} + 2^2 \times \frac{4}{7} - 1^2 = \frac{1+2+16}{7} - 1 = \frac{19-7}{7} = \frac{12}{7} \Rightarrow$

$$\boxed{V(X) = \frac{12}{7}}$$

4) **Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée** (Δ)

d) **Calculons l'abscisse du point G barycentre de** $\{(A,1),(B,2),(C,4)\}$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta X_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{1\times 1 - 1\times 2 + 4\times 2}{1+2+4} = \frac{7}{7} = 1 \ alors \ x_G = 1$$

e) **On pose :** $\boldsymbol{\varphi(M) = \frac{1}{7}\left(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2\right)}$, **où M est un point de** (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$ Posons $M = G, on\ a$:

$$\varphi(G) = \frac{1}{7}(GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2) = \frac{1}{7}(0^2 + 2\times 2^2 + 4\times 1^2) = \frac{1}{7}(12)$$

$$d'où\ \varphi(G) = V(X) = \frac{12}{7}$$

f) **Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$**

Introduisons le point G :

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2}{7}$$

$$= \frac{7MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2}{7} = 3 \Longrightarrow MG^2 + \varphi(G) = 3 \Longrightarrow MG^2 + \frac{12}{7} = 3$$

$$MG^2 = 3 - \frac{12}{7} = \frac{21-12}{7} = \frac{9}{7} \Longrightarrow MG = \sqrt{\frac{9}{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \Longrightarrow MG = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

(Γ) est un cercle de centre G et de rayon $r = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

<u>Problème</u> :<u>Partie A :</u> On considère la fonction g dérivable sur R et définie par :

$$\mathbf{g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1}$$

1) **a) Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1**

$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}\left((1-x)e^{1-x} - 1\right) = (1-\infty)e^{1-\infty} - 1 = -\infty e^{-\infty} - 1$$

$$= -1 \ alors \ \boxed{\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = -1}$$

b) Déterminons la limite de g en $-\infty$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto-\infty}\left((1-x)e^{1-x} - 1\right) = (1+\infty)e^{1+\infty} - 1 = +\infty e^{+\infty} - 1$$

$$= +\infty \ alors \ \boxed{\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty}$$

2) a) Démontrons que, pour tout x élément de R, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$$g'(x) = \left((1-x)e^{1-x} - 1\right)' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (-1-1+x)e^{1-x}$$

$$= (x-2)e^{1-x} \Longrightarrow \boxed{g'(x) = (x-2)e^{1-x}} \boldsymbol{cqfd}$$

b) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation

Posons $g'(x) = 0 \Longrightarrow (x-2)e^{1-x} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ e^{1-x} > 0 \end{cases}$ alors $x = 2$ et

$$g(2) = (1-2)e^{1-2} - 1 = -e^{-1} - 1$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-e^{-1}-1$	↗ -1

3) a) Démontrons que l'équation $x \in R$; $g(x) = 0$ admet une unique solution α

•La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ avec des images de signes opposés alors $\alpha \in]-\infty; 2[$

•La fonction g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ avec des images de même signe, alors l'équation g(x)=0 n'a pas de solution sur cet intervalle. D'où $\alpha \in]-\infty; 2[$

b) Justifions que :$\mathbf{0,4} < \alpha < 0,5$

Comme $]0,4; 0,5[\subset]-\infty; 2[$; alors $\alpha \in]0,4; 0,5[$ avec $g(0,4) \times g(0,5) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

5) **Déduisons-en que :** $\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in]-\infty, \boldsymbol{\alpha}[, \mathbf{g}(\mathbf{x}) > 0 \\ \forall \mathbf{x} \in]\boldsymbol{\alpha}, +\infty[, \mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-e^{-1}-1$ ↗	-1
Signe de g(x)	$+$	$-$		

$$\text{D'où } \begin{cases} \forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

<u>Partie B :</u> On considère la fonction f dérivable sur R et définie par :

$$\mathbf{f(x) = xe^{1-x} - x + 2}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique : 2cm

1) **Déterminons la limite de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -\infty\left(e^{1+\infty} - 1 + \frac{2}{-\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = +\infty\left(e^{1-\infty} - 1 + \frac{2}{+\infty}\right) = -\infty$$

2) **a) Démontrons que f est une primitive de g**

$$f'(x) = (xe^{1-x} - x + 2)' = e^{1-x} - xe^{1-x} - 1 = (1-x)e^{1-x} - 1 \Longrightarrow$$
$$f'(x) = g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$$

b) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation

Comme $f'(x) = g(x) = 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \ \ alors \ \ x = \alpha$

Et $\alpha \in]0,4; 0,5[$; alors $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, \alpha[, f(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, f(x) < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$ ↘	$-\infty$

3) **a) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) *en* $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x} - x + 2 - (-x + 2)) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x}) = +\infty e^{1-\infty} = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0 \ \ \boldsymbol{cqfd}$$

b) Etudions la position relative de (D) *et* (C)

Posons $h(x) = f(x) - y = xe^{1-x} \Longrightarrow h(x) = 0 \Longrightarrow xe^{1-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$+$
Positions relatives	(C) est au dessous de (D)	(C) est au dessus de (D)

Si x=0 alors (C) et (D) se coupent

4) Démontrons que $(\boldsymbol{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(\boldsymbol{OJ})$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}-x+2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x}-1+\frac{2}{x}\right)=e^{1+\infty}-1+\frac{2}{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \ \ \textbf{cqfd}$$

5) Déterminons une équation de la tangente $(\boldsymbol{T})$à $(\boldsymbol{C})$ au point d'abscisse 1

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)\Longrightarrow\begin{cases}f'(1)=g(1)=(1-1)e^{1-1}-1=-1\\ f(1)=1e^{1-1}-1+2=2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$y=-1(x-1)+2=-x+3\Longrightarrow y=-x+3$$

6) Démontrons que $\boldsymbol{f(\alpha)=1-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}}$

$$f(\alpha)=\alpha e^{1-\alpha}-\alpha+2\ ;\quad \text{mais }\ g(\alpha)=(1-\alpha)e^{1-\alpha}-1=0\Longrightarrow$$

$$e^{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\ \ \text{alors } f(\alpha)=\frac{\alpha}{1-\alpha}-\alpha+2=\frac{\alpha+1-1}{1-\alpha}-\alpha+2$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{1-\alpha}-1-\alpha+2\ \ \text{d'où } f(\alpha)=1-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}\,\textbf{cqfd}$$

7) Justifions que, pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f(-x+2)=e^{x-1}f(x)}$

$$f(-x+2)=(-x+2)e^{1+x-2}+x-2+2=(-x+2)e^{x-1}+x=\frac{-x+2}{e^{-x+1}}+x$$

$$=\frac{-x+2+xe^{1-x}}{e^{1-x}}=\frac{f(x)}{e^{1-x}}\Longrightarrow\ f(-x+2)=e^{x-1}f(x)\boldsymbol{cqfj}$$

8) Démontrons que $-\boldsymbol{\beta}+2$ est l'autre solution

Si β est solution de cette équation alors on a :

$f(\beta)=0$ et $f(-\beta+2)=e^{\beta-1}f(\beta)$ alors $f(\beta-2)=e^{\beta-1}\times 0=0$ d'où $f(-\beta+2)=0$

9) Traçons$(\boldsymbol{D}),(\boldsymbol{T})$ *et* $(\boldsymbol{C})$. *On prendra* $\boldsymbol{\alpha=0,4}$ *et* $\boldsymbol{\beta=2,5}$

Intersection avec les axes :

- $(C)\cap(x'Ox):f(x)=0\ alors\ \ x=\beta=2{,}5\ \ et\ x=-\beta+2=-2{,}5+2=-0{,}5$
- $(C)\cap(y'Oy)$: $x=0$ alors $f(0)=-0+2+0e^{1-0}=2\quad f(0{,}4)=1-0{,}4+\frac{1}{1-0{,}4}=2{,}6$

Partie C :

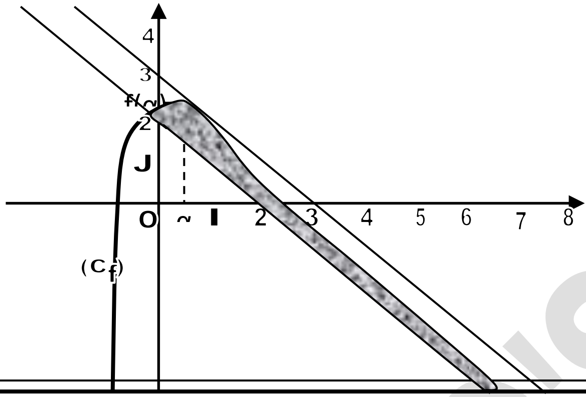
1) Calculons $\boldsymbol{A(\lambda)}$ à l'aide d'une intégration par parties

$$A(\lambda)=\int_0^\lambda(f(x)-y)dx=\int_0^\lambda xe^{1-x}dx\quad on\ pose\ \begin{cases}u=x\\ dv=e^{1-x}dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-e^{1-x}\end{cases}\Longrightarrow$$

$=\left[-xe^{1-x}\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda e^{1-x}dx=-\lambda e^{1-\lambda}-\left[e^{1-x}\right]_0^\lambda$ alors $A(\lambda)=\left(-\lambda e^{1-\lambda}-e^{1-\lambda}+e\right)u.a$

2) Déterminer la limite de $\boldsymbol{A(\lambda)}$ *lors que* $\boldsymbol{\lambda}$ *tend vers* $+\infty$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\lambda e^{1-\lambda}-e^{1-\lambda}+e\right)=e\ \ u.a\ alors\ \ A(\lambda)=e\ u.a$$



BACCALAUREAT 2015 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :

Exercice 1: 1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111

3) a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers

b) Résoudre dans N² l'équation : $x^3 - y^3 = 469$

Exercice 2 : Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct

Soit $Z \in C$ où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons $Z = x + iy$; x et y réels

1) Soit $M(Z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ Exprimer Z'en fonction de Z et θ
2) On considère dans C l'équation d'inconnue Z qui suit : (E): $\frac{1}{2}Z^2 + 4Z\sqrt{3} + 32 = 0$

   Résoudre l'équation (E)
3) On considère A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$

   Calculer OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB
4) On considère par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D
5) On appelle G le barycentre des points pondérés $(O,1)$; $(D,-1)$ et $(B,-1)$
   a) Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$
   b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (Unité graphique : 1cm)
6) Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}}\right)$

   En déduire la nature du triangle GAC

Problème :

Partie A : Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par :

$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$
2) a) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction g

3) a) Démontrer que l'équation $\mathrm{g(x)} = 0, \forall x \in]0, +\infty[$ admet une solution unique α

b) Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$

c) Démontrer que : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]0, \alpha[, \mathrm{g(x)} < 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]\alpha, +\infty[, \mathrm{g(x)} > 0 \end{cases}$

<u>Partie B</u> : On considère la fonction numérique dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

Unités graphiques : $OI = 2cm \quad et \quad OJ = 10cm$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat

2) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3) a) Démontrer que :$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = e^{-x} g(x)$

b) Utiliser la partie A, déterminer les variations de f

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est

$$\mathrm{y} = -\frac{3}{\mathrm{e}}\mathrm{x} + \frac{4}{\mathrm{e}}$$

5) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J), on prendra :$\alpha = 2{,}6$

<u>Partie C :</u>

1) Soit h la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \ln x$

   Démontrer que h est une primitive de $f\ sur\ ]0, +\infty[$

2) Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$

   a) Calculer, en cm² et en fonction de , l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation $x = 3\ \ et\ \ x = \lambda$

   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

++++++++++++++++++++++++<u>RESOLUTION</u>++++++++++++++++++++++++++

<u>Exercice 1 :</u> 1) Démontrons que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k(n-k)} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

<u>1ère Méthode :</u>$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n} (nk - k^2) = \sum_{k=1}^{n} nk - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n^2(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{3n^2(n+1) - n(n+1(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\big(3n^2 - n(2n+1)\big)}{6} = \frac{(n+1)(3n^2 - 2n^2 - n)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}} \boldsymbol{cqfd}$$

2ème Méthode : le raisonnement par récurrence :

•Vérifions que la relation est vraie pour certaines valeurs de n

Pour n=1 ; on a : $\sum_{k=1}^{1} k(1-k) = 1(1-1) = 0 = \frac{(1-1)1(1+1)}{6} = 0$ alors $\boxed{0=0}$ vraie

•Supposons que la relation est vraie dans le rang de n :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = 1(n-1) + 2(n-2) + \cdots + n(n-n) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

•Démontrons qu'elle reste toujours vraie dans le rang de n+1, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \frac{(n+1-1)(n+1)(n+1+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n+1} k(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} (k(n-k)+k) = \sum_{k=1}^{n+1} k(n-k) + \sum_{k=1}^{n+1} k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(n-k) + (n+1)\big(n-(n+1)\big) + \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1) + 3n(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n(n-1)+3n)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)n(n-1+3)}{6} = \frac{(n+1)n(n+2)}{6} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \boldsymbol{cqfd}$$

<u>Conclusion :</u>$\forall n \in N$, la relation est toujours vraie

2) Démontrons que pour tout entier naturel n : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111

$$10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1 \equiv 0[111] \;\; (10^3)^{3n} \times 10^2 + (10^3)^{2n} \times 10^1 + 1 \equiv 0[111]$$

mais $10^3 \equiv 1[111]$ alors on a :

$$1^{3n} \times 100 + 1^{2n} \times 10 + 1 \equiv 0[111] \;\; 111 \equiv 0[111] \text{d'où } 0 \equiv 0[111]\mathbf{cqfd}$$

3) a) Décomposons 469 en produit de facteurs premiers

On a $\boxed{469 = 7 \times 67}$

b) Résolvons dans N² l'équation : $\boldsymbol{x^3 - y^3 = 469}$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 469 = 7 \times 67$:

On a donc : $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 469$ alors $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=469 \end{cases} \; (S_1)$

Ou bien :$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 7 \times 67$ alors $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=67 \end{cases} \; (S_2)$

Résolvons alors (S_1) et (S_2) :

• Pour le système (S_1), on a :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=469 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+y \\ (1+y)^2+(1+y)y+y^2=469 \end{cases} \Rightarrow 1+2y+y^2+y+y^2+y^2=469$$

$$3y^2+3y-468=0 \Rightarrow y^2+y-156=0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \times 1(-156) = 625$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 25 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1-25}{2} = -13 \text{ à rejeter} \\ y_2 = \frac{-1+25}{2} = 12 \end{cases} \text{alors } x = 1+12 = 13 \Rightarrow (\mathbf{x};\mathbf{y}) = \{(\mathbf{13};\mathbf{12})\}$$

•Pour le système (S_2), on a :

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7+y \\ (7+y)^2+(7+y)y+y^2=67 \end{cases} \Rightarrow 49+14y+y^2+7y+y^2+y^2=67$$

$$\Rightarrow 3y^2+21y-18=0 \Rightarrow y^2+7y-6=0 \Rightarrow \Delta= 7^2-4\times 1(-6)=49+24=73$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{73} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{-7-\sqrt{73}}{2} \text{ à rejeter} \\ y_2=\frac{-7+\sqrt{73}}{2} \text{ à rejeter} \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \boxed{S=\{(13;12)\}}$$

Exercice 2 :

1) **Soit $M(Z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ ll'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ**

Exprimons Z'en fonction de Z et θ $Z'=e^{i\theta}Z$

2) **On considère dans C l'équation d'inconnue Z qui suit : (E): $\frac{1}{2}Z^2+4Z\sqrt{3}+32=0$**

Résolvons l'équation (E)

$$\frac{1}{2}Z^2+4Z\sqrt{3}+32=0 \Rightarrow \Delta=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times\frac{1}{2}\times 32=16\times 3-64=-16 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4i$$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-4\sqrt{3}-4i}{2\times\frac{1}{2}}=-4\sqrt{3}-4i \\ z_2=\dfrac{-4\sqrt{3}+4i}{2\times\frac{1}{2}}=-4\sqrt{3}+4i \end{cases} \text{d'où } S=\left\{-4\sqrt{3}-4i;\ -4\sqrt{3}-4i\right\}$$

3) **On considère A et B d'affixes respectives $a=-4\sqrt{3}-4i$ et $b=-4\sqrt{3}+4i$**

CalculonsOA , OB et AB. En déduisons la nature du triangle OAB

$$\mathrm{OA}=|\mathrm{a}|=8\,;\ \mathrm{OB}=|\mathrm{b}|=8 \ \text{ et } \ \mathrm{AB}=|\mathrm{a}-\mathrm{b}|=|-8\mathrm{i}|=8 \ \text{ d'où}$$
$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=8$$

OAB est un triangle équilatéral

4) **On considère par C le point d'affixe $c=\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminons l'affixe du point D**

$$\mathrm{Z}'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{Z_D}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{Z_C}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}+1-\sqrt{3}}{2}=2\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{z_D}=2\mathrm{i}$$

5) **On appelle G le barycentre des points pondérés $(O,1);(D,-1)$ et $(B,-1)$**

a) **Montrons que le point G a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6i$**

$$\mathrm{g}=\frac{1\times 0-1\times 2\mathrm{i}-1\left(-4\sqrt{3}+4\mathrm{i}\right)}{-1+1-1}=\frac{-2\mathrm{i}+4\sqrt{3}-4\mathrm{i}}{-1}=-\left(4\sqrt{3}-6\mathrm{i}\right) \Rightarrow \mathrm{g}=-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}$$

b) **Plaçons les points A, B, C et G sur une figure (Unité graphique : 1cm)**

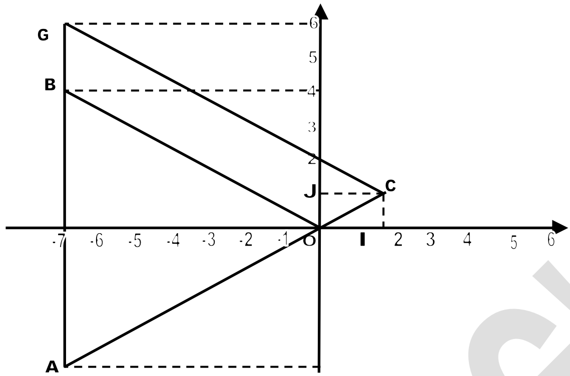
c) **Déterminons une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}\right)$**

En déduisons la nature du triangle GAC

$$\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{GA}},\overrightarrow{\mathrm{GC}}}\right)=\arg\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{g}}{\mathrm{c}-\mathrm{g}}\right)=\arg\left(\frac{-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}+4\sqrt{3}-6\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}+4\sqrt{3}-6\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\frac{-10\mathrm{i}}{5\sqrt{3}-5\mathrm{i}}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{-2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\frac{-2\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)}{3+1}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$$

d'où $\mathbf{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ GAC est un triangle équilatéral



Problème :

Partie A : Soit la fonction g dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1) a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x} + \ln x\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathbf{g(x)} = +\infty$$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right) = -\frac{2x+1}{0^2} + \ln 0^+ = -\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to0^+} \mathbf{g(x)} = -\infty$$

2) a) Démontrons que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$$g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)' = -\frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x} \Longrightarrow \mathbf{g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}}$$

b) En déduisons le sens de variation de g.

Comme $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3} > 0$ alors g est strictement croissante

c) Dressons le tableau de variations de la fonction g

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0, \forall x \in]0,+\infty[$ admet une solution unique α

Comme g est strictement monotone sur $]0;\ +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers R ; d'où $g(\alpha) = 0$

b) Justifions que $2,55 < \alpha < 2,56$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$g(2,55) \times g(2,56) < 0 \quad alors \quad \alpha \in]2,55; 2,56[$$

c) **Démontrons que :** $\begin{cases} \forall x \in]0,\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha,+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signes de $g(x)$		$-$		$+$	

D'où $\begin{cases} \forall x \in]0,\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha,+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

<u>Partie B :</u> On considère la fonction numérique dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par : $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}}$ **On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J) Unités graphiques : $OI = 2cm \quad et \quad OJ = 10cm$**

1) a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right) = \left(\frac{1}{0} - \ln 0^+\right)e^{-0} = +\infty \quad \text{alors } \lim_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)} = +\infty$$

D'où $x = 0$ est l'asymptote verticale à (C)

b) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right) = \left(\frac{1}{+\infty} - \ln +\infty\right)e^{-\infty} = -\infty e^{-\infty} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \mathbf{f(x) = 0}$$

D'où $y = 0$ est l'asymptote horizontale à (C)

2) Démontrons que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln\alpha\right)e^{-\alpha} \text{ et } g(\alpha) = 0 \implies -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \implies \ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2} \implies$$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \frac{\alpha - 2\alpha - 1}{\alpha^2}e^{-\alpha} \implies \mathbf{f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}\ cqfd}$$

3) a) Démontrons que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = e^{-x}g(x)$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} - \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} = \left(\frac{-1-x}{x^2} - \frac{1}{x} + \ln x\right)e^{-x}$$

$$= \left(\frac{-1-x-x}{x^2} + \ln x\right)e^{-x} \implies f'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)e^{-x} \implies f'(x) = e^{-x}g(x) \ \mathbf{cqfd}$$

b) Utilisons la partie A, déterminons les variations de f

Comme $f'(x) = g(x) \times e^{-x} \implies g(\alpha) = 0$ alors $x = \alpha$ et $\alpha \in]2{,}55; 2{,}56[$; alors $\begin{cases} \forall x \in]0,\alpha[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha,+\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4) Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

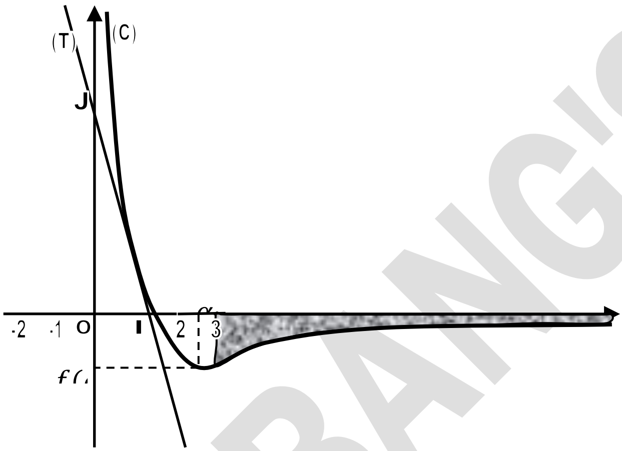
Vérifions si $\lim\limits_{x\to 1}(f(x) - y) = 0$

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-y)=\lim_{x\to 1}\left(\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}+\frac{3}{e}x-\frac{4}{e}\right)=\left(\frac{1}{1}-\ln 1\right)e^{-1}+\frac{3}{e}-\frac{4}{e}=e^{-1}+\frac{3}{e}-\frac{4}{e}$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{3}{e}-\frac{4}{e}=0 \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1}(f(x)-y)=0}\ \ \boldsymbol{cqfd}$$

5) Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère$(\mathbf{O},\mathbf{I},\mathbf{J})$, on donne :$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{2,6}$

<u>Intersection avec les axes :</u>• $(\mathrm{C})\cap\left(\mathrm{x}'\mathrm{Ox}\right):\mathrm{f}(\mathrm{x})=0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\ln \mathrm{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}=0 \Longrightarrow \mathrm{x}\in\left]0,\alpha\right[$

• $(C)\cap(y'Oy)$: $x=0$ alors $f(0)=+\infty$ Pas d'intersection



<u>Partie C</u> :

1) Soit h la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et définie par : $\boldsymbol{h(x)=e^{-x}\ln x}$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Pour cela vérifions si $h'(x)=f(x)$

$$\mathrm{h}'(\mathrm{x})=(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\ln\mathrm{x})'=-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\ln\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}=\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\ln\mathrm{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\Longrightarrow \mathrm{h}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})\ \mathbf{cqfd}$$

2) Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un nombre réel tel que $\boldsymbol{\lambda}>3$

a) **Calculons, en cm² et en fonction de , l'aire $\boldsymbol{A(\lambda)}$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation$x=3$ et $x=\lambda$**

$$A(\lambda)=-\int_3^{\lambda}f(x)dx=-[h(x)]_3^{\lambda}=-\left(e^{-\lambda}\ln\lambda-e^{-3}\ln 3\right)u.a \quad\Longrightarrow$$
$$A(\lambda)=\left(-e^{-\lambda}\ln\lambda+e^{-3}\ln 3\right)u.a$$

b) **Calculons $\boldsymbol{\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)}$**

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-e^{-\lambda}\ln\lambda+e^{-3}\ln 3\right)=-e^{-\infty}\ln+\infty+e^{-3}\ln 3=e^{-3}\ln 3\Longrightarrow$$
$$\boldsymbol{\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=e^{-3}\ln 3\,u.a}$$

BACCALAUREAT 2016 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :

Exercice 1: Dans une urne il y'a n boules rouges et $2n$ boules blanches

On tire simultanément p boules de l'urne $p < n$

1) Si $n = 5$ et $p = 4$; calculer les probabilités des évènements suivants :

A : Obtenir deux boules blanches et deux boules rouges

B : Obtenir au moins une blanche

(On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles)

2) On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que : $n \geq 2$

a) Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur

b) Démontrer que la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1

Quel est le sens de variations de $(P_n)_{n\geq 2}$?

c) Déduire de la question précédente que $(P_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 2:

Partie A :

I) n étant un entier relatif quelconque, on pose A=n-1 et B=n²-3n+6

1) a)Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4

b) Déterminer, suivants les valeurs de n, le PGCD de A et B

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

II) Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels, on désigne δ leur PPCM et µ leur PGCD

1) Déterminer les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que : 3δ+2µ=11

2) Dresser la liste des diviseurs de 108.

Déterminer les couples d'entiers naturels tels que : µ-3δ=108 et $10 < \delta < 15$

Partie B :On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace

On désigne par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 3); (B, 2)$ et $(C, -1)$ et par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 2); (B, 1)$ et $(C, 1)$

4) a) Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que $G_1 \neq G_2$

5) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que:

$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 tel que: $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

c) Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera

d) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit R

6) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}$ =0

PROBLEME :

Partie A : Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0; +\infty[$

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0

2) On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$

3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1;+\infty[$. En déduire le signe de h

Partie B : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x$$

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0

2) On note g′ la dérivée de g; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; g'(x) = xh(x)$

Démontrer que $g(x_0) > 0$

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0;\ 1[$.

4) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0;+\infty[$.

a) Déterminer le signe de g

b) Démontrer que $x_1 \in]0{,}3;0{,}4[\ \ et\ \ x_2 \in]3{,}3;3{,}4[$

Partie C : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x\ln x}{1+x^2}$

1) Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable en 0

2) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpreter graphiquement ce résultat

3) On note f' la dérivée de f ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Démontrer que si α est solution de l'équation $g(x) = 0\ \ alors \ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ et en déduire $f(\alpha)$

6) En déduire que $f(x_1) < 0\ et\ \ f(x_2) > 0$. Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f

7) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni du repère orthogonal

On prendra pour unités : 3cm en abscisses, 8cm en ordonnées, $x_1 \approx 0{,}35\ \ et\ \ x_2 \approx 3{,}35$

++++++++++++++++++++++++RESOLUTION++++++++++++++++++++++++++

Exercice 1: Dans une urne il y'a n boules rouges et $2n$ boules blanches

On tire simultanément p boules de l'urne $p < n$

Soit Ω l'univers : $card(\Omega) = C_{3n}^p$

1) Si $n = 5\ \ et\ p = 4$; calculons les probabilités des évènements suivants :

$$card(\Omega) = C_{15}^4 = \frac{A_{15}^4}{4!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2} = 15 \times 7 \times 13 = 1365$$

A : Obtenir deux boules blanches et deux boules rouges

$$P(A) = \frac{C_5^2 \times C_{10}^2}{1365} = \frac{10 \times 45}{1365} = \frac{450}{1365} = \frac{30}{91}\ \ alors\ \ P(A) = \frac{30}{91}$$

B : Obtenir au moins une blanche

$$P(B) = 1 - \frac{C_5^4}{1365} = 1 - \frac{5}{1365} = \frac{1365-5}{1365} = \frac{1360}{1365}\ \ alors\ \ P(B) = \frac{272}{273}$$

2) On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que : $n \geq 2$

a) Calculons la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur

$$P_n = \frac{C_n^2 + C_{2n}^2}{C_{3n}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n^2 - n + 4n^2 - 2n}{9n^2 - 3n} \ d'où \ P_n = \frac{5n-3}{9n-3}$$

b) Démontrons que la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1

Comme P_n est une probabilité alors $P_n \leq 1$ ou bien $\forall n \geq 2$ on a :

$$9n > 5n \Longrightarrow 9n - 3 > 5n - 3 \Longrightarrow \ 1 > \frac{5n-3}{9n-3} \Longrightarrow P_n < 1$$

Déterminons le sens de variations de $(P_n)_{n\geq 2}$

On pose $f(x) = P_n \Longrightarrow f(x) = \frac{5x-3}{9x-3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{5(9x-3)-9(5x-3)}{(9x-3)^2} = \frac{45x-15-45x+27}{(9x-3)^2} \Longrightarrow$

$f'(x) = \frac{12}{(9x-3)^2} > 0$ alors f est strictement croissante

Par conséquent $(P_n)_{n\geq 2}$ **est strictement croissante et on a : $P_{n+1} \geq P_n$**

c) Déduisons de la question précédente que $(P_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculons sa limite

Comme $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée et croissante alors elle est convergente

Sa limite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n-3}{9n-3} = \frac{5}{9} \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{5}{9}$

Exercice 2:

Partie A :

I) n étant un entier relatif quelconque, on pose

$$A = n - 1 \ et \ B = n^2 - 3n + 6$$

1) a) Montrons que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4

En utilisant l'Algorithme d'Euclide, on a : $n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$

D'où $PGCD(A; B) = PGCD(A; 4)$ $cqfm$

b) Déterminons, suivants les valeurs de n, le PGCD de A et B

On pose $PGCD(A; 4) = d \ avec \ 0 < d \leq 4 \ on \ a$:

- Si $n - 1 = 4k \Longrightarrow n = 4k + 1$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 4}$
- Si $n - 1 = 4k + 1 \Longrightarrow n = 4k + 2$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 1}$
- Si $n - 1 = 4k + 2 \Longrightarrow n = 4k + 3$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 2}$
- Si $n - 1 = 4k + 3 \Longrightarrow n = 4k + 4$ alors $\mathbf{PGCD(A; B) = 1}$

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif

$\frac{n^2-3n+6}{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)+4}{n-1} = n - 2 + \frac{4}{n-1}$ On pose $n - 1 = D(4) = \{-1; -2; \ -4, 1; 2; 4\}$

- $Si \ \ n - 1 = -1 \Longrightarrow n = 0$; • $Si \ \ n - 1 = -2 \Longrightarrow n = -1$; • $Si \ \ n - 1 = -4 \Longrightarrow n = -3$
- $Si \ \ n - 1 = 1 \Longrightarrow n = 2$; • $Si \ \ n - 1 = 2 \Longrightarrow n = 3$; • $Si \ \ n - 1 = 4 \Longrightarrow n = 5$

D'où $\boldsymbol{n = \{-3; \ -2; 0; 2; 3; 5\}}$

II) Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels, on désigne δ leur PGCD et μ leur PPCM

1) Déterminons les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que : 3δ+2μ=11

- $\exists (x; y) \in N^{*^2} \ \ tels \ que : \begin{cases} a = \delta x \\ b = \delta y \end{cases} avec \ \Delta(x, y) = 1$
- D'après le théorème fondamental de PPCM on a : $\mu\delta = ab \ alors \ \ \mu = xy\delta$

On a $3\delta + 2xy\delta = 11 \Longrightarrow 2xy + 3 = \frac{11}{\delta}$ d'où δ est un diviseur de 11 alors $\delta = \{1; 11\}$

√ Pour $\delta = 1$ $alors\ 2xy + 3 = 11 \Longrightarrow 2xy = 8 \Longrightarrow xy = 4 \Longrightarrow (x; y) = \{(1; 4); (4; 1)\}$

$$D'\text{où } (a; b) = \{(1; 4); (4; 1)\}$$

√ Pour $\delta = 11$ $alors\ 2xy + 3 = 1 \Longrightarrow 2xy = -2 \Longrightarrow xy = -1$

2) Dressons la liste des diviseurs de 108.

●$108 = 2^2 \times 3^3$ $alors\ d(108) = (2 + 1)(3 + 1) = 12$

$$D(108) = (2^0;\ 2^1;\ 2^2)(3^0;\ 3^1;\ 3^2\ ;3^3) = (1,2,4)(1,3,9,27)$$

$$D'\text{où } D(108) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108\}$$

Déterminons les couples d'entiers naturels tels que : $\boldsymbol{\mu - 3\delta = 108}$ et $\mathbf{10} < \delta < 15$

●$\exists(x; y) \in N^{*^2}$ $tels\ que :$ $\begin{cases} a = \delta x \\ b = \delta y \end{cases}$ $avec\ \Delta(x, y) = 1$

●D'après le théorème fondamental de PPCM on a : $\mu\delta = ab\ alors\ \mu = xy\delta$

On a $xy\delta - 3\delta = 108 \Longrightarrow xy - 3 = \frac{108}{\delta}$ d'où δ est un diviseur de 108 et comme $10 < \delta < 15$ alors $\delta = 12$ $alors\ xy - 3 = 9 \Longrightarrow xy = 12 \Longrightarrow$

$$(x; y) = \{(1; 12); (3; 4); (4; 3); (12; 1)\}\quad D'\text{où } (a; b) = \{(12; 144); (36; 48); (48; 36); (144; 12)\}$$

<u>Partie B :</u>

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace

On désigne par $\boldsymbol{G_1}$ le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A}, \mathbf{3})$; $(\boldsymbol{B}, \mathbf{2})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{C}, \mathbf{-1})$ et par $\boldsymbol{G_1}$ le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A}, \mathbf{2})$; $(\boldsymbol{B}, \mathbf{1})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{C}, \mathbf{1})$

3) a) Calculons $\overrightarrow{\boldsymbol{G_1G_2}}$ en fonction de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ $\boldsymbol{et}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$

●Comme $3 + 2 - 1 = 4 \neq 0$ $alors\ G_1\ existe\ et\ on\ a : 3\overrightarrow{G_1A} + 2\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

introduisons le point A : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (1)

●Comme $2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ $alors\ G_2\ existe\ et\ on\ a : 2\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C} = \vec{0}$

introduisons le point A : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (2)

De (1)-(2), on a : $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{G_2G_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{G_1G_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) Déduisons-en que $\boldsymbol{G_1 \neq G_2}$

Comme A, B et C sont non alignés alors $\overrightarrow{G_1G_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \neq 0$ $d'\text{où}\ G_1 \neq G_2$

4) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 $tel\ que$: $\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 $tel\ que$: $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

d) Démontrons que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera

●$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ introduisons le point G_1, on a : $\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1M_1} = 4\overrightarrow{MG_1} \Longrightarrow$

$$3\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{G_1M_1} \Longrightarrow \overrightarrow{G_1M_1} = -3\overrightarrow{G_1M}$$

M_1 est l'image de M par l'homothétie de centre G_1 et de rapport $k = -3$

Lorsque M décrit la droite (D), alors M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par l'homothétie de centre G_1 et de rapport $k = -3$

e) Montrons que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit R

Comme $\begin{cases}\overrightarrow{MM_1} = 4\overrightarrow{MG_1} & (1)\\ \overrightarrow{MM_2} = 4\overrightarrow{MG_2} & (2)\end{cases}$ $de\ (1)-(2) on\ a: \overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2} = 4\overrightarrow{MG_1} - 4\overrightarrow{MG_2} \Longrightarrow$

$\overrightarrow{M_2M_1} = 4(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_2M}) = 4\overrightarrow{G_2G_1} \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 4\overrightarrow{G_1G_2}$

$\overrightarrow{G_1G_2}$ *est* un vecteur indépendant de M alors $\overrightarrow{M_1M_2}$ est un vecteur constant

f) Déterminons l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que :

$\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2} = 0 \Longrightarrow (4\overrightarrow{MG_1})(4\overrightarrow{MG_2}) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{MG_1} \times \overrightarrow{MG_2} = 0$

Alors (S) est une sphère de diamètre $[G_1G_2]$

PROBLEME :

Partie A : Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0;+\infty[$

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1) Calculons les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{h(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right) = 1 + \frac{1}{(+\infty)^2} - 2\ln +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{h(x)} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{h(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right) = 1 + \frac{1}{0^2} - 2\ln 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{h(x)} = +\infty$

2) On note h' la dérivée de h ; démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[; h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$

$$h'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right)' = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} = \frac{-2-2x^2}{x^3}\ alors\ \ h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$$

3) Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1;+\infty[$.

Comme $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ *alors elle réalise* une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$ et que $x_0 \in]1;+\infty[\subset]0;+\infty[$ alors x_0 est solution de l'équation h(x)=0 avec $h(x_0) = 0$

Déduisons-en le signe de h

x	0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	|	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de h(x)		$+$	|	$-$	

D'où $\begin{cases}\forall x \in]0;x_0[\,; h(x) > 0\\ \forall x \in]x_0;\ +\infty[\,; h(x) < 0\end{cases}$

Partie B : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\mathrm{g}(x) = x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x$$

1) Calculons les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\left((1-\ln x) + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)\right) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g(x)} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{g(x)} = -\infty$

2) On note g′ la dérivée de g; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; g'(x) = xh(x)$

$$g'(x) = (x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x)' = 2x(1-\ln x) - \frac{1}{x} \times x^2 + \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$g'(x) = 2x(1-\ln x) - x + \frac{1}{x} = x\left(2 - 2\ln x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(1 - 2\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

D'où $g'(x) = xh(x)$

Démontrons que $g(x_0) > 0$:

Comme $h(x_0) = 0$ *alors* $1 - 2\ln x_0 + \frac{1}{{x_0}^2} = 0 \Longrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{x_0^2}$

$$g(x_0) = {x_0}^2(1 - \ln x_0) + 1 + \ln x_0 = {x_0}^2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{x_0^2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x_0^2} \Longrightarrow$$

$$g(x_0) = \frac{1}{2}{x_0}^2 - 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{2}{x_0}^2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2} \Longrightarrow g(x_0) = \frac{1}{2}{x_0}^2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2} > 0$$

3) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0; 1[$.

Comme $g'(x) = xh(x)$ alors g′ et h(x) ont le même signe avec $\begin{cases} \forall x \in]0; x_0[\,; g'(x) > 0 \\ \forall x \in]x_0; +\infty[\,; g'(x) < 0 \end{cases}$

g est strictement croissante sur $]0; x_0[$ et que $]0; 1[\subset]0; x_0[$ alors x_1 est solution de cette équation avec $g(x_1) = 0$

4) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0; +\infty[$.

a) Déterminons le signe de g

x	0	x_1	1	x_0	x_2	$+\infty$
$g'(x)$		+			−	
$g(x)$	$-\infty$	0	2	$g(x_0)$	0	$-\infty$
Signe de h(x)	−		+		−	

D'où $\begin{cases} \forall x \in]0; x_1[\cup]x_2; +\infty[\,; g'(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1; x_2[\,; g'(x) > 0 \end{cases}$

b) Démontrons que $x_1 \in]0,3; 0,4[$ *et* $x_2 \in]3,3; 3,4[$

●Comme $x_1 \in]0{,}3; 0{,}4[\subset]0; 1[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; on a : $g(0{,}3) \times g(0{,}4) < 0$

●Comme $x_2 \in]3{,}3; 3{,}4[\subset]x_0; +\infty[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; on a : $g(3{,}3) \times g(3{,}4) < 0$

__Partie C :__ On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{1+x^2} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Démontrons que f est continue à droite en 0 mais non dérivable en 0

●**__Continuité :__** f est continue en 0 si et seulement si : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = l; (l \in R)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \in R \ alors\ f\ est\ continue\ en\ 0$$

●**__Dérivabilité :__** f est dérivable en 0 si et seulement si : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = l; (l \in R)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\ln x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{\ln 0}{1+0^2} = -\infty \ alors\ f'(0) = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en 0

2) Calculons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons graphiquement ce résultat

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln+\infty}{+\infty} = 0 \ \ alors \ \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

●La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C)

3) On note f' la dérivée de f ; démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{\mathbf{g(x)}}{(\mathbf{1+x^2})^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{1+x^2}\right)' = \frac{(\ln x+1)(1+x^2) - 2x(x\ln x)}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\ln x + x^{2\ln x} + 1 + x^2 - 2x^{2\ln x}}{(1+x^2)^2} = \frac{\ln x + 1 + x^2(1-\ln x)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\mathbf{g(x)}}{(\mathbf{1+x^2})^2}$$

4) Dressons le tableau de variation de f

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	0

5) Démontrons que si $\boldsymbol{\alpha}$ est solution de l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ $\boldsymbol{alors} \ln \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\alpha^2+1}}{\boldsymbol{\alpha^2-1}}$ et en déduire $\boldsymbol{f(\alpha)}$

●$\mathrm{g}(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha^2(1-\ln\alpha) + 1 + \ln\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha^2 - \alpha^2\ln\alpha + 1 + \ln\alpha = 0 \Longrightarrow$

$$(1-\alpha^2)\ln\alpha = -(\alpha^2+1) \ \ d'où \ \ \ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

●$f(\alpha) = \frac{\alpha\ln\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}$ $\ \ d'\text{où} \ \ \boldsymbol{f(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha^2-1}}$

6) Déduisons-en que $\boldsymbol{f(x_1)} < 0 \ et \ \ f(\boldsymbol{x_2}) > 0$.

●Comme $x_1 \in]0;1[\ alors \ \ {x_1}^2 - 1 < 0 \ \Longrightarrow \frac{x_1}{{x_1}^2-1} = f(x_1) < 0$

●Comme $x_2 \in]1;+\infty[\ alors \ \ {x_2}^2 - 1 > 0 \ \Longrightarrow \frac{x_2}{{x_2}^2-1} = f(x_2) > 0$

Vérifions que $f(1) = 0$ puis déduisons-en le signe de f

$$f(1) = \frac{1\ln 1}{1+1^2} = 0 \ \ d'\text{où} \ \ f(1) = 0$$

D'où $\begin{cases} \forall x \in]0;1[\,;\mathrm{f(x)} < 0 \\ \forall x \in]1;\ +\infty[\,;\mathrm{f(x)} > 0 \end{cases}$

7) Traçons la courbe représentative $(\boldsymbol{C_f})$ de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I , J)

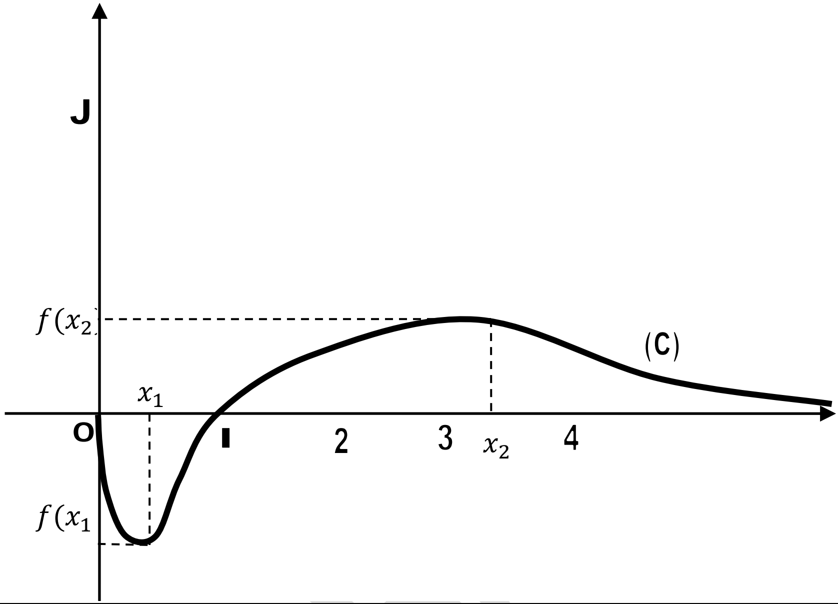
On prendra pour unités : 3cm en abscisses, 8cm en ordonnées, $x_1 \approx 0{,}35 \ \ et \ \ x_2 \approx 3{,}35$

●**<u>Branches infinies :</u>** $AV: \nexists \ \ \ AH: y = 0$

●**<u>Intersection avec les axes :</u>** •$(\mathrm{C}) \cap (\mathrm{x'Ox})$: $\mathrm{f(x)} = 0 \ \Longrightarrow \frac{x\ln x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = 0 \\ \mathrm{x} = 1 \end{cases}$

• $(C) \cap (y'Oy)$: $x = 0$ alors $f(0) = 0$

$f(0{,}35) = \frac{0{,}35}{0{,}35^2-1} \approx -0{,}4 \quad et \quad f(3{,}35) = \frac{3{,}35}{3{,}35^2-1} \approx 0{,}3$



BACCALAUREAT 2017 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :

Exercice 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$
2) Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ *par* : $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$
   Exprimer (u_n)en fonction de n
3) Montrer que (u_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ? Calculer la limite u_n lors que n tend vers $+\infty$
4) On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   a) Calculer s_1, s_2 *et* s_3 et exprimer s_n en fonction de n
   b) Calculer la limite s_n lors que n tend vers $+\infty$

Exercice 2:

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^{α}, e^{β} *et* e^{γ} *o*ù α, β et γ sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

5) Calculer α, β et γ et la variance $V(X)$
6) Soit A, B *et* C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (Δ)
   g) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,4)\}$
   h) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de $((\Delta)$.
   Montrer que $\varphi(G) = V(X)$

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$

PROBLEME :

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$. On note par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal (O, I, J). L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées

1) a. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$

   b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{x})$

   Déterminer la limite de f en $+\infty$

   c. En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera

2) On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $\mathrm{g(t)} = \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t+1}} - \ln(1+\mathrm{t})$

   a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0;\ +\infty[$

   b. En déduire le signe de g(t) lors que $t > 0$

3) a. Calculer f'(x) et l'exprimer en fonction de la fonction $\mathrm{g(e^{x})}$, f'(x) désignant la fonction dérivée de f

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation

4) Tracer les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C)

PARTIE B

Soit F la fonction définie sur R par : $F = \int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{f(t)dt}$

1) Etudier le sens de variation de la fonction F

2) a) Vérifier que pour tout nombre réel t : $\frac{1}{1+e^{t}} = 1 - \frac{e^{t}}{1+e^{t}}$ et calculer $\int_0^{x}\frac{dt}{1+e^{t}}$

   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de F(x)

$$F(x) = x - \ln(1+e^{x}) - f(x) + 2\ln 2 \qquad (1)$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2 \qquad (2)$$

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}(F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat. On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$

++++++++++++++++++++++++**RESOLUTION**+++++++++++++++++++++++++++

Exercice 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $f(x) = \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

1- **Déterminons une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+}$**

$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{e^{x}}}{\mathrm{e^{x}+1}} = \frac{(\mathrm{e^{x}+1})'}{\mathrm{e^{x}+1}}$ on a la forme de $(\ln(\mathrm{U}))' = \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}$ alors la primitive de f(x) est

$$\mathrm{F(x)} = \ln(\mathrm{e^{x}}+1) + \mathrm{c}$$

2- **Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par : $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$**

Exprimons (u_n) en fonction de n

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx = [\ln(e^x+1)\ ]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = \ln(e^{\ln(n+1)}+1) - \ln(e^{\ln n}+1)$$

$$= \ln(n+1+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Rightarrow \mathbf{u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$$

3- Montrons que (u_n) est une suite décroissante positive.

<u>1ère méthode</u> : Pour cela étudions le sens de variation de la fonction $f(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$$f'(n) = \left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)' = \frac{\det\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1-2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

<u>2ème méthode</u> : Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)$$

mais $\forall n > 0\,;\, n^2+4n+3 < n^2+4n+4 \Rightarrow \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1 \Rightarrow \ln\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{d'o}\text{ù } \mathbf{u_{n+1} - u_n} < 0$$

Alors (u_n) est strictement décroissante

●Comme $u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$; $\forall n > 0; n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0 \Rightarrow \mathbf{u_n} > 0$

D'où $\mathbf{u_n}$ est positive

On peut-on en déduire que comme (u_n) est une suite décroissante positive alors elle minorée.

4- On pose $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

f) Calculons s_1, s_2 et s_3 et exprimons s_n en fonction de n

$$s_1 = u_1 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s_1} = \mathbf{\ln\frac{3}{2}}$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow \boldsymbol{s_2} = \mathbf{\ln 2}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \ln 2 + \ln\frac{5}{4} = \ln\frac{5}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{s_3} = \mathbf{\ln\frac{5}{2}}$$

$$\blacksquare s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\frac{n+2}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{s_n} = \mathbf{\ln}\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

g) Calculons la limite $\mathbf{s_n}$ lors que n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln\frac{+\infty+2}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{s_n} = +\infty$$

<u>Exercice 2 :</u>

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives $\boldsymbol{e^a}$; $\boldsymbol{e^b}$ et $\boldsymbol{e^c}$ où $\boldsymbol{a, b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $\boldsymbol{E(X)}$ est égale à 1

1) Calculons α; β et γ et la variance $\boldsymbol{V(X)}$

•D'après la loi de la probabilité $e^{\alpha}+e^{b}+e^{c}=1 \quad (1)$
•Comme $E(X)=1 \Rightarrow \; e^{a}-e^{b}+2e^{c}=1 \quad (2)$
•Comme a, b *et* c sont en progression arithmétique alors : $2b=a+c \;\Rightarrow e^{2b}=e^{a+c} \quad (3)$
D'où le système

$$\begin{cases} e^{a}+e^{b}+e^{c}=1 \quad (1) \\ e^{a}-e^{b}+2e^{c}=1 \quad (2) \Rightarrow \text{de } (1)+(2)\text{on a : } \; 2e^{a}+3e^{c}=2 \Rightarrow \\ \quad e^{2b}=e^{a+c}(3) \end{cases}$$

$$e^{a}=\frac{2-3e^{c}}{2}=1-\frac{3}{2}e^{c} \; (4)$$

Dans (3)on a :

$$e^{2b-c}=e^{a} \Rightarrow e^{2b-c}=1-\frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow \frac{e^{2b}}{e^{c}}=1-\frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow e^{2b}=e^{c}-\frac{3}{2}e^{2c}(5)$$

De $(1)-(2)$, on a : $2e^{b}-e^{c}=0 \Rightarrow e^{b}=\frac{1}{2}e^{c}(6)$

De (6) dans (5)on a $\left(\frac{1}{2}e^{c}\right)^{2}=e^{c}-\frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^{2c}=e^{c}-\frac{3}{2}e^{2c} \Rightarrow \frac{1}{4}e^{c}=1-\frac{3}{2}e^{c} \Rightarrow$
$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)e^{c}=1 \Rightarrow \frac{7}{4}e^{c}=1 \Rightarrow e^{c}=\frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\gamma=\ln\frac{4}{7}}}$

et dans (6)on a: $e^{b}=\frac{1}{2}e^{\ln\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}*\frac{4}{7}=\frac{2}{7} \Rightarrow e^{b}=\frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta=\ln\frac{2}{7}}}$ *et dans* (4) *on a* :

$$e^{a}=1-\frac{3}{2}e^{c} \;\Rightarrow e^{a}=1-\frac{3}{2}e^{\ln\frac{4}{7}}=1-\frac{3}{2}*\frac{4}{7}=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha=\ln\frac{1}{7}}}$$

x	1	-1	2
$P(X=x_i)$	$e^{\ln\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}$	$e^{\ln\frac{2}{7}}=\frac{2}{7}$	$e^{\ln\frac{4}{7}}=\frac{4}{7}$

D'où :

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=1^2\times\frac{1}{7}+(-1)^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{4}{7}-1^2=\frac{1+2+16}{7}-1=\frac{19-7}{7}=\frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{V(X)=\frac{12}{7}}}$$

2) Soit A, B *et* C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (Δ)

a) Calculons l'abscisse du point G barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{1}),(\boldsymbol{B},\mathbf{2}),(\boldsymbol{C},\mathbf{4})\}$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta X_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1\times 1-1\times 2+4\times 2}{1+2+4}=\frac{7}{7}=1 \;\text{ alors }\; x_G=1$$

b) On pose : $\boldsymbol{\varphi(M)=\frac{1}{7}\left(MA^2+2MB^2+4MC^2\right)}$, *o*ù $\boldsymbol{M}$ est un point de (**(Δ). Montrons que $\boldsymbol{\varphi(G)=V(X)}$**

Posons $M=G, on\ a$:

$$\varphi(G)=\frac{1}{7}(GA^2+2GB^2+4GC^2)=\frac{1}{7}(0^2+2\times 2^2+4\times 1^2)=\frac{1}{7}(12)$$

$$\text{d'où } \; \varphi(G)=V(X)=\frac{12}{7}$$

c) Déterminer l'ensemble $(\boldsymbol{\Gamma})$ des points M de (Δ) tels que $\boldsymbol{\varphi(M)=3}$

Introduisons le point G :

$$\varphi(M)=\frac{1}{7}(MA^2+2MB^2+4MC^2)=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2}{7}$$
$$=\frac{7MG^2+GA^2+2GB^2+4GC^2}{7}=3\Longrightarrow MG^2+\varphi(G)=3\Longrightarrow MG^2+\frac{12}{7}=3$$
$$MG^2=3-\frac{12}{7}=\frac{21-12}{7}=\frac{9}{7}\Longrightarrow MG=\sqrt{\frac{9}{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}\Longrightarrow MG=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

(Γ) est un cercle de centre G et de rayon $r=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

1) **a. On rappelle que $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$. Déterminons la limite de f en $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{-x}\ln(1+e^{x}))=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}\right)$$

On pose : $t=e^{x}\Longrightarrow\begin{cases}x\longmapsto-\infty\\ t\longmapsto e^{-\infty}=0\end{cases}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}f(x)=1}$$

b. Vérifions que pour tout réel x : $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

$$f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})=e^{-x}\ln\big(e^{x}(1+e^{-x})\big)=e^{-x}(\ln e^{x}+\ln(1+e^{-x}))$$
$$f(x)=e^{-x}(x+\ln(1+e^{-x}))=xe^{-x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$$
$$\mathbf{f(x)=\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})}$$

Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})\right)=\frac{+\infty}{e^{+\infty}}+e^{-\infty}\ln(1+e^{-\infty})=0$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

c. Déduisons-en que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera

●Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ alors la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (C) à $-\infty$

●Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ alors la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à (C) à $+\infty$

D'où (C) admet deux asymptote

2) On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(t)=\frac{t}{t+1}-\ln(1+t)$

a. Démontrons que la fonction g est strictement décroissante sur $[0;\ +\infty[$

$$g(t)=\frac{t}{t+1}-\ln(1+t)\Longrightarrow g'(t)=\frac{t+1-t}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}=\frac{1-t-1}{(t+1)^2}=-\frac{t}{(t+1)^2}\Longrightarrow$$
$$\mathbf{g'(t)=-\frac{t}{(t+1)^2}}<0$$

Alors g est strictement décroissante sur $[0;\ +\infty[$

b. Déduisons-en le signe de g(t) lors que $t>0$; $g(0)=\frac{0}{0+1}-\ln(1+0)=0$

t	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(t)$	$-$

g(t)	0 ↘

Comme g est décroissante et admet 0 comme maximum alors $\forall t > 0$; $\mathbf{g(t)} < 0$

3) a. Calculons f'(x) et l'exprimons en fonction de la fonction $g(e^x)$, f'(x) désignant la fonction dérivée de f

$$f'(x) = (e^{-x}\ln(1+e^x))' = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^{-x}}{1+e^x} = e^{-x}\left(\frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right)$$

$$\text{Comme } g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t) \text{ alors } g(e^x) = \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$$

$$\text{D'où } \mathbf{f'(x) = e^{-x}g(e^x)}$$

b. Déduisons-en le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation

Comme $g(t) < 0$ alors $g(e^x) < 0 \Longrightarrow e^{-x}g(e^x) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$

D'où f est strictement décroissante sur R

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f(x)	1 ↘	0

4) **Traçons les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C)**

Intersection avec les axes : $f(0) = e^0\ln(1+e^0) = \ln 2 \Longrightarrow A(0;\ln 2)$

<u>**PARTIE B**</u> Soit F la fonction définie sur R par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) Etudions le sens de variation de la fonction F

$$F'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{comme } 0 < f(x) < 1$$

$$\text{alors } F(x) \text{ est strictement croissante sur R}$$

2) a) Vérifions que pour tout nombre réel t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculons $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t} = \frac{1+e^t}{1+e^t} - \frac{e^t}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = [t - \ln(1+e^t)]_0^x = x - \ln(1+e^x) + \ln 2$$

$$\text{D'où } \int_0^x \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{1+e^t}} = \mathbf{x + \ln 2 - \ln(1+e^x)}$$

b) Déduisons-en, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de F(x)

$$F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2 \qquad (1)$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2 \qquad (2)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (e^{-t}\ln(1+e^t))dt, \text{ on pose } \begin{cases} u = \ln(1+e^t) \\ dv = e^{-t}dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \frac{e^t}{1+e^t}dt \\ v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$F(x) = [-e^{-t}\ln(1+e^t)]_0^x + \int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln 2 + x - \ln(1+e^x) + \ln 2$$

$$\textbf{D'où } \mathbf{F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2 = \ln e^x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$$

$$\mathbf{D'où}\quad \mathbf{F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2} \qquad (2)$$

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - \lim_{x\to+\infty} f(x) + 2\ln 2 = 2\ln 2 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathbf{F(x) = 2\ln 2}$$

4) Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} (F(x) - x)$.

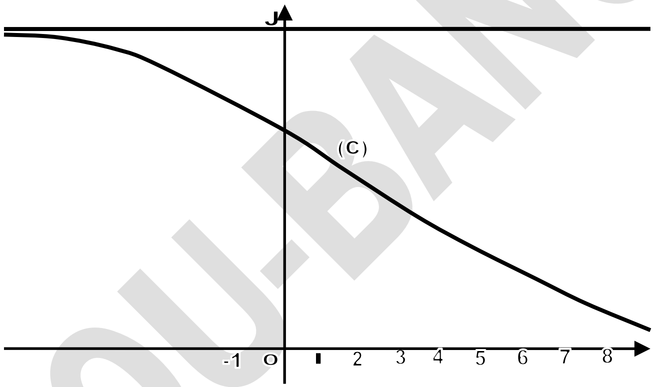
$$\lim_{x\to-\infty} (F(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} (x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2 - x) = 2\ln 2 - 1 \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\boldsymbol{F(x) - x}) = \mathbf{2\ln 2 - 1}$$

Donnons une interprétation graphique de ces résultats. On donne : $\ln 2 \approx 0,69$

●Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$ alors l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$ avec $t > 0$ *est* $2\ln 2$ u. a

●Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (F(x) - x) = 2\ln 2 - 1$ alors l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$ avec $t < 0$ *est* $(2\ln 2 - 1)$u. a



BACCALAUREAT 2018 Terminale Sciences Mathématiques

SUJET :

Exercice 1:

1- a- Calculer $(1+\sqrt{6})^2$; $(1+\sqrt{6})^4$; $(1+\sqrt{6})^6$

b- Appliquer l'algorithme à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2- Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$(1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$$

Que valent a_1 et b_1

D'après les calculs de la question 1)a) donner d'autres valeurs de a_n et b_n

a- Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

b- Démontrer que si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$

En déduire que quel que soit n entier naturel non nul ; 5 ne divise pas $a_n + b_n$

c- Démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux

En déduire que quel que soit n entier naturel non nul a_n et b_n sont premiers entre eux

Exercice 2:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z$$

1- Calculer les coordonnées $(x';y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ du point M

2- a- Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole

b- Préciser dans le repère $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H)

3- Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme

PROBLEME :

Etude préliminaire :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$

1- Etudier le sens de variations de g

2- En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leq a$

Partie A :

On considère la fonction $f_1(x)$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1- Calculer$f'_1(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_1

2- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$;

$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$

3- Dresser le tableau de variation de $f_1(x)$

Partie B :On considère la fonction $f_k(x)$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : OI=5cm et OJ=10cm)

1- Calculer$f'_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_k

2- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$; $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$

3- a- Dresser le tableau de variation de $f_k(x)$

b- Montrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a : $f_k(x)\leq\frac{k}{e}$

4- Déterminer l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O

5- Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p<m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m)

6- Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives(T_1) et (T_2) en O

Partie C :

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unité d'aires du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_k) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$

1- Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda)\leq k\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.(On pourra utiliser l'inégalité de la question préliminaire)

2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$

3- On admet $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}A(\lambda)\leq k$

Interpréter graphiquement ce résultat

++++++++++++++++++++++++++RESOLUTION+++++++++++++++++++++++++++

Exercice 1:

1- **a- Calculons $(1+\sqrt{6})^2$; $(1+\sqrt{6})^4$; $(1+\sqrt{6})^6$**

$$\blacksquare(1+\sqrt{6})^2=1+2\sqrt{6}+6 \text{ alors } (1+\sqrt{6})^2=7+2\sqrt{6}$$

$$\blacksquare(1+\sqrt{6})^4=\left((1+\sqrt{6})^2\right)^2=(7+2\sqrt{6})^2=49+28\sqrt{6}+24$$

$$\text{alors } (1+\sqrt{6})^4=73+28\sqrt{6}$$

$$\blacksquare(1+\sqrt{6})^6=(1+\sqrt{6})^4(1+\sqrt{6})^2=(7+2\sqrt{6})(73+28\sqrt{6})=847+342\sqrt{6}$$

$$\text{alors } (1+\sqrt{6})^6=847+342\sqrt{6}$$

b- Appliquons l'algorithme à 847 et 342.

$$847=2\times342+163$$
$$342=2\times163+16$$
$$163=10\times16+3$$
$$16=5\times3+1$$

On peut en déduire que le PGCD(847 ; 342)=1 et 847 et 342 sont premiers entre eux

2- Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$(1+\sqrt{6})^n=a_n+b_n\sqrt{6}$$

Que valent a_1 et b_1

$$n = 1 \ \ on \ \ a: \ \ (1+\sqrt{6})^1 = a_1 + b_1\sqrt{6} = 1 + \sqrt{6} \ \ alors \ \ et \ \ \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

D'après les calculs de la question 1)a) donnons d'autres valeurs de a_n et b_n

$$\mathrm{n = 2 \ \ on \ \ a:} \ \ (1+\sqrt{6})^2 = \mathrm{a_2 + b_2}\sqrt{6} = 7 + 2\sqrt{6} \ \ \mathrm{alors \ \ et} \ \ \begin{cases} \mathrm{a_2} = 7 \\ \mathrm{b_2} = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{n = 4 \ \ on \ \ a:} \ \ (1+\sqrt{6})^4 = \mathrm{a_4 + b_4}\sqrt{6} = 73 + 28\sqrt{6} \ \ \mathrm{alors \ \ et} \ \ \begin{cases} \mathrm{a_4} = 73 \\ \mathrm{b_4} = 28 \end{cases}$$

$$\mathrm{n = 6 \ \ on \ \ a:} \ \ (1+\sqrt{6})^6 = \mathrm{a_6 + b_6}\sqrt{6} = 847 + 342\sqrt{6} \ \ \mathrm{alors \ \ et} \ \ \begin{cases} \mathrm{a_6} = 847 \\ \mathrm{b_6} = 342 \end{cases}$$

a- **Calculons a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n**

$$(1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6} \Longrightarrow (1+\sqrt{6})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$(1+\sqrt{6})(1+\sqrt{6})^n = (1+\sqrt{6})(a_n + b_n\sqrt{6}) = a_n + b_n\sqrt{6} + 6b_n + a_n\sqrt{6} \Leftrightarrow\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{6})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} \\ (1+\sqrt{6})^{n+1} = a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

b- **Démontrons que si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$**

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n \\ a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 2b_n + 5b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + 5b_n \Leftrightarrow 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + b_{n+1} - 5b_n$$

Si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$ alors ; on a : $a_{n+1} + b_{n+1} = 5k$

$$2(a_n + b_n) = 5k - 5b_n \Leftrightarrow \frac{2(a_n + b_n)}{5} = k - b_n$$

Comme 2 et 5 sont premiers entre eux alors 5 divise $a_n + b_n$ ce qui est contradictoire

Alors si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$

Déduisons-en que quel que soit n entier naturel non nul ; 5 ne divise pas $a_n + b_n$

Comme 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$ alors 5 ne divise pas $a_n + b_n$

c- **Démontrons que si $\mathrm{a_n}$ et $\mathrm{b_n}$ sont premiers entre eux, alors $\mathrm{a_{n+1}}$ et $\mathrm{b_{n+1}}$ sont premiers entre eux**

On pose $PGCD(a_{n+1}; b_{n+1}) = d$; il existe $(\mathrm{a'_{n+1}; b'_{n+1}}) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que: $\begin{cases} \mathrm{a_{n+1} = da'_{n+1}} \\ \mathrm{b_n = db'_{n+1}} \end{cases} \Leftrightarrow$

Comme $\begin{cases} \mathrm{a_{n+1} = a_n + 6b_n} \\ \mathrm{b_{n+1} = a_n + b_n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n} \\ \mathrm{6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{da'_{n+1} - db'_{n+1} = 5b_n} \\ \mathrm{6db'_{n+1} - da'_{n+1} = 5a_n} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mathrm{a'_{n+1} - b'_{n+1}} = \dfrac{\mathrm{5b_n}}{\mathrm{d}} \\ \mathrm{6b'_{n+1} - a'_{n+1}} = \dfrac{\mathrm{5a_n}}{\mathrm{d}} \end{cases}, \mathrm{d \ divise \ 5 \ ; alors \ \ d} = \{1; 5\}, \mathrm{et \ d} = PGCD(a_n; b_n)$$

$$\mathrm{mais \ d} \neq 5 \ \ \mathrm{alors \ d} = 1$$

D'où $PGCD(a_{n+1}; b_{n+1}) = PGCD(a_n; b_n) = 1$

En déduire que quel que soit n entier naturel non nul a_n et b_n sont premiers entre eux

Comme $\mathrm{PGCD(a_n; b_n) = 1}$ alors $\mathrm{a_n}$ et $\mathrm{b_n}$ sont premiers entre eux

<u>Exercice 2:</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z$$

1- Calculons les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M

$$x' + iy' = (x + iy)^2 - 4(x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 4x - 4iy \Leftrightarrow$$

$$x' + iy' = x^2 - y^2 - 4x + i(2xy - 4y) \Leftrightarrow \boxed{M'\begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 4x \\ 2xy - 4y \end{pmatrix}}$$

2- a- Démontrons que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole

On pose $\mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 2)^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1} \text{ cqfd}$$

b- Précisons dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H)

__Le centre__ : $\Omega(2; 0)$

__Les sommets__ : $A(4; 0)$ *et* $A'(0; 0)$

__Les asymptotes__ : $\Delta:\ y = -x + 2$; $\Delta':\ y = -x - 2$

3- Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$

Déterminons les points M du plan tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme

On pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PM'} \Leftrightarrow z = z' - z_P \Leftrightarrow z = z^2 - 4z + \frac{5}{2} + 2i \Leftrightarrow z^2 - 5z + \frac{5}{2} + 2i = 0$

$$\Delta = 25 - 4\left(\frac{5}{2} + 2i\right) = 25 - 10 - 8i = 15 - 8i \Longrightarrow |\Delta| = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{17 + 15}{2}} - i\sqrt{\frac{17 - 15}{2}} = 4 - i \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{5 - 4 + i}{2} = \dfrac{1 + i}{2} \\ z_1 = \dfrac{5 + 4 - i}{2} = \dfrac{9 - i}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z = \frac{1 + i}{2} \text{ ou } z = \frac{9 - i}{2}}$$

__**PROBLEME :**__

Etude préliminaire :

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$

1- Etudions le sens de variations de g

$$g'(x) = (\ln(1 + x) - x)' = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{1 - x - 1}{x + 1} = -\frac{x}{x + 1} \leq 0$$

Alors g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

2- Déduisons-en que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1 + a) \leq a$

Comme g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et que $g(0) = \ln(0 + 1) - 0 = 0$ alors

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) \leq x$$

D'où $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$; on a: $\ln(a + 1) \leq a$

__**Partie A :**__

On considère la fonction $f_1(x)$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1- Calculons $f'_1(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_1

$$f'_1(x) = (\ln(e^x + x) - x)' = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x} = \frac{1 - x}{e^x + x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'_1(x) = \frac{1 - x}{e^x + x}}}$$

$$\frac{1 - x}{e^x + x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ e^x + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	$+$		$-$
$e^x + x$	$+$		$+$
$f'_1(x)$	$+$		$-$

$\forall x \in [0;1]$ $\boldsymbol{f_1}$ est strictement croissante

$\forall x \in [1;+\infty[$ $\boldsymbol{f_1}$ est strictement décroissante

2- Montrons que pour tout réel x de $[0;+\infty[$; $\boldsymbol{f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}$.

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x = \ln(e^x + x) - \ln e^x = \ln\left(\frac{e^x + x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$

Déduisons-en la limite de $\boldsymbol{f_1(x)}$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{+\infty}{e^{+\infty}}\right) = \ln 1 = 0 \quad \text{alors} \quad \boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}}$$

3- Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{f_1(x)}$

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$		$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$	$\searrow$	0

Partie B :

On considère la fonction $f_k(x)$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : OI=5cm et OJ=10cm)

1- Calculons $f'_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ déduisons-en le sens de variation de f_k

$$f'_k(x) = (\ln(e^x + kx) - x)' = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{e^x + k - e^x - kx}{e^x + kx} = \frac{k - kx}{e^x + kx} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'_k(x) = \frac{k(1 - x)}{e^x + kx}}}$$

$$\frac{k(1 - x)}{e^x + x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ e^x + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	$+$		$-$
$e^x + x$	$+$		$+$
$f'_k(x)$	$+$		$-$

$\forall x \in [0;1]$ $\boldsymbol{f_k}$ est strictement croissante

$\forall x \in [1;+\infty[$ $\boldsymbol{f_k}$ est strictement décroissante

2- Montrons que pour tout réel x de $[0;+\infty[$; $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$.

$$f_k(x)=\ln(e^x+x)-x=\ln(e^x+kx)-\ln e^x=\ln\left(\frac{e^x+kx}{e^x}\right)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$$

Déduisons-en la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{+\infty}{e^{+\infty}}\right)=\ln 1=0 \quad \text{alors} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=0}$$

3- a- Dressons le tableau de variation de $f_k(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$		$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln\left(1+\frac{k}{e}\right)$	$\searrow$	0

b- Montrons que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a : $f_k(x)\le\frac{k}{e}$

Comme $\ln(a+1)\le a$ et $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$; $f_k(1)=\ln\left(1+\frac{k}{e}\right)$ *on pose* $a=\frac{k}{e}$

$$\ln\left(1+\frac{k}{e}\right)\le\frac{k}{e}\Leftrightarrow \mathbf{f_k(1)\le\frac{k}{e}} \text{ d'où } \mathbf{f_k(x)\le\frac{k}{e}}$$

4- Déterminons l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O

$$y=f'_k(0)x+f_k(0) \text{ mais } f_k(0)=0 \text{ et } f'_k(0)=\frac{k(1-0)}{e^0+k(0)}=k$$

$$\boldsymbol{y=kx}$$

5- Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p<m$. Etudions la position relative de (C_p) et (C_m)

$$f_m(x)-f_p(x)=\ln\left(1+m\frac{x}{e^x}\right)-\ln\left(1+p\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+mx}{e^x+px}\right)$$

Comme $p<m \Leftrightarrow px<mx \Leftrightarrow e^x+px<e^x+mx \Leftrightarrow \frac{e^x+mx}{e^x+px}>1\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x+mx}{e^x+px}\right)>0$

D'où $f_m(x)-f_p(x)>0$ alors (C_m) est au dessus de la courbe (C_p)

6- Traçons les courbes (C_1) *et* (C_2) et les tangentes respectives (T_1) *et* (T_2) en O

Pour $f_1(x)$; on a : (T_1): $\boldsymbol{y=x}$

Pour $f_2(x)$; on a : (T_2): $\boldsymbol{y=2x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$		$-$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$\ln\left(1+\frac{2}{e}\right)$	$\searrow$	0

<u>**Partie C :**</u>

1- Sans calculer $A(\lambda)$, montrons que $A(\lambda)\le k\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.(On pourra utiliser l'inégalité de la question préliminaire)

Comme $\ln(a+1)\le a$; on pose $a=k\frac{x}{e^x}\Leftrightarrow \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\le k\frac{x}{e^x}\Leftrightarrow f_k(x)\le k\frac{x}{e^x}\Leftrightarrow$

$$\int_0^\lambda f_k(x)dx\le k\int_0^\lambda\frac{x}{e^x}dx\Leftrightarrow\boxed{A(\lambda)\le k\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx}$$

2- A l'aide d'une intégration par parties, calculons l'intégrale $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$

$\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$;on pose : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx = -[xe^{-x}]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - [e^{-x}]_0^{\lambda} = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \Leftrightarrow$$

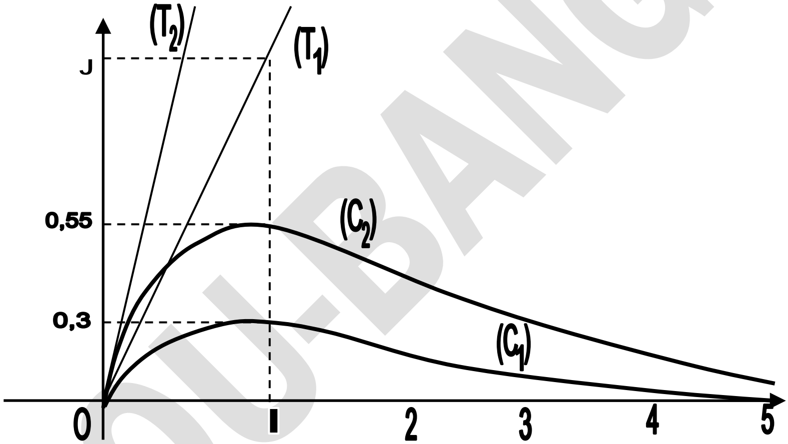
$$\boxed{\int_0^{\lambda} \boldsymbol{xe^{-x}\,dx = 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}}}$$

3- On admet $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda) \leq k$

Comme $\mathrm{A}(\lambda) \leq \mathrm{k}\int_0^{\lambda} \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda) \leq k \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) \leq k\left(1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\right) = k \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathbf{A(\lambda) \leq k}}$$

Interprétation : L'aire de la partie comprise entre (C_k) et l'axe des abscisses est majorée par k (en unité d'aires)



++

BONNE CHANCE AU BAC 2019

SYNTHESE DE PROBLEMES

29 PROBLEMES DE SYNTHESE

BANC'S DAOU'

++++++++++++++++++++++++PROBLEME1 :++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - \arctan(\ln x) \quad si \;\; x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Unité graphique : OI=10cm et OJ=4cm

Partie A : Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = (\ln x)^2 + 4\ln x + 1$

1- Etudier les variations de la fonction h
2- Résoudre l'équation : h(x)=0
3- En déduire le signe de h. On donne ($e^{-2-\sqrt{3}} \approx 0{,}02 \;\; et \;\; e^{-2+\sqrt{3}} \approx 0{,}76$)

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\mathrm{g(x)} = (1 + (\ln x)^2)\sqrt{x} - 2$

1- Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$
2- a) Montrer que : $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \frac{h(x)}{2\sqrt{x}}$

   b) Dresser le tableau de variations de g. On donne ($\mathrm{g}(0{,}02) \approx 0{,}31 \;\; et \;\; \mathrm{g}(0{,}76) \approx -1{,}06$)

3- a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet trois solutions $\alpha; \beta \; et \; \gamma$ tels que :

$$\propto \epsilon]0; 0{,}02[\;\; ; \;\; \beta\epsilon]0{,}02\,; 0{,}76[\;\; et \;\; \gamma\epsilon]0{,}76\,; +\infty[$$

   b) Vérifier que : $0{,}004 < \propto < 0{,}005 \;\; ; \;\; 0{,}09 < \beta < 0{,}1 \;\; et \;\; 1{,}9 < \gamma < 2$

4- En déduire que : $\begin{cases} \forall x \epsilon [0;\ \propto[\cup]\beta;\ \gamma[\,; \mathrm{g(x)} < 0 \\ \forall x \epsilon]\propto; \beta[\cup]\gamma; +\infty[\,; \mathrm{g(x)} > 0 \end{cases}$

Partie C :

1- a) Montrer que si on pose $t = \arctan(\ln x)$ alors on a : $f(t) = e^{\frac{1}{2}\tan t} - t$

   b) Calculer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$

   c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

2- a) Montrer que : $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{g(x)}}{2\mathrm{x}(1+(\ln \mathrm{x})^2)}$

b) On pose $\begin{cases} \mathrm{v(x)} = \arctan(\ln \mathrm{x}) \\ \mathrm{u(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tan \mathrm{x}} - \mathrm{x} \end{cases}$ Montrer que $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{u} \circ \mathrm{v})(\mathrm{x})$

c) En utilisant la fonction $f(x) = (u \circ v)(x)$; montrer que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{g(x)}}{2\mathrm{x}(1+(\ln \mathrm{x})^2)}$

3- Dresser le tableau de variations de f

4- Montrer que si x_0 est une racine de g alors on a :

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} - \arctan\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x_0}} - 1} \quad ou \quad f(x_0) = \frac{2}{1 + (\ln x_0)^2} - \arctan(\ln x_0)$$

$$\text{On donne : } \mathrm{f}(\propto) \simeq 1{,}45 \;\; ; \quad \mathrm{f}(\beta) \simeq 1{,}48 \quad \text{et} \quad \mathrm{f}(\gamma) \simeq 0{,}8$$

5- Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$ et montrer que le point A(1 ;1) appartient à (C)

6- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire une interprétation graphique du résultat

7- Tracer la courbe (C) et la tangente (T)

Partie D : Soit D le domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \; et \; x = 2$

1- Montrer que l'aire du domaine D est :

$$A = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} - 2\arctan(\ln 2) + \int_1^2 \frac{dx}{1+(\ln x)^2}$$

2- a) Démontrer que $\forall x \epsilon [1;2] \; on \; a : \; \frac{1}{1+(\ln 2)^2} \leq \frac{1}{1+(\ln x)^2} \leq 1$

b) Donner un encadrement de $\int_1^2 \frac{dx}{1+(\ln x)^2}$ à 10^{-3} près

c) En déduire la valeur de A à 10^{-3} près

On donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$, $\arctan(\ln 2) \simeq 0{,}606$ et $\ln 2 \simeq 0{,}693$

++++++++++++++++++++++++**PROBLEME 2 :**++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}+1) + \frac{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}+1}$$

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\mathrm{g(x)} = 2\ln(\mathrm{x}+1) + \frac{3\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}-1}{(\mathrm{x}+1)^2}$$

1) Calculer la limite de g en -1 et en $+\infty$

2) Etudier les variations de la fonction g

3) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]-1;+\infty[$

b) Justifier que : $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$; $(\mathrm{g}(0{,}1) \approx -0{,}28$ et $\mathrm{g}(0{,}2) \approx 0{,}3)$

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-1,\alpha[; \mathrm{g(x)} < 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]\alpha;+\infty[; \mathrm{g(x)} > 0 \end{cases}$

Partie B :

1) Calculer la limite de f en -1 et en $+\infty$

En déduire une interprétation graphique du résultat

2) Monter que $\forall x \in]-1;+\infty[; \; f'(x) = g(x)$

3) Etudier les variations de la fonction f

4) Montrer que $\mathrm{f}(\alpha) = -2\alpha + 3 + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}$

5) Donner un encadrement de $\mathrm{f}(\alpha)$ à 10^{-1} près et prouver que $\mathrm{f}(\alpha) > 0$

En déduire que f(x)> 0

6) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1 a pour équation

$$y = \left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2}$$

7) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ donner une interprétation graphique du résultat
8) Tracer (C) et (T)

Partie C : On considère la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$h(x) = (x^2+1)\ln(x+1) + 2x + 1$$

1) Montrer que h est une primitive de f
2) Calculer la limite de h en -1 et en $+\infty$
   En déduire les variations de la fonction h
3) Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$
4) Construire la courbe (C_h) dans le même repère
5) a) Montrer que réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ vers R
   b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère

Partie D : Soit (S) l'application du plan dans lui-même définie par : $z' = z + 1$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)
2) Déterminer l'expression analytique de (S)
3) Déterminer l'image de (T) par (S)
4) Démontrer que l'image de f par (S) est la courbe (Γ) d'équation :

$$y = 2(x+1)\ln x + \frac{x^2+2}{x}$$

5) a) Montrer que $f(x-1) = y$. Que peut-on déduire
   b) Construire (Γ) sans étudier

++++++++++++++++++++++++**PROBLEME 3 :**+++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R^* par $f(x) = \coth x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A :

1) calculer la limite de fonction f en 0 puis donner une interprétation graphique du résultat
2) a) Montrer que $\forall x \in R^*$; $f(x) = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3) a) Montrer que $\forall x \in R^*$; $f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}$
   b) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat
4) Montrer que $\forall x \in R^*$; $f'(x) = -\frac{1}{(shx)^2}$

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f

6) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses $\ln 2$ a pour équation $y = \frac{16}{9}x - \frac{16}{9}\ln 2 + \frac{5}{3}$

7) Montrer que f est une fonction impaire

8) Construire la courbe (C) et (T)

9) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{5}{3}$

c) Montrer que $(h^{-1})'\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{16}$

d) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère

<u>**Partie B :**</u>On considère la fonction g définie sur R^* par $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \ln|e^x - e^{-x}|$ et (Γ) sa courbe représentative

1) Montrer que g est une primitive de f

2) a) Calculer la limite de g en $\pm\infty$

b) Calculer la limite de g en 0

En déduire une interprétation graphique du résultat

3) Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C), les droites d'équations $\mathrm{x} = 1$ et $\mathrm{x} = 2$ et la droite d'équation y=1

4) Donner la valeur approchée de A à 10^{-2} près

5) a) Montrer que $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \ln|1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}|$

b) Montrer que la droite (D) d'équation y=x est une asymptote à (Γ) en $+\infty$

Etudier la position relative de (Γ) par rapport à (D)

6) Etudier les variations de la fonction g

7) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions

$$\alpha \text{ et } \beta \text{ avec } \begin{cases} \alpha \in]-\infty; 0[\\ \beta \in]0;\ +\infty[\end{cases}$$

b) Justifier que : $\begin{cases} \alpha \in]-0{,}5; -0{,}4[\\ \beta \in]0{,}4\,; 0{,}5[\end{cases}$

8) a) Calculer $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{x})}{\mathrm{x}}$

b) En déduire que (Γ) admet une asymptote (D') puis trouver son équation

9) Tracer la courbe (Γ) et ses asymptotes dans un autre repère

<u>**Partie C :**</u>On considère par (H) la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = ch\ x \\ y = sh\ x \end{cases}$

1) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera son équation et ses éléments caractéristiques

2) Soit (S) l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = (1+i)z + 1 - i$$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)

b) Déterminer l'expression analytique de (S)

c) Déterminer l'image de (H) par (S) , préciser son équation et ses éléments caractéristiques

d) Construire(H) et (H') dans un autre repère

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 4 :+++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln|x-1|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A : Soit h la fonction définie $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\mathrm{h(x)} = 2\mathrm{x} - 1 - \ln|\mathrm{x} - 1|$

1) Calculer la limite de h en 1 et en $\pm\infty$
2) Etudier les variations de la fonction h
3) a) Montrer que l'équation h(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]-\infty;\ -1[$

   b) Justifier que : $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$; $(\mathrm{h}(0{,}3) \approx -0{,}4$ et $\mathrm{h}(0{,}4) \approx 0{,}3)$
4) En déduire que : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-\infty, \alpha[; \mathrm{h(x)} < 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[; \mathrm{h(x)} > 0 \end{cases}$

Partie B : Soit g la fonction définie $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 - (\mathrm{x}-1)\ln|\mathrm{x}-1|$

1) Calculer la limite de h en 1 et en $\pm\infty$
2) Montrer que $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{h(x)}$
3) Dresser le tableau de variations de la fonction g
4) a) Montrer que $\mathrm{g}(\alpha) = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$

   b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $\mathrm{g}(\alpha)$

   c) En déduire que $\mathrm{g}(\alpha) < 0$
5) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique $\beta \in]\alpha;\ +\infty[$

   b) Justifier que : $0{,}6 < \beta < 0{,}7$; $(\mathrm{g}(0{,}6) \approx -0{,}007$ et $\mathrm{g}(0{,}7) \approx 0{,}13)$

   c) Calculer g(0)

   d) En déduire le signe de la fonction g

Partie C :

1) Calculer la limite de f en 1

   Interpréter graphiquement le résultat
2) Montrer que f est continue à gauche en 0 et discontinue à droite en 0

   Que peut-on dire de f en 0
3) Montrer que : $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x-1)}\mathrm{g(x)}$
4) Etudier les variations de la fonction f
5) a) Montrer que : $\mathrm{f}(\beta) = \dfrac{\beta^2}{\beta-1} e^{\frac{1}{\beta}}$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de f(β). On donne $4{,}2 < e^{\frac{1}{\beta}} < 5{,}3$

c) En déduire que $f(\beta) < 0$

6) Démontrer que la tangente (T) au point d'abscisse 2 pour équation :

$$y = \left(4 - \frac{\sqrt{e}}{4}\right)x - 8 - \frac{\sqrt{e}}{4}$$

6) Tracer (C) et (T)

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 5 :++++++++++++++++++++++++

On considère par f la fonction définie par : $f(x) = \ln|e^x - 2^x|$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J)

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) a) Montrer que : $f(x) = x\ln 2 + \ln\left|\left(\frac{e}{2}\right)^x - 1\right|$

   b) Calculer la limite de f en $-\infty$

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x\ln 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$

3) a) Montrer que : $f(x) = x + \ln\left|\left(\frac{e}{2}\right)^{-x} - 1\right|$

   b) Calculer la limite de f en $+\infty$

c) Montrer que la droite (D') d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

4) a) Montrer que $f'(x) = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x - \ln 2}{\left(\frac{e}{2}\right)^x - 1}$

   b) Etudier les variations de la fonction f

5) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]0;\ +\infty[$

   b) Vérifier que : $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$; $(f(1{,}1) \approx -0{,}15$ et $f(1{,}2) \approx 0{,}02)$

6) Démontrer que la tangente (T) au point d'abscisse 1 pour équation :

$$y = \left(\frac{e - 2\ln 2}{e - 2}\right)x - \frac{e - 2\ln 2}{e - 2} + \ln(e - 2)$$

7) Tracer (C) , (D) et (D')
8) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$
   a) Montrer que h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera
   b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère
9) On considère le tableau des valeurs approximatives :

x	α	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
f(x)	0	0,5	0,9	1,2	1,5	1,9	2,2	2,5

   a) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1,2

   b) Montrer que $(f^{-1})'(1{,}2) = \frac{e^2-4}{e^2-4\ln 2}$

10) Démontrer que la droite (AB) avec $A(2\ln 2\ ;\ 0)\ et\ B\left(2; \frac{1}{2}\right)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{4-4\ln 2}x - \frac{\ln 2}{2-2\ln 2}$$

11) Sachant que la courbe (C) est au dessus de (AB) et au dessous de (T) sur $[\alpha; 2]$. Soit A l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha \quad et \quad x = 2$

a) Montrer que :

$$\int_{\alpha}^{2}\left(\frac{1}{4-4\ln 2}x - \frac{\ln 2}{2-2\ln 2}\right)dx \leq \int_{\alpha}^{2} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{2}\left(\left(\frac{e-2\ln 2}{e-2}\right)x - \frac{e-2\ln 2}{e-2} + \ln(e-2)\right)dx$$

b) Montrer que :

$$\frac{-\alpha^2 + 4\alpha\ln 2\, 4 - 8\ln 2}{8-8\ln 2} \leq A \leq \frac{(e-\ln 2)(-\alpha^2+2\alpha)}{2(e-2)} + (2-\alpha)\ln(e-2)$$

c) En déduire une valeur approchée de A à 10^{-1} près avec $\alpha = 1{,}2$

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 6 :++++++++++++++++++++++++++

On considère par f la fonction définie sur R par : $\mathrm{f(x)} = (1-\mathrm{x})3^{1-\mathrm{x}^2} + 2 - \mathrm{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J)

Partie A : Soit h la fonction définie sur R par :

$$\mathrm{h(x)} = -2\mathrm{x}^3\ln 3 + 2\mathrm{x}^2\ln 3 + 3\mathrm{x} - 1$$

1) Etudier les variations de la fonction h ; on donne h'(-0,4)=0 et h'(1,1)=0
2) a) Démontrer que l'équation h(x)=0 admet trois solutions

$$\begin{cases} \alpha \in \left]-\infty; -0{,}4\right[\\ \beta \in \left]-0{,}4; 1{,}1\right[\\ \gamma \in \left]1{,}1; +\infty\right[\end{cases}$$

b) Justifier que : $-1 < \alpha < -0{,}9 \quad ; \quad 0{,}2 < \beta < 0{,}3 \;\; et \;\; 1{,}6 < \gamma < 1{,}7$

c) En déduire le signe de h sur R

Partie B : Soit g la fonction définie sur R par :

$$\mathrm{g(x)} = (2\mathrm{x}^2\ln 3 - 2\mathrm{x}\ln 3 - 1)3^{1-\mathrm{x}^2} - 1$$

1) Calculer la limite de g en $\pm\infty$
2) a) Montrer que $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{h(x)}(2\ln 3)3^{1-\mathrm{x}^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g

On donne $\mathrm{g}(\alpha) \approx 2{,}4 \;;\; \mathrm{g}(\beta) \approx -4{,}9 \;$ et $\; \mathrm{g}(\gamma) \approx -0{,}8$

3) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions

$$\mathrm{x}_1 \in \left]-\infty; \alpha\right[\text{ et } \mathrm{x}_2 \in \left]\alpha; \beta\right[$$

b) Justifier que : $-1{,}8 < \mathrm{x}_1 < -1{,}7 \quad et \quad -0{,}5 < \mathrm{x}_2 < -0{,}4$

4) Construire la courbe (Γ) de g
5) En déduire que : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in \left]-\infty, \mathrm{x}_1\right[\cup \left]\mathrm{x}_2; +\infty\right[; \;\; \mathrm{g(x)} > 0 \\ \forall \mathrm{x} \in \left]\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2\right[; \;\; \mathrm{g(x)} < 0 \end{cases}$

Partie C :

1) Calculer la limite de f en $\pm\infty$

2) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g

3) Démontrer que si δ est une racine de g alors $f(\delta) = \frac{1-\delta}{2\delta^2 \ln 3 - 2\delta \ln \delta - 1} + 2 - \delta$

4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à (C)

b) Etudier la position relative de (D) par rapport à (C)

5) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1 a pour équation

$$y = -2x + 3$$

6) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet deux solutions $x_3 \in]x_2; +\infty[$

b) Justifier que : $1,95 < x_3 < 1,96$

7) Tracer la courbe (C), (T) et la droite (D). On donne $f(x_1) \approx 5,9$ et $f(x_2) \approx 4$

8) Soit i la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

a) Montrer que i réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera

b) Construire la courbe $(C_{i^{-1}})$ dans le même repère

c) Calculer f(0)

d) Montrer que f^{-1} est dérivable en 5

e) Montrer que $(f^{-1})'(5) = -\frac{1}{4}$

Partie D : Soit (S) l'application du plan dans lui-même définie par : $z' = z + 2$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)

2) Déterminer l'expression analytique de (S)

3) Déterminer l'image de (T) par (S)

4) Démontrer que l'image de f par (S) est la courbe (C') d'équation :

$$y = (-1 - x)3^{-(x+1)(x+3)} - x$$

5) a) Montrer que $f(x + 2) = y$

b) Construire (C') sans étudier et expliquer la construction

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 7 :++++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur R par :$f(x) = e^{-x}(1 - x^3)$

Partie A :

1) Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

a)Etudier le sens de variations de G

b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ *et en* $+\infty$

c)Dresser le tableau de variations de g

2)a)Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α

Vérifier la double inégalité $3,10 < \alpha < 3,11$

b) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x

Partie B :

1) a)Déterminer la fonction dérivée f' de f

Vérifier que f'(x) a le même signe que g(x)pour tout réel x

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

c) Dresser le tableau de variations de f

2) Démontrer que $f(\alpha) = -3\alpha^2 e^{-\alpha}$

A partir de l'encadrement de α donné dans la question 2)a) de la partie A, donner un encadrement de f(α) ,(on détaillera soigneusement les calculs effectués)

3) On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 2cm) et Δ la tangente à C au point d'abscisse 0

a) Etudier le sens de variations de la fonction h définie sur $[0;1]$ par :

$$h(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1)$$

b) En déduire que $h(x) \geq 1$ pour tout $x \in [0;1]$

c) Démontrer que C est au dessus de Δ $\text{sur l'intervalle}[0;1]$

d) Vérifier que le point de C d'abscisse 1,5 est au dessous du point de Δ de même abscisse

4) Tracer C et Δ

5) a)Montrer qu'il existe de s nombres réels a, b et c que l'on déterminera, tels que la fonction F définie sur R par : $F(x) = e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c)$ est une primitive de f.

b) Calculer l'aire de la partie D du plan comprise entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 8 :+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :$\begin{cases} \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^{\mathrm{x}^{\mathrm{x}}} \ \text{si} \ \mathrm{x} > 0 \\ \mathrm{f(0)} = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unité graphique 4cm

<u>**Partie A :**</u>Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = 2x\ln x + x - 1$

1) Etudier les variations de h
2) Calculer h(1) et en déduire le signe de h

<u>**Partie B :**</u>Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\mathrm{g(x)} = (\ln \mathrm{x})^2 + \ln \mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}}$

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$
2) a) Montrer que $\mathrm{g'(x)} = \frac{\mathrm{h(x)}}{\mathrm{x^2}}$

   b) Dresser le tableau de variations de g

   c) En déduire le signe de g
3) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (O, I, J)

<u>**Partie C :**</u>

1) Montrer que $f(x) = e^{(e^{x\ln x})\ln x}$
2) a) Calculer la limite de f $+\infty$

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0

En déduire une interprétation graphique du résultat

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)x^{x(1+x^{x-1})}$ oubien $f'(x) = g(x)f(x)x^{x}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement le résultat

5) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1 a pour équation $y = x$

6) Montrer que $\forall x \in [0; 1]$; $f(x) \in [0; 1]$

7) Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le même repère

8) Soit i la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

a) Montrer que i réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$

b) Calculer f(2)

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 16

d) Montrer que $(f^{-1})'(16) = \frac{1}{(8\ln 2)^2 + 64\ln 2 + 32}$

e) Construire la courbe $(C_{i^{-1}})$ dans le même repère

Partie D :

1) Démontrer que la droite (OB) avec $B\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ a pour équation : $y = \frac{4}{3}x$

2) Sachant que la courbe (C) est au dessous de (OB) et au dessus de (T) sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$. Soit A l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \quad et \quad x = \frac{3}{2}$

a) Montrer que : $\int_0^{\frac{3}{2}} x dx \leq \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx \leq \int_\alpha^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}x dx$

b) Montrer que : $\frac{9}{8} \leq A \leq \frac{3}{2}$

c) En déduire une valeur approchée de A à 10^{-1} près en cm²

+++++++++++++++++++++++PROBLEME 9 :+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 + x^2e^{x+1} \quad si \quad x < -1 \\ f(x) = 2\cos\pi x \sin^2\frac{\pi}{2}x \quad si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x}{x-2} + x\ln|x-2| \quad si \quad x > 1 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unité graphique 2cm

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]-\infty; -1[$ par : $g(x) = 2 + (2x + x^2)e^{x+1}$

1) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]-\infty; -1[$

2) En déduire le signe de g

Partie B : Soit h la fonction définie sur $]1; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{(x-2)^2} + \ln|x-2|$$

1) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]1; 2[\cup]2; +\infty[$
2) a) Démontrer que l'équation h(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]2; +\infty[$
 b) Vérifier que $3,1 < \alpha < 3,2$; ($h(3,1) \approx -0,39 \;\; et \;\; h(3,2) \approx 0,07$)
3) En déduire le signe h

Partie C :

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f
2) Etudier la continuité de f aux points d'abscisses -1 et 1
3) a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty; -1[;\;\; f'(x) = g(x)$
 b) Démontrer que $\forall x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[;\;\; f'(x) = h(x)$
4) Etudier les variations de la fonction de f
5) a) Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha - 6 - \frac{14\alpha - 20}{(\alpha-2)^2}$

b) A partir de l'encadrement de α donné dans la question 2)b) de la partie B, donner un encadrement de f(α) à 10^{-1} près, (on détaillera soigneusement les calculs effectués)

6) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$
 b) Préciser la position relative de (D) par rapport à (C)
7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3
8) Construire la courbe (C) et les droites (D) et (T)
9) Soit (Δ) le domaine du plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \frac{3}{2}$
 Calculer l'aire A du domaine (Δ) en cm²

++++++++++++++++++++++++++PROBLEME10:+++++++++++++++++++++++++++

Dans ce problème les nombres $\propto$; β ; $a \;et\; b$ sont à utilisés dans tout l'exercice

PARTIE A : On considère le nombre entier naturel $N = 5^{\propto} \times 119^{\beta}$

1) Déterminer $\propto \;et\; \beta$ sachant que la somme des diviseurs de N est égale à 3720 ,

2) On considère par $a \;et\; b$ deux nombres entiers naturels ayant pour PGCD "d" et pour PPCM "m " tel que (S) : $\quad a^2 + b^2 = m^2 - N \quad avec \quad a > b$
 - **a)** Déterminer tous les entiers naturels dont le carré divise N
 - **b)** Dresser la liste de tous les diviseurs de 120
 - **c)** Résoudre dans N² l'équation (S)

3) On considère par (E) l'équation définie par : $ax + by = N$
 - **a)** Déterminer une solution particulière de l'équation (E') : $ax + by = 5$

- **b)** Résoudre dans Z² l'équation (E')
- **c)** En déduire les solutions de l'équations (E)
- **d)** En 2015 ; pour assister au mariage de **Monsieur DAOUDA**, les élèves du Groupe Scolaire l'Avenir ont payé solidairement 20Gnf par garçons et 15Gnf par fille qui donnent une somme de 2975Gnf

Quel est le nombre de garçons et de filles qui ont assisté **Monsieur DAOUDA** ?

PARTIE B : On considère les nombres complexes :

$$z_1 = (\propto -1) + i\beta \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{5}(a - ib)$$

1) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de z_1
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8} \quad et \quad \sin\frac{\pi}{8}$
2) Déterminer l'entier naturel n telsque :
   - a) ${z_1}^n$ soit un nombre réel
   - b) ${z_1}^n$ soit un nombre imaginaire pur
3) Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tels que $A(z_1)$; $B(z_2) \; et \; M(Z)$ soient alignés
4) On considère l'application f du plan dans lui-même d'écriture complexe :
$$z' = (\sqrt{3} + i)z + 2i\sqrt{3}$$
   - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
   - b) Déterminer l'expression analytique de f
   - c) Déterminer l'image de la droite (D) par f
   - d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f^{-1}

5) On considère dans C l'équation (E) définie par :
$$Z^3 - 3(3+i)Z^2 + (37 + 18i)Z - 23 - 39i = 0$$
   - a) Vérifier que $1 + i$ est une racine de (E)
   - b) Déterminer le polynôme $Q(Z)$ tels que : $(Z - 1 - i)Q(Z) = 0$
   - c) Résoudre dans C l'équation (E)

6) On considère par A, B et C les points d'affixes respectives
$$1 + i\,;\; 4 - 3i \text{ et } 4 + 5i$$
   - a) Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
   - b) Donner une interprétation graphique du résultat

PARTIE C: On considère le point D le point d'affixe $-4\sqrt{3} + 4 + i$

1) Déterminer les coordonnées du point G=bar$\begin{matrix} D & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$
2) Soit $f(M) = MD^2 + MB^2 + MC^2$
a) Montrer que $f(M) = 3MG^2 + 64$

b) Soit k un nombre réel. Déterminer et discuter suivant les valeurs de k, l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\mathrm{f(M)} = \mathrm{k}$

c) Déterminer k pour que (Γ) contienne le point D

d) Déterminer k pour que (Γ) contienne le point $D' = \frac{[BC]}{2}$

e) Déterminer et construire (Γ) tels que $\mathrm{f(M)} = 68$ et donner son équation

3) Déterminer l'ensemble des points M du pan tels que :

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

+++++++++++++++++++++++++PROBLEME11:++++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$\begin{cases} \mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2+1} + \mathrm{x} \quad \mathrm{si} \ \ \mathrm{x} \leq 0 \\ \mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \quad \mathrm{si} \ \ \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal, unité graphique : $\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = 2\mathrm{cm} \\ \|\vec{\jmath}\| = 10\mathrm{cm} \end{cases}$

__Partie A :__ Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par $\mathrm{g(x)} = 4\mathrm{x}(1 - \mathrm{x}^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2+1} + 1$

1) Etudier les variations de g

On donne $-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2} \approx -1{,}5$; $-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2} \approx -0{,}5$ et $\begin{cases} \mathrm{g}\left(-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right) \approx 3{,}1 \\ \mathrm{g}\left(-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right) \approx -2{,}2 \end{cases}$

2) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions $\alpha \in]-1{,}5;\ -0{,}5[$ et $\beta \in]-0{,}5; 0[$

b) Justifier que : $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8 \quad et \quad -0{,}1 < \beta < 0$

c) En déduire la signe de g

__Partie B :__ Soit j la fonction définie sur $]0; +\infty]$ par $j(x) = -2\ln x + \frac{2+2x-3x^2}{x^2}$

1) Calculer la limite de j en 0 et en $+\infty$

2) Calculer la dérivée de j puis étudier ses variations

3) a) Montrer que l'équation j(x)=0 admet une solution $\delta \in]0; +\infty]$

b) Justifier que : $1{,}1 < \delta < 1{,}2$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\ \delta[;\ \ j(x) > 0 \\ \forall x \in]\delta;\ +\infty[;\ \ j(x) < 0 \end{cases}$

__Partie C :__ Soit i la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$i(x) = -2(x-1)\ln x - x + 3 - \frac{2}{x}$$

1) Calculer la limite de i en 0 et en $+\infty$

2) a) Montrer que : $i'(x) = j(x)$

b) Dresser le tableau de variations de i

3) a) Montrer que $i(\delta) = 2\delta - 2 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}$

b) A partir de l'encadrement de δ donné dans la question 3)b) de la partie B, donner un encadrement de i(δ) à 10^{-1} près, (on détaillera soigneusement les calculs effectués)

4) a) Montrer que l'équation i(x)=0 admet une solution $\gamma \in]\delta; +\infty]$

b) Justifier que : $1{,}3 < \gamma < 1{,}4$

c) Calculer i(1)

d) En déduire que :$\begin{cases} \forall x \in]0;\ 1[\cup]\gamma; +\infty[;\ \ i(x) > 0 \\ \quad \forall x \in]1;\ \gamma[;\ \ i(x) < 0 \end{cases}$

Partie D : Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = x - 2 + (-x^2 + 2x - 2)\ln x$$

1) Calculer la limite de h en 0 et en $+\infty$
2) a) Montrer que : $h'(x) = i(x)$

b) Dresser le tableau de variations de h

3) a) Montrer que $h(\gamma) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{\gamma}$

b) Donner un encadrement de h(γ) à 10^{-1} près,

4) a) Montrer que l'équation h(x)=0 admet une solution $\lambda \in]0; 1[$

b) Justifier que : $0{,}3 < \lambda < 0{,}4$

c) En déduire que :$\begin{cases} \ \forall x \in]0;\ \lambda[;\ \ h(x) > 0 \\ \forall x \in]\lambda;\ +\infty[;\ \ h(x) < 0 \end{cases}$

Partie E :

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

En déduire la nature des demi-tangentes

2) a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en déduire une interprétation graphique du résultat

c) Calculer la limite de f en 2

3) a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty;\ 0[;\ \ f'(x) = g(x)$

b) Démontrer que $\forall x \in]0; 2[\cup]2; +\infty[;\ \ f'(x) = \frac{e^{-x}}{(x-2)^2} h(x)$

c) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que si x_0 est une racine de g alors : $f(x_0) = x_0 - \frac{x_0}{2(1-{x_0}^2)}$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $f(\alpha)\ \ et\ \ f(\beta)$

c) Montrer que : $f(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2} e^{-\lambda}$

5) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet deux solutions

$$x_1 \in]\alpha;\ \beta[\ \text{ et } x_2 \in]\beta; 0[$$

b) Justifier que : $-1{,}5 < x_1 < -1{,}4 \quad et \quad -0{,}2 < x_2 < -0{,}1$

c) Calculer f(1)

6) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier la position relative de (D) par rapport à (C)

7) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1 a pour équation

$$y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$$

8) Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T)

On donne $\begin{cases} \alpha \approx -0{,}9 \\ f(\alpha) \approx 1{,}1 \end{cases}$; $\begin{cases} \beta \approx -0{,}1 \\ f(\beta) \approx -0{,}1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma \approx 0{,}3 \\ f(\gamma) \approx 0{,}1 \end{cases}$

9) Soit l la restriction de f à l'intervalle $]2; +\infty[$

a) Montrer que l réalise une bijection de $]2; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera

b) Calculer f(1)

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0

d) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -e$

e) Construire la courbe $(C_{l^{-1}})$ dans le même repère

+++++++++++++++++++++++PROBLEME12:++++++++++++++++++++++++

Soit D une droite affine, munie d'un repère normé$(O, \vec{\imath}\,)$, et soit A et B deux points de D, d'abscisses respectives $a\ et\ b$. On désigne par $\alpha\ et\ \beta$ deux nombres réels dont la somme est égale à 1, par G le barycentre de A et B affectés de coefficients respectifs $\alpha\ et\ \beta$, par f l'application de D dans R qui à tout point M de D, associe le nombre réel : $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$

1) Exprimer $f(G)$ au moyen de $f(O)\ et\ de\ OG^2$

Calculer, en fonction de, $b, \alpha\ et\ \beta$, $f(O)$ $\text{l'abscisse g de G, puis f(G) et}$ vérifier que $f(G)$ ne dépend que de $a - b, \alpha\ et\ \beta$

2) On suppose maintenant $\alpha\ et\ \beta$ positifs. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs $a\ \ et\ \ b$ avec les probabilités respectives $\alpha\ et\ \beta$

a) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X , ainsi que l'espérance mathématique $E(X^2) de\ \ X^2$

b) Montrer que la variance de X est égale à $f(G)$

c) Un joueur lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le chiffre obtenu est pair, ou divisible par 3, il gagne 40 francs. Soit X le gain de ce joueur, Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart type

+++++++++++++++++++++++PROBLEME13:++++++++++++++++++++++++

Ce problème contient trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, l'unité graphique étant 1 cm

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation géométrique

b) Etudier les variations de f

c) Tracer (C) la courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. On utilisera la feuille de papier millimétré dans le sens horizontal. On placera l'axe OY à 3cm du bord gauche de la feuille et l'axe OX à 3cm du bas de la feuille

2) a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[4; +\infty[$

Démontrer que g est une bijection de $[4; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ et que son application reciproque g^{-1} est définie sur $[4; +\infty[$ par : $g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$

b) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C) . On note (H) la courbe $(C) \cup (C')$

3) Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$

a) Démontrer que pour tous les réels x et y positifs, on a :

$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow\ [y - f(x)] \times [y - g^{-1}(x)] = 0.$

En déduire que (H)=(E)

b) Démonter que si un point M(a ; b) appartient à (E) , alors le point M'(b ; a) appartient également à (E)

En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe

4) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

PARTIE B :

1) Soit m un réel appartenant à $]-2; 2[$

a) Soit les points A_m de coordonnées $(2 + m; 0)$ et B_m de coordonnées $(0;\ 2 - m)$

Ecrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m

b) Soit (Δ_m) la droite d'équation $x - y - 2m = 0$

Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}(2 + m)^2\ ; \frac{1}{4}(2 - m)^2\right)$

c) Démontrer que (D_m) est tangente à (C) en T_m

2) Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation : $y = x$

a) Démontrer que H_m a pour coordonnée $(m, -m)$

b) Soit F le point de coordonnée (2 ; 2)

Démontrer que le quadrilatère $A_m H_m B_m F$ est un carré pour tout m appartenant $]-2; 2[$

c) Pour $m = \frac{1}{2}$; placer le T_m ; tracer les droites (D_m), (Δ_m) et le carré $A_m H_m B_m F$

PARTIE C :

1) Soit M un point d'affixe z

a) Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ le projeté orthogonal de M sur la droite (δ) d'équation :

b) Démontrer que la distance de M à la droite (δ) est égale à $\left|\frac{z-i\bar{z}}{2}\right|$

2) a) Démontrer l'ensemble des points M d'affixe telle que $\left|\frac{z-i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)|$ est la courbe (E)

b) Interpréter géométriquement ce résultat

En déduire la nature de la courbe (E)

En donner deux éléments caractéristiques

++++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME14:</u>+++++++++++++++++++++++++

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J)

L'unité graphique est 4cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées

<u>Partie A :</u> Soit f une fonction définie sur R par : $f(x) = (2+\cos x)e^{1-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

1) Montrer que pour tout x de R ; $f(x) > 0$

2) a) Montrer que pour tout x de R : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

b) En déduire que pour tout x de R : $2+\cos x+\sin x > 0$

c) Montrer que f est strictement décroissante sur R

3) a) Montrer que pour tout x de R : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

b) En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

c) Interpréter graphiquement le résultat en $+\infty$

4) a) Montrer que sur l'intervalle $[0;\ \pi]$, l'équation $\mathrm{f(x)} = 3$ admet une solution unique α

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

5) Représenter la courbe (C) sur $[0;\ 4]$

<u>Partie B :</u> On veut calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

1) Montrer que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}dt$

2) On pose $I = \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}dt \quad et \quad J = \int_0^1 \sin t\, e^{1-t}dt$

a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$\mathrm{I} = -\cos 1 + \mathrm{e} - \mathrm{J} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = -\sin 1 + \mathrm{I}$$

b) En déduire la valeur de I

3) Déterminer la valeur exacte de A en unité d'aire, puis donner une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut

Partie C : Soit h la fonction définie sur R par : $\mathrm{h(x)} = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x}$

1) a) Montrer que la fonction h admet une primitive sur R

b) Calculer la primitive H de la fonction h qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$

2) a) Déterminer $\ln(f(x))$ pour tout x de R

b) Etudier le sens de variation de H

c) Déterminer le tableau de variation de H

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur R par : $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$; (on ne demande pas de représenter Γ). On appelle (Δ) la droite d'équation : $y = 1 - x$

a) Etudier la position relative de Γ et de (Δ)

b) Déterminer les abscisses des points communs à Γ et (Δ)

4) a) Etablir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0

b) Etudier la position relative de Γ et de T

5) Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera les équations

++++++++++++++++++++++++PROBLEME15:+++++++++++++++++++++++++

Partie A : Soit la fonction φ définie sur R par : $\varphi(x) = e^x + x + 1$

1) Etudier le sens de variation de la fonction φ et ses limites $en - \infty$ et en $+\infty$

2) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution notée α appartient à l'intervalle$[-1{,}28; -1{,}27]$

3) En déduire le signe de φ(x) sur R

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ et **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4cm)

1) Montrer que $f(x) = \frac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f

2) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

3) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T) et étudier la position de (C) par rapport à (T)

4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D)

5) Faire le tableau de variation de f

6) Tracer sur un même graphique (C) (T) et (D), la figure demandée fera apparaitre les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$

Partie C : On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $\mathrm{g(x)} = \ln(1 + \mathrm{e^x})$

On note (C’) la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, I le point défin par $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, A le point d’abscisse 0 de (C’) et B son point d’abscisse 1

1) Etudier brièvement les variations de g
2) Donner une équation de la tangente en A à (C’)
3) On note P le point d’intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$
   Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA
4) On admet que la courbe (C’) est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$
   Montrer alors que : $\ln 2+\frac{1}{4}\leq\int_0^1 \mathrm{g(x)dx}\leq\ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}$
5) Au moyen d’une intégration par parties , justifier que :
$$\int_0^1 \mathrm{f(x)dx}=\ln(1+e)-\int_0^1 \mathrm{g(x)dx}$$
6) En déduire un encadrement de $\int_0^1 \mathrm{f(x)dx}$

++++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME16:</u>+++++++++++++++++++++++++

<u>Partie A :</u>On considère la fonction g définie sur R par : $\mathrm{g(x)=e^x+x-5}$

1) Etudier le sens de variation de g (on ne demande pas de déterminer les limites de g ni de construire sa courbe représentative)
2) Calculer g(0) et g(2)
   Démontrer que l’équation $g(x)=0$ admet sur R une unique solution α
3) Justifier l’encadrement $1{,}30\leq\alpha\leq 1{,}31$

<u>Partie B :</u>Soit f la fonction définie sur $]-\infty;\ 5[$ par $\mathrm{f(x)=\ln(5-x)}$

1) Etudier le sens de variation de f et préciser ses limites en 5 et en $-\infty$
2) Vérifier l’égalité : $f(\alpha)=\alpha$
3) Montrer que, pour tout nombre réel x de l’intervalle $[0;3]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$
   En déduire que, pour tout nombre réel x de l’intervalle $[0;3]$,
$$|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$$
4) a) Montrer si $0\leq x\leq 3\ \ alors\ \ 0\leq f(x)\leq 3$

b) On construit une suite (u_n) d’élément de $[0;3]$ en posant $\begin{cases} u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

Montrer qu’on a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ pour tout n

En déduire que , pour tout entier naturel n,
$$|\mathrm{u_n}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}|\mathrm{u_0}-\alpha|\ \text{ puis que }\ |\mathrm{u_n}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}$$

c) Donner une valeur décimale approchée de u_9 à 10^{-3} près
   Montrer que $|\mathrm{u_9}-\alpha|\leq 10^{-3}$

Partie C : Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité graphique : 1cm)**.** On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f . Tracer la courbe (C)

Hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tels que :

$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ On note (Δ) cette partie

1) En remarquant que : pour $x \neq 5$: $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$

   Justifier $\int_{\alpha}^{4} \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

2) Montrer que l'aire A de la partie (Δ) est, en cm², donnée par : $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$

   On pourra utiliser une intégration par parties

++++++++++++++++++++++++PROBLEME17:+++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et (C) sa courbe représentative

Partie A :

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$)
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2\mathrm{x} + 1$ est asymptote de f en $-\infty$ et péciser la position relative de (C) par rapport à la droite (D)
3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f' en précisant la limite de la fonction ' en $-\infty$

   c) Calculer f'(1) et en déduire le signe de f'(x) pour tout réel x

   d) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) Soit I l'intervalle$[1{,}9; 2]$. Démontrer que, sur I l'équation f(x)=0a une solution unique α

5) Tracer (C) et la droite (D) (unité graphique : 2cm)

Partie B : On considère la fonction g déinie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

1) Démontrer que sur I, l'équation f(x)=0 est équivaut à l'équation $g(x) = x$
2) Etudier le sens de variation de g sur I et démontrer que pour tout x appartenat à I, g(x) appartient à I
3) Démontrer que pour tout x de l'intervalle I ; $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   On déduit de la question B.2 que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande de le démontrer

a) Démontrer que pour tout n de N ; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

b) En déduire en raisonnant par récurrence que : pour tout n de N ;

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9^n} \times \frac{1}{10}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite

Partie C

1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^{\propto} xe^{x-1}dx$

2) a) Détermnier en unité d'aiers, l'aire A de la portion limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ *et* $x = \propto$

b) Démontrer qu'on peut écrire $A = (\propto - 1)\left(\propto - \frac{1}{\propto}\right)$

++++++++++++++++++++++++PROBLEME18:++++++++++++++++++++++++

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln|x|}{x - \ln|x|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A : Soit l la fonction définie sur R^* par $l(x) = x - \ln|x|$

1) a) Calculer la limite de l en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de l en 0. En déduire une interpretation graphique du résultat

2) a) Montrer que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution $\propto \in]-\infty; 0[$

b) Justifier que :$-0{,}6 < \propto < -0{,}5$ *avec* $l(-0{,}6) \approx -0{,}09$ et $l(-0{,}5) \approx 0{,}2$

c) En déduire le signe de l

PARTIE B : Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par $i(x) = \frac{6x^2 - 4x - 1}{x} - 4\ln|x|$

1) a) Calculer la limite de i en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de i en 0

2) Etudier les variations de la fonction i

3) a) Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet deux solutions $\beta \in]-\infty; 0[$ et $\gamma \in]0; +\infty[$

b) Justifier que : $-0{,}4 < \beta < -0{,}3$ *et* $0{,}6 < \gamma < 0{,}7$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \beta[\cup]0; \gamma[; \ i(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta; 0[\cup]\gamma; +\infty[; \ i(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE C : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par

$$h(x) = 3x^2 + 1 - (4x + 1)\ln|x|$$

1) Calculer la limite de h en $+\infty$; $-\infty$ et en 0

2) a) Montrer que $h'(x) = i(x)$

b) Dresser le tableau de variations de h

3) a) Montrer que si a est la solution de l'équation $i(x) = 0$ alors

$$h(a) = -3a^2 + \frac{5}{2}a + 3 + \frac{1}{4a}$$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $h(\beta)$ et $h(\gamma)$

4) En déduire que $h(x) > 0$

PARTIE D :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1 - (2x^2 + x)\ln|x|$

1) a) Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty$

b) Montrer que g est continue en 0 et étudier la dérivabilité de g en 0

2) a) Montrer que $g'(x) = h(x)$

b) Dresser le tableu de variations de g

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda \in R$

b) Vérifier que $0{,}2 < \lambda < 0{,}3$

c) En déduire le signe de g

PARTIE E :

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) a) Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de f en 0 et en ∝; puis endéduire une interprétation graphique du résultat

c) Etudier la dérivabilité de f en 0

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(l(x))^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que $f(\lambda) = 2\lambda + 2 + \frac{3\lambda^2+3\lambda-3}{\lambda^3-2\lambda+1}$

b) Donner un encadrement de $f(\lambda)$ à 10^{-1} près

5) a) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ b) En déduire le signe de f

6) Montrer que la fonction $k(x) = x + \ln|x|$ est asymptote à (C)

7) a) Etudier et tracer (Γ) la courbe représentative de k dans un autre repère orthonormal (O, I, J) unité graphique 2 cm

b) Tracer la courbe (C) dans le même repère que (Γ)

+++++++++++++++++++++++++PROBLEME19:++++++++++++++++++++++++++

A-) Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2(x-1)}{x^2+1}$

1) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2) a) Montrer que $\forall x \in R$; $g'(x) = \frac{2x(x-1)(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

b) En déduire les variations de g

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$

b) Vérifier que $2 < \alpha < 2{,}1$ on donne $(g(2) \approx -0{,}009$ et $g(2{,}1) \approx 0{,}105)$

c) Calculer g(0) Puis en déduire le signe de g

4) Construire la courbe de g (C_g)

B-) Soit f la fonction définie sur $R \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x\ln(x^2+1)}{x-1}$

1) Calculer la limite de f en 1 ; puis donner une interprétation graphique du résultat
2) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
3) a) Montrer que $\forall x \in R \setminus \{1\};\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

   b) Dresser le tableau de variations de f

   c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{\alpha^2+1}$; donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près

4) Montrer que l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -\frac{1}{4}(2+\ln 2)x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln 2$

5) a) Calculer $f(0)$

   b) Déterminer le signe de f

6) On considère la fonction h définie sur $R \setminus \{1\}$ par : $h(x) = \frac{2x\ln|x|}{x-1}$

   a) Etudier h et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le même repère

   b) Monter que $f(x) = h(x) + \frac{x}{x-1}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-h(x)\right)$. Que peut-on dire de $\left(C_f\right)$ et (Γ)

   d) Etudier les positions relatives de $\left(C_f\right)$ et (Γ)

7) Tracer la courbe représentative de f dans le même repère

++++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME 20:</u>++++++++++++++++++++++++

A-) On considère la fonction g définie sur $R \setminus \{0\}$ par $g(x) = \ln|x| + 1 - 2x$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ *et en* $+\infty$
2) Calculer la limite de f en 0 ; puis en déduire une interprétation graphique du résultat
3) Calculer la dérivée de g puis donner le tableau de variations de g
4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; 0[$

   b) Vérifier que $-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$

   c) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\ \alpha[\ \ g(x) > 0 \\ \forall x \in]\ \alpha;\ +\infty[\ \ g(x) < 0 \end{cases}$

5) Construire la courbe de g (C_g)

B-) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x\ln|x| - x^2 + 1 \quad si\ \ x \neq 0 \\ \qquad\qquad f(0) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

En déduire que f admet une demi-tangente en 0 puis donner sa nature

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$
3) Démontrer que $f'(x) = g(x)$
4) Etudier les variations de la fonction f
5) Montrer que $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$; vérifier que $f(\alpha) > 0$

6) Démontrer que la tangente (T) de (C_f) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -x + 1$

7) a) Vérifier que $f(1) = f(-1) = 0$

b) En déduire le signe de f

8) Construire la courbe de f (C_f) et (T) sur le même graphique

9) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $]0; +\infty[$

a) Calculer f(0)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en 1 existe ; puis Calculer le

c) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1}

C-) On considère par F l'intégrale définie par : $F(x) = \int_1^e f(x)\,dx$

a) Etudier l'existence de F(x)

b) Donner une interprétation graphique de F(x)

c) Calculer alors F(x) en cm^2

++++++++++++++++++++++PROBLEME 21:++++++++++++++++++++++++

A-) Soit (E) l'équation différentielle définie par : $y'' - 4y' + y = x^2 - 8x + 1$

1) Résoudre l'équation (E') : $y'' - 4y' + y = 0$

2) Déterminer un du second degré P(x) solution de (E)

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f-P est solution de (E')

4) En déduire la solution sur R de (E) puis celle qui vérifie les conditions $\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

B-) On considère la fonction h sur R par : $\mathrm{h(x)} = -4(\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + 2$

1) Calculer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) Calculer la dérivée de h, puis dresser son tableau de variations

3) a) Montrer que l'équation $\mathrm{h(x)} = 0$ admet une solution unique α

b) Vérifier que $-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$

c) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\ \ \mathrm{h(x)} > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[\ \ \mathrm{h(x)} < 0 \end{cases}$

C-) On considère la fonction g sur R par : $\mathrm{g(x)} = (-2\mathrm{x} - 1)\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + 2\mathrm{x}$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) Démontrer que $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{h(x)}$

3) a) Montrer que la tangente (T) à $(\mathrm{C_g})$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -2x - 1$

b) Etudier la position relative de (T) et $(\mathrm{C_g})$ (on étudiera les variations de le fonction $\mathrm{g(x)} - (-2\mathrm{x} - 1))$

4) a) Monter que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $(\mathrm{C_g})$ *à* $-\infty$

b) Etudier la position relative de (D) à $(\mathrm{C_g})$

5) Montrer que $\mathrm{g}(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha+2}$

6) A partir de l'encadrement de α dans B-) donner un encadrement de $f(\alpha)$

7) Dresser le tableau de variations de g

8) En déduire que $\mathrm{g(x)} < 0$

9) Construire la courbe représentative de g $\left(\mathrm{C_g}\right)$, (T) et (D)

D-) On considère la fonction f sur R par : $\mathrm{f(x)} = -\mathrm{xe}^{2\mathrm{x}} + \mathrm{x}^2 - 1$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2) Démontrer que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{g(x)}$; en déduire les variations de f

3) a) Montrer que la parabole (P) d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - 1$ est asymptote à $(\mathrm{C_f})$ en $-\infty$

b) Etudier la position relative de (P) et $(\mathrm{C_f})$

4) Montrer que la tangente (T') à $(\mathrm{C_f})$ au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = -x - 1$$

5) Construire la courbe représentative de f $(\mathrm{C_f})$, (T') et (P) dans le même repère

6) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur R

a) Calculer f(0)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en -1 existe

c) Calculer $(f^{-1})'(-1)$

d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

E-) On considère par F l'intégrale définie par : $F(x) = -\int_0^1 f(x)\,dx$

a) Etudier l'existence de F(x)

b) Donner la nature de F(x)

c) Calculer alors F(x) en cm^2

++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME 22:</u>+++++++++++++++++++++++++

A-) On considère j la fonction définie sur R par : $j(x) = 2 - xe^{-x}$

1) Calculer les limites de j en $-\infty$ $et\ en + \infty$

2) Calculer la dérivée de j, puis dresser son tableau de variations

3) En déduire le signe de j(x)

B-) On considère la fonction i définie sur $R \setminus \{0\}$ par $\mathrm{i(x)} = 2\ln|\mathrm{x}| + 3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

1) Calculer les limites de i en $-\infty$ et en $+\infty$

2) Calculer la limite de f en 0 ; puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3) Montrer que $i'(x) = \frac{j(x)}{x}$ puis donner les variations de i

4) a) Montrer que l'équation $\mathrm{i(x)} = 0$ admet deux solutions $\begin{cases} x_0 \in]-\infty; 0[\\ x_1 \in]0;\ +\infty[\end{cases}$

b) Justifier que $\begin{cases} -0{,}2 < x_0 < -0{,}1 \\ 0{,}1 < x_1 < 0{,}2 \end{cases}$

c) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\ x_0[\cup]x_1;+\infty[\ \ i(x) > 0 \\ \forall x \in]\ x_0;\ x_1[\ \ i(x) < 0 \end{cases}$

5) Construire (Γ) la courbe représentative de i

C-) On considère h la fonction définie sur R par : $h(x) = 2x\ln|x| + x + 1 - e^{-x}$

1) Calculer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) Montrer que $h'(x) = i(x)$. En déduire les variations de h

3) a) Montrer que si α est solution de l'équation $i(x) = 0$ alors

$$h(\alpha) = 1 - 2\alpha - (\alpha + 1)e^{-\alpha}$$

b) Montrer que $h(x_0) > 0$ *et* $h(x_1) < 0$

4) a) Calculer h(0)

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions $\begin{cases} x_2 \in]-\infty; x_0[\\ x_3 \in]x_1;\ +\infty[\end{cases}$

c) Justifier que $\begin{cases} -0{,}4 < x_2 < -0{,}3 \\ 0{,}4 < x_3 < 0{,}5 \end{cases}$ On donne $\begin{cases} h(-0{,}4) \approx -0{,}15 \text{ et } h(-0{,}3) \approx 0{,}07 \\ h(0{,}4) \approx -0{,}003 \text{ et } h(0{,}5) \approx 0{,}2 \end{cases}$

d) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\ x_2[\cup]0;\ x_3[\ \ h(x) < 0 \\ \forall x \in]\ x_2;\ 0[\cup]\ x_3;\ +\infty[\ \ h(x) > 0 \end{cases}$

D-) On considère g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^2\ln|x| + x + e^{-x}$

1) Calculer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) Montrer que $g'(x) = h(x)$. En déduire les variations de g

3) a) Montrer que si β est solution de l'équation $h(x) = 0$ alors

$$g(\beta) = \frac{(\beta + 2)e^{-\beta} - (\beta - 1)\beta}{2}$$

b) Montrer que $g(x_2) > 0$ *et* $g(x_3) > 0$

c) En déduire le signe de g

E-) On considère la fonction f définie sur $R \setminus \{0\}$ par $f(x) = e^x\ln|x| - \frac{1}{x}$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat

2) Calculer la limite de f en 0 ; puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3) Montrer que $\forall x \in R \setminus \{0\}$; $f'(x) = \frac{e^x}{x^2}g(x)$ puis donner les variations de f

4) Etudier la dérivabilité de f en 1

5) Montrer que la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = (e + 1)x - 2 + e$$

6) On considère la fonction k définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $k(x) = e^x\ln x$

a) Calculer la limite de k en 1 et en $+\infty$

b) Montrer que $k'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$. En déduire les variations de k

c) Construire la courbe représentative de k (C_k)

7) On pose $\mathrm{l(x) = f(x) - k(x)}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x)$

b) Que peut-on dire de (C_f) et (C_k)

c) Etudier la position relative de (C_f) et (C_k)

8) Montrer que l'équation $\mathrm{f(x) = 0}$ admet une unique solution $\gamma \in]1{,}2; 1{,}3[$

On donne $\mathrm{f(1{,}2) \approx -0{,}23}$ et $\mathrm{f(1{,}3) \approx 0{,}2}$

9) Tracer (C_f) dans le même repère

10) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $]0; +\infty[$

a) Calculer f(1)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en -1 existe

c) Montrer que $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{e+1}$

d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 23:++++++++++++++++++++++++

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

A-) Déterminer une équation de l'hyperbole$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ ayant pour sommets les foyers de (E) et pour foyers les sommets de (E) situés sur l'axe focal

B-) Un nombre s'écrit $N = \overline{1cc2d}$ dans le système décimal

1) Déterminer c et d pour que le nombre N soit divisible par $(a+9)(9-b)$

2) Déterminer le nombre de diviseurs de N et trouver les

3) On considère l'équation (E) : $(a+9)x - (9-b)y = -10$

a) Montrer que $(d; c)$ est solution de l'équation (E)

b) Résoudre dans Z² l'équation (E)

c) En déduire la solution de (E') : $(a+9)x - (9-b)y = -100$

C-) Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs $-1;$ 1 et 2 pour les probabilités respectives $\frac{1}{a}$; $\frac{b}{5}$ et $\frac{1}{10}$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\delta(X)$

D-) On considère les points A, B et C de l'axe (Δ) d'abscisses respectives $-2;$ 1 et $-\frac{91}{4}$ On pose : $f(M) = \frac{1}{100}(-MA^2 + MB^2 + 2MC^2)$

a) Déterminer l'abscisse du barycentre G des points pondérés $(A; -1); (B; 1) et$ $(C; 2)$

b) Démontrer que $f(G) = V(X)$

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = 1{,}31$

E-) Déterminer l'image de l'ensemble des points M déterminés dans 4)c) par :

L'homothétie de centre G et de rapport 3

F-) Soit l'équation différentielle : $(a-1)f'' - 2bf' + (c+d)f = 0$ (E')

1) Résoudre l'équation (E') et déterminer la solution avec les conditions suivantes : $f(0) = 2 \ \ et \ \ f^{'}(0) = 3$

2) Soit f la solution de l'équation précédente et (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

a) Calculer la limites de f en $+\infty \ et - \infty$ puis en déduire que (C) admet une asymptote en $-\infty$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

c) Démontrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x + 2$

d) Tracer (C) et (T)

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$

4) Soit h la fonction définie par : $\mathrm{h(x) = f(x) - x}$

a) Etudier les variations de h(x) et en déduire la position relative de (C) et la droite (D) d'équation $y = x$

b) Justifier que $1{,}96 < \alpha < 1{,}97$

5) Soit H la portion limitée par la courbe (C) et la droite (D) avec les droites d'équations $x = 0 \ \ et \ \ x = 2$

a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ de H

b) Donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-2} près pour $\alpha = 1{,}95$. On donne $e^{1{,}95} \approx 7{,}029$

6) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $\left]\frac{3}{2}; \ +\infty\right[$

a) Calculer f(3)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $-e^{6}$ existe

c) Montrer que $(f^{-1})^{'}(-e^{6}) = -\frac{1}{3e^{6}}$

d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

++++++++++++++++++++++PROBLEME 24:+++++++++++++++++++++++++

A-) On considère la fonction h définie sur $]0; \ +\infty[$ par : $\mathrm{h(x)} = e^{x} - \ln x$

1) Calculer la limite de h en 0 et en $+\infty$

2) Calculer la dérivée de h

3) Etudier les variations de la fonction i définie $[0; +\infty[$ par $\mathrm{i(x)} = xe^{x} - 1$

4) a) Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

b) Vérifier que $\alpha \in]0;5; 0{,}6[$

c) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]0; \ \alpha[\ \ i(x) < 0 \\ \forall x \in] \ \alpha; \ +\infty[\ \ i(x) > 0 \end{cases}$

5) a) Etudier les variations de h

b) Montrer que $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha$ et que $h(\alpha) > 0$

c) Construire la courbe de h (Γ)

d) En déduire le signe de h sur $]0;\ +\infty[$

B-) On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $\mathrm{g(x)} = e^{x} - \ln x - 1$

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$

2) a) Montrer que $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{h}'(\mathrm{x})$

b) En déduire les variations de g

c) Montrer que $\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{h}(\alpha) - 1$ et que $\mathrm{g}(\alpha) > 0$

d) En déduire le signe de g sur $]0;\ +\infty[$

C-) Soit la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{e^{x} - \ln x} + \ln(e^{x} - \ln x)$

1) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$

2) a) Montrer que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{i(x)g(x)}}{\mathrm{x(h(x))^2}}$

b) En déduire les variations de f

3) Montrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2 x + \frac{3e-1}{e^2}$

4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C)

5) Tracer la courbe (C) avec soin ($\alpha = 0{,}5$ *et* $f(\alpha) = 1{,}3$

6) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $]1;\ +\infty[$

a) Calculer f(1)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ existe

c) Montrer que $(f^{-1})'\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$

d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

D-) On considère $A = \int_1^2 f(x)dx$

1) Soit $E(0;1)$ *et* $F\left(1;\ \frac{e}{2}\right)$ deux points du plan

Montrer que l'équation de la droite (EF) est : $y = \left(\frac{e}{2} - 1\right)x + 1$

2) Sachant que (C) est au dessous de (EF) et au dessus de la tangente (T) de (C) en 1 sur $[1; 2]$

a) Montrer que : $\int_1^2 \left(\left(\frac{e-1}{e}\right)^2 x + \frac{3e-1}{e^2}\right)dx \leq A \leq \int_1^2 \left(\left(\frac{e}{2} - 1\right)x + 1\right)dx$

b) Démontrer que : $\frac{3e^2+1}{2e^2} \leq A \leq \frac{3e-2}{4}$

c) En déduire une valeur approchée de A en cm² à 10^{-2} près

+++++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME 26:</u>+++++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1]$ par ; $\begin{cases} f(x) = |x+1|^{\ln|x|+x} & si\ \ x \neq -1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

PARTIE A : On considère la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus [0;\ -1]\ par$;

$$i(x) = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x} + 5$$

1) Etudier les variations de la fonction i
2) a) Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet trois solutions

$$\propto \in]-\infty; -1[\ \ ;\ \ \beta \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\ \ et\ \ \gamma \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$$

b) Justifier que : $-1{,}2 < \propto < -1{,}1 \quad ; \quad -0{,}9 < \beta < -0{,}8 \quad et \quad -0{,}3 < \gamma < -0{,}2$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \propto[\cup]\beta;\ \gamma[\cup]0; +\infty[\ ;\ \ i(x) > 0 \\ \forall x \in]\propto;\ -1[\cup]-1;\ \beta[\cup]\gamma; 0[\ ;\ \ i(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par

$$h(x) = 2(x+1)\ln|x+1| + \ln|x| + 3x + 2$$

1) a) Calculer la limite de h en $+\infty\ ;\ -\infty\ \ et\ \ en\ \ 0$
   b) En déduire une interpretation graphique du résultat
2) Montrer que $h^{'}(x) = i(x)$
3) Dresser le tableu de variations de h
4) a) Montrer que si x_0 est la solution de l'équation $i(x) = 0\ alors$

$$h(x_0) = -\frac{1}{x_0} - 2x_0 - 4 + \ln|x_0|$$

   b) Prouver que : $h(\propto) < 0\ ;\ \ h(\beta) < 0\ \ et\ \ h(\gamma) < 0$ en donnant leurs encadrements à 10^{-1} près

5) a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda \in]0;\ +\infty[$
   b) Justifier que : $0{,}08 < \lambda < 0{,}09$
   c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0;\ \lambda[\ ;\ \ h(x) < 0 \\ \forall x \in]\lambda; +\infty[\ ;\ \ h(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE C : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{g(x) = (x+1)^2 \ln|x+1| + x\ln|x| + x^2}$$

1) Calculer la limite de g en $+\infty\ ;\ -\infty\ \ et\ \ en\ \ 0$
2) a) Montrer que $\mathrm{g^{'}(x) = h(x)}$
   b) Dresser le tableau de variations de h
3) a) Montrer que $\mathrm{g(\lambda) = \frac{(\lambda-1)\ln\lambda - \lambda^2 - 5\lambda - 2}{2}}$

b) Donner un encadrement de $g(\lambda)$ à 10^{-1} près puis en déduire que $g(\lambda) < 0$

4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\delta \in]\lambda;\ +\infty[$
   b) Justifier que : $0{,}2 < \delta < 0{,}3$
   c) Calculer $\mathrm{g(0)}$
   d) En déduire le signe de g

PARTIE D :

1) a) Calculer la limite de f en -1

b) Donner une interprétation graphique du résultat

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 0

b) Donner une interprétation graphique du résultat

3) a) Montrer que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{x(x+1)}}\mathrm{f(x)}$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que $f(\delta) = e^{-\frac{\left((\delta+1)\ln|\delta+1|\right)^2}{\delta}}$; on donne $f(\delta) = 0{,}8$

4) Montrer que (C) admet deux asymptotes que l'on précisera les équations

5) Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = (4\ln 2 + 1)x - 4\ln 2 + 1$$

6) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Donner une interprétation graphique du résultat

7) Tracer la curbe (C) et (T)

8) Soit j la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ -1[$

a) Démontrer que j réalise une bijection de $]-\infty;\ -1[$ vers $]0;+\infty[$

b) Construire la courbe $\left(C_{j^{-1}}\right)$ dans le même repère

c) Calculer $f(-2)$ d) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 e) Montrer que $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2-\ln 2}$

9) Montrer que la droite (AB) avec $A(0\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 2)$ a pour équation $y = x + 1$

10) On rappelle que (C) est au dessus de (T) et au dessous de (AB) sur l'intervalle $[0;1]$; Soit A l'aire de la partie du plan delimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = 1$

a) Montrer que :

$$\int_0^1 \left((4\ln 2 + 1)x - 4\ln 2 + 1\right)dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 (x+1)dx$$

b) Montrer que : $\frac{4\ln 2+1}{2} - 4\ln 2 + 1 \leqslant A \leqslant \frac{3}{2}$

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire A en cm²

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 27:++++++++++++++++++++++++

Soit l'application f de R dans R définie par : $f(x) = \mathrm{Log}(ch\ x)$ où Log désigne la fonction logarithme népérien et $ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

PARTIE A :

1- Etudier les variations de la fonction f et montrer que pour tout $x \in R;\ \ f(x) \geq 0$

2- Dans un plan affine euclidienne muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), tracer la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ puis déterminer ses asymptotes

PARTIE B : On désigne par t la dérivée de la fonction f : $t \to f'$

1- a- Montrer que pour tout x de R : $|t(x)| < 1$

b- Montrer que pour tout x de R : $t'(x) = 1 - \left(t(x)\right)^2$ en désignant par t' la dérivée de t

c- Montrer que si $x \in]-1; 1[$, il existe un réel unique X tel que : $t(X) = x$, on explicitera X en fonction de x et on notera $X = t^{-1}(x)$. Montrer que :

$$\mathrm{t(R)} =]-1; 1[$$

2- Soit $n \in N$ et soit $X \in R$. On pose $I_n(X) = \int_0^x \left(t(u)\right)^n du = \int_0^x \left(f'(u)\right)^n du$

On conviendra que, pour tout u de l'intervalle $[0; X]$, $\left(t(u)\right)^0 = 1$

a- Justifier l'existence de $I_n(X)$

b- Calculer $I_0(X)$ *et* $I_1(X)$.

c- En utilisant la question B)1)b) donnant $\left(t(u)\right)^2 = 1 - t'(u)$ Montrer que pour tout $n \geq 2$: $I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1}\left(t(x)\right)^{n-1}$

d- Déduire de ce qui précède , que pour tout entier naturel $p \geq 1$

$$(E_1) : \quad I_{2p}(X) = X - \left(t(X) + \frac{1}{3}\left(t(X)\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}\left(t(X)\right)^{2p-1}\right)$$

$$(E_1) : \quad I_{2p+1}(X) = \mathrm{Log}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\left(t(X)\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2p}\left(t(X)\right)^{2p}\right)$$

e- Montrer que l'on a pour tout entier p :$0 \leq \int_0^x \left(t(u)\right)^{2p} du \leq X\left(t(X)\right)^{2p}$

En déduire X étant fixé, que la suite $p \to \int_0^x \left(t(u)\right)^{2p} du$ est convergente et donner sa limite

f- En utilisant la relation (E_1) et en posant $X = t^{-1}(x)$, démontrer que pour tout x fixé $x \in [0 ; 1[$ la suite $p \to \varepsilon_p(x)$ définie par : (E_3) :

$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \varepsilon_p(x)$ a pour limite 0

En déduire un résultat analogue pour $x \in]-1;\ 0[$

++++++++++++++++++++++++PROBLEME 28:++++++++++++++++++++++++

A- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

1- Déterminer son ensemble de definition E

2- Démontrer que pour tout $x \in]-\infty;\ -1[$; $\mathrm{f(x) = x + 2\ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$

3- Calculer les limites éventuelles de f aux bornes de E

4- Etudier les variations de f. Démontrer que f admet un seul extremum relatif ; en précisant une valeur approchée

5- Tracer Γ courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (unité : 1cm)

B- Soit D_h la droite d'équation $y = x + h$, où h est un paramètre réel

1- Exprimer en fonction de h les coordonnées de M' et M'', point commun de Γ et D_h, et celle du milieu du segment $[M'M'']$.

2- Déterminer les équations de Δ' et Δ'', tangente à Γ respectivent M' et M''

Démontrer que Δ' et Δ'' coupent l'axe des ordonnées en un même point N ;

3- Calculer h pour que Δ' et Δ'' soient orthogonales

C- Dans le plan (P). Soit T l'application qui a tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe : $z' = -iz - (1+i)\overline{z}$

1- Exprimer X , Y coordonnées de M en fonction de x, y coordonnées de m

2- Déterminer l'ensemble des points invariants par T

3- Démontrer que T est une bijection de P, et que $T^{-1} = T$

4- Démontrer que pour tout point m, le milieu du segment $[mM]$ est sur l'axe des ordonnées et que le coefficient directeur de la droite (mM) est 1

5- Démontrer que Γ est globalement invariante par T

+++++++++++++++++++++++<u>PROBLEME 29:</u>+++++++++++++++++++++++

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = |\ln|x||^{\ln|x|}$

A- Soit g la fonction définie sur $R \ddots \{-1; 0; 1\}$ par : $g(x) = \ln|\ln|x|| + 1$

1- Etudier les variations de g

2- Montrer que l'équation g(x)=0 admet quatre solutions puis dédterminer les

3- En déduire le signe de g

B- 1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; 1 et -1

2- Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

3- Montrer que f est une fonction paire

4- a- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)f(x)}{x}$

b- Dresser le tableau de variations de f

c- Déduire que f admet un centre de symétrie puis donner son équation

5- Tracer (C_f) la courbe représentaive de f. On donne

$\begin{cases} f(-e^{e^{-1}}) \approx 0{,}7 \\ -e^{e^{-1}} \approx -0{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} f(e^{e^{-1}}) \approx 0{,}7 \\ e^{e^{-1}} \approx 0{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} f(-e^{-e^{-1}}) \approx 1{,}4 \\ -e^{-e^{-1}} \approx -0{,}7 \end{cases}$; $\begin{cases} f(e^{-e^{-1}}) \approx 1{,}4 \\ e^{-e^{-1}} \approx 0{,}7 \end{cases}$

C- On considère par h l'application du plan daans lui-même définie par :

$$Z' = Z + 1 + i$$

1- Déterminer la nature de h et donner ses éléments caractéristiques

2- Donner son expression analytique

3- Trouver l'équation de l'image de (C_f) par h notée $F(x)$

4- Montrer que $F(x) = |\ln|x-1||^{\ln|x-1|} + 1$

5- Tracer la courbe (C_F) sans étudier et expliquer la construction

++


SUJETS PROPOSES
26 SUJETS PROPOSES
BANC'S DAOU'

++++++++++++++++++SUJET 1++++++++++++++++

EXTRAIT BAC BLANC DE LA ZONE 4 DE RATOMA 2016

Exercice 1 :

1) a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929

b) Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation $x^2 - 91x + 588 = 0$

2) Démontrer que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

Exercice 2 : 1) Soit (E) l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $10z\overline{z} + 3(z^2 + \overline{z}^2) = 4$

Démontrer que (E) est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques

2) Déterminer une équation de (E'), image de (E) par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$

3) Déterminer la nature de (E'), ses axes et ses sommets. Tracer (E) et (E') sur un même graphique

Exercice 3 : Dans un plan P, on donne un trapèze convexe isocèle ABCD tel que (AB) soit parallèle à (DC).

Soit $[AH]$ sa hauteur relativement aux bases$[AB]$ et $[CD]$. On pose $AB = a$; $CD = 3a$ et $AH = a$ $où$ $a \in R^*$

1) Déterminer les réels α et β pour que H soit le barycentre des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients α ; 1 ; 1 et β.

Pour cette question on pourra utiliser un repère d'origine H

2) Soit G_1 l'isobarycentre des points B et C. Soit G_2 le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients -1 et 3. Construire G_1 et G_2

Montrer que H est le milieu du segment $[G_1G_2]$

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}\right\|$$

4) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MD^2 \leq 24a^2$$

5) Résoudre l'équation :

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a \text{ où } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

PROBLEME :

A-) On note f_n la fonction numérique de variable réelle x définie sur

$]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour tout n entier naturel non nul.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) L'unité graphique : 2cm

1) Etudier les limites de f_n $en-\infty\ et+\infty$
2) a) Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n $en-2$
   b) Calculer $f'_n(x)$; puis étudier son signe suivant la parité de n
   c) Dresser le tableau de variations de f_n
3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent un point fixe A

Déterminer une équation de la tangente (T_n) $à$ (C_n) en A

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat
   b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel $x\neq-2, on\ a$: $f'_n(x)=f_n(x)-nf_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives des courbes $(C_1)\ et\ (C_2)$ (pour n=1 et n=2)

Représenter graphiquement $(C_1)\ et\ (C_2)$

B-) Soit la suite (U_n) définie par : $U_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx$

1) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a $U_n\geq0$. Que peut-on en déduire ?
2) a) En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel $n\geq2$ on a : $nU_{n+1}=1+U_n-\frac{e}{2^n}$
   b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4-b) de A
   c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}=1$

++++++++++++++++++SUJET 2++++++++++++++++

EXTRAIT BAC BLANC DU LYCEE BONFI 2016

Exercice 1 : On considère l'équation (E) : $(Z\in C)$

$$Z^3+(1-6i)Z^2-(17+8i)Z-33+30i=0$$

1) a) Vérifier que -3 est solution de cette équation
   b) Résoudre l'équation (E)

Les solutions seront notées par $Z_0,\ Z_1\ et\ Z_2$où $Z_0=-3\ \ et\ \ Z_2$ a sa partie réelle positive

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;u;v)(unité : 1cm)$

On considère les points $M_0,M_1\ et\ M_2$ d'affixes respectives $Z_0,Z_1\ et\ Z_2$

   c) Placer $M_0,M_1\ et\ M_2$ dans le repère $(O;u;v)$
   d) Démontrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle
3) On désigne par G le barycentre des points pondérés $(M_0,-1);(M_1,1)et\ (M_2,1)$

a) Construire géométriquement G . Justifier la construction (on ne demande de calculer les coordonnées de G)

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-MM_0{}^2 + MM_1{}^2 + MM_2{}^2 = -GM_2{}^2$$

Exercice 2 : Soit a un nombre réel donné

On considère les suites U et V définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 3\,, \qquad u_1 = 5 \ \ et\ \forall n \in N \ \ u_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 u_{n+1} + (a-2)u_n \\ \qquad \forall n \in N\,, \qquad v_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1) On pose a=1

a) Démontrer que la suite V est constante et donner sa valeur

b) En déduire que U est une suite arithmétique dont la raison égale à 2

c) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Exprimer $u_n \ \ et\ S_n$ en fonction de n

2) On pose a=-5

a) Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont la raison est 7

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Pour tout n supérieur où égale à 1, exprimer en fonction de n la somme $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

d) Exprimer u_n en fonction de T_n

e) En déduire que U est divergente

Exercice 3 : On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7

Les tirs sont indépendants. (Tous les résultats sous la forme décimale)

3) Le tireur effectue 5 tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :

   d) Cinq fois

   e) Exactement deux fois

   f) Au moins une fois

4) Il tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité pour qu'il touche au moins une fois est égale à $1 - (0{,}3)^n$

5) Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure où égale à $0{,}995$?

PROBLEME :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)L'unit é graphique est 2cm

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[\ par$

$$f(x) = x^2 - 1 + \ln(1 - x)$$

On note (C) la courbe représentative de f

2) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat

c) Calculer la limite à gauche en 1 puis interpréter graphiquement ce résultat

2) a) Pour tout réel $x \in]-\infty; 1[$; calculer $f'(x)$

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

c) Dresser le tableau de variations de f

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique

$$\beta \in]-\infty; 1[$$

b) Justifier que $-0,7 < \beta < -0,6$

4) a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (C) et (T)

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par : $\begin{cases} -3 \le x \le 5 \\ -4 \le y \le 6 \end{cases}$

5) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \beta \;\; et \;\; x = 0$

a) Calculer $\int_\beta^0 \ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties

b) Démontrer que la valeur de A en unité d'aire est :

$$A = \frac{\beta^3}{3} - 2\beta - (1-\beta)\ln(1-\beta)$$

c) Déterminer en cm² l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\beta = -0,65$

6) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J)

a) Calculer $f(-1)$

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis calculer le.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la même figure

++++++++++++++++++SUJET 3++++++++++++++++

EXTRAIT BAC BLANC DU LYCEE 3 AVRIL DE KANKAN 2016

<u>Exercice 1 :</u> On considère les suites $(U_n)_{n\in N} \;\; et \;\; (V_n)_{n\in N}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \forall n \in N; \;\; U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ \forall n \in N; \;\; V_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}V_n + U_n \end{cases}$$

On pose : $Z_n = U_n + iV_n$

1) Calculer $|Z_0|$; puis $|Z_{n+1}|$ en fonction de $|Z_n|$. En déduire en fonction de n, une expression de $|Z_n|$
2) a) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n

   b) Trouver arg $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)$

   c) Déduire de ce qui précède un argument $\theta_{n+1}\ de\ Z_{n+1}$ en fonction d'un argument $\theta_n\ de\ Z_n$

   d) Trouver $\arg(Z_0)$ puis une expression de θ_n en fonction de n
3) Exprimer $U_n\ et\ \ V_n$ en fonction de n

Exercice 2 : Résoudre dans N² les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} PGCD(a;b)=354 \\ a+b=5664 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} PPCM(a;b)=168 \\ a\times b=1008 \end{cases}$$

PROBLEME : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=-3\sqrt{1-x|x|}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Démontrer que f est dérivable en 0
4) f est-elle dérivable en 1 ?
5) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
6) Démontrer que la droite d'équation $y=3x$ est une asymptote à la courbe (C) de f
7) Etudier les variations de f
8) Démontrer que f est réalise une bijection réciproque de son ensemble de définition sur un intervalle J que l'on précisera
9) Calculer $(f^{-1})\left(-\frac{1}{3}\right)$
   a) Sans expliciter f^{-1}
   b) En explicitant f^{-1} puis $(f^{-1})'$
   c) Représenter dans le même repère la courbe représentative de f puis celle de f^{-1}

++++++++++++++++++SUJET 4++++++++++++++++

EXTRAIT BAC BLANC DE SAINT GEORGES 2016

Exercice1 :

1) Déterminer les couples $(a;b)$d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} a^2-b^2=5440 \\ PGCD(q;b)=8 \end{cases}$

2) a) Déterminer un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tels que : $91u-10v=1$

b) En déduire une solution particulière de l'équation (E) : $91u-10v=412$

Résoudre (E)

3) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in N$, l'entier $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8

b) Résoudre dans Z^2 l'équation : $A_3 x + A_2 y = 3296$

Exercice 2 : ABC est un triangle équilatéral de coté a , $(a > 0)$

3) Soit G le point défini par la relation $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Construire le point G et déterminer trois réels $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ tels que G soit barycentre du système $\{(A;\ \alpha).(B;\ \beta);(C;\ \gamma)\}$

4) On pose $f(M) = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = a^2$

Exercice 3 : On considère la transformation S à tout point $M(Z)$ associe $M^{'}(Z^{'})$ tels que : $Z^{'} = (1 + i)Z - i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S (on note Ω le centre de S)
2) Montrer que pour tout M différent de Ω , le triangle ΩMM' est isocèle rectangle en M
3) Déterminer l'expression analytique de S
4) a) Trouver l'image (D') par S de la droite (D) d'équation $y = 2x$

b) Quelle est l'image (C') par S du cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = 2$?

PROBLEME :

A-) Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

1) Etudier les variations de la fonction g
2) Calculer $g(0)$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une notée

$$\alpha \in]-0,72;\ -0,71[$$

On donne $g(-0,72) \approx -0,025$ et $g(-0,71) \approx 0,027$

3) Déduire le signe de la fonction g sur $]-1; +\infty[$
4) Calculer $g^{''}(x)$. En déduire que la courbe (C_g) admet un point d'inflexion
5) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) au point d'abscisse 0
6) Tracer (T) et (C_g) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

B-) On considère la fonction f définie sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

1) Etudier les limites de f aux bornes de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$
2) a) Montrer que pour tout $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$; $f^{'}(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$

b) Etudier le signe de f'(x) et en déduire le sens de variations de f

c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ et donner le tableau de variations de f

3) Construire (C_f) dans le même repère. On prendra

$$\ln 2 \approx 0{,}7 \; ; \; \alpha \approx -0{,}715 \quad et \; f(\alpha) \approx -2{,}5$$

4) Soit $a > 0$. On note $\Delta(a)$ le domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \;\; et \;\; x = a$

a) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$

Montrer que $h'(x) = \frac{1}{x} - f(x)$. En déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$

b) Calculer en fonction de a l'aire A(a) du domaine $\Delta(a)$ $en\ cm^2$ puis $\lim\limits_{a \to +\infty} A(a)$

+++++++++++++++++++SUJET 5+++++++++++++++++

EXTRAIT DU CONCOURS D'ACCES A LA FONCTION PUBLIQUE 2016

Enoncé 1 :

I) On note f_n la fonction numérique de variable réelle x définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour tout n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) L'unité graphique : 2cm

1) Etudier les limites de $f_n \;\; en - \infty \; et + \infty$

2) a) Etudier suivant la parité de n, la limite de $f_n \;\; en - 2$

b) Calculer $f'_n(x)$; puis étudier son signe suivant la parité de n

c) Dresser le tableau de variations de f_n

3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent un point fixe A

Déterminer une équation de la tangente (T_n) $à$ (C_n) en A

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel $x \neq -2, on\ a$: $\quad f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) (pour n=1 et n=2)

Représenter graphiquement (C_1) et (C_2)

II) Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$

1) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a $U_n \geq 0$

Que peut-on en déduire ?

2) a) En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $\quad nU_{n+1} = 1 + U_n - \frac{e}{2^n}$

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4-b) de la partie I)

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-1}^{0} \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} = 1$

Enoncé 2 : Un examen se décompose de questions aux quelles il faut répondre par oui ou par non

Si un élève connait la réponse, il répond correctement, s'il ignore, il tire à pile ou face la réponse qu'il inscrira. Un étudiant donné connait 60% du programme. Quelle est la probabilité pour qu'une réponse juste soit due à ses connaissances plutôt qu'au hasard ?

++++++++++++++++++SUJET 6++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DE MATOTO 2016

A- Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne v contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3

On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules

1) Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X
2) Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$
3) Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$
4) Déterminer la plus petite valeur de n pour la quelle $E(X) < 4{,}8$

B- On considère la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique 2cm

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes de la courbe (C)

b) Etudier les variations de f ; dresser le tableau de variations de f. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

c) Construire avec soin (T) et la courbe (C)

2) On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique

a) Etudier les variations de la fonction $f' sur$ $[0; 1]$. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$

b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une solution unique α

Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$

3) On se propose de déterminer une valeur approchée de α

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Démontrer par récurrence que : pour tout n de N ; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$

b- En utilisant l'inégalité des accroissements finis , démontrer que : pour tout n de N : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

En déduire que pour tout n de N ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

c- Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

d- Déterminer un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

4) Ne connaissant pas la primitive de la fonction f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

a) Justifier l'existence de I et donner une interprétation graphique

b) On pose :$J = \int_0^{\frac{1}{2}}(2 - x)e^x dx \quad et \quad K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$. Vérifier que $4I = J + K$

c) Calculer I

++++++++++++++++++SUJET 7++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DE RATOMA 2016

A- 1) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360

2) En déduire dans l'ensemble N la résolution de l'équation d'inconnue b:

$b^3[b^2 + (b + 1)^2] = 18360$

3) Existe-t-il un entier naturel b tel que le nombre qui s'écrit 36723 dans le système décimal et 442003 dans le système de numération à base b ?

B- En composant le numéro de téléphone, une personne a oublié les deux chiffres. Une information à ce propos est la suivante : « le premier chiffre est le plus petit que le second »

Quelle est la probabilité pour composer le numéro correcte

C- 1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$

2) Calculer I

3) n étant un entier naturel non nul ; on pose :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} e^{-\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2} e^{-\frac{n}{n}}$$

Montrer que s_n a une limite lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$; préciser cette limite

D- 1) Résoudre dans R l'équation : $\frac{4x}{15} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_x 0,4}$

2) Etudier et représenter la fonction f définie par : $f(x) = \log_5\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$

+++++++++++++++++++SUJET 8+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DE MATOTO 2014

Exercice1 : Soit a et b deux nombres entiers naturels tels que :

$$PGCD(a,b) = d \ et \ PPCM(a,b) = m$$

Trouver tous les couples (a ; b) d'entiers naturels tels que : $2m - d = 220$

Exercice 2 : A-) Soit g la fonction dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et définie par :

$$\mathrm{g(x) = \ln x + x + 1}$$

1) Déterminer les limites de g en $0\ et\ en + \infty$

Etudier le sens de variations de g

2) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $(0{,}27 < \alpha < 0{,}28 \quad et \quad g(0{,}27) = -0{,}04 \quad et \ g(0{,}28) = 0{,}007)$

b) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

B-) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{x+1} \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0

b) f est elle dérivable en 0 ?

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$

3) a) Démontrer que, pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

b) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Soit (C) la courbe de la f et (Γ) la tangente à (C) au point d'abscisse 1

Donner une équation de (Γ)

Tracer la (C) et (Γ)

$$\ln(0{,}27) = -1{,}31;\ \ln(0{,}28) = -1{,}27\ ;\ \ln 2 = 0{,}7;\ \ln 3 = 1{,}1 \ \ et \ \ln 5 = 1{,}6$$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle

1) Déterminer et construire le point G des points pondérés (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 1)

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

a) Vérifier que B appartient à (Γ)

b) Déterminer et construire (Γ)

+++++++++++++++++++SUJET 9+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DE DIXINN 2014

Exercice 1 : 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs vérifiant l'équation (E) : $29x - 11y = 1$ et résoudre alors (E) dans $\mathbb{Z}^2$

2) En déduire les solutions dans Z de l'équation : $29x - 11y = 5$

Exercice 2 : Un tireur vise une cible. La probabilité pour qu'il touche la cible est 0,7. Il tire trois fois de suite. On désigne par X la variable aléatoire qui désigne le nombre de fois où il a atteint la cible

1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

PROBLEME :

On désigne par f la fonction : $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe

A- 1) Etudier la parité de f, et en déduire une interprétation géométrique du résultat

2) Vérifier que pour tout x on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

3) Montrer que les droites $(D_1): y = x - 1 \ et \ (D_2): y = x + 1$ sont asymptotes respectivement en $+\infty \ et \ -\infty$

4) Etudier les positions relatives de $(D_1) \ et \ (D_2)$ par rapport à (C)

B- 1) Etudier les variations de f, puis tracer sa courbe

2) Vérifier que : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ et calculer l'aire limitée par (C), (D_1) et les droites d'équations $x = 1 \ et \ x = t$

3) Calculer la limite de cette aire lors que t tend vers $+\infty$

GEOMETRIE :

I) Les points $A(1;1); B(4;1) \ et \ C(2;4)$ ont pour images respectives : $A'(0;2); B'(3;5) \ et \ C'(-2;6)$

1) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe (S) qui transforme le triangle ABC en A'B'C' et caractériser (S)
2) Construire les triangles ABC et A'B'C' et calculer l'aire du triangle ABC
3) En utilisant l'une des propriétés des similitudes, en déduire l'aire du triangle A'B'C'

II) 1) Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A et $AB = a$. I et G sont les milieux respectifs de $[BC] \ et \ [AI]$.

Déterminer les coefficients des points A, B et C pour que G soit leur barycentre

2) Discuter suivant les valeurs du réel k, la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(E_K) \ tel \ que: 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k\frac{a^2}{8}$

3) Pour quelles valeurs du réel k, l'ensemble (E_K) est-il tangent à la droite (BC) ?

++++++++++++++++++SUJET 10++++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DE RATOMA 2014

Exercice 1 : 1) Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a,b) tels que l'on ait :

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 42 \\ PPCM(a,b) = 1680 \end{cases}$$

2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que : $8x \equiv 7[5]$

3) Résoudre l'équation $(x;y) \in Z \times Z$: $336x + 210y = 294$

Exercice 2 : On désigne par f la fonction : $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et (C) sa courbe

A- 1) Etudier la parité de f, et en déduire une interprétation géométrique du résultat

2) Vérifier que pour tout x on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

3) Montrer que les droites $(D_1): y = x - 1 \ et \ (D_2): y = x + 1$ sont asymptotes respectivement en $+\infty \ et \ -\infty$

4) Etudier les positions relatives de $(D_1) \ et \ (D_2)$ par rapport à (C)

B- 1) Etudier les variations de f, puis tracer sa courbe

2) Vérifier que : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ et calculer l'aire limitée par (C), (D_1) et les droites d'équations $x = 1 \ et \ x = t$

3) Calculer la limite de cette aire lors que t tend vers $+\infty$

Exercice 3 : On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés $[AB] \ et \ [AD]$ ont pour longueurs respectives $a \ et \ b$

Pour tout réel non nul m, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(A,m); (B,-1); (C,1)\}$

Pour chacune des questions ci dessous on donnera une solution géométrique puis une solution analytique

1) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lors que m décrit R
2) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

+++++++++++++++++SUJET 11++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC G.S L'AVENIR 2017

Exercice 1: BARYCENTRE

ABC est un triangle tels que : $BC = a$; $AC = b \ et \ AB = c$; $et \ G$ le barycentre du système $\{(A,1); (B,1); (C,4)\}$ et G' le

barycentrC' le milieu du segment [AB]e du système $\{(A,1); (B,1); (C,2)\}$

1) Soit $f(M) = MA^2 + MB^2 + 4MC^2$

a) Montrer que $f(M) = 6MG^2 + \frac{4a^2+4b^2+c^2}{6}$

b) Calculer de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)^2$

En déduire que : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{MC'}} = 8\mathrm{MG}'^2 - 3\mathrm{MG}^2 - \frac{4a^2+4b^2+c^2}{12}$

2) Soit G'' le barycentre du système $\{(\mathrm{G}',8);(\mathrm{G},-3)\}$

a) Montrer que $8\mathrm{MG}'^2 - 3\mathrm{MG}^2 = 5\mathrm{MG}''^2 - \frac{c^2+4b^2}{30}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{MC'}} = 5\mathrm{MG}''^2 - \frac{20a^2+28b^2+7c^2}{60}$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres $[CC']\ et\ [AB]$ Montrer que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G'' dont on déterminera le rayon en fonction de a, b et c

4) Soit S l'aire et p le demi-périmètre du triangle ABC

- **a)** Calculer $\cos\hat{A}$ en fonction de $a\,;b\ \ et\ \ c$
- **b)** Calculer S en fonction de $b; c\ \ et\ \sin\hat{A}$
- **c)** Montrer que $S = \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)\tan\hat{A}$
- **d)** En déduire l'égalité : $16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$ (1)
- **e)** En factorisant le second membre de (1) , démontrer la formule de Héron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- **f)** Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) :
  Démontrer que : $AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- **g)** <u>**Application :**</u> Calculer l'aire du triangle ABC ; la distance AH et la valeur de $\tan\hat{A}$ tels que: $AB = 6\ ;\ AC = 7\ \ et\ \ BC = 8$

<u>Exercice 2</u>: PROBABILITE

M DAOUDA BANGOURA possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

● Si pendant le mois noté n il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$

● Si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{2}{5}$

Pour n entier naturel strictement positif, On désigne par A_n l'évènement « M DAOUDA a dépassé son forfait le mois n » et B_n l'évènement contraire. On pose

$$p_n = p(A_n)\ et\ q_n = p(B_n)\ ; on\ a\ p_1 = \frac{1}{2}$$

Tous les résultats seront donnés sous de fractions irréductibles

1) a) Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et A_{n+1} sachant que B_n est réalisé

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies : $p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}p_n \quad et \quad p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}q_n$

En déduire l'égalité suivante : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{1}{3}$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1

Ecrire $u_n \ et \ p_n$ en fonction de n. Déterminer la limite de p_n

Exercice 3:

Si l'on permute les deux aiguilles d'une montre, on obtient en général une position impossible sur une montre normale. Par exemple, la configuration (2) obtenue en effectuant cette permutation à 4heures ne s'observe jamais. Combien de fois par jours cette permutation conduit-elle à une configuration observable sur une montre normale ?

PROBLEME :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1]$ par ; $\begin{cases} f(x) = |x+1|^{\ln|x|+x} & si \ x \neq -1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

PARTIE A : On considère la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus [0; \ -1] \ par$;

$$i(x) = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x} + 5$$

1- Etudier les variations de la fonction i

2- a) Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet trois solutions $\propto \in]-\infty; -1[\ ; \ \beta \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\ \ et \ \gamma \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$

b) Justifier que : $-1{,}2 < \propto < -1{,}1 \quad ; \quad -0{,}9 < \beta < -0{,}8 \quad et \quad -0{,}3 < \gamma < -0{,}2$

3- En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \propto[\cup]\beta; \ \gamma[\cup]0; +\infty[\ ; \ i(x) > 0 \\ \forall x \in]\propto; \ -1[\cup]-1; \ \beta[\cup]\gamma; 0[\ ; \ i(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par

$$h(x) = 2(x+1)\ln|x+1| + \ln|x| + 3x + 2$$

1- a) Calculer la limite de h en $+\infty \ ; \ -\infty \ et \ en \ 0$

b) En déduire une interpretation graphique du résultat

2- Montrer que $h^{'}(x) = i(x)$

3- Dresser le tableu de variations de h

4- a) Montrer que si x_0 est la solution de l'équation $i(x) = 0\ alors$

$$h(x_0) = -\frac{1}{x_0} - 2x_0 - 4 + \ln|x_0|$$

b) Prouver que : $h(\propto) < 0$; $h(\beta) < 0\ \ et\ \ h(\gamma) < 0$ en donnant leurs encadrements à 10^{-1} près

5) a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda \in]0;\ +\infty[$

b) Justifier que : $0{,}08 < \lambda < 0{,}09$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0;\ \lambda[\ ;\ \ h(x) < 0 \\ \forall x \in]\lambda; +\infty[\ ;\ \ h(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE C : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{g(x) = (x + 1)^2 \ln|x + 1| + x \ln|x| + x^2}$$

1- Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty\ \ et\ \ en\ \ 0$

2- a) Montrer que $\mathrm{g^{'}(x) = h(x)}$

b) Dresser le tableau de variations de h

3- a) Montrer que $\mathrm{g(\lambda)} = \frac{(\lambda-1)\ln\lambda-\lambda^2-5\lambda-2}{2}$

b) Donner un encadrement de $g(\lambda)$ à 10^{-1} près puis en déduire que $g(\lambda) < 0$

4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\delta \in]\lambda;\ +\infty[$

b) Justifier que : $0{,}2 < \delta < 0{,}3$

c) Calculer $\mathrm{g(0)}$

d) En déduire le signe de g

PARTIE D :

1- a) Calculer la limite de f en -1

b) Donner une interprétation graphique du résultat

2- a) Etudier la dérivabilité de f en 0

b) Donner une interprétation graphique du résultat

3- a) Montrer que $\mathrm{f^{'}(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)} f(x)}$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que $f(\delta) = e^{-\frac{\left((\delta+1)\ln|\delta+1|\right)^2}{\delta}}$; on donne $f(\delta) = 0{,}8$

4- Montrer que (C) admet deux asymptotes que l'on précisera les équations

5- Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = (4\ln 2 + 1)x - 4\ln 2 + 1$$

6- a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Donner une interprétation graphique du résultat

7- Tracer la curbe (C) et (T)

8- Soit j la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ -1[$

  d) Démontrer que j réalise une bijection de $]-\infty;\ -1[$ vers $]0;+\infty[$

  e) Construire la courbe $\left(C_{j^{-1}}\right)$ dans le même repère

  f) Calculer $f(-2)$ d) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 e) Montrer que $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2-\ln 2}$

9- Montrer que la droite (AB) avec $A(0\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 2)$ a pour équation $y = x + 1$

10- On rappelle que (C) est au dessus de (T) et au dessous de (AB) sur l'intervalle $[0; 1]$; Soit A l'aire de la partie du plan delimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = 1$

a) Montrer que :

$$\int_0^1 \big((4\ln 2+1)x - 4\ln 2 + 1\big)dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 (x+1)dx$$

b) Montrer que : $\frac{4\ln 2+1}{2} - 4\ln 2 + 1 \leqslant A \leqslant \frac{3}{2}$

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire A en cm²

++++++++++++++++++SUJET 12+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC G.S LA TOURTERELLE 2017

Exercice 1:

1) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 7 de 2^{n} puis de 10^{2n}

Vérifier que le nombre qui s'écrit 787878 en base 10 est divisible par 7

2) Soit b et c deux entiers naturels qui satisfont aux conditions suivantes :

$$0 \leq b \leq 9 \quad \text{et} \quad 0 \leq c \leq 9$$

Pour chaque entier naturel non nul n, on considère le nombre a(n) qui s'écrit bcbcbc…bc en base dix, b et c étant étant répétés chacun n fois

Déterminer, suivant les valeurs des entiers b et c, l'ensemble des entiers n tels que a(n) soit divisible par 7

Exercice 2:

On considère un groupe de seize fourmis parmi lesquelles quatre ont une caractéristique C

Ces quatre fourmis seront dites « de type C ». On prend simultanément et au hasard cinq fourmis dans ce groupe

1- Calculer la probabilité :

  $a)$ p_a de n'avoir, parmi ces cinq fourmis, aucun de type C

  $b)$ p_b d'avoir exactement une fourmi de ce type

$c)$ p_c d'avoir au moins deux fourmis de ce type

On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible, puis on indiquera une valeur approchée à 10^{-4} près

2- On constate, après enquête, que, dans la population entière, la répartition des fourmis de type C est de 1 sur 4. On estime la population suffisamment nombreuse pour que le tirage de n fourmis soit assimilable à n tirages successifs indépendants avec remise

On prend au hasard n fourmis $(n \geq 2)$ et on rappelle X la variable aléatoire donnant le nombre de celles de type C

a) Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$ en fonction de n et en déduire la probabilité p_n d'avoir au moins deux fourmis de type C

b) Démontrer que $p_n > 0{,}9$ si et seulement si $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) < 0{,}1$

c) On pose $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)$

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et démontrer que (u_n) est une suite décroissante

d) Trouver la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0{,}9$

PROBLEME : On considère la fonction f définie par : $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x^2 - 1 + \ln|x|}}{\mathrm{x - \ln|x|}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A : Soit l la fonction définie sur $\mathrm{R^*}$ par $\mathrm{l(x) = x - \ln|x|}$

1- a) Calculer la limite de l en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de l en 0. En déduire une interpretation graphique du résultat

2- a) Montrer que l'équation $\mathrm{l(x)} = 0$ admet une solution $\propto \in]-\infty; 0[$

b) Justifier que :$-0{,}6 < \propto < -0{,}5$ $avec$ $l(-0{,}6) \approx -0{,}09$ et $\mathrm{l}(-0{,}5) \approx 0{,}2$

c) En déduire le signe de l

PARTIE B : Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par $\mathrm{i(x)} = \frac{\mathrm{6x^2 - 4x - 1}}{\mathrm{x}} - 4\ln|\mathrm{x}|$

1- a) Calculer la limite de i en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de i en 0

2- Etudier les variations de la fonction i

a) Montrer que l'équation $\mathrm{i(x)} = 0$ admet deux solutions $\beta \in]-\infty;\ 0[$ et $\gamma \in]0;\ +\infty[$

b) Justifier que : $-0{,}4 < \beta < -0{,}3$ et $0{,}6 < \gamma < 0{,}7$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \beta[\cup]0;\ \gamma[;\ \mathrm{i(x)} < 0 \\ \forall x \in]\beta; 0[\ \cup]\gamma;\ +\infty[;\ \mathrm{i(x)} > 0 \end{cases}$

PARTIE C : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par

$$\mathrm{h(x) = 3x^2 + 1 - (4x + 1)\ln|x|}$$

1- Calculer la limite de h en $+\infty$; $-\infty$ et en 0

2- a) Montrer que $h'(x) = i(x)$

b) Dresser le tableau de variations de h

3- a) Montrer que si a est la solution de l'équation $i(x) = 0$ alors

$$h(a) = -3a^2 + \frac{5}{2}a + 3 + \frac{1}{4a}$$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $h(\beta)$ et $h(\gamma)$

4) En déduire que $h(x) > 0$

PARTIE D : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1 - (2x^2 + x)\ln|x|$$

1- a) Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty$

b) Montrer que g est continue en 0 et étudier la dérivabilité de g en 0

2- a) Montrer que $g'(x) = h(x)$

b) Dresser le tableu de variations de g

3- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda \in R$

b) Vérifier que $0,2 < \lambda < 0,3$

c) En déduire le signe de g

PARTIE E :

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) a) Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de f en 0 et en ∝; puis endéduire une interprétation graphique du résultat

c) Etudier la dérivabilité de f en 0

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(l(x))^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que $f(\lambda) = 2\lambda + 2 + \frac{3\lambda^2+3\lambda-3}{\lambda^3-2\lambda+1}$

b) Donner un encadrement de $f(\lambda)$ à 10^{-1} près

5) a) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$

b) En déduire le signe de f

6) Montrer que la fonction $k(x) = x + \ln|x|$ est asymptote à (C)

7) a) Etudier et tracer (Γ) la courbe représentative de k dans un autre repère orthonormal (O, I, J) unité graphique 2 cm

b) Tracer la courbe (C) dans le même repère que (Γ)

++++++++++++++++++SUJET 13++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU LYCEE KOUNTIA 2017

Exercice 1: 1) Déterminer le PGCD(336 ; 210)

2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que : $8x \equiv 7[5]$

3) Résoudre l'équation $(x;y) \in Z \times Z$: $336x + 210y = 294$

Exercice 2: On considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

1) Calculer Z^2

2) Déterminer le module et un argument de Z^2 puis en déduire le module et un argument de Z

3) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 3: Une variable aléatoire X prend les 1 ; -2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln a$; $\ln b$ et $\ln c$ $où$ a, b et c sont en progression géométrique. On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

3) Calculer a, b et c et la variance $V(X)$
4) Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -2 et 3 d'une droite graduée (Δ)

d) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, \ln a), (B, \ln b), (C, \ln c)\}$

e) On pose : $\phi(\mathrm{M}) = \frac{1}{6}\mathrm{MA}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{MB}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{MC}^2$, où M est un point de (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$

f) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que
$$\varphi(M) = 9$$

PROBLEME :

PARTIE A: Soit l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$
2) Soient a et b deux réels et soit U la fonction définie sur R par : $\mathrm{U(x) = (ax + b)e^x}$
   a) Déterminer a et b pour que U soit solution de (1)
   b) Montrer que V est une solution de l'équation (2) si et seulement si U+V est une solution de (1)
   c) En déduire l'ensemble de solution de (1)
3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0

PARTIE B: La fonction g est définie sur R par : $\mathrm{g(x) = 2e^x - x - 2}$

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Etudier le sens de variations de g sur R et dresser son tableau de variation
3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions

b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$

4) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

PARTIE C: La fonction f est définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

On note C sa courbe représentative dans un repère (unité graphique 2cm)

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2) Calculer f'(x) dérivée de f et montrer que f'(x) et g(x) ont le même signe. Etudier le sens de variation de f(x)

3) Démontrer l'égalité $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

Où α est définie dans la première partie. En déduire un encadrement de f(α)

4) Etablir un tableau de variation de f

5) Tracer (C)

PARTIE D: Soit m un nombre réel négatif

1- Interpréter graphiquement $\int_m^0 f(x)dx$

2- a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie $\int_m^0 xe^x dx$

b) En déduire $\int_m^0 f(x)dx$

3- Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$ lors que x tend vers $-\infty$

+++++++++++++++++SUJET 14++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU LYCEE AHMED SEKOU TOURE 2017

Exercice 1: Le nombre n désigne un entier naturel

1- Démontrer que $n^2 + 5n + 4 \quad et \quad n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par n+1

2- Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour les quelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par n+1

En déduire que, $\forall n \in N; 3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$

Exercice 2:

1- Calculer la somme : $S_k = 1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2k} \quad (k \in N^*)$

2- Exprimer le nombre qui s'écrit, en base 10, $\overline{ababab}$ à l'aide du nombre $\overline{ab}$ et de puissance de 10

3- En déduire la somme : $A = 29 + 2929 + 292929 + \cdots + \underbrace{2929 \dots 29}_{n\, fois\, 29}$

Exercice 3: Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$

S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\mathrm{P.G.C.D}(x\,;\ y) = y - x$

4. a. Calculer le P.G.C.D(363 ; 484)

b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple (n ; n+1) appartient-il à S ? Justifier votre réponse

3. a. Montrer que (x ; y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que : $x = k(y - x)$ et $y = (k - 1)(y - x)$

b. En déduire que pour tout couple (x ; y) de S on a : $\mathrm{PPCM}(x\,;\ y) = k(k + 1)(y - x)$

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228

b. En déduire l'ensemble des couples (x ; y) de S tels que : $\mathrm{P.P.C.M}(x, y) = 228$

PROBLEME :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(1 + 2x)$

1) Justifier que f strictement croissante sur l'intervalle I
2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\frac{1}{2}$
3) On note g la fonction définie sur l'intervalle I par : $\mathrm{g(x)} = \mathrm{f(x)} - \mathrm{x}$
   a) Etudier les variations de g sur l'intervalle I
   b) Justifier que l'équation g(x)=0admet deux solutions : 0 et une autre, notée $\beta \in [1; 2]$
   c) En déduire le signe de g(x) ∀∈ I
4) Justifier que $\forall x \in]0;\ \beta[$, f(x) appartient aussi à $]0;\ \beta[$

Partie B : On appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que $u_n \in]0;\ \beta[$
2) Démontrer par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante
3) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

Partie C :

1) Montrer que $\forall x \geq 1;\ \ f'(x) \leq \frac{2}{3}$
2) Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$
   a) Démontrer que $\forall n \in N$; $\int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$
   b) En déduire que $\forall n \in N$; $\beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

++++++++++++++++SUJET 15+++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G.S LA MERVEILLE 2017

Exercice 1:

On considère trois nombres entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans base n :

$$a = 111\ ;\quad b = 114\ \ et\ c = 13054$$

1) Sachant que $c = ab$, déterminer n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal

2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans Z² de l'équation : $ax + by = 1$

Exercice 2:

Soit ABC un triangle isocèle tel que : BC=2 et AB=AC=3

On désigne par A’ le milieu du segment $[BC]$ et H l’orthocentre de ABC

4) Démontrer que $cosBAC = \frac{7}{9}$

5) Soit B’ le projeté orthogonal de B sur la droite (AC)

d) Calculer $\frac{B'A}{B'C}$

e) Déterminer deux nombres réels α et γ tels que B’ est le barycentre des pondérés (A ;α) et (C ;γ)

En déduire trois nombres réels a, b et c tels que H est le barycentre des points pondérés (A ;a), (B ;b) et (C ;c)

Exercice 3:

I) 1) On pose : $Z = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

a) Déterminer la forme algébrique de Z

b) Calculer $Z^2 \ et \ Z^3$

c) Montrer que : $Z^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$

2) On pose $\alpha = -\frac{\pi}{3} \ \ et \ \ \theta = -\frac{\pi}{4}$

a) Calculer $\cos(\alpha - \theta) \ \ et \ \sin(\alpha - \theta)$

b) On pose $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

Donner la forme trigonométrique de Z

II) Résoudre dans C l’équation : $-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 13 = 0$

PROBLEME : Le but du problème est d’étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0;1[\cup]1.+\infty[\ ;\ \ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\ln x \\ f(0) = 0 \ \ et \ \ f(1) = 1 \end{cases}$$

On notera C la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O ; I ; J) d’unité 5cm

PARTIE A : On considère la fonction g dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[\ et\ définie\ par$

$$g(x) = (x-2)\ln x + (x-1)$$

1) Démontrer que pour tout réel x élément de $]0\ ;\ +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + lnx$

2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation

3) Déduire de 2) que g(x) est positif pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$

PARTIE B : 1)a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Démontrer que f est continue à droite en 0 , et continue en 1

c) Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0

Donner une interprétation graphique de ce résultat

d) On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \frac{3}{2}$

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1

2)a)On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1.+\infty[$

Démontrer que pour tout x appartenant à $]0;1[\cup]1.+\infty[$: $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}}{(\mathrm{x}-1)^2}\mathrm{g}(\mathrm{x})$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

c)Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $on\ a\ 0\leq f(x)\leq 1$

d) Dans le repère (O ;I ;J) , tracer la de tangente à C au point O, la tangente à C au point B de coordonnées $(1;1)$ et la courbe C .

On donne $\ln 2\simeq 0{,}69\ \ et\ \ \ln 3\simeq 1{,}1$

+++++++++++++++++SUJET 16+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G.S MAHATMA GANDHI 2017

Piste 1:

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite géometrique de premier terme $u_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$

Soit $(v_n)_{n\in N}$ la suite arithmétique de premier terme $v_0=\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module u_n et dont un argument est v_n

1) a) Exprimer u_n et v_n en fonction de n. b) En déduire z_n en fonction de n
2) Démontrer que (z_n) est une suite géometrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$
3) Soit (P_n) le plan complexe rapporté à n repère orthonormé direct (O ; U ; V) et M_n le point d'affixe z_n
   a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}
   b) Donner ses éléments caractéristiques
4) Pour tout entier naturel n on pose : $t_n=z_0\times z_1\times z_2\times\ldots\times z_n$
   a) Exprimer en fonction de n un argument de t_n
   b) Démontrer que si n est impair alors t_n est réel

Piste 2:

1) Résoudre l'équation : $9^{\sqrt{x^2+3}}-3^{1+\sqrt{x^2+3}}-54=0$
2) Soit la fonction $y=f(x)=2^x+2^{-x}$
   a) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, I, J)
   b) Déterminer l'aire A du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équations $x=0\ \ et\ \ \ x=2$

Piste 3 :

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 50 euro et six pièces de 20 euro. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie

3) Calculer la probabilité de l'évènement A « tirer trois pièces de 50 euro »
4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 50 euro figurant parmi les trois pièces tirées

d) Déterminer la loi de probabilité de X
e) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X
f) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque les trois pièces tirées dans le porte-monnaie

Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

++++++++++++++++++SUJET 17++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G.S LE SOUMBOUYAH 2017

Exercice 1 : On considère l'équation (E) : $z \in C$;

$$z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$$

1) a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

   b) Résoudre l'équation (E)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives1+2i ; 3i et -2+3i

Soit G le barycentre des points A, B et C de coefficients respectifs 2 ; -2 et 1

a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$; $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$
b) Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$; $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison
c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C

   Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude

Exercice 2 : On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieur

4) Calculer la probabilité d'obtenir :
   b) Une face blanche
   c) Une face noire
5) On jette ce dé quatre fois de suite

d) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche et une face blanche

e) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers

f) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au 4ème lancer (une face noire pouvant apparaitre au cours des autres lancers)

6) Soit n un entier naturel non nul

c) Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers

d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geq 0{,}99$

Exercice 3 : On considère les suites $(U_n)_{n\in N}\ \ et\ \ (V_n)_{n\in N}$ définies par :

$U_0 = \frac{1}{2}\ ;\ \ V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ et\ \ \begin{cases} U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ V_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}V_n + U_n \end{cases}$ On pose : $Z_n = U_n + iV_n$

1) Calculer $|Z_0|$; puis $|Z_{n+1}|$ en fonction de $|Z_n|$.

2) a) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n

b) Trouver arg$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)$

c) Déduire de ce qui précède un argument $\theta_n\ de\ Z_n$ en fonction de n d) Trouver

3) Exprimer $U_n\ et\ \ V_n$ en fonction de n

PROBLEME :

Partie A :

1) On considère f la fonction numérique, de courbe représentative (C_f) définie sur R par : $f(x) = xe^{1-x}$

a- Calculer les limites de f en $+\infty\ et\ \ en\ -\infty$

b- On admet que f est dérivable sur R. Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation

c- Tracer la courbe (C_f) en prenant soin de tracer la tangente à l'origine

2) On considère g la fonction numérique, de courbe représentative $(\mathrm{C_g})$ définie sur R par : $\mathrm{g(x) = |x|e^{|1-x|}}$

a) Ecrire g(x) sans le symbole de la valeur absolue

b) En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative $(\mathrm{C_g})$ de g sur $]-\infty; 1]$ à partir de $(\mathrm{C_f})$

c) Etudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $\mathrm{h} \rightarrow \mathrm{xe^{1-x}}$

d) Etudier la dérivabilité de g en 0 et en 1

e) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de g

f) Tracer $(\mathrm{C_g})$ ainsi que les demi-tangentes à $(\mathrm{C_g})$

Partie B : Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonction f_n définie par : $\mathrm{f_n(x) = xe^{n(1-x)}}$. On note $(\mathrm{C_n})$ la courbe représentative de f_n

1) Calculer la limite de f_n en $+\infty$
2) Calculer les limites de f_n et de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$

   Donner une interprétation graphique du résultat
3) On admet que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable sur R
   a. Déterminer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n
   b. Résoudre dans R, l'équation : $f_n(x) = x$
   c. En déduire que toutes les courbes $(\mathrm{C_n})$ passent par deux points fixes que l'on précisera
4) Etudier la position de $(\mathrm{C_n})$ par rapport à $(\mathrm{C_{n+1}})$
5) Tracer $(\mathrm{C_2})$ dans le même repère
6) Soit $\propto$ un nombre réel, on pose : $I_n(\propto) = \int_0^{\propto} f_n(x)dx$
   a. Calculer $I_n(\propto)$ à l'aide d'une intégration par parties
   b. Calculer la limite de $I_n(\propto)$ quand $\propto$ tend vers $+\infty$

++++++++++++++++SUJET 18++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G.S LE SOUMBOUYAH 2018

EXERCICE1 : Une boite contient 60 boules blanches et 40 boules noires

On effectue dans cette boite des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche

PARTIE A : Dans cette partie, on ira au maximum à 4 tirages

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages

1- Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0

2- Calculer la probabilité pour que X soit égale à k , k valant successivement 1 ; 2 ; 3 et 4

PARTIE B : Dans cette partie, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul

De même, on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les n tirages

1) Calculer la probabilité pour que X soit égale à k , k valant successivement 1 ; 2 ; 3 et n

2)On considère la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

Soit E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Montrer que :$E(X) = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$

3)On sait que , pour tout réel x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

a) En dérivant les deux membres de l'égalité précédente, en déduire une expression de : $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

b) En déduire que : $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$

EXERCICE2 : On donne dans le plan muni d'un repère cartésien les points A(0 ; 1) , B(2 ; 1), C(1 ;0) et D(1 ; 1)

1- Déterminer le barycentre de l'ensemble des points pondérés (A ; 1) , (B ;-1), (C ; 2) et (D ;2)

2- Avec les points définis à la question précédente, déterminer le barycentre de l'ensemble des points pondérés (A ; 1) , (B ;-3), (C ; 1) et (D ;a) avec a Є R

Déterminer l'ensemble des points G_a lorsque a décrit R

3- A, B et C sont les sommets d'un triangle rectangle en C dans le plan (P), m est un nombre réel différent de -2 ($m \neq -2$)

On considère la fonction f définie par : $f(M)=MA^2+MB^2+mMC^2$

Soit G le barycentre du système des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1 ; 1 ; m

a- Montrer que $f(M)=(2+m)MG^2+f(G)$

e) Calculer$\mathrm{f(A) + f(B) + mf(C)}$ en fonction de f(G)

f) Montrer que $f(G) = \left(\frac{1+m}{2+m}\right) AB^2$

g) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M)=AB^2$

4- Montrer que pour tout $m \neq -2$, le point C est un élément de € En déduire une construction de l'ensemble (E_m) correspondant à m=-3

PROBLEME : Soit l'application f de R dans R définie par : $f(x) = \mathrm{Log}(ch\ x)$ où Log désigne la fonction logarithme népérien et $ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

PARTIE A :

1- Etudier les variations de la fonction f et montrer que pour tout $\mathrm{x \in R; f(x) \geq 0}$

2- Dans un plan affine euclidienne muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), tracer la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ puis déterminer ses asymptotes

PARTIE B : On désigne par t la dérivée de la fonction f : $t \to f'$

1- a- Montrer que pour tout x de R : $|t(x)| < 1$

b- Montrer que pour tout x de R : $t'(x) = 1 - \left(t(x)\right)^2$ en désignant par t' la dérivée de t

c- Montrer que si $x \in]-1;1[$, il existe un réel unique X tel que : $t(X) = x$, on explicitera X en fonction de x et on notera $X = t^{-1}(x)$. Montrer que :

$$t(R) =]-1;1[$$

2- Soit $n \in N$ et soit $X \in R$. On pose $I_n(X) = \int_0^x \left(t(u)\right)^n du = \int_0^x \left(f'(u)\right)^n du$

On conviendra que, pour tout u de l'intervalle $[0;X]$, $\left(t(u)\right)^0 = 1$

a) Justifier l'existence de $I_n(X)$

b) Calculer $I_0(X)\ \ et\ \ I_1(X)$.

c) En utilisant la question B)1)b) donnant $\left(t(u)\right)^2 = 1 - t'(u)$ Montrer que pour tout $n \geq 2$: $I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1}\left(t(x)\right)^{n-1}$

d) Déduire de ce qui précède , que pour tout entier naturel $p \geq 1$

$$(E_1):\ \ I_{2p}(X) = X - \left(t(X) + \frac{1}{3}\left(t(X)\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}\left(t(X)\right)^{2p-1}\right)$$

$$(E_1):\ \ I_{2p+1}(X) = \mathrm{Log}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\left(t(X)\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2p}\left(t(X)\right)^{2p}\right)$$

3- Montrer que l'on a pour tout entier p :$0 \leq \int_0^x \left(t(u)\right)^{2p} du \leq X\left(t(X)\right)^{2p}$

En déduire X étant fixé, que la suite $p \to \int_0^x \left(t(u)\right)^{2p} du$ est convergente et donner sa limite

4- En utilisant la relation (E_1) et en posant $X = t^{-1}(x)$, démontrer que pour tout x fixé $x \in [0;1[$ la suite $p \to \varepsilon_p(x)$ définie par : (E_3) :

$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \varepsilon_p(x)$ a pour limite 0

En déduire un résultat analogue pour $x \in]-1;\ 0[$

+++++++++++++++++++SUJET 19++++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G.S P.MARTIN LUTHER KING 2018

EXERCICE 1 :

On considère par ABCDEF un hexagone régulier de coté a $(a > 0)$ et de centre O

1- Démontrer par récurrence que le nombre de diagonale dans un polygone de n cotés est : $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$ avec $n > 3$

2- Montrer que la somme des diagonales de cet hexagone est : $S = 6a\left(1 + \sqrt{3}\right)$

3- Déterminer la nature du triangle ABD

4- Soit f l'application du plan définie par : $f(M) = -3MA^2 + 2MB^2 - MD^2$

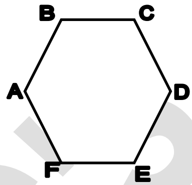
a- Construire le point $G = bar \begin{matrix} A & B & C \\ -3 & 2 & -1 \end{matrix}$ Que constate t-on

b- On pose (E) : $f(M) = -2a^2$

+ Montrer que les points O, A et E appartiennent à (E)

+ Montrer que $f(G) = f(F) = 0$

c- Déterminer et construire l'ensemble (E)



5- Soit (F) l'ensemble des points M du plan tels que :

$g(M) = MB^2 - 2MD^2 + MF^2 = 3a^2$ et I le milieu du segment $[BF]$

a- Montrer que les points C et E appartiennent à (F)

b- Montrer que $g(I) = -3a^2$

c- Déterminer et construire l'ensemble (F)

6- (E) et (F) sont-ils tangents ? Si oui, démontrer et donner leur point tangent.

7- a- Montrer que l'aire de cet hexagone est : $A = \frac{5a^2\sqrt{3}}{2}$

b- Soit A' l'aire de la partie commune de l'hexagone et de l'ensemble (E)

Démontrer que l 'aire de la partie de l'hexagone privée de A' est : $A'' = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) a^2$

EXERCICE 2 : PROBABILITE

1- Soit (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

a) Soit (v_n), définie pour $n \geq 1\ par$; $v_n = u_n - \frac{2}{5}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) En déduire l'ex/pression (v_n) en fonction de n puis celle de (u_n),

2- On considère deux dés notées A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change le dé. Puis on relance et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « On utilise le dé A au n^ième lancer »

Par $\bar{A}_n$ l'évènement contraire de A_n

Par R_n l'évènement « On obtient rouge au n^ième lancer » ; Par $\bar{R}_n$ l'évènement contraire de R_n

Par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n

a- Déterminer a_1 b- Déterminer r_1

c) En remarquant que, pour tout $n \geq 1, R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \bar{A}_n)$.
Montrer de : $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1, A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\bar{R}_n \cap \bar{A}_n)$.

e) En déduire que pour tout $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n

f) En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis limite de r_n

EXERCICE 3 : CONIQUES

I- Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'une parabole qui contiennent le foyer ?

II- Deux tangentes données à une parabole déterminent sur une tangente variable un segment $[MM']$. Montrer que la projection orthogonale de $[MM']$ sur la directrice est à une longueur constante

PROBLEME : FONCTIONS NUMERIQUES

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-1+\ln|x|}{x-\ln|x|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) unité 2 cm

Partie A : Soit l la fonction définie sur R^* par $l(x) = x - \ln|x|$

1- a) Calculer la limite de l en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de l en 0. En déduire une interpretation graphique du résultat

2- a) Montrer que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution $\propto \in \,]-\infty; 0[$

b) Justifier que :$-0,6 < \propto < -0,5$ $avec$ $l(-0,6) \approx -0,09$ et $l(-0,5) \approx 0,2$

c)En déduire le signe de l

PARTIE B : Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par $i(x) = \frac{6x^2-4x-1}{x} - 4\ln|x|$

1- a) Calculer la limite de i en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de i en 0

2) Etudier les variations de la fonction i

3) a) Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet deux solutions

$$\beta \in \,]-\infty; 0[\text{ et } \gamma \in \,]0; +\infty[$$

b) Justifier que : $-0,4 < \beta < -0,3$ et $0,6 < \gamma < 0,7$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty; \beta[\, \cup \,]0; \gamma[\,; \; i(x) < 0 \\ \forall x \in \,]\beta; 0[\, \cup \,]\gamma; +\infty[; \; i(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE C : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [0]$ par

$$h(x) = 3x^2 + 1 - (4x + 1)\ln|x|$$

1) Calculer la limite de h en $+\infty$; $-\infty$ et en 0

2) a) Montrer que $h'(x) = i(x)$

b) Dresser le tableau de variations de h

3) a) Montrer que si a est la solution de l'équation $i(x) = 0$ alors $h(a) = -3a^2 + \frac{5}{2}a + 3 + \frac{1}{4a}$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $h(\beta)$ et $h(\gamma)$

4) En déduire que $h(x) > 0$

PARTIE D : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1 - (2x^2 + x)\ln|x|$$

2) a) Calculer la limite de g en $+\infty$; $-\infty$

b) Montrer que g est continue en 0 et étudier la dérivabilité de g en 0

2) a) Montrer que $g'(x) = h(x)$

b) Dresser le tableau de variations de g

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda \in R$

b) Vérifier que $0{,}2 < \lambda < 0{,}3$ c) En déduire le signe de g

PARTIE E : 1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$; $-\infty$

b) Calculer la limite de f en 0 et en $\propto$; puis endéduire une interprétation graphique du résultat

c) Etudier la dérivabilité de f en 0

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(l(x))^2}$ b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que $f(\lambda) = 2\lambda + 2 + \frac{3\lambda^2+3\lambda-3}{\lambda^3-2\lambda+1}$

b) Donner un encadrement de $f(\lambda)$ à 10^{-1} près

5) a) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ b) En déduire le signe de f

6) Montrer que la fonction $k(x) = x + \ln|x|$ est asymptote à (C)

7)a) Etudier et tracer (Γ) la courbe représentative de k

b) Tracer la courbe (C) dans le même repère que (Γ)

++++++++++++++++++SUJET 20++++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU LYCEE PUBLIQUE FELLAH II 2018

EXERCICE 1 : SUITES NUMERIQUES

1) Résoudre dans R l'équation : $x^2 = x + 1 \quad (E)$

2) Donner la valeur exacte à 10^{-2} près de la racine positive

3) On note par φ cette racine positive, et on pose : $\varphi^2 = \varphi + 1$

a) Démontrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$

b) Déterminer deux réels a_4 *et* b_4 *tels que* : $\varphi^4 = a_4\varphi + b_4$

4) Pour $n \geq 2$; on pose $\varphi^n = a_n\varphi + b_n$

a) Exprimer φ^{n+1} en fonction de φ ; de a_n *et* b_n

b) En déduire que : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ *on pose* $a_0 = a_1 = 1$

c) Vérifier que : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ d) Montrer que : $a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

EXERCICE 2 : PROBABILITE

M DAOUDA possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

● Si pendant le mois noté n il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$

● Si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{2}{5}$. Pour n entier naturel strictement positif, On désigne par A_n l'évènement « M DAOUDA a dépassé son forfait le mois n » et B_n l'évènement contraire.

On pose $p_n = p(A_n)\ et\ q_n = p(B_n)\ ;on\ a\ p_1 = \frac{1}{2}$

Tous les résultats seront donnés sous de fractions irréductibles

1- a) Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et A_{n+1} sachant que B_n est réalisé

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies : $p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}p_n \quad et \quad p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}q_n$

En déduire l'égalité suivante : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$

2- Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{1}{3}$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1

3- Ecrire $u_n\ et\ p_n$ en fonction de n. Déterminer la limite de p_n

EXERCICE 3 : CONIQUES

I- Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'une parabole qui contiennent le foyer ?

II- Deux tangentes données à une parabole déterminent sur une tangente variable un segment $[MM']$. Montrer que la projection orthogonale de $[MM']$ sur la directrice est à une longueur constante

PROBLEME :

On considère la fonction f définie sur R^* par $f(x) = \coth x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A : On rappelle que

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ ;\ \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\ \ et\ \ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

1- calculer la limite de fonction f en 0 puis donner une interprétation graphique du résultat

2- a) Montrer que $\forall x \in R^*;\ f(x) = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3- a) Montrer que $\forall x \in R^*;\ \ f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}$

b) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat

4) Montrer que $\forall x \in R^*;\ \ f'(x) = -\frac{1}{(shx)^2}$

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f

6) Monter que la tangente (T) à (C) au point d'abscisses $\ln 2$ a pour équation $y = \frac{16}{9}x - \frac{16}{9}\ln 2 + \frac{5}{3}$

7) Montrer que f est une fonction impaire

8) Construire la courbe (C) et (T)

9) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{5}{3}$

c) Montrer que $(h^{-1})'\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{16}$

d) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère

Partie B : On considère la fonction g définie sur R^* par $\mathrm{g(x)} = \ln|e^x - e^{-x}|$ et (Γ) sa courbe représentative

1) Montrer que g est une primitive de f

2) a) Calculer la limite de g en $\pm\infty$

b) Calculer la limite de g en 0. En déduire une interprétation graphique du résultat

3) Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C), les droites d'équations $\mathrm{x} = 1$ et $\mathrm{x} = 2$ et la droite d'équation y=1

4) Donner la valeur approchée de A à 10^{-2} près

5) a) Montrer que $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} + \ln|1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}|$

b) Montrer que la droite (D) d'équation y=x est une asymptote à (Γ) en $+\infty$
Etudier la position relative de (Γ) par rapport à (D)

6) Etudier les variations de la fonction g

7) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions

α et β avec $\begin{cases} \alpha \in]-\infty; 0[\\ \beta \in]0;\ +\infty[\end{cases}$

b) Justifier que : $\begin{cases} \alpha \in]-0{,}5; -0{,}4[\\ \beta \in]0{,}4\,;0{,}5[\end{cases}$

8) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$

b) En déduire que (Γ) admet une asymptote puis donner son équation

9) Tracer la courbe (Γ) et la droite (D) dans un autre repère

Partie C : On considère par (H) la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = ch\ x \\ y = sh\ x \end{cases}$

1- Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera son équation et ses éléments caractéristiques

2- Soit (S) l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - i$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)

b) Déterminer l'expression analytique de (S)

c) Déterminer l'image de (H) par (S) , préciser son équation et ses éléments caractéristiques

d) Construire(H) et (H') dans un autre repère

++++++++++++++++SUJET 21+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC POLYNESIE 1999

Exercice 1 :

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches

On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A « On obtient des boules de deux couleurs »

B « On obtient au plus une blanche »

1. a) Calculer la probabilité de l'évènement :

« Toutes les boules tirées sont de la même couleur »

b) Calculer la probabilité de l'évènement :

« On obtient exactement une boule blanche »

c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B), p(A)\ et\ \ p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad et \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

5. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si : $2^{n-1} = n + 1$

6. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal 2 par :

$$u_n = 2^{n-1} - (n+1)$$

Calculer $u_2;\ u_3\ et\ u_4$

Démontrer que la suite u_n est strictement croissante

7. En déduire la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soient indépendants

Exercice 2:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ d'unité graphique 2cm

1. Résoudre dans C l'équation : $z^3 - 8 = 0$

2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_B = 2$ $\quad z_C = -1 - i\sqrt{3}$

a- Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique

b- Placer les points A, B et C

c- Déterminer la nature du triangle ABC

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' : $z' = jz$

a- Caractériser géométriquement l'application f

b- Déterminer l'image de A et C par f

En déduire l'image de la droite (AC) par f

PROBLEME :

<u>PARTIE A :</u> Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x - e^{2x-2}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

On prendra 5 cm comme unité

1. a- Déterminer la limite de f en $-\infty$

b- Vérifier que pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$

Déterminer la limite de f en $+\infty$

2. Déterminer f'. Etudier le signe de f'(x) et calculer la valeur exacte du maximum de f

3. Démonter que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C

Etudier la position relative de C et de D

4. On note A le point de la courbe C d'abscisse 1

Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe C

5. a- On note I l'intervalle $[0; 0{,}5]$

Démontrer que l'équation $\mathrm{f(x)} = 0$ admet dans l'intervalle I une solution unique que l'on notera a

b- Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a

6. Construire C l'asymptote D et la tangente (T)

<u>PARTIE B</u> : Détermination d'une valeur approchée de a

On définie dans R la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n-2}$

1. Soit g la fonction définie sur R par : $\mathrm{g(x)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}-2}$

Démontrer que l'équation : $\mathrm{f(x)} = 0$ est équivalente à $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}$

En déduire $\mathrm{g(a)}$

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, g(x) appartient à I

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|u_n - a|$

5. Démontrer par récurrence que : $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$

6. En déduire que la suite u_n converge et donner sa limite

7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_n - a| \leq 10^{-5}$

8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près, on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice

++++++++++++++++SUJET 22+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC D'AMERIQUE DU NORD 1998

EXERCICE 1 :

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1) Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.

a) On suppose ici n=10. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnant parmi les deux choisis.

Déterminer la loi de probabilité de X.

b) On revient au cas général avec n supérieur où égal à 3.

Calculer la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2) Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a) On suppose ici n=10. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnant parmi les deux billets choisis.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) On revient au cas général avec n supérieur où égal à 3.

Calculer la probabilité, notée q_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$P_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

b) En remarque que pour tout entier n, n-2 inférieur à n-1, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait

$$P_n - q_n < 10^{-3}$$

c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(0,\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique :4cm),on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2}$ - $i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur - $\vec{u}$.

Enfin, on note T la transformation qui à chaque point M associe-le point M'.

1. a) Démontrer : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.
   b) Déterminer l'image du point B.
   c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.
2. On pose z= x + iy, avec x et y réels.

a) Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.

b) Démontrer que l'ensemble (E) , des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C) , dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (E).

3. Dans cette question on pose z= 1 + i.
   a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M'sur la figue.
   b) Calculer le module de z'.
   c) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM'.

PROBLEME :

On désigne par n l'entier naturel supérieur à 2, on con sidère les fonctions f_n qui sont définies sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}$

<u>Partie A</u> : I- Etude des fonctions f_n

1-calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln x$

2-Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Etudier le signe de $f'_n(x)$

3-Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

4-Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n

II- Représentation graphique de quels que fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) ; (unit é graphique 5cm)

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère

1-Tracer (C_2) *et* (C_3)

2-a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3). Tracer (C_4)

Partie B : Calculs d'aires

1- Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

2- En déduire l'aire, en unité d'aires du domaine plan par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1 \ \ et \ \ x = e$

3- On note A_n l'aire, en unité d'aires, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y = 0$; $x = 1 \ \ et \ \ x = e$

a- Calculer A_2

b- Déterminer la nature de la suite $\mathrm{A_n}$ en précisant l'interprétation graphique de la raison

Partie C: Etude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de léuation $\boldsymbol{f_n(x) = 1}$

Dans toute la suite, on prend $n \geq 3$

1) a) Vérifier que , pour tout n ; $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \ \ et \ \ f_n\left(\frac{n-2}{2n}\right) > 1$

b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'admet pas de solution sur l'intervalle$\left]1; \ e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$

2) On admet que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; \ +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n

3) On se propose de déterminre la limite de la suite (α_n)

Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$

En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n)

++++++++++++++++SUJET 23+++++++++++++++++

EXTRAIT BAC BLANC G S L'AVENIR 2015

PISTE 1 :

1) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

$$a) \sum_{k=2}^{n}(k-1)2^{k-2} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 \ ; \quad b) \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{3+2n}{2^n};$$

$$c) \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

2) Un nombre s'écrit $\overline{abca}$ dans le système décimal divisible par 7 Déterminer toutes les valeurs possibles de $a, b \ et \ c$ pour que la division euclidienne de ce nombre par 99 ait pour reste égal à 1

PISTE 2 :

A-) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$

1- a) Quelles sont les solutions de (E)

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{-3x}$?

On dit que (C) et (C') sont tangentes

2-Représenter dans un repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives

$3 - \lambda$ étant un nombre réel strictement positif

Soit h_λ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$

c) Montrer que h_λ est solution de (E)

d) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Apres avoir calculé, en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'') d'équations$y = e^{3x}$, montrer que ces courbes sont tangentes en ce point

B-) Soit (E') l'équation différentielle: $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

1-Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E')

2-On pose $\mathrm{f(x) = g(x)} - \frac{1}{2}\mathrm{x^2 - x}$

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)

En déduire les fonctions f solutions de (E')

3-Déterminer les solutions de (E') dont la courbe représentative passe par le point $A(0; 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1

PROBLEME :

A-) On considère j la fonction définie sur R par : $j(x) = 2 - xe^{-x}$

1) Calculer les limites de j en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) Calculer la dérivée de j, puis dresser son tableau de variations

3)En déduire le signe de j(x)

B-) On considère la fonction i définie sur $R \setminus \{0\}$ par $\mathrm{i(x) = 2\ln|x| + 3 + e^{-x}}$

1-Calculer les limites de i en $-\infty$ et en $+\infty$

2-Calculer la limite de f en 0 ; puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3-Montrer que $i'(x) = \frac{j(x)}{x}$ puis donner les variations de i

4-a) Montrer que l'équation $\mathrm{i(x) = 0}$ admet deux solutions $\begin{cases} x_0 \in]-\infty; 0[\\ x_1 \in]0; +\infty[\end{cases}$

b) Justifier que $\begin{cases} -0{,}2 < x_0 < -0{,}1 \\ 0{,}1 < x_1 < 0{,}2 \end{cases}$

c) En déduire que $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-\infty;\ \mathrm{x_0}[\cup]\mathrm{x_1}; +\infty[\ \ \mathrm{i(x)} > 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]\ \mathrm{x_0};\ \mathrm{x_1}[\ \ \mathrm{i(x)} < 0 \end{cases}$

5- Construire (Γ) la courbe représentative de i

C-) On considère h la fonction définie sur R par : $h(x) = 2x\ln|x| + x + 1 - e^{-x}$

1-Calculer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2-Montrer que $h'(x) = i(x)$

En déduire les variations de h

3-a) Montrer que si α est solution de l'équation $i(x) = 0$ alors

$$h(\alpha) = 1 - 2\alpha - (\alpha + 1)e^{-\alpha}$$

b) Montrer que $h(x_0) > 0 \;\; et \;\; h(x_1) < 0$

4- a) Calculer h(0)

b) Montrer que l'équation $\mathrm{h(x)} = 0$ admet deux solutions $\begin{cases} x_2 \in]-\infty; x_0[\\ x_3 \in]x_1;\ +\infty[\end{cases}$

c) Justifier que $\begin{cases} -0{,}4 < x_2 < -0{,}3 \\ \ 0{,}4 < x_3 < 0{,}5 \end{cases}$ On donne

$\begin{cases} \mathrm{h}(-0{,}4) \approx -0{,}15 \ \text{ et } \mathrm{h}(-0{,}3) \approx 0{,}07 \\ \ \mathrm{h}(0{,}4) \approx -0{,}003 \ \text{ et } \mathrm{h}(0{,}5) \approx 0{,}2 \end{cases}$

d) En déduire que $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-\infty;\ \mathrm{x}_2[\cup]0;\ \mathrm{x}_3[\ \ \mathrm{h(x)} < 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]\ \mathrm{x}_2;\ 0[\cup]\ \mathrm{x}_3;\ +\infty[\ \ \mathrm{h(x)} > 0 \end{cases}$

D-) On considère g la fonction définie sur R par : $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

1-Calculer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2-Montrer que $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{h(x)}$. En déduire les variations de g

3-a) Montrer que si β est solution de l'équation $h(x) = 0$ alors

$$\mathrm{g}(\beta) = \frac{(\beta + 2)\mathrm{e}^{-\beta} - (\beta - 1)\beta}{2}$$

b) Montrer que $\mathrm{g}(\mathrm{x}_2) > 0 \;\; et \;\; \mathrm{g}(\mathrm{x}_3) > 0$

c) En déduire le signe de g

E-) On considère la fonction f définie sur $R \setminus \{0\}$ par $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} \ln|\mathrm{x}| - \frac{1}{\mathrm{x}}$

1-Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en déduire une interprétation graphique du résultat

2-Calculer la limite de f en 0 ; puis en déduire une interprétation graphique du résultat

3-Montrer que $\forall x \in R \setminus \{0\}; \quad f'(x) = \frac{e^x}{x^2}\mathrm{g(x)}$ puis donner les variations de f

4-Etudier la dérivabilité de f en 1

5-Montrer que la tangente (T) à $(\mathrm{C_f})$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = (e + 1)x - 2 + e$$

6-On considère la fonction k définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $k(x) = e^x \ln x$

d) Calculer la limite de k en 1 et en $+\infty$

e) Montrer que $\mathrm{k}'(\mathrm{x}) = \mathrm{e^x}\left(\ln \mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}}\right)$. En déduire les variations de k

f) Construire la courbe représentative de k (C_k)

7-On pose $\mathrm{l(x)=f(x)-k(x)}$

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} l(x)$

e) Que peut-on dire de (C_f) et (C_k)

f) Etudier la position relative de (C_f) et (C_k)

8-Montrer que l'équation $\mathrm{f(x)}=0$ admet une unique solution $\gamma \in]1{,}2;1{,}3[$

On donne $\mathrm{f}(1{,}2)\approx -0{,}23$ et $\mathrm{f}(1{,}3)\approx 0{,}2$

9-Tracer (C_f) dans le même repère

10-On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $]0;\ +\infty[$

a) Calculer f(1)

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en -1 existe

c) Montrer que $(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{e+1}$

d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

++++++++++++++++SUJET 24+++++++++++++++++

EXTRAIT BAC PONDICHERY 1998

Exercice 1 :

1- On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables

- a- Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
- b- Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
- c- Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleurs ?
- d- Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes?

2- On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires

On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables

On considère les évènements suivants :

R « Les boules tirées sont rouges »

D « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B « La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge »

- a- Calculer la probabilité de l'évènement R
- b- Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleurs ?
- c- Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'évènement B sachant que l'évènement D est réalisé.

Exercice 2 :

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe

1- Déterminer nombres réels a et b tels que :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20)$$

2- Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

3- Placer dans un repère orthonormal direct (O ;U ;V), les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $\mathrm{m} = -2 + 4\mathrm{i}$; $\mathrm{n} = -2 - 4\mathrm{i}$; $\mathrm{p} = 2 + 3\mathrm{i}$ et

$$\mathrm{q} = 2 - 3\mathrm{i}$$

4- a- Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\frac{z-p}{z-m} = i$.

Placer son image K

b- En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K

5- a- Déterminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MPKL

b- Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses

c- Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R

PROBLEME :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{e^x - 1}}{\mathrm{xe^x + 1}}$

On désigne par C xa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) : unité graphique : 4cm

PARTIE A :

Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $\mathrm{g(x) = x + 2 - e^x}$

1- Etudier le sens de variations de g sur $[0; +\infty[$ et calculer la limite de g en $+\infty$

2- a- Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique dans $[0; +\infty[$

On note $\propto$ cette solution

b- Prouver que $1{,}14 < \propto < 1{,}15$

3- En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

PARTIE B :

Etude fonction f et tracé de la courbe C

1- a- Montrer que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$: $\mathrm{f'(x)} = \frac{\mathrm{e^x g(x)}}{\mathrm{(xe^x+1)^2}}$

b- En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$

2- a- Montrer que pour tout réel positif x, $\mathrm{f(x)} = \frac{1-\mathrm{e^{-x}}}{\mathrm{x+e^{-x}}}$

b- En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé

3- a- Etablir que $\mathrm{f(\propto)} = \frac{1}{\propto + 1}$

b- En utilisant l'encadrement de $\propto$ établi dans la question A.2, donner un encadrement de $f(\propto)$ d'amplitude 10^{-2}

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0

5- a- Etablir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;\ +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = e^x - xe^x - 1$$

b- En déduire le sens de variation de la fonction u sur $[0;\ +\infty[$. En déduire le signe de u(x)

c- Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe C par rapport à la droite (T)

6- Tracer C et (T)

PARTIE C :

Calcul d'aires et étude d'une suite

1- Déterminer une primitive F de $[0;\ +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de f(x) établie dans la question B.2

2- On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe C, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = 1$

Calculer, en cm², l'aire A du domaine $\mathcal{D}$

Donner une valeur décimale au mm² près de l'aire A

3- Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a- Calculer v_0, v_1 et v_2

On donnera les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2

b- Interpréter géométriquement v_n

c- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$

En déduire la monotonie de la suite v_n à partir de n=1

d- Déterminer la limite de la suite v_n

++++++++++++++++SUJET 25+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU LYCEE SEMYG 2 (2018)

Exercice 1 :

I- Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels non nuls tels que : $PGCD(a,b) + PPCM(a,b) = b + 9$

II- Résoudre l'équation : $(1 + \cos 2\propto)y'' - 2y' \sin 2\propto + 2y = 0$

Exercice 2 : Un sondage est effectué sur une population de terminales après les résultats du BAC. 90% ont révisé sérieusement dont 80% ont eu le BAC

30% de ceux qui n'ont pas révisé sérieusement ont eu le BAC

On choisit un élève au hasard et on note B « l'élève a eu le BAC » et

R « l'élève a révisé sérieusement »

1- Traduire les données ci dessus en termes de probabilité avec les notations mathématiques

2- On organise les données dans l'arbre pondéré

a- Completer l'arbre des données numériques qui manques

b- Calculer $p(R \cap B)$ et $p(\overline{R} \cap B)$

c- En déduire $p(B)$ et $p(\overline{B})$

d- En déduire $p_{\overline{B}}(R)$ et $p_{\overline{B}}(\overline{R})$

e- Pour cette population, est-il plus probable d'avoir le BAC avec ou sans révision ?

f- Interpréter les résultats de la question d- (est-ce paradoxal ou non ?)

Exercice 3 :

1-a- Soit $(r_n)_{n \in N}$, la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n

b- Soit $(\theta_n)_{n \in N}$, la suite géométrique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n

c- Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$. Sachant que $z_0;\ z_1\ et\ z_2$ sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$. Déterminer le module et un argument de $z_0;\ z_1\ et\ z_2$

2-Dans le plan P muni d'un repère orthonormal direct (O ; I ; J) (unité graphique : 4cm) On rappelle M_n le point d'affixe z_n

a- Placer les points $M_0;\ M_1\ M_2\ et\ M_3$ dans le plan P

b- Pour tout entier naturel n, calculer $\left\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\right\|$ en fonction de n

c- On pose $d_n = \sum_{k=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\right\|$

Calculer d_n en fonction de n et déterminer la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$

PROBLEME :

Partie A :

Soit la fonction définie sur $]-\infty; 2[$ par $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 3 + \ln(2 - \mathrm{x})$

1- Calculer g(1)

2-On admet que g est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et on noie g' sa dérivée

a- Calculer g'(x) puis étudier son signe

b- Dresser le tableau de variations de g

3-En déduire que : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-\infty; 1[; \mathrm{g(x)} > 0 \\ \forall \mathrm{x} \in]1; 2[; \mathrm{g(x)} < 0 \end{cases}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 2[$ par $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + \frac{\ln(2-\mathrm{x})}{2-\mathrm{x}}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité 2cm

1-Calculer la limite de f à gauche en 2. Interpréter le résultat

2-Justifier que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$

3-Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à C

4-Etudier la position de D par rapport à C

5- On admet que f est dérivable sur $]-\infty;2[$ et on noie f' sa dérivée

a- Justifier sur $]-\infty;2[$, f'(x) et g(x) ont même signe

b- Dresser le tableau de variations de f

6-On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1[$

a- Montrer que h est une bijection de $]-\infty;1[$ sur un intervalle K que l'on précisera

b- Montrer que l'équation (E) : f(x)=0 admet exactement deux solutions $\propto_1$ et $\propto_2$ telles que : $\begin{cases} -0{,}37 \leq \propto_1 \leq -0{,}36 \\ 1{,}51 \leq \propto_2 \leq 1{,}52 \end{cases}$

c- Vérifier que si un nombre réel a est une solution de l'équation (E), alors on a : $\ln(2-a) = a^2 - 2a$

d- On désigne par C' la courbe représentative de h^{-1} dans le repère

Construire (C) et (C')

<u>Partie C :</u>

1-En remarquant que :$\forall x \in]-\infty;2[; \frac{\ln(2-x)}{2-x} = -\left(\frac{-1}{2-x}\right)\ln(2-x)$, trouver une primitive de la fonction :$x \to \frac{\ln(2-x)}{2-x}$ sur $]-\infty;2[$

2-En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par C, D et les droites d'équations $\mathrm{x} = 1$ et $\mathrm{x} = \frac{3}{2}$. On donne $\mathrm{f}(-0{,}37) \approx -0{,}006$; $\mathrm{f}(-0{,}36) \approx 0{,}004$;

$$\mathrm{f}(1{,}51) \approx 0{,}054 \text{ et } \mathrm{f}(1{,}52) \approx -0{,}009$$

+++++++++++++++++SUJET 26+++++++++++++++++

EXTRAIT DU BAC BLANC DU G S L'AVENIR (2016)

<u>EXERCICES</u>: 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $x \neq k\pi$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \cos(nx)\frac{\sin(nx)}{\sin x}$

2) Démontrer que dans tout système de numération de base x, les produits $(x-1)$ par deux nombres entiers positifs dont la somme est égale à $x+1$ s'écrivent avec les mêmes chiffres pris en inverse

Calculer $(x-1)(x+1)$ en base x

<u>PROBLEME</u> : Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{\mathrm{x}^2}{8} + \frac{\mathrm{y}^2}{4} = 1$

A-) Déterminer une équation de l'hyperbole$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ ayant pour sommets les foyers de (E) et pour foyers les sommets de (E) situés sur l'axe focal

B-) Un nombre s'écrit $N = \overline{1cc2d}$ dans le système décimal

1-) Déterminer c et d pour que le nombre N soit divisible par $(a+9)(9-b)$

2-) Déterminer le nombre de diviseurs de N et trouver les

3-) On considère l'équation (E) : $(a+9)x - (9-b)y = -10$

a- Montrer que $(d;c)$ est solution de l'équation (E)

b- Résoudre dans Z² l'équation (E)

c- En déduire la solution de (E') : $(a+9)x - (9-b)y = -100$

C-) Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs $-1;$ 1 et 2 pour les probabilités respectives $\frac{1}{a}$; $\frac{b}{5}$ et $\frac{1}{10}$. Calculer $E(X),$ $V(X)$ et $\delta(X)$

D-) On considère les points A, B et C de l'axe (Δ) d'abscisses respectives $-2;\ 1\ et -\frac{91}{4}$.

On pose : $f(M) = \frac{1}{100}(-MA^2 + MB^2 + 2MC^2)$

a- Déterminer l'abscisse du barycentre G des points pondérés $(A;\ -1); (B; 1) et\ (C; 2)$

b- Démontrer que $f(G) = V(X)$

c- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = 1{,}31$

E-) Déterminer l'image de l'ensemble des points M déterminés dans 4)c) par :

L'homothétie de centre G et de rapport 3

F-) Soit l'équation différentielle : $(a-1)f'' - 2bf' + (c+d)f = 0 \qquad (E')$

1-) Résoudre l'équation (E') et déterminer la solution avec les conditions suivantes : $f(0) = 2\ \ et\ \ f'(0) = 3$

2-) Soit f la solution de l'équation précédente et (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

a-) Calculer la limites de f en $+\infty\ et -\infty$ puis en déduire que (C) admet une asymptote en $-\infty$

b-) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

c-) Démontrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x + 2$

d-) Tracer (C) et (T)

3-) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$

4-) Soit h la fonction définie par : $\mathrm{h(x) = f(x) - x}$

a- Etudier les variations de h(x) et en déduire la position relative de (C) et la droite (D) d'équation $y = x$

b- Justifier que $1{,}96 < \alpha < 1{,}97$

5-) Soit H la portion limitée par la courbe (C) et la droite (D) avec les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = 2$

a- Calculer l'aire $A(\alpha)$ de H

b- Donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-2} près pour $\alpha = 1{,}95$. On donne $e^{1{,}95} \approx 7{,}029$

6-) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $\left]\frac{3}{2};\ +\infty\right[$

a- Calculer f(3)

b- Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $-e^6$ existe

c- Montrer que $(f^{-1})'(-e^6) = -\frac{1}{3e^6}$

d- Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1} dans le même repère

++