Nom : ……………………………………………………………………

Prénom : ………………………………………………………………

Année Scolaire : …………………………………………………

Etablissement : ……………………………………………………

Collection NAMO **7ème Edition : Septembre 2021**

Avant-propos

La collection NAMO est un ouvrage conforme au nouveau programme officiel au Niger. Cet ouvrage est traité avec une démarche très progressive d'apprentissage des mathématiques dans la continuité du cycle.

Nous espérons que cet ouvrage sera un outil qui servira à :

- ✓ L'enseignant de traiter des exercices d'applications du cours des différents chapitres.
- ✓ L'amélioration du niveau des élèves et des résultats de fin d'année des candidats au BEPC et d'autres concours.

Nous sommes disposés à recevoir toutes les bonnes volontés pour leurs remarques, critiques et suggestions qui permettront d'améliorer ce document.

Enfin nous remercions tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la rédaction de ce document.

Contact :

Cel : 96 69 52 81

Email : yazinass@gmail.com

SOMMAIRE

Algèbre

NOMBRES REELS

Résumé du cours

I) Rappels

1) Les ensembles

- **L'ensemble des entiers naturels** : c'est l'ensemble des nombres qu'on peut écrire sans virgule, plus grand ou égal à zéro (0). Les nombres entiers naturels servent à compter. Il est symbolisé par $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}$. Il existe une infinité d'entiers naturels.

- **L'ensemble des entiers relatifs** : c'est l'ensemble des entiers naturels précédés d'un signe plus (+) ou d'un signe moins ($-$). Il est noté $\mathbb{Z}$.

Exemple : $(+2)$; (-5) ; 0 ; (-7) ; $(+9)$ sont des entiers relatifs.

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté $\mathbb{Z}^-$ et l'ensemble des entiers relatifs positifs est noté $\mathbb{Z}^+$. On note : $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$. $\mathbb{Z} = \{\ldots ;\ -2 ;\ -1 ;\ 0 ;\ 1 ;\ 2 ;\ \ldots\}$.

- **L'ensemble des décimaux relatifs** : c'est l'ensemble des décimaux précédés d'un signe plus (+) ou d'un signe moins ($-$). Il est noté $\mathbb{D}$.

Exemple : $(+1{,}2)$; $(-2{,}5)$; (-7) ; $(+9)$; 0 sont des décimaux relatifs.

Un décimal relatif peut être écrit sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10.

Exemple : $2{,}75 = \frac{275}{100}$

Un décimal peut s'écrit sous la forme $a.10^n$ ($a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$).

L'ensemble des décimaux relatifs négatifs est noté $\mathbb{D}^-$.

L'ensemble des décimaux relatifs positifs est noté $\mathbb{D}^+$. On note : $\mathbb{D} = \mathbb{D}^- \cup \mathbb{D}^+$.

- **L'ensemble des nombres rationnels** : c'est l'ensemble des nombres écrits sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs et $b \neq 0$. Il est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple : 0 ; $\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 2 ; 0,5 sont des rationnels.

L'ensemble des rationnels négatifs est noté $\mathbb{Q}^-$.

L'ensemble des rationnels positifs est noté $\mathbb{Q}^+$. On note : $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$.

Remarque : $a = \frac{a}{1}$

2) <u>Les puissances</u>

a) <u>Définition</u>

On appelle puissance de a d'exposant n entier naturel, le produit de n facteurs égaux à a. On note $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$

b) <u>Propriétés</u>

$\forall\ a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}^*, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ on a :

$a^n \times a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{n\times m}$; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$; $a^n \times a^{-n} = 1$;

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $(ab)^n = a^n \times b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

<u>Par convention</u> : $a^0 = 1\ et\ a^1 = a$

3) <u>Les identités remarquables</u>

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

II) <u>Introduction de l'ensemble ℝ</u>

L'ensemble ℝ est l'ensemble des nombres réels c'est-à-dire tous les nombres qui peuvent exister réellement, il contient en plus des nombres rationnels, les nombres non rationnels ou irrationnels comme π ou racine carrée. Les nombres irrationnels ont une partie infinie et non périodique.

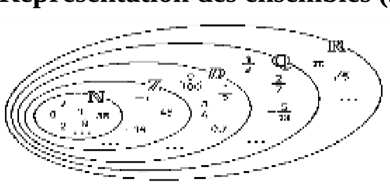
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls c'est à dire tous sauf 0 (zéro).

$\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs et $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.

On note : $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$.

<u>N.B</u> : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Représentation des ensembles (sous forme de digramme)



Exercice d'application

Recopier et compléter le tableau ci – dessous en plaçant les nombres ci – après : -2 ; π ; 3,0 ; $-\frac{15}{4}$; 6×10^{-2} ; 5,1 ; $\frac{32}{8}$; 7 ; $\frac{2}{3}$.

Entiers naturels	Entiers relatifs	Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres réels

Correction

Entiers naturels	Entiers relatifs	Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres réels
3,0 ; $\frac{32}{8}$; 7	3,0 ; $\frac{32}{8}$; 7 ; -2	3,0 ; $\frac{32}{8}$; 7 ; -2 ; $-\frac{15}{4}$; 6×10^{-2} ; 5,1	3,0 ; $\frac{32}{8}$; 7 ; -2 ; $-\frac{15}{4}$; 6×10^{-2} ; 5,1 ; $\frac{2}{3}$	3,0 ; $\frac{32}{8}$; 7 ; -2 ; $-\frac{15}{4}$; 6×10^{-2} ; 5,1 ; $\frac{2}{3}$; π

II) Propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$

1) Propriétés de l'addition

Soit a, b et c trois nombres réels.

- $a + b = b + a$: on dit que l'addition est commutative.

Exemple : 5 + 2 = 2 + 5 = 7.

Remarque : Une opération est commutative si on peut permuter deux nombres sans changer le résultat de l'opération.

- $(a + b) + c = a + (b + c)$: on dit que l'addition est associative.

Exemple : 3,5 + (7 + 2,6) = (3,5 + 7) + 2,6 = 13,1.

Remarque : Une opération est associative si on peut choisir les nombres à regrouper sans changer le résultat de l'opération.

- $a + 0 = 0 + a = a$: on dit que 0 est l'élément neutre de l'addition.

Exemple : 9 + 0 = 0 + 9 = 9.

- $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$: on dit que a et b sont opposés (ou symétriques).

Exemple : $-2 + 2 = 0$ alors -2 et 2 sont opposés.

2) Propriétés de la multiplication

Soit a, b et c trois nombres réels.

- $a \times b = b \times a$: on dit que la multiplication commutative.

Exemple : 9 × 7,5 = 7,5 × 9 = 67,5.

- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$: on dit que la multiplication est associative.

Exemple : 2 × (3 × 1,4) = (2 × 3) × 1,4 = 8,4.

- $a \times 1 = 1 \times a = a$: on dit que 1 est l'élément neutre de la multiplication.

Exemple : 14,8 × 1 = 1 × 14,8 = 14,8.

- $a \times b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$ ou $b = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$: on dit que a et b sont inverses (ou symétriques).

Exemple : $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ alors 4 et $\frac{1}{4}$ sont inverses.

3) Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Une opération est distributive, dans une multiplication, quand on peut décomposer en une somme ou en une différence, un terme de l'opération. Si a, b et c sont trois nombres réels alors $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Exemple : 4 × (2,5 + 5) = (4 × 2,5) + (4 × 5) = 10 + 20 = 30.

4) Les quotients

Soit a, b, c et d des nombres réels.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $(b \neq 0)$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ (b ≠ 0 et d ≠ 0) ;

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (b ≠ 0 et d ≠ 0) ; $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ (a ≠ 0 et b ≠ 0) ;

$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ (b ≠ 0 et c ≠ 0) ; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (b ≠ 0 ; c ≠ 0 et d ≠ 0)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (b ≠ 0 et d ≠ 0)

Exercice d'application

Ecrire le plus simplement les expressions suivantes :

$A = \frac{3}{10} - \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{2}\right)$; $B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$; $C = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{2}{7}$; $D = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$; $E = \frac{5}{7} \times \left(\frac{9}{5} - \frac{3}{4}\right)$.

Correction

$A=\frac{3}{10}-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{2}\right)=\frac{3}{10}-\left(\frac{4\times2}{5\times2}+\frac{7\times5}{2\times5}\right)=\frac{3}{10}-\left(\frac{8}{10}+\frac{35}{10}\right)=\frac{3}{10}-\frac{43}{10}=-\frac{40:10}{10:10}=-4$

$B=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{2\times2}{3\times2}}{\frac{3\times6}{4\times6}-\frac{1\times4}{6\times4}}=\frac{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}}{\frac{18}{24}-\frac{4}{24}}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{24}}=\frac{7}{6}\times\frac{24}{14}=\frac{168:2}{84:2}=\frac{84:2}{42:2}=\frac{42:3}{21:3}=\frac{14:7}{7:7}=2$

$C=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{3}-\frac{10}{21}=\frac{4\times7}{3\times7}-\frac{10}{21}=\frac{28}{21}-\frac{10}{21}=\frac{18:3}{21:3}=\frac{6}{7}$

$D=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{2\times4}{3\times4}-\frac{1\times3}{4\times3}\right)\div\left(\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}\right)=\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\div\left(\frac{8}{12}+\frac{3}{12}\right)$

$D==\frac{5}{12}\div\frac{11}{12}=\frac{5}{12}\times\frac{12}{11}=\frac{60:2}{132:2}=\frac{30:2}{66:2}=\frac{15:3}{33:3}=\frac{5}{11}$

$E=\frac{5}{7}\times\left(\frac{9}{5}-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{7}\times\left(\frac{9\times4}{5\times4}-\frac{3\times5}{4\times5}\right)=\frac{5}{7}\times\left(\frac{36}{20}-\frac{15}{20}\right)=\frac{5}{7}\times\frac{21}{20}=\frac{105:5}{140:5}=\frac{21:7}{28:7}=\frac{3}{4}$

5) Proportionnalité

Soit x, y, z trois réels et a, b, c trois réels non nuls.

Les réels x, y et z sont respectivement proportionnels aux réels a, b et c si

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ avec k le coefficient de proportionnalité.

$\frac{x}{a}=k\Rightarrow x=ak$; $\frac{y}{b}=k\Rightarrow y=bk$; $\frac{z}{c}=k\Rightarrow z=ak.$

Exercice d'application 1

Déterminer les réels x, y et z respectivement proportionnels aux nombres réels 7, 5 et 13, sachant que $-2x+y+c=20$.

Correction

Méthode 1

$\frac{x}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z}{13}=k$; $\frac{x}{7}=k\Rightarrow x=7k$; $\frac{y}{5}=k\Rightarrow y=5k$; $\frac{z}{13}=k\Rightarrow z=13k.$

$-2x+y+c=20\Rightarrow-2(7k)+5k+13k=20\Rightarrow-14k+5k+13k=20$

$\Rightarrow 4k=20\Rightarrow k=\frac{20}{4}=5.$

Alors $x=7\times5=35$; $y=5\times5=25$; $z=13\times5=65.$

Méthode 2

$\frac{-2x+y+c}{-2\times7+5+13}=\frac{20}{4}=5=k$

$\frac{x}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z}{13}=5$ Alors $\frac{x}{7}=5\Rightarrow x=7\times5=35$; $\frac{y}{5}=5\Rightarrow y=5\times5=25$;

$\frac{z}{13}=5\Rightarrow z=13\times5=65$

Exercice d'application 2

Deux familles A et B louent un bus pour voyager. Ils quittent au même endroit et arrivent au même lieu. Le chauffeur demande à ces deux familles de payer 168000 F. La famille A compte 15 personnes et la famille B compte 25 personnes. Combien chaque famille doit – elle payer ?

Correction

Soit x et y les sommes payées respectivement par les familles A et B.

$\frac{x+y}{15+25} = \frac{168000}{40} = 4200$

$\frac{x}{15} = \frac{y}{25} = 4200$ Alors $\frac{x}{15} = 4200 \Rightarrow x = 4200 \times 15 = 63000$;

$\frac{y}{25} = 4200 \Rightarrow y = 4200 \times 25 = 105000$

Les familles A et B payeront respectivement 63000 F et 105000F.

III) Les radicaux

1) Quelques carrés parfaits

$1^2 = 1$; $2^2 = 2$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$;
$6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$;
$11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$;
$16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$; $20^2 = 400$.

2) Définition

Soit x un réel positif. On appelle racine carrée du réel x notée $\sqrt{x}$, le nombre réel positif dont le carré est égal à x.

Le symbole « $\sqrt{\ }$ » est le radical et le réel x est le radicande.

Remarque : Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

3) Propriétés

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ (a \in \mathbb{R}^+)$

Exemple : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$; $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$.

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a > 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Exemple : $\sqrt{(7)^2} = 7$; $\sqrt{(13)^2} = 13$; $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$;

$\sqrt{(-17)^2} = -(-17) = 17.$

❖ $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ ($a \geq 0$ et n entier naturel)

Exemple : $\sqrt{2^6} = (\sqrt{2})^6 = 8$; $\sqrt{3^7} = (\sqrt{3})^7 = 27\sqrt{3}$

❖ $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ ($a \geq 0$ et n entier relatif)

Exemple : $\sqrt{3^{14}} = \sqrt{3^{2\times 7}} = 3^7$; $\sqrt{5^{-20}} = \sqrt{5^{2\times -10}} = 5^{-10}$.

❖ $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$ ($a \geq 0$ et n entier relatif)

Exemple : $\sqrt{5^7} = \sqrt{5^{2\times 3+1}} = 5^3\sqrt{5}$; $\sqrt{7^{-19}} = \sqrt{7^{2\times(-10)+1}} = 7^{-10}\sqrt{7}$.

❖ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R}_+^*$)

Exemple :

$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$; $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ donc $5 \neq \sqrt{13}$ alors $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4+9}$

$\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$; $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ donc $1 \neq 3$ alors

$\sqrt{25} - \sqrt{16} \neq \sqrt{25-16}$

❖ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ($a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$)

Exemple : $\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$; $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$ donc 10 = 10 alors

$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25}$

❖ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}_+^*$)

Exemple : $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; $\sqrt{\frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{6^2}{7^2}} = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{6}{7}$ donc $\frac{6}{7} = \frac{6}{7}$ alors $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \sqrt{\frac{36}{49}}$

❖ $(x+y)\sqrt{a} = x\sqrt{a} + y\sqrt{a}$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)

Exemple :

A = $3(2\sqrt{2} - 5) - 2(1 - \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 15 - 2 + 2\sqrt{2} = -17 + 8\sqrt{2}$

B = $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 4) = 3 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 8 = -5 - 2\sqrt{3}$

4) Calcul sur les radicaux

a) Les identités remarquables

Exemple : Calculer A = $(\sqrt{2} + 5)^2$; B = $(x\sqrt{3} - 7)^2$; C = $(4 - 3\sqrt{5})(4 + 3\sqrt{5})$.

A = $(\sqrt{2} + 5)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 2 + 10\sqrt{2} + 25 = 27 + 10\sqrt{2}$

B = $(x\sqrt{3} - 7)^2 = (x\sqrt{3})^2 - 2 \times x\sqrt{3} \times 7 + (7)^2 = 3x^2 - 14x\sqrt{3} + 49$

C = $\left(4-3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right) = (4)^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 16 - 45 = -29$

b) <u>Somme algébrique</u>

Pour additionner ou soustraire des radicaux, on simplifie si possible les radicaux puis on additionne les radicaux semblables.

<u>Exercice d'application</u>

Simplifier les expressions :

A = $2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 3\sqrt{80}$;   B = $7\sqrt{3} + \sqrt{81} - \sqrt{27}$; C = $4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{2}$

<u>Correction</u>

A = $2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 3\sqrt{80} = 2\sqrt{3^2 \times 5} + \sqrt{2^2 \times 5} - 3\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5}$

A = $2 \times 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3 \times 2 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = (6+2-12)\sqrt{5}$

$$A = -4\sqrt{5}$$

B = $7\sqrt{3} + \sqrt{81} - \sqrt{27} = 7\sqrt{3} + \sqrt{3^2 \times 3^2} - \sqrt{3^2 \times 3} = 7\sqrt{3} + 3 \times 3 - 3\sqrt{3}$

B = $9 + (7-3)\sqrt{3} = 9 + 4\sqrt{3}$

C = $4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5^2 \times 2} - 6\sqrt{2^2 \times 2} + 2\sqrt{2}$

C = $4 \times 5\sqrt{2} - 6 \times 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 20\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

C = $(20 - 12 + 2)\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

c) <u>Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient</u>

Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient c'est l'écrire sans radical au dénominateur c'est-à-dire le rendre entier.

❖ Pour rendre rationnel un quotient de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ou $\frac{a}{b\sqrt{c}}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le dénominateur.

$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

<u>Exemple</u> : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{4-6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4-6\sqrt{2}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-12}{2} = 2\sqrt{2} - 6$

$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b \times c}$

<u>Exemple</u> : $\frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{5 \times 2} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{5}) \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2 \times 3} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$

❖ Pour rendre rationnel un quotient de la forme $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ ou $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur. $a+\sqrt{b}$ et $a-\sqrt{b}$ sont des expressions conjugués.

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

<u>Exemple</u> :

$$\frac{\sqrt{2}+3}{5+4\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+3)(5-4\sqrt{2})}{(5+4\sqrt{2})(5-4\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{2}-8+15-12\sqrt{2}}{(5)^2-(4\sqrt{2})^2}=\frac{7-7\sqrt{2}}{25-32}=\frac{7-7\sqrt{2}}{-7}=\frac{-1+\sqrt{2}}{1}=-1+\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

<u>Exemple</u> : $\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{6+2\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{6+2\sqrt{2}}{9-2}=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

d) <u>Comparaison des réels comportant des radicaux</u>

Pour comparer deux réels comportant des radicaux on regarde d'abord leurs signes :

❖ Si ces réels sont de signes contraires alors le plus grand est le réel positif.

❖ Si ces réels sont de même signe, on élève au carré chacun des réels puis on compare ces carrés :

✓ Lorsque a et b sont deux réels positifs alors ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés donc si $a^2>b^2$ alors $a>b$ et si $a^2<b^2$ alors $a<b$.

✓ Lorsque a et b sont deux réels négatifs alors ils sont rangés dans l'ordre contraire que leurs carrés donc si $a^2>b^2$ alors $a<b$ et si $a^2<b^2$ alors $a>b$.

<u>Remarque</u> : Si pour tout réels positifs a et b, a $>b$ alors $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

<u>Exercice d'application</u>

Comparer : 3 et $-5\sqrt{2}$; $-4\sqrt{3}$ et $2\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$ et 7 ; -5 et $-2\sqrt{3}$; $-4\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{5}$.

<u>Correction</u>

$3>-5\sqrt{2}$; $-4\sqrt{3}<2\sqrt{5}$

$(5\sqrt{2})^2=25\times 2=50$; $(2\sqrt{5})^2=4\times 5=20$; 50 > 20 alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$.

$(3\sqrt{2})^2=9\times 2=18$; $(7)^2=49$; 18 < 49 alors $3\sqrt{2}<7$.

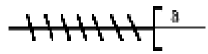
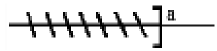
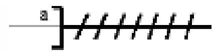
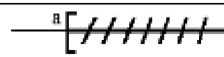
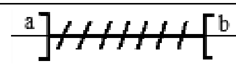
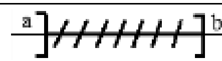
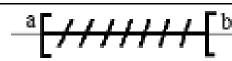
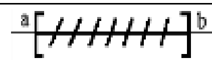
$(-5)^2 = 25$; $(-2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$; 25 > 12 alors $-5 < -2\sqrt{3}$.

$(-4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$; $(-2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$; 48 > 20 alors $-4\sqrt{3} < -2\sqrt{5}$.

IV) Intervalles dans ℝ - Ordre et opérations – Encadrement

1) Intervalle dans ℝ

Soient a et b des réels tel que $a < b$. le tableau suivant résume les intervalles dans ℝ :

Intervalle	Lecture	Encadrement (ensemble des réels)	Représentation
$]-\infty\,;\,a[$	Intervalle des nombres plus petits à a	$x < a$	
$]-\infty\,;\,a]$	Intervalle des nombres plus petits ou égaux à a	$x \leq a$	
$]a\,;\,+\infty[$	Intervalle des nombres plus grands à a	$x > a$	
$[a\,;\,+\infty[$	Intervalle des nombres plus grands ou égaux à a	$x \geq a$	
$]a\,;b[$	Intervalle ouvert en a et ouvert en b	$a < x < b$	
$]a\,;b]$	Intervalle ouvert en a et fermé en b	$a < x \leq b$	
$[a\,;b[$	Intervalle fermé en a et ouvert en b	$a \leq x < b$	
$[a\,;b]$	Intervalle fermé en a et en b	$a \leq x \leq b$	

2) Intersection et réunion des intervalles

a) Intersection

Soit A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B. On le note A ∩ B. Pour déterminer l'intersection de deux intervalles, on les représente sur une même droite en hachurant chaque partie. L'intersection de ces deux intervalles correspond à la partie hachurée deux fois.

b) <u>Réunion</u>

Soit A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (l'un au moins des ensembles A et B). On le note A∪B.

<u>Exercice d'application</u>

Déterminer E ∩ F et E ∪ F dans chacun des cas suivants :

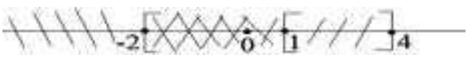
1) E = $[-2\ ;4]$ et F = $]-\infty\ ;1[$.

2) E = $[-3\ ;2[$ et F = $]-1\ ;6[$.

3) E = $[5\ ;+\infty[$ et F = $]-\infty\ ;1[$.

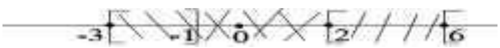
<u>Correction</u>

1) E = $[-2\ ;1]$ et F = $]-\infty\ ;2[$.



E ∩ F = $[-2\ ;1[$ et E ∪ F = $]-\infty\ ;\ 4]$

2) E = $[-3\ ;2[$ et F = $]-1\ ;6[$.



E ∩ F = $]-1\ ;2[$ et E ∪ F = $[-3\ ;6[$

3) E = $[5\ ;+\infty[$ et F = $]-\infty\ ;1[$.

E ∩ F = ∅ et E ∪ F = $]-\infty\ ;1[\ \cup\ [5\ ;+\infty[$.

3) <u>Ordre et opérations</u>

a) <u>Ordre et addition</u>

Soient a, b et c des nombres réels. Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

b) <u>Ordre et multiplication</u>

Soient a, b et c des nombres réels.

- Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$.
- Si $a < b$ et $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$

4) <u>Encadrement et opérations</u>

a) <u>Encadrement d'une somme</u>

Soit les encadrements suivants de x et de y : $a < x < b$ et $c < y < d$, alors on a :

$a + c < x + y < b + d$.

<u>Exemple</u> : Donnons un encadrement de $x + y$ sachant que $1 < x < 2$ et $3{,}7 < y < 3{,}8$.

$1 < x < 2$ et $3{,}7 < y < 3{,}8$ alors $1 + 3{,}7 < x + y < 2 + 3{,}8 \Rightarrow 4{,}7 < x + y < 5{,}8$

b) <u>Encadrement d'une différence</u>

<u>Règle</u> : Pour encadrer $x - y$, on encadre d'abord $-y$ et ensuite $x + (-y)$.

<u>Exemple</u> : Donnons un encadrement de $x - y$ sachant que $1 < x < 2$ et $3{,}7 < y < 3{,}8$.

Encadrons d'abord $-y$

$3{,}7 < y < 3{,}8 \Rightarrow -3{,}7 > -y > -3{,}8 \Rightarrow -3{,}8 < -y < -3{,}7$

Encadrons ensuite $x - y$

$1 < x < 2$ et $-3{,}8 < -y < -3{,}7$ alors $1 - 3{,}8 < x - y < 2 - 3{,}7$

$\Rightarrow -2{,}8 < x - y < -1{,}7$

c) <u>Encadrement d'un produit</u>

Soit les encadrements suivants de x et de y : $a < x < b$ et $c < y < d$.

❖ **Cas où toutes les bornes sont positives**.

Pour calculer le produit $x \times y$, on fait le produit membre à membre de ces deux encadrements pour obtenir l'encadrement de xy alors on a : $a \times c < x \times y < b \times d$.

<u>Exemple</u> : Donnons un encadrement de $x \times y$ sachant que $1 < x < 2$ et $3{,}7 < y < 3{,}8$.

$1 < x < 2$ et $3{,}7 < y < 3{,}8$ alors $1 \times 3{,}7 < x \times y < 2 \times 3{,}8 \Rightarrow 3{,}7 < x \times y < 7{,}6$.

❖ **Cas où toutes les bornes sont négatives.**

Pour calculer le produit $x \times y$, on encadre $-x$ et $-y$ puis on se ramène au cas précédent.

<u>Exemple</u> : Donnons un encadrement de $x \times y$ sachant que $-2 < x < -1$ et $-3{,}8 < y < -3{,}7$.

Encadrons d'abord $-x$ et $-y$

$-2 < x < -1 \Rightarrow 2 > -x > 1 \Rightarrow 1 < -x < 2$

$-3{,}8 < y < -3{,}7 \Rightarrow 3{,}8 > -y > 3{,}7 \Rightarrow 3{,}7 < y < 3{,}8$

Encadrons suite xy

$1 < -x < 2$ et $3{,}7 < -y < 3{,}8$ alors $1 \times 3{,}7 < x \times y < 2 \times 3{,}8 \Rightarrow 3{,}7 < x \times y < 7{,}6$.

d) <u>Encadrement d'un quotient</u>

Pour encadrer $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$, on encadre d'abord $\frac{1}{y}$ puis $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$.

<u>Exemple</u> : Donnons un encadrement de $x \times y$ sachant que $1 < x < 2$ et $4 < y < 5$.

Encadrons d'abord $\frac{1}{y}$

$4 < y < 5 \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

Encadrons ensuite $\frac{x}{y}$

$1 < x < 2$; $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ alors $1 \times \frac{1}{5} < x \times \frac{1}{y} < \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{y} < \frac{1}{2}$

<u>Remarque</u> : Si $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

V) Usage de tables numériques et de la calculatrice scientifique

1) Usage des tables numériques

On appelle table numérique une liste d'un ensemble de données numériques présentées sous forme de table des carrées, de table des racines carrées,…

a) Table des carrés

C'est une table qui permet d'avoir soit :

❖ les racines carrées exactes des nombres qui y figurent.

	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	1	4	9	16	25	36	49	
1	100	121	144	169	196	225	256	289	
2	400	441	484	529	576	625	676	729	
…									

<u>Exemple</u> : $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{289} = 17$

❖ un encadrement de la racine d'un nombre qui ne figure pas sur la table. Pour cela on détermine d'abord un encadrement du nombre, dans la table, par les carrées de deux nombres consécutifs.

<u>Exemple</u> : Encadrement de $\sqrt{117}$ par deux entiers naturels consécutifs.

On constate que $100 < 117 < 121 \Rightarrow 10^2 < 117 < 11^2 \Rightarrow \sqrt{10^2} < \sqrt{117} < \sqrt{11^2}$ alors $10 < \sqrt{117} < 11$.

b) Table des racines carrées

C'est une table qui permet d'avoir des valeurs approchées des nombres par défaut ou par excès.

n	$\sqrt{n}$
1	1
2	1,4142
3	1,7321
4	2
5	2,2361
….	….

Exemple : $\sqrt{3}$ = 1,7321

2) Usage de la calculatrice scientifique

Pour certaines calculatrices scientifiques pour calculer la racine carrée d'un nombre il suffit d'appuyer sur la touche $\sqrt{}$ puis sur le nombre tandis que pour d'autres on appuie d'abord sur le nombre puis sur la touche $\sqrt{}$.

Série d'exercices

Exercice 1

On donne les nombres : $-\frac{5}{2}$; -1 ; -4×10^{-4}; 0,5 ; $\frac{8}{2}$; 9,0 ; 3,14 ; $\frac{22}{7}$; π et 8. Placer ces nombres dans le tableau suivant :

Entiers naturels	Entiers relatifs	Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres réels

Exercice 2

Déterminer la valeur de a dans chacun des cas suivants :

1) $\frac{a}{2} = \frac{5}{4}$; 2) $\frac{3}{a} = \frac{36}{5}$; 3) $\frac{7}{12} = \frac{a}{6}$; 4) $\frac{45}{16} = \frac{75}{a}$

Exercice 3

Ecrire le plus simplement possible :

A = $1 - \frac{1}{2}$; B = $2 + \frac{3}{4}$; C = $\frac{5}{2} + \frac{4}{3}$; D = $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$;

E = $\frac{5}{6} - \frac{3}{2}$; F= $\frac{(3^2)^3}{3^2}$; G = $\frac{1-\frac{1}{2}}{2+\frac{3}{4}}$; H = $\frac{3}{5} - \frac{7}{5} \times \frac{25}{14}$

Exercice 4

Choisir la bonne réponse :

1) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$ est égale à : a) $-\frac{7}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{7}{6}$; d) 4.

2) $\frac{2}{7}+3$ est égale à : a) $\frac{25}{3}$; b) $\frac{5}{7}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{23}{7}$.

3) $\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\times\frac{9}{16}$ est égale à : a) $-\frac{6}{5}$; b) $-\frac{9}{8}$; c) $\frac{9}{16}$; d) $\frac{5}{6}$.

4) Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à : a) 1 ; b) -2 ; c) 2 ; d) 0.

5) Deux nombres sont inverses si leur produit est égale à : a) 0 ; b) -1 ; c) 1 ; d) 2.

Exercice 5

Calculer et écrire le résultat sous forme de fraction irréductible les réels suivants :

$A=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)\div\left(\frac{3}{10}-\frac{5}{21}\right)$; $B=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\right)$; $C=\frac{7}{5}\times\frac{2}{7}-\left(\frac{3}{2}-2\right)^2$

Exercice 6

1) Sachant que $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{-1}{4}$; $c=\frac{2}{5}$ et $d=\frac{-1}{2}$, calculer $A = ab + cd$ et $B=\frac{a+d}{b+c}$.

2) Sachant que $x=\frac{1}{2}$; $y=2$; $z=\frac{-1}{3}$; calculer $C=\frac{x+y}{x+z}$ et $D=\frac{y-x}{3x-z}$

Exercice 7

x, a et b sont trois réels non nuls tels que : $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Trouver x pour que a = 2,5 et $b=\frac{5}{8}$

Exercice 8

Donner une écriture simple des nombres suivants:

$A=\dfrac{\frac{1}{3}-1+\frac{3}{2}}{\frac{-3}{4}+2-\frac{1}{2}}$; $B=\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}}$; $C=\dfrac{2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times3^4}{\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3}$; $D=\dfrac{\left(\frac{2}{3}-3\right)+\frac{1}{9}}{\frac{-13}{3}+1}$;

$E=\frac{1}{10}\left[\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right]$; $\frac{1}{F}=\dfrac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}}$; $G=\left(\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)+2\left(\dfrac{\frac{-1}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right)-\dfrac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{7}}$;

$H=\left(4+\frac{3}{4}\right)\left[5-\frac{7}{5}\times(-10)\right]$; $I=-15\times\frac{7}{25}-\frac{6}{7}\times\frac{14}{9}\times\frac{9}{15}$; $K=1+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}:\frac{3}{4}$

Exercice 9

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $2^n\times3^m$ où n et m sont des entiers :

$A=\frac{27^4\times8^3}{9^5\times4^4}$; $B=\frac{16^{-3}\times(18)^2}{36^5}$; $C=\frac{(3^2)^{-4}\times(2^{-3})^{-5}}{32^2\times(3^{-5})^2}$

Exercice 10

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $2^n\times5^P$ où n et p sont des entiers :

$A = \frac{2^2 \times 10^{-2} \times 5}{0,4 \times 0,2 \times 0,125}$; $B = \frac{0,016 \times 0,25}{8^5 \times 625^2}$; $C = \frac{8 \times 4 \times 10^{-4} \times 25 \times 10^6}{64 \times 5 \times 10^3}$

Exercice 11

Ecrire les expressions suivantes le plus simplement possible :

$A = \frac{2 \times 35 \times 10^{-7} \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}}$; $B = \frac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$; $C = \frac{0,24 \times 500}{-3 \times 10^3 \times 0,045}$;

$D = \frac{(0,2)^3 \times 9}{2 \times 3}$; $E = \frac{(0,2)^5 \times 18}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$; $F = \frac{3^3 \times 10^{-1} \times 8 \times 10^3}{9 \times 10^2 \times 2^5}$

Exercice 12

On donne $A = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{5}{26} - \frac{25}{13}\right)$ et $B = \frac{0,24 \times 500}{-3 \times 10^3 \times 0,045}$

1) Ecrire A et B sous forme de fractions irréductibles.

2) Montrer que A et B sont inverses.

Exercice 13

Soient les réels $A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ et $B = \frac{1,5 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-2}}$

1) Ecrire A et B sous forme de fractions irréductibles.

2) Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 14

1) Simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{3}{5}$; $B = -\frac{3}{2} + \frac{1 - \frac{1}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}$

2) Calculer A + B. Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 15

On donne $x = 1 + \frac{3}{2}$; $y = n - 4$

1) Calculer n pour que x et y soient opposés.

2) Calculer n pour que x et y soient inverses.

Exercice 16

On donne $B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ et $C = \frac{4 \times 10^{-2} \times (-5) \times 10^7}{3 \times 10^5}$

1) Calculer B et C puis écrire le résultat sous forme de fractions irréductibles.

2) Calculer B + C. Que peut-on dire de B et C ?

Exercice 17

On suppose que les nombres réels x, y et z sont respectivement proportionnels aux nombres 18 ; -5 et 3.

1) Démontrer que $x = -3y + z$

2) Calculer x ; y et z sachant que $y + z = 4$

Exercice 18

Déterminer les réels a, b et c respectivement proportionnels aux réels 11, 4 et -5 sachant que le coefficient de proportionnalité est 2.

Exercice 19

Déterminer les réels x , y *et* z respectivement proportionnels aux nombres réels 2, 4 et 6, sachant que $4x - 6y + 2z = 32$.

Exercice 20

Trouver 3 nombres réels a, b et c respectivement proportionnels aux réels 7, -5 et 11 sachant que $2a + 7b - c = 224$.

Exercice 21

Trouver les réels x et y respectivement proportionnels aux réels 5 et 7 sachant que $x + y = 36$.

Exercice 22

Pour encourager ses trois enfants Moussa partage la somme de 24000F proportionnellement à leurs moyennes obtenues en classe (8 ; 10 ; 12). Trouver la somme reçue par chaque enfant.

Exercice 23

Trouver 3 nombres réels a, b et c respectivement proportionnels aux réels 2, 3 et 7 sachant que leur somme vaut 96.

Exercice 24

Traduit sous forme d'intervalles les inégalités suivantes :

1) $5,1 \leq x$; 2) $-5 \leq x \leq 9$; 3) $x \leq -\frac{1}{2}$

4) $-\frac{7}{2} \leq x < \frac{1}{2}$; 5) $x < -3$; 6) $x \geq 7$

7) $x \leq -\frac{3}{4}$; 8) $x > 0$; 9) $-4 \leq x < 12$

Exercice 25

Compléter le tableau suivant :

Intervalle	Ensemble des réels	Représentation
] - ∞ ; 2]		
	$x > -\frac{1}{2}$	
		
[-1 ; 2[		
	$-5 \leq x \leq 9$	

Exercice 26

Soient A, B, C, D, E et F les ensembles définis par :

A = $]-2\ ;\ 3]$; B = $[3\ ;\ +\infty[$; C = $]-\infty\ ;\ 1[$; D = $[-1\ ;\ \frac{5}{2}]$;

E = $\{x \in \text{IR} \ /\ -3 < x < 2\}$

F = $\{x \in \text{IR} \ /\ x > 1\}$.

1) Déterminer A ∪ B ; A ∪ C ; A ∪ D ; B ∪ C ; B ∪ D ; C ∪ D et E ∪ F.

2) Déterminer A ⋂ B ; A ⋂ C ; A ⋂ D ; B ⋂ C ; B ⋂ D ; C ⋂ D et E ⋂ F.

Exercice 27

Encadrer $x + y$; $x - y$; $2x + 3y$; $\frac{x}{y}$; $y - 2x$ sachant que :

$1{,}2 < x < 1{,}3$ et $2{,}3 < y < 2{,}4$

Exercice 28

Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :

1) $\sqrt{60} = 30$; 2) $7\sqrt{2} = \sqrt{90}$; 3) $\sqrt{49 + 16} = 7 + 4 = 11$;

4) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{100}$; 6) $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$.

Exercice 29

Ecrire les nombres réels suivants sous la forme de $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels et b le plus petit possible : $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{288}$; $\sqrt{99}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{175}$; $\sqrt{360}$; $\sqrt{192}$; $\sqrt{504}$; $\sqrt{98}$.

Exercice 30

Ecrire le plus simplement :

a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}$; c) $-5\sqrt{6}\times\sqrt{8}$; d) $\sqrt{216}\times\frac{3}{4}\sqrt{3}$;

e) $\left(2\sqrt{5}\right)^2$; f) $\sqrt{8}-\sqrt{2}$; g) $2\sqrt{27}+\sqrt{108}$;

h) $\sqrt{125}-7\sqrt{45}$; i) $-\frac{1}{2}\sqrt{32}+\sqrt{72}$; j) $\sqrt{24}-\sqrt{54}$

Exercice 31

Calculer : $\sqrt{10^{-6}}$; $\sqrt{1{,}96}$; $-2\sqrt{0{,}0036}$; $\sqrt{0{,}0001}$; $\sqrt{0{,}000064}$; $\sqrt{0{,}0169}$;
$\sqrt{0{,}0018}+\sqrt{0{,}18}+\sqrt{18}$; $\sqrt{0{,}64}+\sqrt{0{,}08}-\sqrt{0{,}0016}$

Exercice 32

Calculer (simplifier) :

A = $\sqrt{20\times 5}$; B = $\sqrt{30}\times\sqrt{10}$; C = $\sqrt{3}\times\sqrt{54}$; $D=\sqrt{27\times 125}$;

$E=\sqrt{3^2\times 5^3\times 7^{10}}$; F = $\sqrt{2^7\times 11^9\times 5^{14}}$; G = $\sqrt{a^4\times b^{11}\times c^6}$;

H = $3\sqrt{125}\times 2\sqrt{21}\times\sqrt{35}$; I = $\sqrt{32}\times\sqrt{128}\times\sqrt{2}$; J = $\sqrt{\frac{36}{49}}$; K = $\sqrt{\frac{16}{144}}$;

L = $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{81}}$; M = $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$; N = $\sqrt{\frac{3}{8}}\times\sqrt{\frac{27}{2}}$; O = $\sqrt{\frac{125}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{32}}$

Exercice 33

Ecrire le plus simplement :

A = $\sqrt{72}-7\sqrt{2}+4\sqrt{8}$; B = $2\sqrt{27}-\sqrt{48}$; C = $5\sqrt{125}-4\sqrt{45}+\sqrt{20}$;

D = $\sqrt{12}-7\sqrt{3}-\sqrt{75}$; E = $\sqrt{48}-3\sqrt{12}+7\sqrt{3}$; F = $50\sqrt{45}-3\sqrt{5}+6\sqrt{125}$;

G = $3\sqrt{28}+7\sqrt{63}-2\sqrt{108}+\sqrt{75}$; H = $2\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{600}$;

I = $-2\sqrt{45}+6\sqrt{80}-3\sqrt{20}$; J = $2\sqrt{63}-\sqrt{112}+3\sqrt{28}$; K = $2\sqrt{32}-\sqrt{5}\times\sqrt{10}$;

L = $\sqrt{175}-4\sqrt{112}-3\sqrt{7}$; M $=2\sqrt{32}-7\sqrt{50}-\sqrt{200}$; N = $(2\sqrt{3})^2$;

O = $(-3\sqrt{5})^2$; N = $\frac{1}{2}\sqrt{8}-\frac{3}{4}\sqrt{128}+\frac{\sqrt{16}}{2}$; Q = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; R = $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; S = $7\sqrt{10}\sqrt{\frac{12}{5}}$

Exercice 34

Comparer les nombres réels :

a) $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$; b) 9 et $2\sqrt{3}$; c) $\sqrt{5}$ et 2 ; d) $-5\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$; e) -7 et $-5\sqrt{2}$

f) $-3\sqrt{5}$ et $-5\sqrt{3}$; g) $1+\sqrt{5}$ et $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; h) $2+\sqrt{5}$ et $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

Exercice 35

Développer, réduire les expressions suivantes :

A = $(3-\sqrt{2})^2$; B = $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$; C = $(-1+\sqrt{2})^2$; D = $(1-\sqrt{3})^2$

E = $(\sqrt{5}+4)^2$; F = $(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2$; G = $(1+\sqrt{3})^2$; H = $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

I = $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$; J = $(\sqrt{5}+2)^2-(3-\sqrt{5})^2$; K = $(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)$.

Exercice 36

Développer, réduire les expressions suivantes :

A = $\sqrt{3}(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$; B = $2\sqrt{3}(\sqrt{3}+4)$; C = $(5\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$;

D = $(\sqrt{7}-4)(1-\sqrt{7})$; E = $(2x\sqrt{3}+7)(5x-\sqrt{3})$; F = $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$;

G = $\sqrt{6}(\sqrt{7}+\sqrt{6})+\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{6})$; H = $(\sqrt{6}+\sqrt{8})(\sqrt{24}-\sqrt{2})$;

I = $(\sqrt{48}-\sqrt{32})(4\sqrt{3}+4\sqrt{2})$; J = $(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{3}+5)$.

Exercice 37

Ecrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

A = $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$; B = $\sqrt{(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})^2}$; C = $\sqrt{(\sqrt{2}+3)^2}$; D = $\sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2}$

Exercice 38

Factoriser les expressions suivantes :

A = x^2-2 ; B = $7-x^2$; C = $3x^2-5$; D = $27-16x^2$;

E = $x^2-2x\sqrt{2}+2$; F = $2x^2+6x\sqrt{2}+9$;

G = $(x\sqrt{3}-1)^2-(x-\sqrt{3})(x\sqrt{3}-1)$; H = $\sqrt{5}(3-\sqrt{3})-2\sqrt{5}(\sqrt{3}+7)$

Exercice 39

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

$\frac{9}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{-2}{3\sqrt{2}}$; $\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}-3}$; $\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$; $\frac{-3}{-5-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}$; $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}-7}$;

$\frac{\sqrt{7}+5}{2\sqrt{7}}$; $\frac{2-3\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$; $\frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+9}$; $\frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$; $\frac{5-7\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

Exercice 40

Encadrer à 10^{-2} près les expressions suivantes Sachant que $1,414<\sqrt{2}<1,415$ et $1,732<\sqrt{3}<1,733$ et $2,236<\sqrt{5}<2,237$

a) $2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{3}-4$; $c)\ -3\sqrt{3}+10$; $d)\ \sqrt{2}+3$; $e)\ 9-4\sqrt{3}$; $f)\ \frac{7\sqrt{2}}{3}-2$;

g) $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$; h) $\frac{-\sqrt{2}-5}{3}$; i) $-2\sqrt{5}+1$; j) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; k) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$; ℓ) $\frac{2+4\sqrt{5}}{3}$; m) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Exercice 41

On donne C = $\sqrt{25}+\sqrt{24}$ et D = $\sqrt{9}+\sqrt{4}-(\sqrt{8}\times\sqrt{3})$

Calculer C × D. Que peut-on dire de réels C et D ?

Exercice 42

1) Démontrer que le réel $5-2\sqrt{6}$ est l'inverse de $5+2\sqrt{6}$.

2) Soit le réel Q = $\frac{12\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Démontrer que Q est un entier.

Exercice 43 : BEPC 2001

On donne les réels x, y et a tels que : $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ et y = a + 3

1) Rendre rationnel le dénominateur de x.

2) Déterminer le nombre réel a pour que x et y soient opposés.

3) Déterminer le nombre réel a pour que x et y soient inverses.

4) Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donner un encadrement à 10^{-2} près de x.

Exercice 44

On donne $x=\sqrt{108}$ et $y=\sqrt{75}$.

1) Ecrire x et y sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers et a le plus grand possible.

2) Ecrire une écriture simple de x^2-y^2 ; x^2+y^2 ; $x-y$ et $x+y$.

Exercice 45

Soient les réels a $=24+5\sqrt{23}$; b = $24-5\sqrt{23}$; c = $3+2\sqrt{2}$ et d = $\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}$

1) Calculer ab. Que peut-on dire de réels a et b ?

2) Calculer c + d. Que peut-on dire de réels c et d ?

Exercice 46

On donne les réels a et b tels que : $a = \frac{\frac{7}{2}-1}{2+\frac{1}{2}}$ et b = $-8+\sqrt{48}+\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

1) Montrer que a est un entier naturel.

2) Calculer b.

3) Justifier que a et b sont opposés.

Exercice 47

On donne les réels suivants a = $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ et b = $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

1) Calculer a^2 ; b^2 et ab.

2) On pose x = a + b ; y = a – b. calculer x^2 et y^2.

3) En déduire une écriture simple de x et y.

Exercice 48

On donne $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

1) Calculer a^2 ; b^2 et ab.

2) Calculer $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$.

3) Vérifier que $a+b = 4$ et $a - b = 2\sqrt{3}$.

Exercice 49

On donne les expressions : A = $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; B = $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et K = $\frac{1}{2\sqrt{2}-3}$

1) a) Calculer A^2 ; B^2 ; $A \times B$; $(A+B)^2$ et $(A-B)^2$.

b) En déduire une expression simple de A + B et de A – B.

2) a) Ecrire K sans le radical au dénominateur.

b) Encadrer K à 10^{-2} près sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Exercice 50 : 1er groupe BEPC 2007

On donne A = $-\sqrt{7}+2+\sqrt{11+4\sqrt{7}}$ et B = $-\sqrt{7}-2+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

1) Calculer $(2-\sqrt{7})^2$ et $(2+\sqrt{7})^2$.

2) En déduire une écriture simplifiée des nombres A et B.

Exercice 51

Soient les réels suivants :

A = $\sqrt{5}+3$; B = $\sqrt{5}-3$; C = $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ et D = $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}$

1) Calculer A^2 ; B^2 ; $A \times B$.

2) Démontrer que : C ; D et $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$ sont des entiers relatifs.

Exercice 52

On considère les réels suivants $a = 5 + 2\sqrt{6}$ et $b = 5 - 2\sqrt{6}$

1) Montrer que ab = 1. Que peut – on dire de a et b ?

2) Calculer a^2 ; b^2 et $\frac{a}{b}$.

3) Montrer que $a^2 + b^2$ est un entier relatif.

4) Etudier le signe de a et b.

5) Soit X = $\sqrt{49 - 20\sqrt{6}}$ et Y = $\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}$. Ecrire X et Y avec un seul radical.

Exercice 53

On considère les réels suivants $x = 2\sqrt{5} - 3$ et $b = 2\sqrt{5} + 3$.

1) Comparer $2\sqrt{5}$ et 3 puis en déduire le signe de x.

2) Calculer $a - b$; a^2 ; b^2 ; ab ; $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.

3) Soit $c = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$ et $d = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$. Ecrire c et d avec un seul radical.

Exercice 54

1) On donne les réels $a = 1 - 2\sqrt{3}$ et $b = 1 + \sqrt{12}$

a) Sans calculer a^2 et b^2 montre que $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers relatifs.

b) Déduis – en que $a^2 + b^2$ est un entier relatif.

2) On pose $c = \frac{a}{b}$. Rendre rationnel le dénominateur de c.

Exercice 55

On donne $a = \sqrt{2} - 1$ et $b = 2\sqrt{2} - 4$

1) Déterminer le signe de a et de b.

2) Calculer a^2 et b^2.

3) En déduire une expression simple de $\sqrt{24 - 16\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Exercice 56

On donne les réels $a = 1 + \sqrt{3}$ et $b = 1 - 2\sqrt{3}$.

1) Calculer $a + b$ et $a - b$ puis en déduire $a^2 - b^2$.

2) Montrer que $a^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ et $b^2 = 13 - 4\sqrt{3}$ et $ab = -5 - \sqrt{3}$.

3) Trouver le réel c tel que $\sqrt{c} = 3\sqrt{2}$.

4) Donner un encadrement de b à 10^{-2} près sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Exercice 57

On donne A = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; B = $\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

1) Comparer l'inverse de A et A−1.

2) Démontrer que : $A^2 = A + 1$ et B = 1.

3) Donner un encadrement de l'inverse de A par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

4) Donner un encadrement du carré de A par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Exercice 58 : BEPC 2002

1) Déterminer le réel a tel que 36a = 1296 puis en déduire $\sqrt{1296}$.

2) On donne $x = 3 + 2\sqrt{2}$; $y = 3 - 2\sqrt{2}$ et $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

a) Calculer x^2 ; y^2 et xy.

b) Montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ est un entier.

c) Montrer que $\frac{1}{z}$ = z−1.

Exercice 59 : BEPC 2001

1) Calculer $(1 + \sqrt{3})^2$ puis $(1 - \sqrt{3})^2$.

2) Soit a un réel strictement positif, on donne : $u = \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a}}$ et

$v = -\sqrt{a + 1 - 2\sqrt{a}}$

Ecrire u et v avec un seul radical lorsque a = 3.

3) En déduire que $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = -\frac{u}{v}$.

Exercice 60

Soit $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1) Vérifier que $a^2 + a - 1 = 0$ et que $\frac{1}{a} = a + 1$.

2) Montrer alors que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$.

3) Montrer que $b^2 = 1 + b$. En déduire que $b - 1 = \frac{1}{b}$.

4) Montrer que a et b sont inverses.

MONOMES ET POLYNOMES

Résumé du cours

I) Notion de monômes

1) Définition

Un monôme est toute expression de la forme ax^n où a est un réel et n un entier naturel.

Exemple : $2x^2$; x ; $-\frac{1}{2}x$; x^4 sont des monômes.

2) Partie littérale – Coefficient – Degré d'un monôme

a) Partie littérale

La partie littérale d'un monôme est la partie comportant la variable.

b) Coefficient

Le coefficient d'un monôme est la partie réelle située devant la partie littérale

c) Degré

Le degré d'un monôme est l'exposant de la variable.

Exemple : Donner la partie littérale, le coefficient et le degré des monômes : $3x^2$; $4x$; $-\frac{1}{2}$ et x^4.

Monômes	$3x^2$	$4x$	$-\frac{1}{2}$	x^4
Partie littérale	x^2	x	x^0	x^4
Coefficient	3	4	$-\frac{1}{2}$	1
Degré	2	1	0	4

Remarque : Soit le monôme ax^n :

- Lorsque $n = 0$ et $x \neq 0$ alors $ax^0 = a$ (car $x^0 = 1$) est un monôme constant.
- Lorsque a = 0 ; $0x^n = 0$ est un monôme nul.

3) Monômes semblables

Des monômes sont semblables s'ils ont la même partie littérale.

Exemple : $4x^2$ et $-x^2$ sont deux monômes semblables.

$-2x^4$; $\frac{1}{2}x^4$ et $3x^4$ sont trois monômes semblables.

4) Opérations sur les monômes

b) Somme des monômes semblables

Pour faire la somme de monômes semblables, on utilise la distribution de la multiplication sur l'addition.

Si ax^n et bx^n sont deux monômes semblables alors :

- $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$

Exemple : $2x^3 + 7x^3 = (2+7)x^3 = 9x^3$

$$x + \frac{2}{5}x = \left(1 + \frac{2}{5}\right)x = \frac{5+2}{5}x = \frac{7}{5}x$$

- $ax^n - bx^n = (a-b)x^n$

Exemple : $5x^2 - 9x^2 = (5-9)x^2 = -4x^2$

$$\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^5 = \frac{3-2}{6}x^5 = \frac{1}{6}x^5$$

Remarque : Lorsque les monômes ne sont pas semblables, on ne peut pas les additionner ou les soustraire.

c) Multiplication des monômes

Pour multiplier des monômes, on utilise l'associativité et la commutativité de la multiplication ainsi que les propriétés des puissances.

Si ax^n et bx^m sont des monômes alors : $ax^n \times bx^m = a.bx^{n+m}$

Exemple : $-2x^2 \times x^3 = -2x^{2+3} = -2x^5$

$$4x \times \frac{7}{2}x^5 = 4 \times \frac{7}{2}x^{1+5} = 14x^6.$$

5) Calcul de la valeur numérique d'un monôme pour une valeur donnée de la variable

Calculer la valeur numérique d'un monôme, revient à remplacer la variable par sa valeur donnée puis on effectue les calculs.

Exemple : On donne $A = -3x^2$ et $B = \frac{1}{2}x^3$. Calculons la valeur numérique de A et B pour : $x = 0$; $x = -2$ et $x = \sqrt{3}$.

Correction

Si $x = 0$ alors $A = -3(0)^2 = 0$ et $B = \frac{1}{2}(0)^3 = 0$

Si $x = -2$ alors A $= -3(-2)^2 = -3(4) = -12$ et B $= \frac{1}{2}(-2)^3 = \frac{1}{2}(-8) = -4$.

Si $x = \sqrt{3}$ alors A $= -3\left(\sqrt{3}\right)^2 = -3 \times 3 = -9$ et B $= \frac{1}{2}(\sqrt{3})^3 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

II) Notion polynôme

1) Définition

Un polynôme est une somme de monômes d'une même variable et de degrés différents.

Exemple : $2x^2 + 4$; $5x^4 - 3x^3 + x - 2$ et $(x-2)(3x+1)$ sont des polynômes.

2) Degré d'un polynôme

On appelle degré d'un polynôme, le plus grand exposant de la variable c'est – à – dire celui du monôme ayant le plus grand exposant.

Exemple : $5x^2 - 3x + 2$ est un polynôme de degré de 2

$x + 3$ est un polynôme de degré 1.

3) Calcul de la valeur numerique d'un polynome pour une valeur donnée de la variable

Calculer la valeur numérique d'un polynôme, revient à remplacer la variable par sa valeur donnée puis on effectue les calculs.

Exemple : On donne A $= 5x^2 - 3x + 2$. Calculer la valeur numérique de A pour $x = 0$ et $x = -\sqrt{3}$.

Correction

Si $x = 0$ alors A $= 5(0)^2 - 3(0) + 2 = 2$

Si $x = \sqrt{3}$ alors A = $5\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(-\sqrt{3}\right) + 2 = 5 \times 3 + 3\sqrt{3} + 2 = 17 + 3\sqrt{3}$

4) Produit de deux polynômes

Pour multiplier deux polynômes, on applique la règle de distributivité, en multipliant chaque monôme du premier polynôme par chacun des monômes du second polynôme, puis on calcule les monômes semblables.

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple : On donne : A = $2x - 1$; B = $x + 2$; C = $2 - 3x$; D = $4x - 7$.

Calculer E = A × B et F = C × D.

Correction

E = A × B = $(2x-1)(x+2) = 2x(x+2) - 1(x+2)$

E = $2x \times x + 2x \times 2 - 1 \times x - 1 \times 2 = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$.

F = C × D = $(2-3x)(4x-7) = 2(4x-7) - 3x(4x-7)$

F = $2 \times 4x - 2 \times 7 - 3x \times 4x + 3x \times 7 = 8x - 14 - 12x^2 + 21x$

F = $-12x^2 + 8x + 21x - 14 = -12x^2 + 29x - 14$.

5) Développement et factorisation d'un polynôme

a) Développement

a.1) Les identités remarquables

❖ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemples :

$(x+7)^2 = (x)^2 + 2 \times x \times 7 + (7)^2 = x^2 + 14x + 49$

$(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + (4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$

❖ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples :

$(x-3)^2 = (x)^2 - 2 \times x \times 3 + (3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(5-2x)^2 = (5)^2 - 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$

❖ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemples :

$(x-2)(x+2) = (x)^2 - (2)^2 = x^2 - 4$

$(8+3x)(8-3x) = (8)^2 - (3x)^2 = 64 - 9x^2$

a.2) Développer et réduire

❖ Développer une expression littérale, c'est de transformer chacun des facteurs en une somme de termes.

❖ Réduire un polynôme revient à faire la somme des monômes semblables.

❖ Un polynôme peut être ordonné suivant les puissances croissantes de x ou suivant les puissances décroissantes de x.

Exercice d'application

1) Développer, réduire et ordonner les expressions ci-après suivant les puissances croissantes de x :

A = $(x + 3)(4x + 2)$;

B = $(-x + 1)(2x - 3)$;

C = $(x - 2)(4x + 5) + (2x + 3)(x + 1)$;

D = $(2x + 3)(x - 1) - (x - 2)(x + 3)$.

2) Développer, réduire et ordonner les expressions ci-après suivant les puissances décroissantes de x :

E = $(5x - 2)(x + 3) - 2(x - 2)(3x + 1)$;

F = $(4x - 1)(4x + 1) - 3(x + 2)(1 - x)$;

G = $(x + 3)^2 - (-x - 1)(3 + 2x)$.

Correction

1) Développons, réduisons et ordonnons les expressions ci-après suivant les puissances croissantes de x :

A = $(x + 3)(4x + 2) = x(4x + 2) + 3(4x + 2)$

A = $x \times 4x + x \times 2 + 3 \times 4x + 3 \times 2 = 4x^2 + 2x + 12x + 6 = 4x^2 + 14x + 6$

Alors A = $6 + 14x + 4x^2$.

B = $(-x + 1)(2x - 3) = -x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

B = $-x \times 2x - x \times -3 + 1 \times 2x + 1 \times -3 = -2x^2 + 3x + 2x - 3$

B = $-2x^2 + 5x - 3$. Alors B= $-3 + 5x - 2x^2$.

C = $(x - 2)(4x + 5) + (2x + 3)(x + 1)$

C = $x(4x + 5) - 2(4x + 5) + 2x(x + 1) + 3(x + 1)$

C = $x \times 4x + x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5 + 2x \times x + 2x \times 1 + 3 \times x + 3 \times 1$

C = $4x^2 + 5x - 8x - 10 + 2x^2 + 2x + 3x + 3$ = $6x^2 + 2x - 7$ = $6x^2 + 2x - 7$

Alors C = $-7 + 2x + 6x^2$.

D = $(2x + 3)(x - 1) - (x - 2)(x + 3)$

D = $(2x^2 - 2x + 3x - 3) - (x^2 + 3x - 2x - 6) = (2x^2 + x - 3) - (x^2 + x - 6)$

D = $2x^2 + x - 3 - x^2 - x + 6 = x^2 + 3$ alors D = $3 + x^2$.

2) Développons, réduisons et ordonnons les expressions ci-après suivant les puissances décroissantes de x

E = $(5x - 2)(x + 3) - 2(x - 2)(3x + 1)$

E = $(5x^2 + 15x - 2x - 6) - 2(3x^2 + x - 6x - 2)$

E = $5x^2 + 13x - 6 - 6x^2 - 2x + 12x + 4$ = $5x^2 - 6x^2 + 13x - 2x + 12x - 6 + 4$

E = $-x^2 + 23x - 2$

F = $(4x - 1)(4x + 1) - 3(x + 2)(1 - x)$ = $[(4x)^2 - (1)^2] - 3(x - x^2 + 2 - 2x)$

F = $(16x^2 - 1) - 3(-x^2 - x + 2) = 16x^2 - 1 + 3x^2 + 3x - 6 = 19x^2 + 3x - 7$

Alors F = $-7 + 3x + 19x^2$.

G = $(x + 3)^2 - (-x + 1)(3 + 2x)$

G = $[(x)^2 - 2 \times x \times 3 + (3)^2] - (-3x - 2x^2 + 3 + 2x)$

G = $(x^2 - 6x + 9) - (-2x^2 - x + 3) = x^2 - 6x + 9 + 2x^2 + x - 3 = 3x^2 - 5x + 6$

Alors G = $6 - 5x + 3x^2$.

b) <u>Factorisation</u>

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit.

b.1) <u>Les identités remarquables</u>

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

<u>Exemples</u> :

$x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2 \times x \times 5 + (5)^2 = (x + 5)^2$

$49 + 14x + x^2 = (7)^2 + 2 \times 7 \times x + (x)^2 = (7 + x)^2$

$4x^2 + 44x + 121 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 11 + (11)^2 = (2x + 11)^2$

- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

<u>Exemples</u> :

$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + (1)^2 = (2x - 1)^2$

$16x^2 - 40x + 25 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + (5)^2 = (4x - 5)^2$

$25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + (2)^2 = (5x - 2)^2$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

<u>Exemples</u> :

$x^2 - 49 = (x)^2 - (7)^2 = (x - 7)(x + 7)$

$9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2 = (3x - 5)(3x + 5)$

$(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - (3)^2 = [(x + 1) - 3][(x + 1) + 3] = (x - 2)(x + 4)$

$(3x + 4)^2 - (x - 1)^2 = [(3x + 4) - (x - 1)][(3x + 4) + (x - 1)]$

$(3x + 4)^2 - (x - 1)^2 = (3x + 4 - x + 1)(3x + 4 + x - 1) = (2x + 5)(4x + 3)$

b.2) Mise en facteur commun

Elle consiste à chercher le facteur commun puis mettre le polynôme sous forme d'un produit.

Exemple : Factoriser les expressions suivantes :

A = $(x-2)(x+1)+(x-2)$; B = $(2x-3)(3x+2)-(3x+2)(x-1)$;

C = $(x-3)(x+2)+4(3-x)$; D = $(x+3)(2x+1)-(4x+2)(x-1)$

Correction

A = $(\boldsymbol{x-2})(x+1)+(\boldsymbol{x-2}) = (\boldsymbol{x-2})[(x+1)+1] = (x-2)[x+1+1]$

A $= (x-2)(x+2)$

B = $(2x-3)(\boldsymbol{3x+2})-(\boldsymbol{3x+2})(x-1) = (\boldsymbol{3x+2})[(2x-3)-(x-1)]$

B $= (3x+2)[2x-3-x+1] = (3x+2)[2x-x-3+1] = (3x+2)(x-2)$

C = $(x-3)(x+2)+4(3-x) = (\boldsymbol{x-3})(x+2)-4(\boldsymbol{x-3})$

C $= (\boldsymbol{x-3})[(x+2)-4] = (\boldsymbol{x-3})[x+2-4]$ = $(x-3)(x-2)$

D = $(x+3)(2x+1)-(4x+2)(x-1) = \mathrm{D}$

D = $(x+3)(\boldsymbol{2x+1})-2(\boldsymbol{2x+1})(x-1)$ = $(\boldsymbol{2x+1})[(x+3)-2(x-1)]$

D $= (2x+1)[x+3-2x+2] = (2x+1)(-x+5)$

c) Méthode mixte

Elle consiste à factoriser dans le polynôme l'identité remarquable puis chercher en le facteur commun.

Exemple : Factoriser les expressions suivantes :

A $= x^2-2x+1+2(x+2)(x-1)$

B $= (x+2)(3x-1)+9x^2-1$

C $= 3x^2-18x+27+(x-2)(x-1)$

D $= 2(x^2-6x+9)+9-x^2-(3-x)(x+1)$

Correction

A $= x^2-2x+1+2(x+2)(x-1) = (x-1)^2+2(x+2)(x-1)$

A $= (x-1)[(x-1)+2(x+2)]$ = $(x-1)[x-1+2x+4] = (x-1)(3x+3)$

A $= 3(x-1)(x+1)$

B $= (x+2)(3x-1)+9x^2-1 = (x+2)(3x-1)+(3x-1)(3x+1)$

B $= (3x-1)[(x+2)+(3x+1)]$= $(3x-1)[x+2+3x+1] = (3x-1)(4x+3)$

$C = 3x^2 - 18x + 27 + (x-3)(x+1) = 3(x^2 - 6x + 9) + (x-3)(x+1)$

$C = 3(x-3)^2 + (x-3)(x+1) = (x-3)[3(x-3) + (x+1)]$

$C = (x-3)[3x - 9 + x + 1] = (x-3)(4x-8) = 4(x-3)(x-2).$

$D = 2(x^2 - 6x + 9) + 9 - x^2 - (3-x)(x+1)$

$D = 2(x-3)^2 + (3-x)(3+x) - (3-x)(x+1)$

$D = 2(x-3)^2 — 3 + x(3+x) + (-3+x)(x+1)$

$D = (x-3)[2(x-3) - (3+x) + (x+1)] = (x-3)[2x - 6 - 3 - x + x + 1)]$

$D = (x-3)(2x-8) = 2(x-3)(x-4).$

Série d'exercices

Exercice 1

On donne les expressions suivantes : A = $-4x$; B = 3 ; C = $5x^2 - 2x + 3$; D = $7x^2$; E = x ; F = $x^2 - 1$.

1) Donner le degré de chacune des expressions ci - dessus.

2) Parmi ces expressions, citer les polynômes et donner les monômes semblables.

3) Compléter le tableau ci – dessous :

Expression	Partie littérale	coefficient
A		
B		
D		
E		

Exercice 2

Soit le polynôme : F = $(3x-1)^2 - 2x(3x-1)$.

1) Monter que F est de degré 2.

2) Calculer la valeur numérique de F pour $x = -1$; x = 0 ; x = 1 et $x = \sqrt{2}$.

Exercice 3

Soit le polynôme G défini par $G = 4x^2 - 1 + 2x(1-2x) + (2x-1)^2$.

1) Monter que G = $4x^2 - 2x$.

2) Calculer la valeur numérique de G pour $x = -3$; $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{2}{5}$; x = 2 et $x = 2\sqrt{5} + 1$.

Exercice 4

On considère les polynômes f et g définies par :

$f(x) = (2x - 3)(5x - 1) + (x + 1)(3 - 2x)$ et $g(x) = 4(x - 3)^2 - (x + 1)^2$.

1) Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$.

2) Calculer la valeur de f pour $x = 0$ et $x = 2\sqrt{3}$.

Exercice 5

On donne les polynômes suivants : $A = 3x^2 - 2x + 4(3x - 2)$;

$B = 9x^2 - 24x + 16$; $C = (x - 1)(2x + 5)$.

1) Parmi ces polynômes :

a) lequel est écrit sous forme développée ?

b) lequel est écrit sous forme factorisée ?

2) Factoriser A et B.

3) Calculer la valeur numérique du polynôme A pour $x = 1$ et $x = -\sqrt{2}$.

Exercice 6

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances croissantes de x :

$A(x) = 2x(4x - 1)$; $B(x) = (x - 1)(2x + 3)$; $C(x) = 2(x + 5)(x - 1)$;

$D(x) = (-3x + 2)(5x - 4)$; $E(x) = (2x - 1)^2 - (x + 2)^2$;

$F(x) = (3x + 8)(6x - 1) - 2x^2 + 16$; $G(x) = (2x - 3)(x - 5) - (2x - 3)^2$

$H(x) = (x + 3)(3x - 1) - x^2 + 9 + (x + 3)^2$; $I(x) = (3x - 1)^2 - (x + 4)^2$;

$J(x) = 2(x + 3) + (-2x - 6)(x + 1) - (x + 2)(4x - 1)$;

$K(x) = (x - 3)^2 - (x + 5)(x - 5)$

$L(x) = (7x - 13)(2x + 3) + (2x + 3)(4x + 5)$; $M(x) = (4x - 3)^2 - (x + 5)(x - 5)$

$N(x) = (2x - 1)(5x + 1) - (3x + 2)(x - 4)$; $O(x) = (1 - 3x)(2x + 3) - 2(x + 1)(x - 2)$

Exercice 7

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x :

$A(x) = (3x - 2)(5x - 4)$; $B(x) = (2x + 1)(3x - 5)$;

$C(x) = (6x - 1)(x - 2) - (4x - 1)^2$

$D(x) = 3(2x^2 - 6x + 7) - (x - 3)(x + 4)$; $E(x) = (5x - 2)(x + 3) + (2x - 1)(3x + 2)$

$F(x) = x(3x + 2) + 2x(x - 2) + (x - 1)^2$; $G(x) = (3x - 1)(x - 2) - (2x - 1)^2$

H(x) = $(4x-1)^2-(2x+3)^2$; I(x) = $(3x-2)(2x+3)-2(x-2)(x-5)$

J(x) = $(2x-1)(5x+1)-(2x-1)(3x+2)$; K(x)= $(2x+1)-[4(x+2)^2-9]$

L(x) = $(x+3)(x+4)+(x^2-9)+(x+5)(-3-x)$; M(x) = $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$;

N = $(4x-1)^2-(x+3)^2$; O(x) = $(3-2x)(x+3)+3(x-1)(x+4)$

Exercice 8

Développer en utilisant les identités remarquables :

A(x) = $(x+7)^2$; B(x) = $(x-3)^2$; C(x) = $(x+2)(x-2)$; D(x) = $(-3x+11)^2$

E(x) = $(2x-5)^2$; F(x)= $(x+5)(x-5)$; G = $(x+1)^2$; H = $(5x-3)^2$;

I = $(3x+1)(3x-1)$; J = $(3x+7)^2$; K = $(7x-4)^2$; L = $(9x+2)(9x-2)$

M = $(2+3x)(2-3x)$; N = $(2x-3)(2x+3)$; O = $(x-3)(x+3)$;

P = $(4x-1)^2$; Q = $(5x+3)^2$; R = $(3x^2+4)^2$; S = $(x^3-2)^2$;

T = $(2x^2-7)(2x^2+7)$

Exercice 9

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

a) Quelle est l'expression développée de $(3x+5)^2$?

A = $3x^2+25$; B = $9x^2+25$; C = $9x^2+30x+25$

b) Le développement de $(6x-1)^2$ est :

A = $6x^2-1$; B = $36x^2-12x+1$; C = $36x^2-1$;

c) Le développement de $(2x+3)(2x-3)$ est :

A = $4x^2-9$; B = $2x^2-6$; C = $2x^2-9$

d) Le développement de $(x-1)(x+3)-\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)$ est :

A = x^2-3x+9 ; B = $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$; C = $\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

Exercice 10

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

A = x^2-49 ; B = $9x^2-25$; C = $36x^2-144$; D = x^2-16 ; E = $4x^2-81$;

F = $4-x^2$; G = $9x^2-9$; H = $27-3x^2$; I = $(2x-1)^2-(x+2)^2$;

J = $(x+3)^2-(4x-1)^2$; K = $(x+1)^2-9$; L = $(3x+4)^2-(x-1)^2$;
M = $(x-3)^2-16$; N = $(x-2)^2-4$; O = $25-(x-1)^2$

Exercice 11

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

A = $x^2+12x+36$; B = $25x^2+10x+1$; C = $x^2+8x+16$;
D = $4x^2+12x+9$; E = x^2+4a+4 ; F = a^2+2a+1 ;
G = $25+30x+9x^2$; H = $49+14x+x^2$; I = $64+48x+9x^2$;
J = $9+6x+x^2$; K = $4+20x+25x^2$; L = $16x^2+72x+81$

Exercice 12

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

A = $9x^2-24x+16$; B = x^2-2x+1 ; C = $36x^2-12x+1$;
D = $49-84x+36x^2$; E = $9-42x+49x^2$; F = $4x^2-4x+1$;
G = $49-28x+4x^2$; H = $16x^2-40x+25$; I = $4-44x+121x^2$;
J = $4x^2-16x+16$; K = $36x^2y^2-60xy+25$.

Exercice 13

Factoriser les expressions suivantes :

A = $x^2-2x+1+2(x+5)(x-1)$; B = $(x+4)(x-2)+(x-2)$
C = $x(2x-1)+2x(2x+1)$; D = $6x(3x+2)-3x(x-5)$
E = $16(x-3)^2-4(2x+4)^2$; F = $2(x^2-6x+9)+9-x^2-(3-x)(x+1)$
G = $2x^2-18+(2x-1)(x-3)$; H = $(x+2)(3x-1)-x^2+4+(x+2)^2$
I = $(x-2)^2-(x^2-4)$; J = $(4x-1)(2x+5)+3(2-8x)(4x+1)$

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes :

A = $(4x-1)(5x-3)-(4x-1)^2$; B = $(2x+5)^2+2(2x-3)(2x+5)$
C = $(x+2)(3x-1)+9x^2-1$; D = $(x+3)^2-25(x-1)^2$;
E = $(x+3)(x+4)+(x^2-9)+(x+5)(-3-x)$; F = $4[(x-4)^2-\frac{49}{4}]$
G = $(2x-3)(5x-1)+(x+1)(3-2x)$; H = $(x+1)^2-9$
I = $x^2-\frac{1}{9}+(3x+5)(x+\frac{1}{3})$; J = $(6x-4)(x-1)+(3x-2)^2+9x^2-4$

Exercice 15

Développer, réduire et ordonner puis factoriser les expressions suivantes :

A = $x^2 - \frac{1}{4} + 3x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)$; B = $(2x+1) - [4\,(x+2)^2 - 9]$

C = $(2x+3)^2 - 2(2x+3)(x-1) + (x-1)^2$; D = $(x-3)^2 - (x-3) + \frac{1}{4}$

E = $(x-1)^2 + 8(x-1) + 16$; F = $x^2 + 9 + (3x+5)(x-3) - 6x$

G = $(x^2 - 2x)(x+2) + 8 - 2x^2$; H = $-3(x-3) + (x^2 - 9) + (3-x)(2x-5)$

I = $(x-1)^2 - 2(x-2)(1-x) - x^2 + 1$; J = $(2x+3)(x-1) + 4x^2 + 12x + 9$

K = $9\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2$; L = $(9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x)$

M = $x^2 - 4 - (3x+6)(2x-1)$; N = $(2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9)$;

O = $(3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x)$; P = $25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3)$;

Q = $9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x-1)$; R = $4x^2 - 12x + 9 + (5x-2)(2x-3)$.

Exercice 16

Soient les fonctions polynômes : F $(x) = 9 - 4x^2$;

G $(x) = (2x-3)(5x-1) - (x+1)(2x-3)$ et H$(x) = (2x-3)^2 + 5 - 10x$.

1) Développer, réduire et ordonner G (x) et H (x)

2) Calculer A(x) ; B(x) ; C(x) et D(x) sachant que : A$(x) = F(x) + G(x)$;

B $(x) = F(x) - 2G(x)$; C$(x) = H(x) + 3F(x) - 4G(x)$; D$(x) = G(x) - H(x)$

Exercice 18

A(x) = $-3x^2 + 7x - 2$; B(x) = $(3x-1)(2x+3)$ et C(x) = $9x^2 - 1$.

1) a) Quel est le degré de A(x) ?

b) Comparer A(x) et B(x) − C(x).

2) Mettre C(x) et A(x) sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré

Exercice 19 : BEPC 2002

On donne les fonctions polynômes A et B définies par :

A$(x) = x^2 + x - 6$ et B$(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Déterminer f(x) = A(x) + B(x) et g(x) = A(x) − B(x)

2) Déterminer les fonctions C et D telles que :

A$(x) = x - 2 + C(x)$ et B$(x) = x - 2 + D(x)$

3) En déduire une factorisation de $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{B}(x)$

Exercice 20

On donne les polynômes F = $x^2 + 3x - 2$ et G = $3x^2 + x + 3$.

1) Déterminer le polynôme H tel que H = F + G.

2) Quel est le degré de H ?

3) En utilisant une identité remarquable, factoriser le polynôme H.

Exercice 21

On considère le polynôme P défini par $\mathrm{P} = (2x+1)(2-5x) - (2-5x)^2$

1) Montrer que P est un polynôme de degré 2.

2) Factoriser P.

3) Calculer la valeur numérique de P pour $x = -1$ et pour $x = \sqrt{2}$.

4) Donner un encadrement de P pour $x = \sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 sachant $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Exercice 22

I) On donne les polynômes E = $(x-2)(x-3)$; F = $x^2 - 9$ et G = E + F.

1) Montrer que G = $2x^2 - 5x - 3$.

2) Ecrire G sous la forme d'un produit de facteur du 1er degré.

3) Calculer la valeur numérique de G pour $x = \sqrt{3}$.

4) Donner un encadrement G pour $x = \sqrt{3}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

Exercice 23

On donne le polynôme défini P par : $\mathrm{P} = (3x-5)^2 - (x-2)^2$

1) Développer, réduire et ordonner P suivant les puissances décroissantes de x.

2) Calculer la valeur numérique de P pour $x = 2\sqrt{3}$ puis donner un encadrement de P pour $x = 2\sqrt{3}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 sachant que

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

3) Montrer que P = $(2x-3)(4x-7)$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ℝ

Résumé du cours

I) Rappels

- Une équation est une égalité dans laquelle se trouve une inconnue. L'inconnue est représentée par une lettre. Elle est composée de deux membres séparés par une égalité.
- Une équation est une inégalité dans laquelle se trouve une inconnue. L'inconnue est représentée par une lettre. Elle est composée de deux membres séparés par une inégalité. Les symboles des inégalités sont : $<$; $>$; $\leq$; $\geq$.

II) Résolution des équations et inéquations à une inconnue dans ℝ

1) Résolution des équations dans ℝ

Résoudre une équation dans ℝ revient à chercher l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie. Cet ensemble est appelé ensemble des solutions de l'équation, noté $S_{\mathbb{R}}$.

a) Equation de la forme $ax = b$

- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $= b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple : $3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{5\}$.

- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $0x = 0$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $ax = 0$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

Exemple : $-4x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-4} = 0$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $0x = b$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exemple : $0x = 7$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

b) Equation de la forme $ax + b = cx + d$

$ax + b = cx + d \Rightarrow ax - cx = d - b \Rightarrow (a - c)x = d - b$. L'équation de la forme $ax + b = cx + d$ revient à la $ax = b$ après transformation.

Exemple : $3x + 1 = x - 7 \Rightarrow 3x - x = 7 + 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$; alors $S_{\mathbb{R}} = \{4\}$.

c) Equation de la forme $(ax + b)(cx + d)$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul.

$(ax+b)(cx+d)=0 \Leftrightarrow ax+b=0$ ou $cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ ou $x=-\frac{d}{c}$ alors $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{b}{a}\ ;\ -\frac{d}{c}\right\}$.

<u>Exemples</u> :

$(2x+1)(4-x)=0 \Rightarrow 2x+1=0$ ou $4-x=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=4$ alors $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{2}\ ;4\right\}$.

$(x+1)(x-2)-(x+1)(2x+3)=0$

$(x+1)[(x-2)-(2x+3)]=0 \Rightarrow (x+1)[x-2-2x-3]=0$

$\Rightarrow (x+1)(-x-5)=0 \Rightarrow x+1=0$ ou $-x-5=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=-5$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{-5\ ;-1\}$.

2) <u>Résolution des inéquations dans $\mathbb{R}$</u>

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie. Cet ensemble est appelé ensemble des solutions de l'inéquation, noté $S_{\mathbb{R}}$ et est généralement écrit sous forme d'intervalle.

Les inéquations de la forme $ax+b>0$; $ax+b<0$; $ax+b\geq 0$; $ax+b\leq 0$; $ax+b>cx+d$; $ax+b<cx+d$; $ax+b\geq cx+d$ ou $ax+b\leq cx+d$ reviennent sous la forme : $ax>b$; $ax<b$; $ax\geq b$ ou $ax\leq b$ après transformation.

a) <u>Cas des inéquations de la forme : $ax>b$ et $ax\geq b$</u>

- Si $a>0$ ($b>0$ ou $b<0$) alors l'inégalité ne change pas, donc :

$ax>b \Leftrightarrow x>\frac{b}{a}\left(S_{\mathbb{R}}=\left]\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right[\right)$ et $ax\geq b \Leftrightarrow x\geq\frac{b}{a}\left(S_{\mathbb{R}}=\left[\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right[\right)$;

- Si $a<0$ ($b>$ ou $b<0$) alors l'inégalité change donc :

$ax>b \Leftrightarrow x<\frac{b}{a}\left(S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty\ ;\ \frac{b}{a}\right[\right)$ et $ax\geq b \Leftrightarrow x\leq\frac{b}{a}\left(S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty\ ;\ \frac{b}{a}\right]\right)$;

- Si $a=0$ et $b<0$ alors $0x>b$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$) ou $0x\geq b$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$) ;
- Si $a=0$ et $b>0$ alors $0x>b$ (faux donc $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$) ou $0x\geq b$ (faux donc $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$) ;
- Si $a=0$ et $b=0$ alors $0x>0$ (faux donc $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$) ou $0x\geq 0$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$).

b) <u>Cas des inéquations de la forme : $ax < b$ et $ax \leq b$</u>

❖ Si $a > 0$ ($b > 0$ ou $b < 0$) alors l'inégalité ne change pas, donc :

$ax < b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$ $\left(S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty\,;\,\frac{b}{a}\right[\right)$ et $ax \leq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a}$ $\left(S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty\,;\,\frac{b}{a}\right]\right)$;

❖ Si $a < 0$ ($b >$ ou $b < 0$) alors l'inégalité change donc :

$ax < b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$ $\left(S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{b}{a}\,;\,+\infty\right[\right)$ et $ax \leq b \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$ $\left(S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{b}{a}\,;\,+\infty\right[\right)$;

❖ Si $a = 0$ et $b < 0$ alors $0x < b$ (faux donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$) et $0x \leq b$ (faux donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$) ;

❖ Si $a = 0$ et $b > 0$ alors $0x < b$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$) et $0x \leq b$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$) ;

❖ Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $0x < 0$ (faux donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$) et $0x \leq 0$ (vrai donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$).

<u>Exercice d'application</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x - 3 \geq 5x + 1$; 2) $2x - 3(x + 1) < 2 - (x - 3)$; 3) $x - 2 > 2x - 4$;
4) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} < x - \frac{1}{6}$

<u>Correction</u>

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x - 3 \geq 5x + 1 \Rightarrow x - 5x \geq 1 + 3 \Rightarrow -4x \geq 4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{4} \Rightarrow x \leq -1$ alors $S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;\,-1]$.

2) $2x - 3(x + 1) < 2 - (x - 3) \Rightarrow 2x - 3x - 3 < 2 - x + 3$
$\Rightarrow 2x - 3x + x < 2 + 3 + 3 \Rightarrow 0x < 8$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

3) $x - 2 > -2x - 4 \Rightarrow x + 2x > -4 + 2 \Rightarrow 3x > -2 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

4) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} < x - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{3(x-1)}{6} + \frac{2(2x-3)}{6} < \frac{6x}{6} - \frac{1}{6}$
$\Rightarrow 3(x - 1) + 2(2x - 3) < 6x - 1 \Rightarrow 3x - 3 + 4x - 6 < 6x - 1$
$\Rightarrow 3x + 4x - 6x < -1 + 3 + 6 \Rightarrow x < 8$ alors $S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;\,8[$.

3) <u>Résolution d'un système d'inéquations</u>

Résoudre un système d'inéquations dans ℝ revient à chercher s'il existe, l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations. Pour cela on détermine l'intersection des différents ensembles de solutions puis on les représente sur un même axe. On peut noter S_1 l'ensemble des solutions de la 1ère inéquation et S_2 l'ensemble des solutions de la 2ème inéquation : alors $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2$.

<u>Exercice d'application</u>

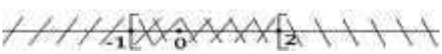
Résoudre dans ℝ les systèmes d'inéquations : 1) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + 3 > x + 5 \\ x + 2 > 3x + 8 \end{cases}$

<u>Correction</u>

1) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ alors $S_1 = [-1\,;\,+\infty[$

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$ alors $S_2 =]-\infty\,;\,2[$



$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 = [-1\,;\,+\infty[\cap]-\infty\,;\,2[= [-1\,;\,2[$.

2) $\begin{cases} 2x + 3 > x + 5 \\ x + 2 > 3x + 8 \end{cases}$

$2x + 3 > x + 5 \Rightarrow 2x - x > 5 - 3 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{2} \Rightarrow x > 1$ alors $S_1 =]1\,;\,+\infty[$

$x + 2 > 3x + 8 \Rightarrow x - 3x > 8 - 2 \Rightarrow -2x > 6 \Rightarrow x < -\frac{6}{2} \Rightarrow x < -3$ alors

$S_2 =]-\infty\,;\,-3[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 =]1\,;\,+\infty[\cap]-\infty\,;\,-3[= \emptyset$.

III) <u>Problèmes divers</u>

Résoudre un problème divers revient à résoudre une équation du 1er degré dans ℝ.
Pour cela la méthode à suivre est la suivante :

- Lecture attentive et compréhension de l'énoncé ;
- Choix de l'inconnue si possible ;
- Mise en équation ;
- Résolution de l'équation obtenue puis conclusion ;
- Vérification.

Exercice d'application 1

Une mère de quarante-cinq ans a une fille de 13 ans.

Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère ?

Correction

Choix de l'inconnue : Soit x le nombre d'années.

Mise en équation : $\frac{45+x}{2} = 13 + x$

Résolution : $\frac{45+x}{2} = 13 + x \Rightarrow 45 + x = 2(13 + x) \Rightarrow 45 + x = 26 + 2x$

$\Rightarrow x - 2x = 26 - 45 \Rightarrow -x = -19 \Rightarrow x = 19$

Conclusion : Dans 19 ans l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère.

Vérification : $\frac{45+19}{2} = 13 + 19 \Rightarrow 32 = 32.$

Exercice d'application 2

Sani dépense le tiers de son salaire pour son logement et les deux cinquième pour sa nourriture. Il lui reste 30000 francs. Calculer le salaire mensuel de Sani.

Correction

Choix de l'inconnue : Soit x le salaire mensuel de Sani.

Mise en équation : $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 30000 = x$

Résolution : $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 30000 = x \Rightarrow \frac{5}{15}x + \frac{6}{15}x + \frac{450000}{15} = \frac{15x}{15}$

$\Rightarrow 5x + 6x + 450000 = 15x \Rightarrow 5x + 6x - 15x = -450000$

$\Rightarrow -4x = -450000 \Rightarrow x = \frac{-450000}{-4} = 112500$

Conclusion : Le salaire mensuel de Sani est 112500 F.

Vérification :

$\frac{1}{3} \times 112500 + \frac{2}{5} \times 112500 + 30000 = 37500 + 45000 + 30000 = 112500.$

Série d'exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $x + 1 = 3$; b) $2x + 2 = -1$; c) $3x - \frac{1}{2} = 4$; d) $-7x - 1 = 20$;

e) $x+3=-2x$; f) $4x-1=5$; g) $2=x+4$; h) $-3=-x+6$;
i) $-12=2x-2$; j) $7-x=-7x$; k) $2-\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}$; ℓ) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;
m) $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}$; n) $\frac{1}{2}x=1+\frac{1}{4}$; o) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x$; p) $\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}=3$

<u>Exercice 2</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4x-2=-3x-9$; b) $-2x-2=-x-6$; c) $-x-8=-3x-2$;
d) $-2+4x=2x-1$; e) $1-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+2x$; f) $-5+\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x$;
g) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}x-4$; h) $2+x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$; i) $\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}$

<u>Exercice 3</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x-(8+3x)=2$; b) $3(2x+1)-9=2(2x+1)$; c) $4x-2=-3(x-9)$;
d) $3x-1+5(2x+3)=13x+14$; e) $3(x+2)=-5x+2$;
f) $-x+6=2(x+3)$; g) $2(x+1)=2(x-7)$; h) $x-(2+3x)=1-2x$;
i) $-(x+3)+2x=4-6x$

<u>Exercice 4</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x-1}{3}=2x$; b) $2+\frac{3x}{5}=6+\frac{x}{4}$; c) $\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{4}=5$;
d) $\frac{x+2}{3}+\frac{x-1}{4}=5$; e) $5\left(\frac{2x}{3}\right)+5(x+3)=20$; f) $5x-3\left(x-\frac{1}{3}\right)=5$
g) $\frac{2x-3}{2}+\frac{1-3x}{6}=2-\frac{-3+x}{3}$; h) $\frac{1}{3}-\frac{x+1}{2}=2x-\frac{3x+1}{4}$; i) $\frac{2x+3}{5}+\frac{3x-4}{4}=\frac{4x-5}{8}$

<u>Exercice 5</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x+4)^2-49=0$; b) $(3x+5)(2x+13)=0$; c) $(2x-5)(1+2x)=0$
d) $x^2+1=26$; e) $x(2x-7)=0$; f) $25-(x+3)^2=0$
g) $(2x-5)(1+2x)+(2x-5)(x+1)=0$;
h) $(x+1)(x-2)-(x+1)(4x-1)=0$; i) $4x^2+12x+9=0$;
j) $x^2+1=0$; k) $x^2-6x+9=0$; ℓ) $9x^2+7=0$;
m) $(x+1)(x-1)=0$; n) $(x-2)^2=(2x+1)^2$; p) $4-x^2=0$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3\sqrt{2}x - 1 = x - \sqrt{2}$; b) $(\sqrt{5} - 1)x - 2 = 5$; c) $x\sqrt{3} + 2 = \sqrt{3}$

d) $2x - \sqrt{2} = 1 + x\sqrt{2}$; e) $(1 - \sqrt{2})x = 3 - 2\sqrt{2}$;

f) $(2x - \sqrt{3})(x\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = 0$; g) $(x + \sqrt{2})(3x - \sqrt{5}) = 0$;

h) $(4x - \sqrt{3})(x\sqrt{3} - 3) = 0$; i) $(2x - 5\sqrt{3})(x\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$

Exercice 7

On donne $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ et $g(x) = (x + 4)(3x - 1) - 8x - 2x^2$

1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

2) Mettre $f(x)$ et g(x) sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré.

3) Résoudre dans IR les équations suivantes : $f(x) = 0$; g$(x) = -4$; $f(x) = g(x)$.

Exercice 8

On donne $A(x) = 9 - x^2 + (2x + 6)(4x + 5) - 2(x + 3)^2$ et

B(x) = $(x - 1)^2 - 2(x - 2)(1 - x) - x^2 + 1$

1) Développe, réduis et ordonne $A(x)$ et $B(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

2) Mettre $A(x)$ et B(x) sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré

3) Résoudre dans $\mathbb{N}$; $\mathbb{D}$ et $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $A(x) = 0$; $B(x) = 6$; $B(x) = 0$.

Exercice 9

On donne $A(x) = -2x + 2$ et $B(x) = x + 1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) [A(x) + 1][B(x) − 2] = 0 ; b) 4[A(x)]^2 = 9[B(x)]^2

Exercice 10

On considère l'équation suivante où x est une inconnue et a un réel :

$x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$.

1) Déterminer le réel a pour que 2 soit solution de l'équation.

2) Déterminer le réel a pour que -6 soit solution de l'équation.

3) Peut – on déterminer le réel a pour que 1 soit solution de l'équation ? Conclure.

Exercice 11

On donne le polynôme P = $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$.

1) Vérifier que P = $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$.

2) Résoudre, dans ℝ, l'équation P = $\frac{3}{2}$.

3) Calculer la valeur de P pour $x=\frac{1}{3}$ et $x=\sqrt{3}$.

4) Factoriser le polynôme P.

5) Résoudre dans ℝ, l'équation P = 0.

Exercice 12

On considère l'expression E $= 4x^2-9-(x+2)(2x-3)$.

1) Montrer que E est un polynôme de degré 2.

2) Résoudre dans ℝ, l'équation E = -3.

3) Calculer la valeur de E pour $x=-1$ et $x=\sqrt{3}$.

4) Donner un encadrement de E pour et $x=\sqrt{3}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 sachant que $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$.

5) Justifier que E = $(2x-3)(x+1)$.

6) Résoudre dans ℝ, l'équation $(2x-3)(x+1)=0$.

Exercice 13

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $x-3\geq 5x+4$; b) $2x-5<-3x+2$; c) $3x-2>2x+4$;

d)$5x-4\leq 7x-8$; e) $-3(x-1)-6\geq 0$; f) $3x+1\leq 0$.

Exercice 14

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée en hachurant la partie solution :

a) $x-2>0$; b) $-2x+4\leq 1$; c) $2x+1\geq 4x-3$; d) $5x-1<3x-4$

Exercice 15

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée en hachurant la partie solution

a) $\frac{1}{2}x + 5 > 0$; b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \geq \frac{5x}{6} + 2$; c) $\frac{5x-6}{7} < \frac{2x-1}{14}$;

d) $\frac{x+2}{2} - \frac{x-5}{6} \leq \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}$; e) $\frac{x+2}{4} \geq x - \frac{1}{3}$; f) $\frac{-x+1}{3} - \frac{2x-3}{2} \leq \frac{x}{2} - \frac{5}{3}$

g) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+4}{5} < \frac{x+2}{4}$; h) $\frac{x+9}{7} + \frac{1-2x}{3} > 4 - \frac{5-3x}{2}$; i) $\frac{x+1}{2} + \frac{2-x}{4} \geq \frac{3x-2}{6}$

Exercice 16

On donne $A(x) = -3x + 1 \quad et \quad B(x) = 2x + 6$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $[\mathrm{A}(x) - 1][\mathrm{B}(x) + 1] \geq 0$; b) $[\mathrm{A}(x)][\mathrm{B}(x) - 2] < 0$

Exercice 17

On considère l'expression : F = $x^2 - 25 + (2x-3)(x-5)$.

1) Développer, réduire et ordonner l'expression F suivant les puissances croissantes de x.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation F $-3x^2 \leq 0$

3) Ecrire F sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré.

4) Calculer la valeur de F pour $x = -1$.

5) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation F = 0.

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée en hachurant la partie solution :

a) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1 \\ 7x + 6 \leq 2x - 4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} -x + 3 > 3x - 2 \\ 3x + 2 < 5x + 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x \geq 2x + \frac{2}{3} \\ -3x + 1 < x + 3 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 3x - \frac{2}{3} \geq 2x + 1 \\ -x + 1 < 4x - \frac{1}{2} \end{cases}$; i) $\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 3 \\ x - \frac{1}{2} < 2(x - 1) \end{cases}$

Exercice 19

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Pour chaque question, recopie sur ta copie le numéro de la question et la réponse exacte.

N°	Inéquations	Réponses		
		a	b	c
1	$1-4x=2$ alors $x=$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
2	$2-3x<0$ alors $x\in$	$\left]\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$	$\left]-\infty\ ;\ \frac{2}{3}\right[$	$\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$
3	$\begin{cases} x\leq 3 \\ x>-1 \end{cases}$ alors $x\in$	$]-1\ ;3]$	$]-1\ ;\ 3[$	$[-1\ ;\ 3[$

Exercice 20

Si on diminue de 2 cm le côté d'un carré son aire diminue de 20 cm².

Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

Exercice 21

Moustapha a 27 ans de plus que son fils. Dans six ans, l'âge de Moustapha sera le double de l'âge du fils. Trouve l'âge de chacun d'eux.

Exercice 22

Sani dit à son ami Kalamadine : « Prends trois fois mon âge dans trois ans et enlève trois fois mon âge il y a trois ans, tu obtiendras mon âge actuel ».

Aide Kalamadine à retrouver l'âge de Sani.

Exercice 23

Ali dit « il y a dix ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans 10 ans ».

Trouver l'âge d'Ali.

Exercice 24

Boubacar a 200F en pièces de 5F et de 10F. Il a deux fois plus de pièces de 10F que de pièces de 5F. Combien a-t-il de pièces de 5F et de 10F ?

Exercice 25

Je cherche cinq nombres entiers naturels consécutifs dont j'ai oublié la somme. Je ne sais plus si cette somme est 354, 345 ou 534. Aidez-moi à retrouver cette somme et ces nombres.

Exercice 26

Un téléphone portable et son étui coûtent ensemble 110 €. Le téléphone coûte 100 € de plus que l'étui. Quels sont les prix du téléphone et de l'étui ?

Exercice 27

Kadi a 30 ans, sa fille a 4 ans.
Dans combien d'années l'âge de kadi sera-t-il le triple de celui de sa fille ?

Exercice 28

Fati et Aicha travaillent ensemble en vendant des galettes. Elles ont eu 130.000 F de bénéfice le mois. Fati a eu 13.000F de plus que Aicha.
Combien chacune a – t – elle eu ?

Exercice 29

Mohamed a 62 ans et ses trois petits-enfants Balkissa, Abdoulaye et Samira ont respectivement 20 ans ; 18 ans et 16 ans. Dans combien d'années l'âge du grand-père sera –t-il égal aux $\frac{2}{3}$ de la somme des âges de ses petits enfants ?

Exercice 30

Issa et ses trois fils Yahaya, Mamane et Ismaël récoltent de l'arachide dans leurs plantations. Le premier, le deuxième et le troisième récoltent respectivement les $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{5}$ du tonnage d'Issa. La récolte totale des quatre personnes est de 43 tonnes.
Calculer les tonnages d'arachide récoltés respectivement par Issa et par chacun de ses trois fils.

Exercice 31

Je choisis un nombre. Je calcule son double. Je calcule le carré du résultat puis j'enlève 16 et j'obtiens le résultat zéro.

1) Ecrire une expression qui traduit les calculs effectués.
2) Trouver la (les) valeur (s) possible (s).

Exercice 32

Pour connaître l'âge d'un fils, d'un père et d'un grand-père, on sait que dans 11 ans la somme de ces trois âges sera de 130 ans.
Sachant que le père a 4 fois l'âge de son fils et que le grand-père a 25 ans de plus que le père, donner l'âge du fils, du père et du grand-père.

Exercice 33

Un père a 42 ans. Il a trois enfants de 11, 9 et 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Résumé du cours

I) Equations et systèmes de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) Equations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

a) Définition

On appelle équation du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$, toute expression de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et des réels où $a \neq 0$ et $b \neq 0$; x et y sont les inconnues.

Exemple : $x + y - 1 = 0$; $2x - 3y + 5 = 0$; $-x - 2y = 0$ sont des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$.

b) Solution d'une équation du 1er degré à deux inconnues

❖ Résoudre algébriquement une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ c'est trouver tous les couples $(x\,;\,y)$ qui sont solutions de cette équation. Pour trouver l'ensemble des solutions de cette équation il suffit d'écrire l'ensemble des couples solutions en fonction de l'une des deux inconnues. L'ensemble des solutions est noté $S_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : $x - 2y + 1 = 0$ et $3x + 4y - 2 = 0$.

Correction

$x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x = 2y - 1$ alors $S_{\mathbb{R}^2} = \{(2y - 1\,;\, y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

$3x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = -3x + 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ alors

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x\,;\, = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

N.B : Pour vérifier algébriquement qu'un couple de réels est solution d'une équation il suffit de remplacer les coordonnées $(x\,;\,y)$. S'ils vérifient l'équation alors le couple est solution et dans le cas contraire le couple n'est pas solution.

Exemple : Dites parmi les couples $(-4\,;\,0)$; $(0\,;\,2)$ et $(1\,;\,3)$ ceux qui sont solutions de l'équation $x - 2y + 4 = 0$.

$(-4\,;\,0)$ est solution de $x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2(0) + 4 = 0 \Rightarrow -4 + 4 = 0$ $\Rightarrow 0 = 0$ alors le couple $(-4\,;\,0)$ est solution de $x - 2y + 4 = 0$.

$(0\,;\,2)$ est solution de $x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 - 2(2) + 4 = 0 \Rightarrow -4 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ alors le couple $(0\,;\,2)$ est solution de $x - 2y + 4 = 0$.

(1 ; 3) est solution de $x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2(3) + 4 = 0 \Rightarrow 5 - 6 = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$ alors le couple (1 ; 3) n'est pas solution de $x - 2y + 4 = 0$.

❖ Résoudre graphiquement une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est de trouver dans le plan muni d'un repère, l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l' équation. Cet ensemble de points est la droite qui a pour équation cartésienne cette équation. Pour cela on choisit deux points dont les coordonnées vérifient cette équation, on place ces points dans un repère du plan puis on trace la droite qui passe par ces deux points.

<u>Exercice d'application</u>

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $x - 2y + 1 = 0$.

Soit (D) : $x - 2y + 1 = 0$

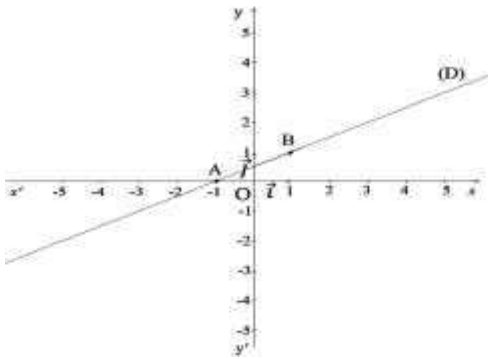
Si $y = 0$ alors $x - 2(0) + 1 = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Si $x = 1$ alors $1 - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} = 1$

	A	B
x	-1	1
y	0	1



Les coordonnées de tous points passants par (D) sont les solutions de l'équation $x - 2y + 1 = 0$.

N.B : Pour vérifier graphiquement qu'un couple de réels est solution d'une équation il suffit de placer le point ayant les coordonnées de ce couple de réels dans un repère après avoir construit la droite dont l'équation est donnée. Si le point appartient à la droite alors le couple de réels est solution de l'équation et dans le cas contraire le couple n'est pas solution de cette équation.

<u>Remarque</u> : Une équation du 1er degré à deux inconnues admet une infinité de couples solutions.

2) <u>Système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$</u>

a) <u>Définition</u>

Un système de deux équations à deux inconnues est toute expression de la forme :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où x et y sont les inconnues et a, a', b, b', c et c' des nombres réels.

b) Méthodes de résolutions

Pour résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un système de deux équations du 1er degré on peut procéder soit par la méthode algébrique (addition ou combinaison, substitution et comparaison) soit par la méthode graphique.

b.1) Méthode algébrique

Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ un système c'est de trouver l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois. L'ensemble des solutions est noté $S_{\mathbb{R}^2}$.

b.1.1) Méthode d'addition ou combinaison

La méthode de combinaison consiste à effectuer des opérations entre les lignes afin d'éliminer des inconnues.

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode d'addition, on procède comme suit :

- ❖ Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenables de sorte que lorsqu'on additionne les deux équations on obtient une équation à une seule inconnue.
- ❖ Résoudre l'équation obtenue puis déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.
- ❖ Donner l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode d'addition le système d'équations :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

Eliminons x

$$\begin{matrix} (-1) \\ (6) \end{matrix} \begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 5y = -8 \\ 6x - 12y = 42 \end{cases} \Rightarrow -17y = 34 \Rightarrow y = \frac{34}{-17} = -2$$

Eliminons y

$$\begin{matrix} (2) \\ (5) \end{matrix} \begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 10y = 16 \\ 5x - 10y = 35 \end{cases} \Rightarrow 17x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{17} = 3$$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2\ ;\ 3)\}$.

b.1.2) Méthode de substitution

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode de substitution, on procède comme suit :

- Exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.
- Remplacer (substituer) cette inconnue exprimée par l'expression trouvée dans l'autre équation.
- Résoudre la nouvelle équation puis déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de substitution le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

Correction

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 & (1) \\ x + 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

Tirons x dans (2) : $x + 2y = -4 \Rightarrow x = -4 - 2y \quad (3)$

Remplaçons x par sa valeur dans (1) : $2(-4 - 2y) + 3y = 3 \Rightarrow -8 - 4y + 3y = 3$

$\Rightarrow -4y + 3y = 3 + 8 \Rightarrow -y = 11 \Rightarrow y = -11$.

Remplaçons y par sa valeur dans (3) : $x = -4 - 2(-11) = -4 + 22 = 18$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(18 ; -11)\}$.

b.1.3) Méthode de comparaison

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode de comparaison, on procède comme suit :

- Exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre à partir de chaque équation.
- Comparer les deux expressions trouvées.
- Résoudre la nouvelle équation obtenue puis déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations : $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -4x + y + 9 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ -4x + y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Tirons y dans (1) et (2) :

(1) : $2x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -2x + 3$

(2) : $-4x + y + 9 = 0 \Rightarrow y = 4x - 9$

$y = y \Leftrightarrow -2x + 3 = 4x - 9 \Rightarrow -2x - 4x = -9 - 3 \Rightarrow -6x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-6} = 2$

Remplaçons x par sa valeur : $y = -2(2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(2\,; -1)\}$.

b.2) <u>Méthode graphique</u>

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations du 1er degré, il suffit de construire les droites dans un même repère orthonormé. Trois cas sont possibles :

❖ Si les droites sont sécantes alors il y a un seul couple solution (coordonnées du point d'intersection des droites).

❖ Si les droites sont parallèles disjointes alors le système n'admet pas de couple solution. Donc $S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$.

❖ Si les droites sont parallèles confondues alors le système admet une infinité de couples réels solutions du système d'équations (l'ensemble des coordonnées des points de l'une des droites).

<u>Exercice d'application</u>

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations :

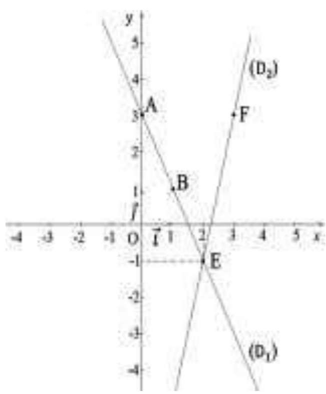
1) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -4x + y + 9 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$

<u>Correction</u>

1) Soient (D_1) : $2x + y - 3 = 0$ et (D_2) : $-4x + y + 9 = 0$

	A	B
x	0	1
y	3	1

	E	F
x	2	3
y	-1	3

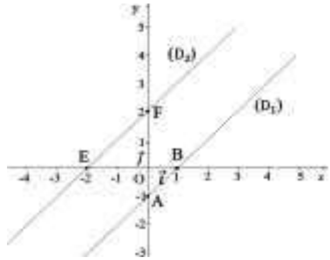


$S_{\mathbb{R}^2} = \{(2\,; -1)\}$.

2) Soient (D_1) : $x - y - 1 = 0$ et (D_2) : $-2x + 2y + 4 = 0$

	A	B
x	0	1
y	-1	0

	E	F
x	0	2
y	-2	0



$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$.

3) <u>Problèmes divers</u>

Résoudre un problème divers revient à résoudre un système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$. Pour cela la procédure à suivre est la suivante :

- Lecture attentive et compréhension de l'énoncé ;
- Choix des inconnues ;
- Mise en équations
- Résolution du système d'équations obtenues puis conclusion ;
- Vérification.

<u>Exercice d'application 1</u>

L'entreprise de Monsieur Ali a dix employés répartis en deux catégories : une catégorie A et une catégorie B. Les employés de la catégorie A travaillent chacun à 7000 F par jour et ceux de la catégorie B à 3000 F par jour. Monsieur Ali paye au total 58000 F à l'ensemble des employés à la fin de la journée.

Déterminer le nombre d'employés de chaque catégorie.

<u>Correction</u>

Soient x le nombre d'employés de la catégorie A et y le nombre d'employés de la catégorie B.

$x + y = 10$ (1) ; $7000x + 3000y = 58000 \Rightarrow 7x + 3y = 58$ (2) alors

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 7x + 3y = 58 \end{cases}$$

Tirons x dans (1) : $x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y$ (3)

Remplaçons x par sa valeur dans (2) : $7(10 - y) + 3y = 58 \Rightarrow 70 - 7y + 3y = 58$

$\Rightarrow -7y + 3y = 58 - 70 \Rightarrow -4y = -12 \Rightarrow y = \frac{-12}{-4} = 3.$

Remplaçons y par sa valeur dans (3) : $x = 10 - 3 = 7$

Dans l'entreprise de Monsieur Ali il y a 7 employés de la catégorie A et 3 employés de la catégorie B.

<u>Exercice d'application 2</u>

Pour organiser une sortie de fin d'année, une école loue des grands cars de 56 places et des petits cars de 44 places. Il y a 4 grands cars de plus que de petits cars. 624 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis. Combien l'école a-t-elle loué de cars de chaque catégorie ?

<u>Correction</u>

Soient x le nombre de grands cars et y le nombre de petits cars.

$x = y + 4 \Rightarrow x - y = 4$ (1) ; $56x + 44y = 624 \Rightarrow 14x + 11y = 156$ (2) alors

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 14x + 11y = 156 \end{cases}$$

Eliminons x

$$\begin{matrix} (-14) \\ (1) \end{matrix}\begin{cases} x - y = 4 \\ 14x + 11y = 156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14x + 14y = -56 \\ 14x + 11y = 156 \end{cases} \Rightarrow 25y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{25} = 4$$

Eliminons y

$$\begin{matrix} (11) \\ (1) \end{matrix}\begin{cases} x - y = 4 \\ 14x + 11y = 156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 11y = 44 \\ 14x + 11y = 156 \end{cases} \Rightarrow 25x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{25} = 8$$

L'école a loué 8 grands cars et 4 petits cars.

II) <u>Inéquations et système d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$</u>

1) <u>Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$</u>

a) <u>Définition</u>

On appelle inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$, toute expression de la forme $ax + by + c \geq 0$ avec a, b et des réels où $a \neq 0$ et $b \neq 0$; x et y sont les inconnues.
Le symbole « $\geq$ » peut – être remplacé par : « $<$ » ; « $>$ » ou « $\leq$ ».

<u>Exemple</u> : $2x + y + 3 < 0$; $x - 3y - 1 \geq 0$; $-x + y \leq 0$ sont des inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$.

b) <u>Solution d'une inéquation du 1er degré à deux inconnues</u>

Pour résoudre graphiquement une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la méthode à suivre est la suivante :

- On trace dans un repère orthonormé la droite d'équation $ax + by + c = 0$;
- On choisit un point quelconque dont on connait ses coordonnées mais n'appartenant pas à la droite tracée ;

- ❖ On remplace les coordonnées du point choisit dans l'inéquation ;
- ❖ Si les coordonnées du point vérifient l'inéquation alors la partie du plan contenant ce point est solution et dans le cas contraire la partie du plan ne contenant pas ce point est solution.

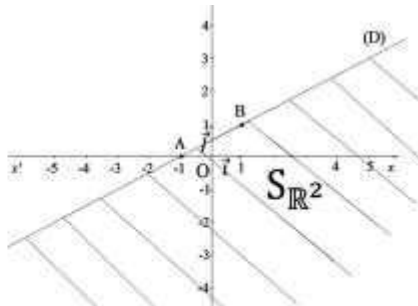
Exercice d'application

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $x - 2y + 1 \geq 0$.

Correction

Soit (D) : $x - 2y + 1 = 0$

	A	B
x	-1	1
y	0	1



Le point O(0 ; 0) vérifie – t – il l'inéquation

$x - 2y + 1 \geq 0$?

$0 - 2(0) + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0$ vrai. Alors le demi-plan de frontière (D) contenant le point O est solution. Hachurons la partie solution.

Remarque :

- ✓ Une inéquation du 1er degré à deux inconnues admet une infinité de couples solutions.
- ✓ Graphiquement, l'ensemble des solutions d'une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une région du plan.
- ✓ Généralement on choisit le point O(0 ; 0) vérifier l'inéquation si la droite ne passe par O.

2) Système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la méthode à suivre est la suivante :

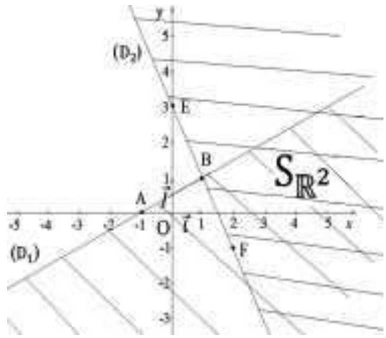
- ❖ On trace dans un repère orthonormé les droites dont les équations correspondent aux inéquations ;
- ❖ On cherche la partie solution de chaque inéquation.
- ❖ La partie solution du système est celle de l'intersection des parties solutions des inéquations.

Exercice d'application

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations :

1) $\begin{cases} x-2y+1>0 \\ 2x+y-3\leq 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x+2y-6<0 \\ x-2y+2\leq 0 \\ 4x-3y+12\geq 0 \end{cases}$

Correction



1) $\begin{cases} x-2y+1>0 \\ 2x+y-3\geq 0 \end{cases}$

Soient (D_1) : $x-2y+1=0$ et (D_2) : $2x+y-3=0$

	A	B
x	-1	1
y	0	1

	E	F
x	0	2
y	3	-1

Vérifions si le point O(0 ; 0) est solution de l'inéquation $x-2y+1>0$.

$0-2(0)+1>0 \Rightarrow 1>0$ Vrai. Alors le demi – plan de frontière (D_1) contenant le point O est solution. Hachurons la partie solution.

Vérifions si le point O(0 ; 0) est solution de l'inéquation $2x+y-3\geq 0$.

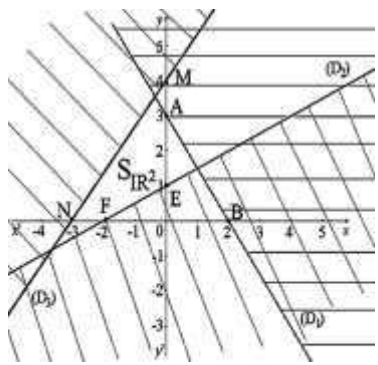
$2(0)+0-3<0 \Rightarrow -3\geq 0$ Faux. Alors le demi – plan de frontière (D_2) contenant le point O n'est pas solution. Hachurons la partie solution.

2) $\begin{cases} 3x+2y-6<0 \\ x-2y+2\leq 0 \\ 4x-3y+12\geq 0 \end{cases}$

Soient (D_1) : $3x+2y-6=0$; (D_2) : $x-2y+2=0$

	A	B
x	0	2
y	3	0

	E	F
x	0	-2
y	1	0



et (D_3) : $4x-3y+12=0$

	M	N
x	0	-3
y	4	0

Vérifions si le point O(0 ; 0) est solution de l'inéquation $3x+2y-6<0$.

$3(0) + 2(0) - 6 < 0 \Rightarrow -6 < 0$ Vrai. Alors le demi – plan de frontière (D_1) contenant le point O est solution. Hachurons la partie non solution.

Vérifions si le point O(0 ; 0) est solution de l'inéquation $x - 2y + 2 \leq 0$.

$0 - 2(0) + 2 < 0 \Rightarrow 2 \leq 0$ Faux. Alors le demi – plan de frontière (D_2) contenant le point O n'est pas solution. Hachurons la partie non solution.

Vérifions si le point O(0 ; 0) est solution de l'inéquation $4x - 3y + 12 \geq 0$.

$4(0) - 3(0) + 12 \geq 0 \Rightarrow 12 \geq 0$ Faux. Alors le demi – plan de frontière (D_2) contenant le point O est solution. Hachurons la partie non solution.

Série d'exercices

Exercice 1

1) Parmi les couples des réels suivants : (1 ; 3) ; (−1 ; 0) ; (1 ; −1) ; (1 ; 1), indiquer ceux qui sont solutions de l'équation $x - 2y + 1 = 0$.

2) Pour chacune des équations suivants, citez trois couples solutions :

a) $y = 2x$; b) $2x - 3y + 2 = 0$; c) $x = -1$.

3) Parmi les couples des réels suivants : (0 ; 2) ; (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (2 ; 0), indiquer ceux qui vérifient l'inéquation $2x + 3y \geq 6$.

4) Parmi les couples de réels suivants : (3 ; 0) ; (1 ; 4) ; (−2 ; 7) ; (1 ; −2), un seul est solution de l'inéquation $x + 2y - 3 < 0$. Lequel ?

Exercice 2

1) Parmi les couples des réels suivants (11 ; 4) ; (5 ; 13) ; (4 ; −5) ; (11 ; 13), indiquer ceux qui sont solution du système : $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

2) Parmi les couples des réels suivants (−2 ; 1) ; (−2 ; 0) ; (2 ; 0), indiquer ceux qui ceux qui sont solution du système : $\begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants par la méthode de combinaison :

a) $\begin{cases} x + y = 30 \\ 3x + y = 58 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 38 \\ 3x + 5y = 160 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55,5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ -x+y+2=0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x-y-9=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 8x+3y=39{,}5 \\ 7x+9y=50{,}5 \end{cases}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants par la méthode de substitution :

a) $\begin{cases} 2x+y=\ -1 \\ 4x+y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -\ x-2y+1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 25x+12y=380 \\ 23=x+y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+\ y-1=0 \\ x-y=-4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 3x-4y-5=0 \\ 2x+5y-11=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y+\frac{7}{2}=0 \\ 3x+y=14 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ -\ x+y+2=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 6x-2y+6=0 \\ 12x+2y=24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0=x-y-1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-2y+4=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x=y+7 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants par la méthode de comparaison :

a) $\begin{cases} x+2y+4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -\ 2x+y=3 \\ x-2y+3\ =\ \ 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 0=5x+y-7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+2=-2y \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants par la méthode de votre choix :

a) $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 5x+3y=-11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-5y=-6 \\ 8x+15y=48 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x+5y-4=0 \\ 7x+8y=-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=5y \\ y=5x \end{cases}$; e) $\begin{cases} 3x-\frac{3}{2}y=0 \\ 6x+\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x-3y=8 \\ 7x-3y=5 \end{cases}$

Exercice 8

a) Résolvez dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 10x-3y=35 \\ 5x-4y=-20 \end{cases}$

b) Montrer que les valeurs trouvées pour x et y vérifient la condition suivante :

$8\left(\frac{x-5}{y-5}\right) = 3\left(\frac{x+20}{y+20}\right)$

Exercice 9

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

a) $x + y > 3$; b) $x - 3y - 1 \leq 0$; c) $-2x + 3y - 1 \geq 0$; d) $-x - 4y < 0$

Exercice 10

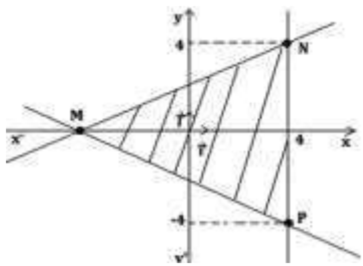
Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 1 \leq 0 \\ -x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 4 > 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + y - 1 > 0 \\ x - y + 4 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y < 3 \\ x - 2y + 3 < 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x + 3y \leq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x > 3 \\ x + y < 0 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 3x + 4y + 2 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ y + 2 \geq 0 \\ 5x - 3y + 4 \geq 0 \end{cases}$

Exercice 11



Soit la figure ci-contre.

1) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).

2) Donner le système d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ qui admet pour solutions la partie hachurée y compris les côtés du triangle MNP.

Exercice 12 : BEPC 2005

On considère le polynôme p défini par $p(x) = ax^2 + bx + 9$

1) Calculer a et b sachant que $p(1) = 1$et $p(2) = 1$. Pour les valeurs trouvées, donner l'expression de $p(x)$.

2) Montrer que $p(x)$ peut se mettre sous la forme de $p(x) = [f(x)]^2$.

Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 13

On considère la fonction polynôme suivante : $g(x) = ax^2 + bx + c$

1) Déterminer les réels a, b et c sachant que g(0) = 9 ; g(1) = 4 et g(−2) = 25.

2) Ecrire $g(x)$.

<u>Exercice 14</u>

a et b sont deux nombres entiers naturels dont la somme est 105 et la différence des carrés est 1995. Trouver ces deux nombres.

<u>Exercice 15</u>

Un jardin rectangulaire a un périmètre de 920m. Calculer ses deux dimensions sachant que la longueur a 20m de plus que la largeur.

<u>Exercice 16</u>

La somme de deux nombres entiers est 220. Si on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 20. Trouver ces nombres

<u>Exercice 17</u>

La somme de deux nombres est 134, leur différence est 126. Trouver ces deux nombres.

<u>Exercice 18</u> : 1er groupe session 2006

Au début d'une réunion d'enfants, le nombre de filles dépasse de 10 celui des garçons. Après le départ de 10 garçons et de 9 filles, le nombre de filles est le double de celui des garçons. Combien y avait-il de filles et de garçons au début de la réunion ?

<u>Exercice 19</u>

Un paysan du retour des champs demande à sa femme : « Combien de chèvres et de pintades as-tu vendu au marché ? ». La femme lui répond : « 18 têtes et 58 pattes ». Aider le paysan à trouver le nombre de chèvres et celui de pintades vendues.

<u>Exercice 20</u> : **1er groupe session 2007**

Le petit Abdoul et sa sœur Rachida ont rendu visite à leur tonton Moussa. Tonton Moussa leur donne une somme d'argent. Après le partage, Rachida a eu 20F de plus que le petit Abdoul et que la somme totale élevée au carré donne 6400F.
Déterminer la part de chacun des enfants.

<u>Exercice 21</u>

Dans une classe de troisième de 42 élèves, le nombre de filles dépasse le nombre de garçons de 6. Combien y a – t – il de filles et de garçons dans cette classe ?

<u>Exercice 22</u>

Le troupeau de Rayane est composé de chameaux et de dromadaires. Il y a 39 têtes et 51 bosses. Combien y a – t – il de chameaux et de dromadaires dans ce troupeau ?

Exercice 23 : **BEPC 2006**

Un collège achète des livres de mathématiques pour les classes de troisièmes (3^{è}) et de quatrième (4^{è}). Pour la distribution, nous savons que le double des livres de 3^{è} dépasse le nombre des livres de 4^{è} de 40 livres et que le nombre total des livres de mathématiques augmenté de 40 livres équivaut au double des livres de 4^{è}.
Déterminer le nombre de livres de 3^{è}, le nombre de livres de 4^{è} et le nombre total des livres de mathématiques.

Exercice 24

Une salle de cinéma compte 110 places subdivisées en deux niveaux. Les places coûtent 1000 F et 2500 F respectivement pour le 1er et le 2ème niveau. Quand la salle est pleine, la recette est de 170000 F.
Combien y a – t – il de places pour chaque niveau ?

Exercice 25

Un zoo propose deux tarifs : un tarif pour les adultes et un autre pour les enfants. Un groupe constitué de quatre enfants et d'un adulte paie 22 euros et un autre constitué de six enfants et trois adultes paie 42 euros.
Quel est le prix d'une entrée pour un enfant et quel est celui d'une entrée pour un adulte ?

Exercice 26 : **BEPC 1999**

Au cours des élections, le secrétaire d'un bureau de vote a constaté sur la liste d'émergement, que 575 électeurs ont effectivement voté. Il dit à son président : « si 3 femmes n'avaient pas voté et si 7 hommes avaient voté de plus, le nombre d'hommes qui ont voté serait le double de celui des femmes.
Trouver le nombre d'hommes et des femmes ayant voté dans ce bureau.

Exercice 27

Soit un champ rectangulaire de périmètre de 400m, si l'on augmentait de 5m la longueur et de 3m la largeur, l'aire de ce champ augmenterait de 715m². Calculer les dimensions de ce champ.

Exercice 28

La somme de deux nombres vaut 60. La moitié du premier nombre augmentée du tiers du deuxième nombre vaut 24. Quels sont ces nombres ?

Exercice 29

Ali a des pièces de 2F et de 5F. Il a 27 pièces en tout, pour une somme de 99 F. Combien a-t-il de pièces de 2 F ? De pièces de 5 F ?

Exercice 30

Sur le rayon d'une bibliothèque de 160cm de longueur occupé en totalité, on trouve 38 livres. Les uns sont des livres de mathématiques de 3cm d'épaisseur et les autres de physiques de 5cm d'épaisseur.

Trouver le nombre de livres de mathématiques et celui de physiques.

Exercice 31

Ali et Sani veulent acheter un vélo qui coûte 20000 F. Ali dispose des $\frac{4}{5}$ des économies de Sani. S'ils réunissent leurs économies, il leur manque 2720 F pour acheter le vélo. Calculer le montant des économies de chacun d'eux.

Exercice 32

Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boites. Chaïbou achète 6 boites et 5 albums et paie 57 euros. Ibrahim achète 3 boites et 7 albums et paie 55,50 euros.

Quel est le prix d'une boite ? Quel est le prix d'un album ?

Exercice 33 : BEPC 1997

19 Nigériens sont allés dans un pays voisin pour une rencontre. Pour se rendre au lieu de la réunion, ils remplissent trois petits taxis et un grand taxi. Au retour, ils n'ont eu que deux grand taxis et un petit taxi, ce qui oblige une personne a rentré à pied. Dans ce pays, quel est le nombre maximum de passagers autorisés pour un petit taxi ? Pour un grand taxi ?

STATISTIQUE

Résumé du cours

I) Rappels

1) La statistique

La statistique est une science qui étudie des phénomènes à travers la collecte des données, leur traitement, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre ces données compréhensibles.

2) La population

Une population est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

3) L'individu

Un individu est un élément de la population.

4) Echantillon

L'échantillon est la partie de la population utilisée pour une étude statistique.

5) Le caractère

Le caractère ou variable statistique est la propriété sur laquelle porte l'étude statistique. Il peut être quantitatif ou qualitatif.

- ✓ Il est quantitatif (lorsque les valeurs prises sont mesurables ou comptables).

Exemple : l'âge, la taille,….

Le caractère quantitatif est soit continu (lorsque le caractère peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, de façon continue) soit discret (lorsque le caractère ne peut pas prendre les valeurs intermédiaires).

- ✓ Il est qualitatif (lorsque les valeurs prises ne sont ni mesurables ni comptables).

Exemple : la situation matrimoniale, la nationalité,….

6) La modalité

La modalité x_i est la valeur prise par le caractère.

7) Le mode

Le mode est la valeur du caractère la plus fréquente (la plus répétée).

8) L'effectif d'une modalité

L'effectif n_i de la modalité $x_i$est le nombre d'individus correspondant à la valeur du caractère.

9) L'effectif total

L'effectif total N est le nombre total d'individus.

10) L'étendue

L'étendue d'une série statistique à caractère discret est la différente entre la plus grande et la plus petite valeur des modalités (valeurs extrêmes) : $e = x_{max} - x_{min}$.

11) La fréquence

La fréquence d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de ce caractère par l'effectif total (elle peut – être en pourcentage).

$f_i = \frac{\text{effectif de ce caractère}}{\text{effectif total}}$ (sous forme de fraction) ;

$f_i = \frac{\text{effectif de ce caractère}}{\text{effectif total}} \times 100$ (sous forme de pourcentage).

12) La série statistique

Une série statistique est la suite de valeurs que prend une caractéristique au sein d'un groupe.

13) Calcul de la moyenne (caractère discret)

La moyenne d'une série statistique s'obtient par la formule :

$$\bar{x} = \frac{Somme\ (des\ modalités\ \times effectifs\ des\ modalites)}{effectif\ total} = \frac{\sum x_i \times n_i}{N}$$

N.B : La moyenne n'a de sens que si le caractère est quantitatif.

Exemple : On considère la série statistique suivante.

Taille	150	160	165	168	170	Total
Effectifs	4	3	2	5	6	20

Calculer la moyenne de cette série statistique.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \times n_i}{N} = \frac{Somme\ (des\ modalités\ \times effectifs\ des\ modalites)}{effectif\ total} =$$

$$\bar{x} = \frac{150\times4+160\times3+\times165\times2+168\times5+170\times6}{20} = \frac{600+480+330+840+1020}{20} = \frac{3270}{20} = 163{,}5$$

II) Regroupement en classes d'égales amplitudes

Quand le nombre de valeurs prises par la variable statistique est trop grand ou quand la variable est continue, on regroupe les valeurs en classes.

1) La classe

Une classe est un intervalle semi-ouvert de type [a ; b[, il est obtenu par regroupement des valeurs du caractères.

Remarque : Dans le cas d'un caractère continu, les modalités sont appelées classes.

2) L'amplitude d'une classe

L'amplitude d'une classe est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la classe. Si [a ; b[est une classe alors l'amplitude est notée $b - a$.

3) Le centre d'une classe

Le centre de la classe [a ; b[est noté $c_i = \frac{a+b}{2}$

4) La classe modale

La classe modale est la classe qui a le plus grand effectif.

5) L'étendue

L'étendue d'une série statistique à caractère continu est la différente entre la valeur de l'extrême droite de la dernière classe et la valeur de l'extrême gauche de la première classe.

6) La moyenne

La moyenne d'une série statistique à caractère continu s'obtient par la formule :

$\bar{x} = \frac{\sum c_i \times n_i}{N}$

7) Construction d'un diagramme à bandes

Un diagramme à bandes dont les classes sont d'égales amplitudes est un diagramme dont les bandes (rectangles) sont de même largeur et les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences) des classes.

La construction d'un diagramme à bandes nécessite deux axes perpendiculaires dont :

- Un axe horizontal gradué sur lequel on représente les valeurs prises par la variable statistique ;
- Un axe vertical gradué sur lequel on représente les effectifs.

8) Interprétation d'un diagramme à bandes

L'interprétation d'un diagramme à bandes consiste à illustrer les différentes données recueillies (les classes, l'amplitude d'une classe, l'effectif d'une classe,…). Ces données peuvent être utilisées pour dresser le tableau des effectifs et ou des fréquences, déterminer la moyenne,….

Exercice d'application 1

Un opérateur téléphonique a étudié la durée de communication d'un groupe d'abonnés dans une période donnée. Les résultats de l'étude sont donnés dans le tableau suivant.

Durée en mn	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Nombre d'abonnés	30	25	15	20	10

1) Combien d'abonnés ont été recensés ?

2) Combien d'abonnés ont une durée de communication inférieure à 6 minutes ?

3) Donner les différentes classes.

4) Calculer l'étendue.

5) Préciser la classe qui a le plus grand effectif.

6) Calculer la durée moyenne de communication pour un abonné en utilisant les centres des classes.

7) Tracer le diagramme à bandes de cette série statistique. Echelle : en abscisse 1 cm pour une classe et en ordonnée 1 cm pour 5 abonnés.

Correction

Durée en mn	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Nombre d'abonnés	30	25	15	20	10
Centres des classes	$\frac{0+3}{2} = 1,5$	$\frac{3+6}{2} = 4,5$	$\frac{6+9}{2} = 7,5$	$\frac{9+12}{2} = 10,5$	$\frac{12+15}{2} = 13,5$

1) Le nombre d'abonnés recensés est N = 30 + 25 + 15 + 20 + 10 = 100.

2) Il y a 30 + 25 = 55 d'abonnés qui ont une durée de communication inférieure à 6 minutes.

3) Les différentes classes sont : [0 ; 3[; [3 ; 6[; [6 ; 9[; [9 ; 12[et [12 ; 15[.

4) Calculons l'étendue.

$e = 15 - 0 = 15$.

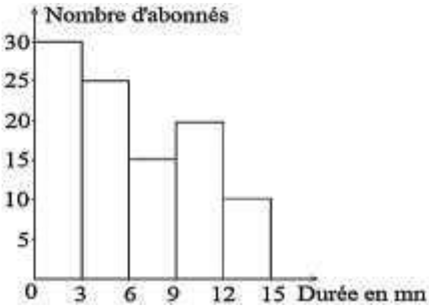
5) La classe qui a le plus grand effectif est [0 ; 3[.

6) Calculons la durée moyenne de communication pour un abonné en utilisant les centres des classes.

$$\bar{x} = \frac{\sum c_i \times n_i}{\text{N}} = \frac{1,5\times30+4,5\times25+7,5\times15+10,5\times20+13,5\times10}{100} = \frac{45+112,5+112,5+210+135}{100}$$

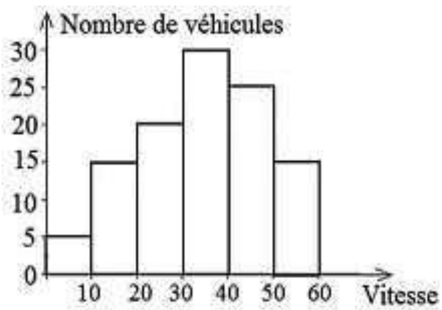
$\bar{x} = \frac{615}{100} = 6{,}15$

7) Traçons le diagramme à bandes de cette série statistique. Echelle : en abscisse 1 cm pour une classe et en ordonnée 1 cm pour 5 abonnés.



Exercice d'application 2

Le diagramme à bandes suivant représente la vitesse en km/h des véhicules roulant sur une autoroute.



1) Déterminer le nombre de véhicules roulant sur cette autoroute.

2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences.

3) Préciser le nombre de classes et l'amplitude d'une classe.

4) Quelle est la classe modale ?

5) Calculer la moyenne en utilisant les centres des classes.

Correction

1) Déterminons le nombre de véhicules roulant sur cette autoroute.

N = 5 + 15 + 20 + 30 + 25 + 15 = 110

2) Dressons le tableau des effectifs et des fréquences (%).

Vitesse (Km/h)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	5	15	20	30	25	15
Fréquences	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{3}{22}$
Centres des classes	5	15	25	35	45	55

3) Précisons le nombre de classes et l'amplitude d'une classe.

Cette série statistique comporte 6 classes.

L'amplitude d'une classe est 10 (10 − 0 = 10).

4) La classe modale est [30 ; 40[.

5) Calculons la moyenne en utilisant les centres des classes.

$$\bar{x} = \frac{\sum c_i \times n_i}{\mathrm{N}} = \frac{5\times5+15\times15+25\times20+35\times30+45\times25+55\times15}{110} = \frac{25+225+500+1050+1125+825}{110}$$

$$\bar{x} = \frac{3750}{110} = 34{,}09$$

Série d'exercices

Exercice 1

Après une interrogation de mathématiques dans une classe de 3è, le professeur a relevé les notes suivantes :

1	10	3	9	5	3	14	5
15	2	12	6	11	9	8	4
3	7	1	18	3	15	5	10
17	6	8	5	11	7	2	9
5	3	2	10	6	4	12	5

1) a) Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe ?

b) Dresser le tableau des effectifs de cette série et calculer la moyenne.

2) a) Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique en regroupant les modalités en classes d'amplitudes 5 dont la 1ère étant [0 ; 5[.

b) Quel est la classe modale ?

3) Construire le diagramme à bandes représentant ce regroupement en classes. On prendra 1cm pour 2 élèves en ordonnées et 1cm pour 5 points en abscisses.

Exercice 2

Lors d'un devoir surveillé de Mathématiques, les notes des élèves d'une classe de 3ème sont reparties selon le tableau suivant :

Notes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
Effectifs	2	1	6	5	4	8	14	11	8	3	6	5	2	2

1) Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe de 3ème ?

2) a) Quel est le mode ? Calculer l'étendue.

b) Combien d'élèves ont une note comprise entre 8 et 12 ?

3) Calculer la note moyenne de la classe.

4) a) Réorganiser ces données en classe d'amplitude égale à 5, la première étant [0 ; 5[et dresser le tableau des effectifs des classes.

b) Tracer le diagramme à bandes correspondant. Echelle : en abscisse une classe d'amplitude 5 sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 4 élèves sera représenté par 1cm.

5) Calculer la moyenne en utilisant les centres des classes. Obtient-on le même résultat à la 2e question ? Justifier la réponse.

Exercice 3

4	11	14	6	8	8	18	10	5	5
10	10	12	2	17	5	12	14	4	17
8	13	15	18	14	15	4	9	17	13
5	11	4	16	2	12	13	10	17	6
15	8	11	14	8	6	15	19	9	13

1) Dresser le tableau des effectifs, des fréquences de cette série.

2) Déterminer l'étendue et le mode de cette série statistique.

3) Combien d'élèves ont une note inférieure à la moyenne ? Supérieure à $^{15}/_{20}$?

4) Regrouper en classes d'amplitudes 4 dont la 1ère est [0 ; 4[.

a) Calculer la moyenne avec ce regroupement.

b) Tracer le diagramme en bande. On prendra 1cm pour 4pts en abscisses et 1cm pour 5 élèves en ordonnées.

c) Tracer le diagramme circulaire correspondant.

Exercice 4

Une enquête effectuée auprès des 180 travailleurs d'une entreprise, sur leur nombre d'années dans l'entreprise, a donné les résultats suivants :

ancienneté	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20]
Fréquences	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1) a) Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique regroupée en classe.

b) Indiquer la classe modale.

2) Calculer la moyenne de cette série statistique en utilisant les centres des classes.

3) Tracer le diagramme en bandes correspondant à cette série statistique. Echelle : en abscisse une classe d'amplitude 5 sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 10 travailleurs.

Exercice 5

Une enquête a porté sur la récolte du riz de quelques exploitants. Le diagramme ci-dessous représente le nombre d'exploitants et les masses en quintaux de leurs récoltes (regroupées en classes d'amplitudes 10 quintaux).

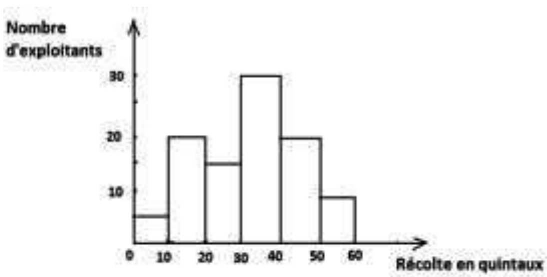
1) Organiser ces données dans un tableau des effectifs et des fréquences (en %).

2) Compléter le tableau en calculant les centres des classes.

3) Quelle est la classe modale ?

4) Calculer la production moyenne pour un exploitant.

5) Déterminer le nombre de paysans ayant récolté moins de 30 quintaux.



Exercice 6

Dans une classe de $3^{ème}$ de 50 élèves, après un devoir de mathématiques le professeur établit le tableau suivant :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs		14		4
Fréquences	$\frac{7}{50}$		$\frac{1}{2}$	

1) Compléter le tableau.

2) Quelle est la classe modale ?

3) Calculer la moyenne en utilisant les centres des classes.

4) Tracer le diagramme circulaire.

Exercice 7

Une enquête effectuée auprès des travailleurs d'une entreprise, sur leur salaire mensuel en milles de FCFA, a donné les résultats suivants :

Salaires	[110 ; 140[	[140 ; 170[	[170 ; 200[	[200 ; 230[	[230 ; 260[
Effectifs	42	30	6	8	4

1) Calculer l'effectif des travailleurs de cette entreprise.

2) Donner la classe modale de cette série statistique.

3) Préciser le nombre de classes et l'amplitude d'une classe.

4) Calculer le salaire moyen des travailleurs.

5) Tracer le diagramme à bandes de cette série statistique.(On donne sur l'axe des abscisses 1 cm pour une classe et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 4 travailleurs).

Exercice 8

La série statistique suivante indique la production en tonnes d'arachide d'une coopérative de 100 cultivateurs dans la région de Matamèye

Classes (tonnes)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	14	18	12	x	30	12

1) Trouver la valeur de x.

2) Quelle est la classe modale ?

3) Reprendre le tableau et dresser la ligne des fréquences en %.

4) Calculer la moyenne en utilisant le centre des classes.

5) Tracer le diagramme à bandes de cette série. Echelle 1 cm pour 10 tonnes en abscisse et 1 cm pour 4 cultivateurs en ordonnée.

Exercice 9

Après l'épreuve de mathématiques d'un examen blanc d'une classe de 3ème, le professeur a construit à l'aide des notes le diagramme ci-dessous :

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Population étudiée	Caractère étudié	Classe modale	Amplitude des caractères

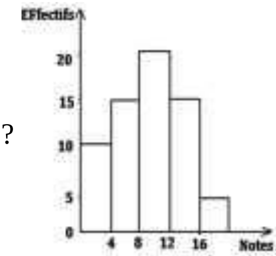
2) Quel est l'effectif de cette série ?

3) Déterminer la fréquence (en %) de la classe modale.

4) Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique.

5) Combien d'élèves ont une note supérieure ou égale à $^{12}/_{20}$?

6) Calculer l'étendue et la moyenne de cette série statistique



Exercice 10

Voici les notes de quatre élèves.

Elève A : 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 8.

Elève B : x ; 12 ; 10 ; 14 ; 11.

Elève C : 9 ; y ; 13 ; 10; 15.

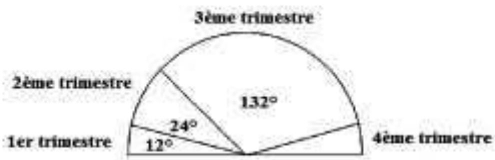
Elève D : 13; 16 ; 10 ; 14 ; z.

1) Calcule la moyenne obtenue par l'élève A.

2) Calculer x ; y et z sachant que les quatre élèves ont obtenus la même moyenne.

Exercice 11

Dans le cadre d'une bonne gestion d'une entreprise s'occupant de la vente des maillots, un diagramme semi-circulaire a été établi pour la vente annuelle.



1) Déterminer l'angle correspondant au 4ème trimestre.

2) Sachant que 1320 maillots ont été vendu l'année, quelle est la répartition par trimestre ?

Exercice 12

Des élèves ont eu un devoir de maths. Le tableau ci-dessous donne les résultats :

Classes de notes n	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n < 20$
Effectifs	5	20	35	15	25

1) Quel est l'effectif de cette classe de 3ème ?

2) Quelle est la classe modale ?

3) Quelle est l'amplitude des différentes classes ?

4) Calculer l'étendue de cette série statistique.

5) En utilisant les centres des classes, Calculer la moyenne de cette série statistique.

6) Quel est le pourcentage des élèves de la classe la plus fréquentée ?

FONCTIONS – APPLICATIONS - BIJECTIONS

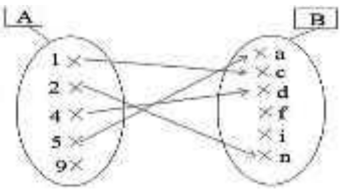
Résumé du cours

I) Définitions

Soient A et B deux ensembles non vides.

❖ On appelle fonction, toute relation qui à tout élément d'un ensemble de départ A associe zéro ou un (0 ou 1) élément d'un ensemble d'arrivée B.

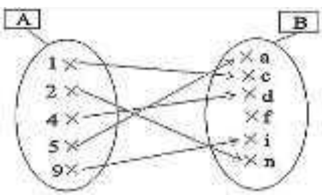
Exemple de représentation sagittale :



On dit que : 1 a pour image c et c a pour antécédent de 1 ;
2 a pour image n et n a pour antécédent 2 ; ….

❖ Une fonction est une application si chaque élément de l'ensemble de départ A associe un seul élément de l'ensemble d'arrivée B.

Exemple de représentation sagittale :



Remarque :

Toute application est une fonction mais toute fonction n'est pas une application.

❖ Une fonction f est dite bijective si f est une application et si chaque élément de l'ensemble d'arrivée B est l'image d'un et un seul élément de l'ensemble de départ A (ou si tout élément de B possède un seul antécédent dans A).

II) Ensemble de définition

1) Définition

On appelle ensemble (ou domaine) de définition d'une fonction f de A vers B, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. Il est appelé aussi l'ensemble de valeurs pour lesquelles cette fonction existe.

2) Ensemble de définition de quelques fonctions

a) Fonction polynôme

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple : $f(x) = 3x - 2$ alors $D_f = \mathbb{R}$; $g(x) = x^2 + x + 1$ alors $D_g = \mathbb{R}$.

b) Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle existe lorsque son dénominateur est différent de zéro.

Exemple : $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash\, x - 2 \neq 0\}$. Posons $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
D'où $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

c) Fonction irrationnelle

Une fonction irrationnelle existe lorsque le contenu du radical est supérieur ou égal à zéro.

Exemple : $f(x) = \sqrt{x-3}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash\, x - 3 \geq 0\}$. $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.
D'où $D_f = [3\,; +\infty[$.

III) Calcul d'image d'un élément par une fonction donnée

Une fonction f associe à chaque réel x un unique réel noté $f(x)$. On dit alors que $f(x)$ est l'image de x et que x est un antécédent de $f(x)$. Si elle existe, l'image de x est unique, par contre $f(x)$ peut avoir plusieurs antécédents.
Pour calculer l'image d'un réel par une fonction donnée il suffit de remplacer la valeur de ce réel dans l'expression de la fonction.

Exercice d'application 1

Soit $f(x) = 2x - 1$.

1) Calculer l'image par f de chacun des réels suivants : -4 ; 0 ; $\frac{3}{2}$; 1 et $\sqrt{3}$.

2) Calculer l'antécédent par f de chacun des réels suivants : -3 ; 0 et 5.

Correction

1) Calculons l'image par f de chacun des réels suivants : -4 ; 0 ; $\frac{3}{2}$; 1 et $\sqrt{3}$.

$f(-4) = 2(-4) - 1 = -8 - 1 = -9$; $f(0) = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$;

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$; $f(1) = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$;

$f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3}) - 1 = 2\sqrt{3} - 1$.

2) Calculons l'antécédent par f de chacun des réels suivants : -3 ; 0 et 5.

$f(x) = -3 \Leftrightarrow 2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -3 + 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1.$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 5 + 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3.$

Exercice d'application 2

On donne les fonctions f, g et h définies dans IR par : $f(x) = (x + 2)(2x - 5)$; g$(x) = 2x^2 + 3x - 4$ et $h(x) = (x - 1)^2 - 4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est-elle bijective ? Justifier ta réponse.

2) Calculer les antécédents du réel -4 par g. La fonction f est-elle bijective ? Justifier ta réponse.

3) Calculer puis comparer $h(3)$ et $h(-1)$. Montrer que la fonction g n'est pas bijective.

Correction

On donne les fonctions f, g et h définies dans IR par : $f(x) = (x + 2)(2x - 5)$; g$(x) = 2x^2 + 3x - 4$ et $h(x) = (x - 1)^2 - 4$.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(2x - 5) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ ou $2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = \frac{5}{2}.$

Alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{-2\ ;\ \frac{5}{2}\right\}.$

La fonction f n'est pas bijective car 0 a deux antécédents (-2 et $\frac{5}{2}$).

2) Calculons les antécédents du réel -4 par g.

G$(x) = -4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 = -4 \Rightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{3}{2}.$

La fonction g n'est pas bijective car -4 a deux antécédents ($-\frac{3}{2}$ et 0).

3) Calculons puis comparons $h(3)$ et $h(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} h(3) = (3-1)^2 - 4 = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \\ h(-1) = (-1-1)^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0. \end{array}\right\} \text{ Alors } h(3) = h(-1)$$

Montrer que la fonction g n'est pas bijective.

La fonction h n'est pas bijective car 3 et -1 ont la même image (0).

Série d'exercices

Exercice 1

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

1) Calculer le (s) antécédent (s) du réel 3.

2) La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 2

On considère la fonction polynôme P définie par :

$P(x) = (4x-1)^2 - (2x+1)^2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $P(x) = 0$.

2) P est-elle bijective ?

Exercice 3 : BEPC 2007

Soit la fonction polynôme f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4 - (x+2)(2x-5)$.

1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

2) Factoriser $f(x)$.

3) Calculer l'image par f de chacun des réels suivants : 3 ; -2 ; $\frac{1}{2}$ *et* $\sqrt{3}$. La fonction f est-elle bijective ? Justifier la réponse.

4) Montrer que le réel $\sqrt{5}$ est solution de l'équation $f(x) = 1 + \sqrt{5}$.

Exercice 4

Soit la fonction rationnelle h définie par $h(x) = \frac{4x^2-2x}{(4x-7)(2x-1)}$

1) Quel est le domaine de définition de h ?

2) Simplifier $h(x)$ sur son domaine.

Exercice 5

Soient les fonctions f, g et h définies par : $f(x) = (x-1)(x+2)$,

$g(x) = 2(3x+5)(x-1)$ et $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

1) Donner l'ensemble de définition de h.

2) Simplifier h(x).

Exercice 6

Donner l'ensemble de définition de chacun des fonctions suivantes :

F(x) =x^2+2x-1 ; G$(x)=(x-1)(2x+3)$; H$(x)=3x+5$; I$(x)=\frac{H(x)}{G(x)}$

J$(x)=\frac{(3x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$; K$(x)=\frac{x+5}{2x-1}$; L $(x)=\frac{x+2}{(x-1)(3x+2)}$; M$(x)=\sqrt{2x-1}$;

N$(x)=\sqrt{(x-1)(3x+2)}$; O$(x)=\sqrt{(4x-1)(x+2)}$; P$(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

Exercice 7

On considère les polynômes :

A$(x)=(x-2)^2-(4-x^2)$; B$(x)=4(x-2)(3x-2)+4-x^2-3(x-2)^2$

1) Développe, réduis et ordonne A(x) et B(x) suivant les puissances croissantes de x.

2) Ecrire A(x) et B(x) sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré.

3) Résoudre dans ℝ les équations : A$(x)=0$; B$(x)=8$.

4) On pose F$(x)=\frac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{A}(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Simplifier F(x).

c) Calculer et donner un encadrement à 10^{-2} près de F$\left(\sqrt{3}\right)$ sachant que

1,732$<\sqrt{3}<$ 1,733.

d) Résoudre dans ℝ l'équation F$(x)=4$.

Exercice 8 : BEPC 2007

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=-x+3$ et g$(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

1) Calculer $f(1)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; g(2) ; g(3).

2) On définit une fonction h telle que $h(x)=\frac{f(x)-2g(x)}{f(x).[2g(x)]}$

a) Déterminer le domaine de définition h.

b) Donner une écriture simplifiée de $h(x)$

c) Calculer h$(\sqrt{5})$ et donner un encadrement de h$(\sqrt{5})$ à 10^{-3} près sachant que :

2,236$<\sqrt{5}<$ 2,237

3) Soit la fonction rationnelle I définie par $\mathrm{I}(x) = \frac{2}{x-3}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{I}(x) > 0$

Exercice 9

On donne le polynôme $\mathrm{P}(x) = (x-4)^2 - 9$.

1) a) Calculer P(1) et P(7), puis les comparer.

b) L'application P est – elle bijective ? Justifie votre réponse.

c) Calculer $\mathrm{P}(\sqrt{3})$.

d) Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ donner un encadrement du réel $\mathrm{P}(\sqrt{3})$ à 10^{-2} près.

2) Développer, réduire et ordonner le polynôme $\mathrm{P}(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

3) a) Justifier que $\mathrm{P}(x) = (x-7)(x-1)$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.

Exercice 10

Soit la fonction polynôme g définie par $g(x) = 2(x^2-9) - (x+3)^2$.

1) Vérifier que $g(x)$ peut s'écrire $g(x) = x^2 - 6x - 27$.

2) Donner le degré de g.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $g(x) - x^2 \geq 0$.

4) a) Factorise l'expression $x^2 - 9$.

b) Déduis la factorisation de $g(x)$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'expression $g(x) = 0$. La fonction g est – elle bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 11

On donne la fonction polynôme f définie par : $f(x) = (x-2)(2x+3) - (x-2)^2$

1) Justifier que f est un polynôme de degré 2.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = -2$.

b) La fonction f est – elle bijective ? Justifie ta réponse.

3) Mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteur de premier degré.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

APPLICATION AFFINE – APPLICATION LINEIRE

Résumé du cours

I) Application linéaire

1) Définition

Une application linéaire est toute application de la forme ax avec $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition d'une application linéaire est $\mathbb{R}$.

Exemple : $3x$; $-2x$; $\frac{3}{4}x$ sont des applications linéaires.

Remarque :

- Une application linéaire de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un monôme de degré 1 et de coefficient a.
- Le réel a est le coefficient directeur de l'application linéaire.

2) Propriétés de linéarité

Soit f est une application linéaire de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Si x_1 et x_2 sont deux réels alors $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
- Si x et k sont deux réels alors $f(k.x) = k.f(x)$.
- $f(0) = 0$.

3) Sens de variation

Soit $f(x) = ax$ une application linéaire.

- Si $a > 0$ alors l'application f est croissante.
- Si $a < 0$ alors l'application f est décroissante.
- Si $a = 0$ alors l'application f est constante.

Exercice d'application

Etudier le sens de variation des applications f et g définies par $f(x) = -4x$ et g$(x) = \frac{2}{3}x$.

Correction

$f(x) = -4x \Rightarrow a = -4 < 0$ alors l'application f est décroissante.

g$(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$ alors l'application g est croissante.

4) Représentation graphique

La représentation graphique de l'application linéaire est la droite d'équation $y = ax$, qui passe par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; a) avec a est le coefficient directeur de cette droite.

Le vecteur $\vec{u}(1\,;a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

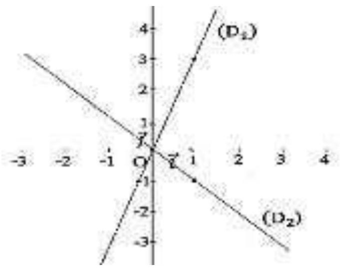
Pour déterminer graphiquement le coefficient directeur de la représentation graphique d'une application linéaire, il suffit de déterminer l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 1.

Exercice d'application

Construire les droites (D_1) et (D_2) représentations graphiques respectives des applications f et g définies par $f(x) = 3x$ et $g(x) = -x$.

Correction

La droite $(\mathrm{D}_1) : y = 3x$ passe par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; 3) et la droite $(\mathrm{D}_2) : y = -x$ passe par l'origine du repère et le point de coordonnées $(1\,;-1)$.



II) Application affine

1) Définition

Une application affine est toute application de la forme $ax + b$ où a et b sont des réels. L'ensemble de définition d'une application affine est $\mathbb{R}$.

Exemple : $2x + 1\,;-\frac{3}{2}x - 2\,;-x + 3$ sont des applications affines.

Cas particuliers :

- Si $a = 0$, $f(x) = b$ alors f est une application constante.
- Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$. L'application f est linéaire.

2) Sens de variation

Soit $f(x) = ax + b$ une application affine.

- Si $a > 0$ alors l'application f est croissante.
- Si $a < 0$ alors l'application f est décroissante.
- Si $a = 0$ alors l'application f est constante.

Exercice d'application

On donne $(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -x + \frac{1}{4}$. Donner le sens de variation de f et g.

Correction

$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow a = 3 > 0$ alors l'application f est croissante.

g(x) =$-x + \frac{1}{4} \Rightarrow a = -1 < 0$ alors l'application g est décroissante.

3) Détermination de l'expression d'une application affine

Exemple : Déterminer une application affine f telle que $f(-1) = 1$ et $f(2) = -1$.

$Soit\ f(x) = ax + b.$

$f(-1) = a(-1) + b = -a + b = 1$ alors $-a + b = 1$ (1)

$f(2) = a(2) + b = 2a + b = -1$ alors $2a + b = 1$ (2)

D'où $\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$

Eliminons a

$\begin{matrix} (2) \\ (1) \end{matrix} \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Eliminons b

$\begin{matrix} (-1) \\ (1) \end{matrix} \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

Alors $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

4) Représentation graphique

La représentation graphique de l'application affine est la droite d'équation $y = ax + b$. Pour construire la droite on peut chercher deux points appartenant à la droite, les placer puis construire la droite qui passe par ces points.

a est le coefficient directeur de cette droite et le vecteur $\vec{u}(1\,;a)$ est un de ses vecteurs directeurs.

Exercice d'application

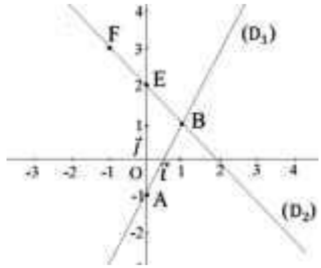
Construire les droites (D_1) et (D_2) représentations graphiques respectives des applications f et g définies par $f(x) = 2x - 1$ et g(x) = $-x + 2$.

Correction

Soient (D_1) : $y = 2x - 1$ et (D_2) : $y = -x + 2$

	A	B
x	0	1
y	-1	1

	E	F
x	0	-1
y	2	3



Remarque : La droite d'équation $y = ax + b$, représentation graphique d'une application affine et la droite d'équation $y = ax$, représentation graphique d'une application associée à cette application affine sont parallèles car ces applications ont le même coefficient directeur a.

Série d'exercices

Exercice 1

Soit l'application affine f définie par $f(x) = -4x + 3$

1) Calculer l'image par f de chacun des nombres suivants : -2 ; $\sqrt{3}$; 1 ; 0.

2) Calculer l'antécédent par f de chacun des nombres suivants : -3 ; $\sqrt{2}$; 0 ; 2.

Exercice 2

1) Déterminer l'application affine f de coefficient -2 telle que $f(3) = -4$.

2) Déterminer l'application affine g telle que $g(x) = ax + 3$ et $g(-1) = 1$.

3) Déterminer l'application affine h, telle que $h(2) = -1$ et $h(1) = 5$.

Exercice 3

Déterminer les fonctions affines f, g et k définies par :

a) $f(2) = 1$ et $f(3) = 5$; b) $g(-2) = -3$ et $g(4) = 1$; c) $k(0) = 4$ et $k(-3) = -2$

Exercice 4

1) Déterminer l'application affine f, telle que sa représentation graphique (D) passe par les points A (1 ; 3) et B (–1 ; –2).

2) Déterminer l'application affine g, telle que sa représentation graphique (D') passe par les points E (-1 ; 0) et F (3 ; 2).

2) Déterminer l'application affine h, telle que sa représentation graphique (Δ) passe par les points M (3 ; 1) et N (-1 ; 2).

Exercice 5

Soit f est une fonction affine telle que : $f(-1) = 6$ et $f(3) = -2$.

1) a) Déterminer l'expression de $f(x)$.

b) Quel est le sens de variation de $f(x)$?

2) Soit $g(x) = \sqrt{f(x)}$, Déterminer le domaine de définition de $g(x)$.

Exercice 6

Soient les fonctions f ; g ; h et k définies par :

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $g(x) = -2x + 3$; $h(x) = \frac{5}{2}x$ et $k(x) = -3x$.

1) Parmi ces fonctions dites celles qui sont affines ? Celles qui sont linéaires ?

2) Donner leur sens de variation.

3) Représenter graphiquement ces fonctions.

Exercice 7

On donne les applications affines f et g définies par $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = 4x$.

1) Représente graphiquement ces deux applications dans un même repère orthonormal.

2) Détermine graphiquement puis par calcul, les coordonnées de leur point d'intersection A.

Exercice 8

1) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - (3x + \frac{3}{2})^2$

a) Démontrer que f est une application affine.

b) Etudier le sens de variation de f.

2) On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = ax + b$.

a) Calculer a et b sachant que $g(1) = 0$ et $g(-1) = 1$.

b) Etudier le sens de variation de g.

3) Représenter graphiquement les fonctions f et g.

Exercice 9

Soit l'expression $g(x) = (x + 3)(x - 1) - (x^2 - 4)$.

1) Montre que la fonction g est une fonction affine.

2) Donne en justifiant ta réponse le sens de variation de la fonction g.

3) Construire la droite (D) représentation graphique de la fonction g.

4) Résous dans ℝ, l'équation $2x + 1 = 0$.

Exercice 10

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies par :

$f(x) = 2x^2 + 3\left(\frac{1}{2}x - x^2 + 1\right) + x^2 - 9$ et

$g(x) = 7x(x^2 + 2x) - (7x^3 + 9x^2) + \frac{1}{2}x(3 - 10x)$

1) Montrer que f et g sont des fonctions affines.

2) Soient (Δ_1) et (Δ_2) les représentations graphiques respectives des fonctions f et g. Montrer que (Δ_1) est parallèle à (Δ_2).

3) Représenter les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) dans un repère orthonormé.

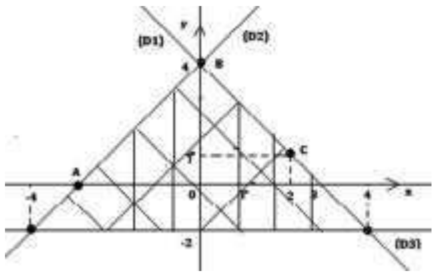
4) Déterminer les coordonnées du point I, intersection de (Δ_1) avec l'axe des abscisses.

Exercice 11 : BEPC 2000

1) A partir de cette figure, déterminer les fonctions f ; g et h associées respectivement aux droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).

2) Trouver le système d'inéquations dans IR² dont l'ensemble des solutions est la surface du triangle hachurée.

NB : les côtés du triangle font partie des solutions.



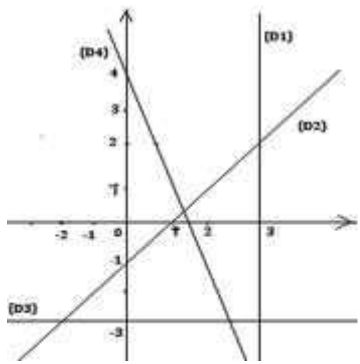
Exercice 12

Les quatre droites tracées ci-dessous dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont notées (D_1) ; (D_2) (D_3) et (D_4).

On considère les quatre équations de droites suivantes :

$y = -3$; $x = 3$; $y = x - 1$; $y = -3x + 4$

Associer à chacune des quatre droites l'une des équations données ci-dessus.



Géométrie

PROPRIETES DE THALES

Résumé du cours

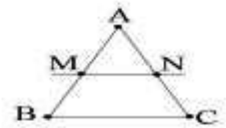
I) Propriété de Thalès

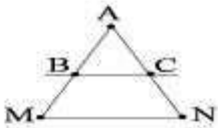
Théorème direct : ABC est un triangle, $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.

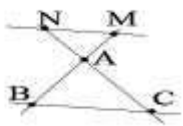
Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

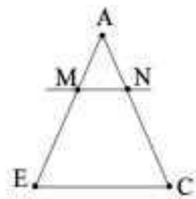
Remarque : La propriété de Thales est utilisée pour calculer une longueur inconnue.

On distingue 3 cas de figure, appelés configurations de Thalès.









Exemple : L'unité de longueur est le centimètre. On considère la figure ci – contre, où les droites (MN) et (EC) sont parallèles et AN = 2 ; AM = 2,8 ; AE = 7 et CE = 10.

Calculer AC et MN.

Correction

(MN) // (EC) alors d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{EC}$

$\Rightarrow \frac{2,8}{7} = \frac{2}{AC} = \frac{MN}{10} \Rightarrow \frac{2,8}{7} = \frac{2}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{7\times 2}{2,8} = \frac{14}{2,8} = 5.$

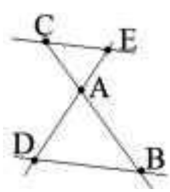
$\frac{2,8}{7} = \frac{MN}{10} \Leftrightarrow MN = \frac{2,8\times 10}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

II) Réciproque de la propriété de Thalès

ABC est un triangle, $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) // (BC).

Remarque : La réciproque de la propriété de Thales est utilisée pour démontrer le parallélisme de deux droites.



Exemple : Soit la figure ci – contre. On donne AC = 3 cm, AB = 5 cm, AD = 6,5 cm et AE = 3,9 cm. Montrer que les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

Correction

Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ alors les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6$
$\frac{AE}{AD} = \frac{3,9}{6,5} = 0,6$

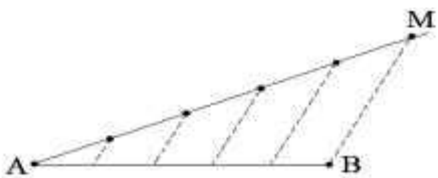
On constate que $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ alors d'après la réciproque de la Propriété de Thalès, les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

III) Partage d'un segment

Pour partager un segment [AB] en n segments égaux :

- On trace ce segment [AB] ;
- On trace une demi-droite à partir de l'une de ses extrémités ;
- On trace sur cette demi-droite à l'aide du compas n segments de longueur quelconque mais égaux ;
- On note M l'extrémité du dernier puis on trace MB.
- On trace autant de parallèles à (MB) qu'il y a d'extrémité de segment sur AB. Ces parallèles coupent AB en n segments égaux.

Exemple : Soit un segment [AB]. Partager ce segment en 5 parties égales.



IV) Triangles semblables

Deux triangles sont semblables s'ils :

- ont leurs côtés correspondants deux à deux proportionnels.
- ont leurs angles deux à deux égaux.

Exercice d'application 1 : BEPC 2011

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 3 cm et AB = 9 cm. Soit J le milieu de [BC] et I le point de [AB] tel que IB = 5 cm.

a) Faire une figure.

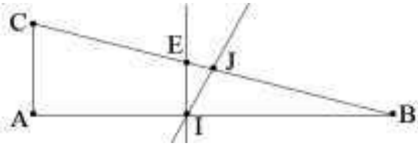
b) Calculer les longueurs BC et IC. Que représente la droite (IJ) pour le segment [BC] ? Justifier.

Quelle est la nature du triangle CIB ?

c) La parallèle à (AC) passant par I coupe (BC) en E. Calculer BE et EI.

Correction

a) La figure.



b) Calculons les longueurs BC et IC.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC on a : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$

$\Rightarrow \mathrm{BC}^2 = (9)^2 + (3)^2 = 81 + 9 = 90 \Rightarrow$ BC = $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ cm.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AIC on a : $\mathrm{IC}^2 = \mathrm{AI}^2 + \mathrm{AC}^2$

$\Rightarrow \mathrm{IC}^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow$ IC = $\sqrt{25} = 5$ cm.

La droite (IJ) est la médiatrice du segment [BC] car elle passe par son milieu et est perpendiculaire au support de son segment.

La nature du triangle CIB.

IC = IB = 5 cm alors CIB est un triangle isocèle en I.

c) Calculons BE et EI.

(AC) // (IE) alors d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{CA}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{3\sqrt{10}} = \frac{5}{9} = \frac{\mathrm{EI}}{3}$

$\frac{\mathrm{BE}}{3\sqrt{10}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \mathrm{BE} = \frac{3\sqrt{10}\times 5}{9} = \frac{15\sqrt{10}}{9} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$ cm.

$\frac{5}{9} = \frac{\mathrm{EI}}{3} \Leftrightarrow \mathrm{EI} = \frac{3\times 5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ = 1,66 cm.

<u>Exercice d'application 2</u>

L'unité est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 8 et BC = 10.

1) Montrer que AB = 6.

2) R est le point du segment [AB] tel que AR = 3,6. La parallèle à la droite (BC) passant par R coupe la droite (AC) en S. Montrer que AS = 4,8 et RS = 6.

3) T est le point du segment [BC] tel que CT = 4. Montrer que les droites (ST) et (AB) sont parallèles.

4) Donner deux triangles semblables de la figure.

<u>Correction</u>

1) Montrons que AB = 6.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC on a : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$

$\Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^{2=(10)^2} - (8)^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow AB = \sqrt{36} = 6.$

2) Montrons que AS = 4,8.

(BC) // (RS) alors d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC} = \frac{RS}{BC} \Rightarrow \frac{3{,}6}{6} = \frac{AS}{8} = \frac{RS}{10}$

$\frac{3{,}6}{6} = \frac{AS}{8} \Leftrightarrow AS = \frac{3{,}6\times 8}{6} = \frac{28{,}8}{6} = 4{,}8.$

$\frac{3{,}6}{6} = \frac{RS}{10} \Leftrightarrow RS = \frac{3{,}6\times 10}{6} = \frac{36}{6} = 6.$

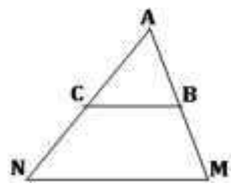
3) Si $\frac{CS}{CA} = \frac{CT}{CB}$ alors les droites (ST) et (AB) sont parallèles.

$\left.\begin{array}{l} \frac{CS}{CA} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4 \\ \frac{CT}{CB} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \end{array}\right\}$ On constate que $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ alors d'après la réciproque de la Propriété de Thalès, les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

4) ABC et ARS sont deux triangles semblables.

Série d'exercices

Exercice 1



Soit ABC un triangle et les points M et N tels que (MN) // (B

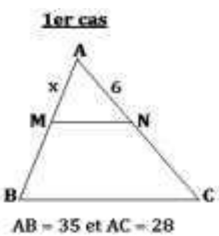
Compléter les égalités suivantes :

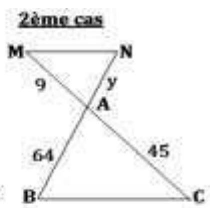
$\frac{AB}{AM} = \cdots$; $\frac{AB}{BM} = \cdots$; $\frac{BC}{MN} = \cdots$

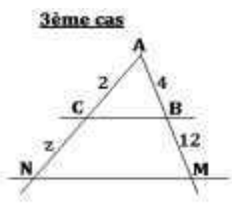
Exercice 2

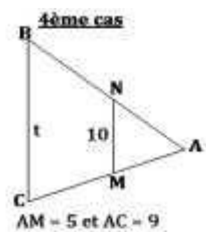
L'unité de longueur est le centimètre.

Calculer x, y, z et t sachant que (MN) // (BC) :





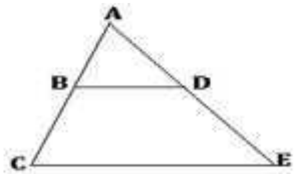




Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que : BC = 7 cm et AB = 5 cm. Soit M ∈ [BC] tel que BM = 4 cm. La parallèle à (AB) passant par M coupe [AC] en N. Placer M et N. Calculer MN.

Exercice 4

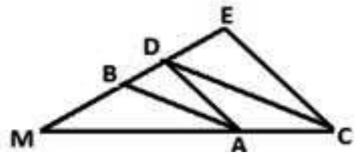


On considère la figure ci-contre : AB = 6 cm ; AC = 15 cm ; AE = 25 cm; AD = 10 cm ; CE = 22 cm.

1) Montrer que (BD) // (CE).

2) Calculer BD.

Exercice 5



L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre : (AB)//(CD) et (AD) // (CE).

On a : MC = 12 ; MB = 5 ; BD = 3 ; CE = 6 ; AB = 4.

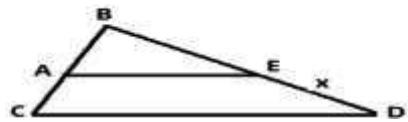
Calculer MA, AD, ME et CD.

Exercice 6

Sur la figure ci-dessous les droites (AE) et (CD) sont parallèles et toutes les mesures sont exprimées dans la même unité. BE = 2 cm ; AE = 3 cm ; ED = x.

1) Calculer CD en fonction de x.

2) Pour quelle valeur de x a-t-on CD = 12 cm ?



Exercice 7

Soit ABC un triangle tel que AB = 6cm ; AC = 8cm et BC = 10cm.

1) Construire les points I et J respectivement sur [AB] et [BC] et tels que AI = 3cm et BJ = 5cm.

2) Montrer que les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].

3) Montrer que les droites (AC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 8

ABC est un triangle tel que AC = 8cm ; BC = 9cm et AB = 4cm. Placer le point P sur [AC] tel que AP = 3cm. La parallèle à (AB) passant par P coupe (BC) en S.

La parallèle à (BC) passant par P coupe (AB) en N.

1) Faire la figure.

2) Calculer PS, AN, CS et NP.

Exercice 9

1) Construire un triangle ABC rectangle en A, tel que AB = 6 cm ; BC = 10 cm. Soit E le point du segment [AC] tel que AE = 2 cm.

2) Tracer la parallèle à (AB) passant par E et qui coupe (BC) en F. Calculer AC, BF et EF.

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]. Calculer AH, BH et CH.

Exercice 10 : BEPC 2007

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB= 6 cm et AC = 8 cm. Soit M un point [AC]. La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N.

1) Calculer BC.

2) On pose CM = x. Exprimer AM, CN et BN en fonction de x.

Exercice 11

ABC est un triangle tel que BC = 6 cm. M est le milieu de [BC]. On désigne par P un point de [BC] tel que : BP= 2 cm. La parallèle à (AC) passant par P coupe (AM) en Q et (AB) en R.

1) Montrer que $\frac{RP}{AC} = \frac{1}{3}$ et $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{3}$

2) En déduire RP.

Exercice 12

Construire un triangle MNP tel que MN = 10 cm ; MP = 4 cm et NP = 8 cm. Place un point A sur (MN) tel que MA = $\frac{3}{5}$MN.

Tracer par le point A la parallèle à (MP) ; elle coupe (NP) en B. Par B tracer la parallèle à (MN) ; elle coupe (MP) en C. Calculer NA ; AB et PC.

Exercice 13

Soit ABC est un triangle. Place le point M ϵ [AB] tel que AM = $\frac{1}{4}$AB et le point N ∈ [AC] tel que AN = $\frac{1}{4}$AC.

1) Démontrer que (MN) // (BC)

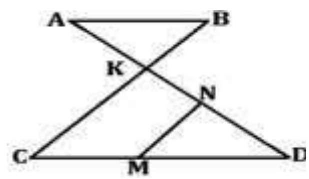
2) Tracer la droite passant par N et parallèle à (AB). Elle coupe (BC) en P. Calculer $\frac{BP}{BC}$

3) I milieu de [BC]. Démontrer que P est le milieu de [BI].

Exercice 14

Sachant que AB = 4 cm ; CD = 10 cm ; CK = 4 cm ; MN = 2 cm ; AK = 2 cm.

Calculer BK ; DN et KD.



Exercice 15

L'unité de mesure est le centimètre, les droites (FB)//(EC),(GC)//(FB) et (BD)//(CE).

1) Sachant que AB = 8 ; AF = 4 ; AE = 6 ; CD = 3 ; GF = 2 ; AD = 9

Calculer AC ; BG ; DE et AG. (Figure 1)

2) Sachant que FG = 65 ; GC =225 ; AD = 26 ; CE = 180 ; AB = 39 ; AF = 13

Calculer AE ; BD ; DE et AC. (Figure 2)

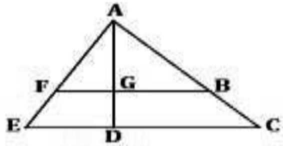


Figure 1

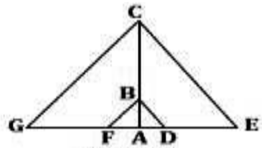
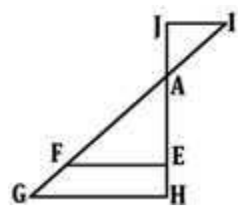


Figure 2

Exercice 16

On considère la figure ci-contre.



1) Les droites (IG) et (JH) se coupent en un point A. Le point E est sur (JH) et le point F est sur (IG).

(EF) // (HG) et on donne : AE = 3 cm ; AF = 4 cm ; AH = 7 cm et EF = 6cm. Calculer AG et HG.

2) On donne : AI = 6 cm ; AJ = 4,5 cm.

Démontrer que (IJ) // (EF).

Exercice 17

A, B et C sont trois points alignés tels que : AC = $\frac{3}{2}$ AB. Place un point N qui n'appartient pas à la droite (AB). Construis le point M de (AN) tel que : AM = $\frac{3}{2}$ AN.

1) La droite passant par B et parallèle à (CN) coupe (AN) en E.

Démontrer que AE $= \frac{2}{3}$ AN

2) La droite passant par M et parallèle à (CN) coupe (AB) en F.

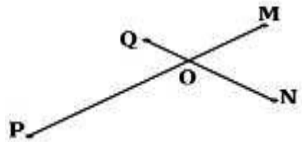
Calculer a tel que AF = a.AB

Exercice 18

Sur la figure on donne : OQ = 1cm ; OM = 2,25 cm ; ON = 3 cm ; OP = 6,75 cm

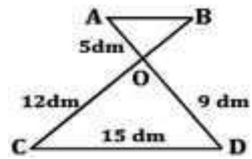
1) Les droites (QM) et (PN) sont –elles parallèles ? Justifier

2) Les droites (MN) et (PQ) sont –elles parallèles ? Justifier



Exercice 19

Un fabriquant d'enseignes lumineuses doit réaliser la lettre Z (en tubes de verre soudés) pour la fixer sur le haut d'une vitrine.



Les droites (AD) et (BC) se coupent en O. Sachant que (AB) // (CD). Calculer AB et OB.

Exercice 20

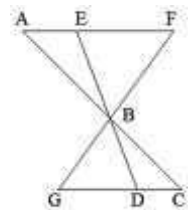
L'unité est le centimètre. ABC est un triangle tel que : AB = 5, AC = 4 et BC = 7. E est le point de [AB] tel que AE = 2. La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.

1) Faire la figure.

2) Citer deux triangles semblables de la figure.

3) Montrer que AF = 1,6.

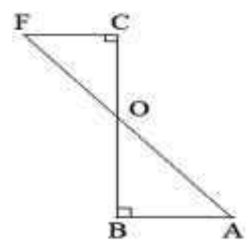
Exercice 21



La figure ci – contre :

Sachant que (AF) // (GC), AB = 5 cm, BC = 6 cm, AE = 4 cm, BE = 3 cm et GF = 9 cm. Calculer DC, ED et BG.

Exercice 22



La figure ci – contre :

Les droites (BC) et (AF) se coupent en O, AB = 4 cm, OB = 3 cm, OC = 6 cm.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CF) sont parallèles.

2) Montrer que la distance OA = 5 cm.

3) Calculer OF et CF.

4) Pourquoi les angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OCF}$ ont la même mesure ? Justifier.

SYMETRIE CENTRALE – SYMETRIE ORTHOGONALE

Résumé du cours

I) Symétrie centrale

1) Rappels

a) Définition

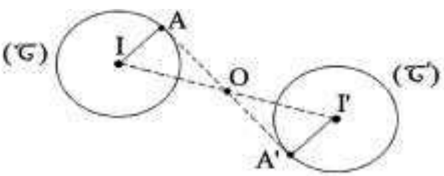
On appelle symétrie centrale de centre O, l'application du plan P dans lui – même qui à tout point M associe le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$. La symétrie de centre O est notée S_O. Le point M' est appelé symétrique du point M par rapport à O et on note $S_O(M) = M'$.

Remarque : Le point O est appelé centre de symétrie, son symétrique est lui – même. On dit que O est invariant.

b) Symétriques des figures simples

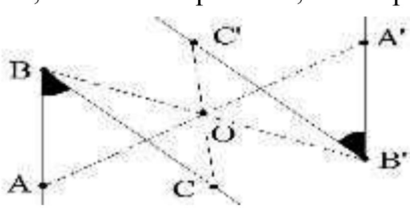
b.1) Symétrique d'un cercle

Exemple : Construire un cercle ($\mathcal{C}$) de centre I et de rayon 3 cm puis placer un point A sur ce cercle. Placer un point O à l'extérieur du cercle. Construire le cercle ($\mathcal{C}$') symétrique de ($\mathcal{C}$) par rapport à O.



b-2) Symétrique d'un angle

Exemple : Construire un angle $\widehat{ABC}$ puis placer un point O. Construire le symétrique A', B' et C' des points A, B et C par rapport à O.



c) Propriétés

Par la symétrie centrale :

- le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
- le symétrique d'un segment est un segment de même longueur ;
- le symétrique du milieu d'un segment est le milieu d'un segment ;
- le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.
- le symétrique d'un triangle est un triangle.
- le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.
- les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;
- les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
- le symétrique d'une figure est une figure de même nature.

II) Composée de deux symétries centrales

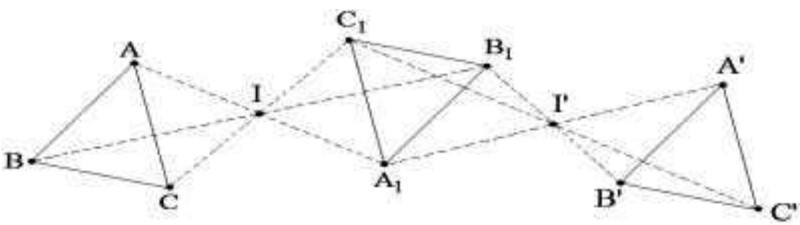
Soit I et J deux points distincts du plan. Construire le symétrique d'une figure par la composée par S_I puis par S_J revient à construire ce symétrique par $S_J \circ S_I$.

$S_J \circ S_I$ se lit : symétrie par rapport à I suivie de la symétrie par rapport à J ou encore S_J rond S_I.

1) Images de figures simples par la composée de deux symétries centrales

a) Image d'un triangle

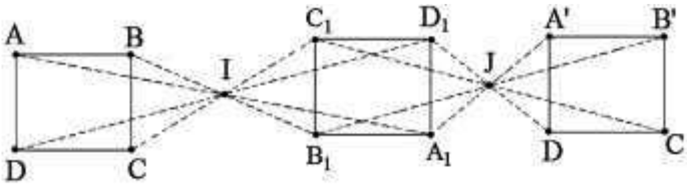
A, B, C, I et I' sont cinq points distincts du plan. Construire le triangle $A_1B_1C_1$ symétrique du triangle ABC par rapport à I. Construire le triangle A'B'C' symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par rapport à I'.



Remarque : $S_{I'} \circ S_I(ABC) = A'B'C'$.

b) Image d'un carré

ABCD est un rectangle. I et J sont deux distincts du plan. Construire le carré $A_1B_1C_1D_1$ symétrique du carré ABCD par rapport à I. Construire le carré A'B'C'D' symétrique du carré $A_1B_1C_1D_1$ par rapport à J.



Remarque : S_J o S_I(ABCD) = A'B'C'D'.

2) Propriétés

Propriété 1 : La composée de la symétrie centrale S_I suivie de la symétrie centrale S_J notée S_J o S_I est une translation du vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

Propriété 2 : Par la composée de deux symétries centrales le symétrique :

- d'un segment est un segment de même longueur ;
- d'une droite est une droite ;
- d'un triangle est un triangle de même nature ;
- d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- d'une figure est une figure de même nature.

II) Symétrie orthogonale

1) Rappels

a) Définition

On appelle symétrie orthogonale par rapport à une droite (D), l'application du plan P dans lui – même qui à tout point M associe le point M' tel que la droite (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$.

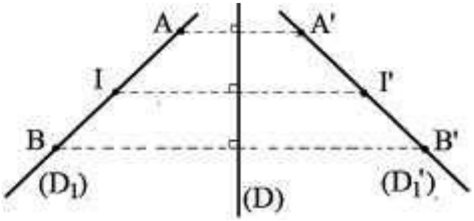
La symétrie orthogonale d'axe (D) est notée $S_{(D)}$. Le point M' est appelé symétrique du point M par rapport à (D) et on note $S_{(D)}(M) = M'$.

Remarque : Le symétrique d'un point appartenant à la droite (D) est le point lui – même. On dit que la droite (D) est invariante.

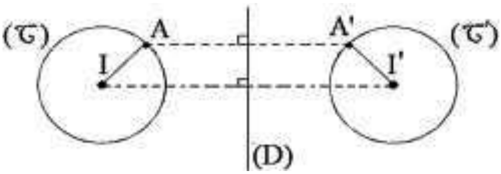
b) Symétriques des figures simples

Exemple 1 : Tracer une droite (D_1) puis placer les points A, B et I sur la droite (D_1) tel que I soit milieu du segment [AB].

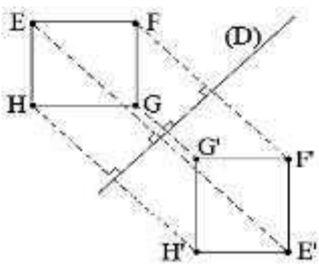
Tracer une (D) puis construire les symétriques A', B', I' et (D_1') respectifs de A, B, I et (D_1) par rapport à (D).



Exemple 2 : Construire un cercle (C) de centre I et de rayon 3 cm puis placer un point A sur ce cercle. Tracer une droite (D) à l'extérieur du cercle. Construire le cercle (C') symétrique de (C) par rapport à (D).



Exemple 3 : Construire un carré EFGH puis tracer une droite (D) à l'extérieur du carré. Construire les symétriques E', F', G' et H' des points E, F, G et H par rapport à (D).



c) Propriétés

Par la symétrie orthogonale :

- le symétrique d'une droite est une droite ;
- le symétrique d'un segment est un segment de même longueur
- le symétrique du milieu d'un segment est le milieu d'un segment.
- le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.
- le symétrique d'un carré est un carré.
- les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

2) Composée de deux symétries orthogonales

Soit (D) et (D') deux droites distinctes. Construire l'image d'une figure par la composée par $S_{(D)}$ puis par $S_{(D')}$ revient à construire cette image par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

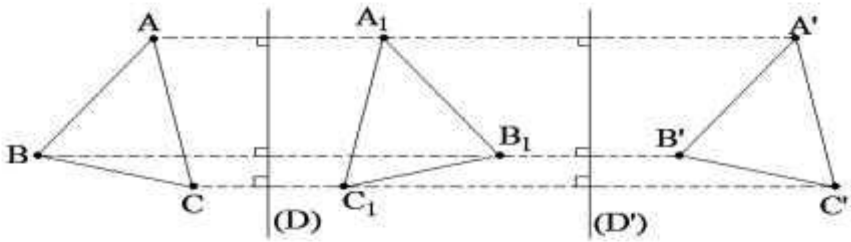
$S_{(D')} \circ S_{(D)}$ se lit : symétrie d'axe (D) suivie de la symétrie d'axe (D') ou encore $S_{(D')}$ rond $S_{(D)}$.

a) Images de figures simples par la composée de deux symétries orthogonales

a.1) D'axes parallèles

a.1.1) Image d'un triangle

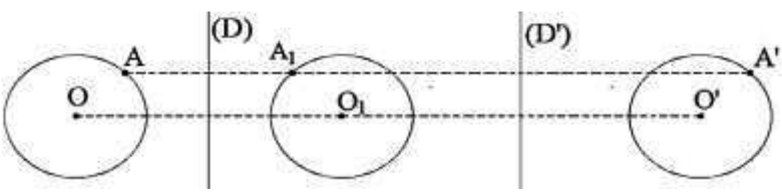
ABC est un triangle. (D) et (D') sont deux droites parallèles. Construire le triangle $A_1B_1C_1$ image du triangle ABC par la symétrie d'axe (D). Construire le triangle A'B'C' image du triangle $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe (D').



Remarque : $S_{(D')} \circ S_{(D)}(ABC) = A'B'C'$.

a.1.2) Image d'un cercle

(D) et (D') sont deux droites parallèles. ($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O et de rayon R. Placer un point A sur le cercle. Construire le cercle ($\mathcal{C}_1$) image du cercle ($\mathcal{C}$) par la symétrie d'axe (D). Construire le cercle ($\mathcal{C}$') image du cercle ($\mathcal{C}_1$) par la symétrie d'axe (D').

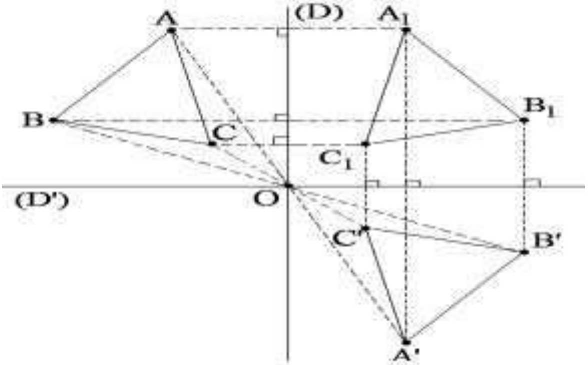


Remarque : $S_{(D')} \circ S_{(D)}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

a.2) D'axes perpendiculaires

a.2.1) Image d'un triangle

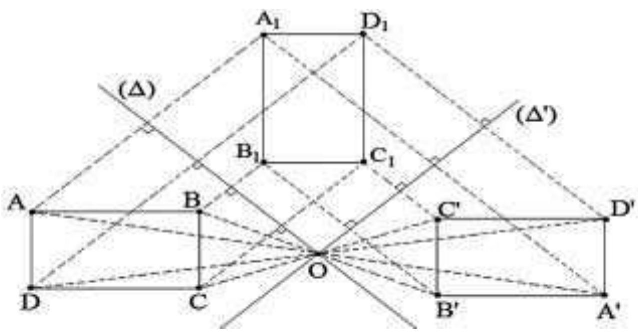
ABC est un triangle. (D) et (D') sont deux droites perpendiculaires en O. Construire le triangle $A_1B_1C_1$ image du triangle ABC par la symétrie d'axe (D). Construire le triangle A'B'C' image du triangle $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe (D').



Remarque : $S_{(D')} \circ S_{(D)}(ABC) = A'B'C'$.

a.2.2) Image d'un rectangle

ABCD est un rectangle. (Δ) et (Δ') sont deux droites perpendiculaires en O. Construire le rectangle $A_1B_1C_1D_1$ image du rectangle ABCD par la symétrie d'axe (Δ). Construire le rectangle A'B'C'D' image du rectangle $A_1B_1C_1D_1$ par la symétrie d'axe (Δ').



Remarque : $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}(ABCD) = A'B'C'D'$.

b) Propriétés

Propriété 1

❖ La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation de vecteur.

❖ La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale de centre le point d'intersection des deux axes.

Propriété 2

Par la composée de deux symétries orthogonales :

❖ l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
❖ l'image d'une droite est une droite ;
❖ l'image d'un triangle est un triangle de même nature ;
❖ l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
❖ l'image d'une figure est une figure de même nature.

Propriété 3

La composée de deux symétries orthogonales conserve les distances ; les mesures des angles ; l'orthogonalité ; le parallélisme ; le point d'intersection des deux axes (on dit que le point d'intersection est invariant).

Série d'exercices

Exercice 1

1) Tracer un triangle ABC. Placer un point O à l'extérieur du triangle.
2) Construire le triangle A'B'C' symétrique du triangle ABC par rapport à O.

Exercice 2

1) Tracer un rectangle NAMO de centre I.
2) Compléter le tableau ci-contre

S_I	
N	
A	
M	
O	

Exercice 3

1) Construire un triangle IJL tels que : IJ = 4cm, IL = 3cm et JL = 5cm.
2) Placer le point O milieu du segment [JL].
3) Construire le point K symétrique du point I par rapport O.
4) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

Exercice 4

1) Tracer un segment [IJ] de 4cm puis le cercle (C) de diamètre [IJ].
2) Placer le point A extérieur au cercle. Construire le symétrique (C') de (C) par rapport au point A.
3) Comparer les distances IJ et I'J'.

Exercice 5

MNOP est un carré. I et J deux points extérieurs au carré.

1) Construire le symétrique ABCD de MNOP par la symétrie de centre I.

2) Construire le symétrique EFGH de ABCD par la symétrie de centre J.

3) Compléter le tableau ci-contre :

S_I o S_J	
M	
N	
O	
P	

Exercice 6

1) Tracer un triangle AMP rectangle en A puis placer les points O et S extérieurs au triangle.

2) Construire le triangle BCN symétrique du triangle AMP par rapport à O.

3) Construire le triangle TRV symétrique du triangle BCN par rapport à S.

4) Quelle est la nature du triangle TRV ?

5) Quelle est l'image du triangle AMP par la symétrie par rapport à O suivie de la symétrie par rapport à S ?

Exercice 7 : BEPC 2000

Dans un triangle ABC, I milieu de [AB], J milieu de [AC], K est le symétrique de J par rapport à C. La droite (IK) coupe (BC) en L.

1) Faire la figure soignée.

2) Démontrer que (IJ) est parallèle à (BC).

3) Démontrer que L est le milieu de [KI].

Exercice 8

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites perpendiculaires et A un point du plan n'appartenant ni à (Δ_1) ni à (Δ_2).

a) Construire :

- L'image B de A par S_{Δ_1}, soit $S_{\Delta_1}(A) = B$
- L'image C de B par S_{Δ_2}, soit $S_{\Delta_2}(B) = C$
- L'image D de C par S_{Δ_1}, soit $S_{\Delta_1}(C) = D$

b) Quelle est l'image de la droite (BC) par S_{Δ_1}?

c) En déduire que $S_{\Delta_2}(D) = A$

Exercice 9

1) Tracer un triangle RTV et placer le point O milieu de [TV].

2) Construire :

a) Le symétrique S de T par rapport à la droite (RV) ;

b) Le symétrique N de O par rapport à la droite (TS).

Exercice 10

1) STM est un triangle et une droite. Construire le symétrique VOI de STM par rapport à la droite (D).

2) CASE est rectangle et (Δ) une droite. Construire le symétrique BRUL de CASE par rapport à la droite (Δ).

3) TAXI est un losange et (D) une droite. Construire le symétrique PNEU de TAXI par rapport à (D).

Exercice 11

1) Soit (C) un cercle de centre E et de rayon 2,5 cm. Tracer une (D) extérieur au triangle. Construire le symétrique (C') de (C) par rapport à (D).

2) a) Construire un triangle BIC puis placer les points K et L milieux respectifs des segments [BI] et [IC].

b) Construire le symétrique du triangle BIC par rapport à (KL).

Exercice 12

1) Construire un carré NAMO de 3 cm de côté. Construire :

a) L le symétrique de N par rapport à (AM) ;

b) I le symétrique de A par rapport à (MO) ;

c) V le symétrique de M par rapport à (ON) et

d) R le symétrique de O par rapport à (NA).

2) Quelle est la nature du quadrilatère LIVR ?

Exercice 13

ABC est un triangle. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC]. M est un point intérieur au triangle ABC.

1) Construis le point D symétrique de M par rapport à A' et le point E symétrique de M par rapport à B'.

2) Démontrer que le quadrilatère ABDE est un parallélogramme.

Exercice 14

ABC est un triangle. Le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC) et C', est le symétrique de C par rapport à (AB).

1) Faire la figure.

2) Démontrer que BC' = B'C.

Exercice 15

EFGH est un carré de centre O. les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [EF], [FG], GH] et [HE]. On désigne par :

A : $S_{(EG)}$ suivie de $S_{(FH)}$

B : $S_{(EG)}$ suivie de $S_{(IJ)}$

Complète les tableaux ci-contre.

A	
O	
E	
F	
G	
H	

B	
O	
H	
L	
K	

Exercice 16

On donne les droites (D_1) et (D_2) perpendiculaire, trois points A, B et C n'appartenant ni à (D_1) ni (D_2).

1) Construire les points A_1, B_1 et C_2 images respectives de A, B et C par $S_{(D1)}$

2) Construire les points A', B' et C' images respectives de A, B et C par $S_{(D2)}$.

3) Complète les tableaux ci-contre :

$S_{(D1)}$	
A	
C	
B	

$S_{(D2)}$	
A	
C	
B	

Exercice 17

Soient (D) et (D_1) deux droites perpendiculaire. M et A sont deux points distincts n'appartenant ni à (D) ni (D_1).

1) Construire le point N image de M par $S_{(D)}$; le point P image de N par $S_{(D1)}$

2) a) Par quelle application du plan le point P est – il l'image de M ?

b) Construire par cette application l'image B du point A.

TRANSLATION

Résumé du cours

I) Rappels

1) Définition

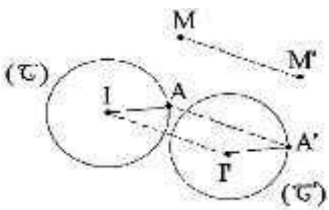
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$, l'application du plan, qui à tout point M associe le point M' tels que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On note $t_{\vec{u}}$(M) = M' et on lit : « M' symétrique (image) de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2) Construction des images de figures simples par une translation

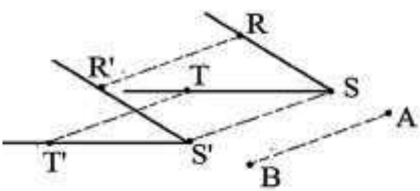
a) Symétrique d'un cercle

Exemple : Construire un cercle ($\mathcal{C}$) de centre I et de rayon 3 cm puis placer un point A sur ce cercle. Placer deux points M et M' à l'extérieur du cercle. Construire le cercle ($\mathcal{C}$ ') symétrique de ($\mathcal{C}$) par la translation qui transforme M en M'.



b) Symétrique d'un angle

Exemple : Construire un angle $\widehat{RST}$ puis placer deux points A et B. Construire les symétriques R', S' et T' des points R, S et T par la translation qui transforme A en B.



3) Propriétés : Par la translation :

- ❖ le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
- ❖ le symétrique d'un segment est un segment de même longueur ;
- ❖ le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon ;

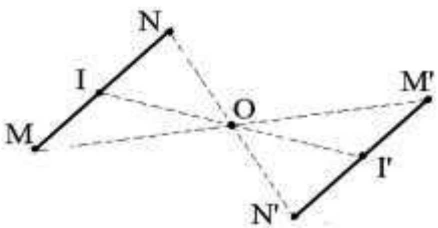
- ❖ le symétrique d'un triangle est un triangle de même nature ;
- ❖ les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;
- ❖ les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
- ❖ le symétrique d'un angle est un angle de même mesure ;
- ❖ le symétrique d'une figure est une figure de même nature.

3) Propriétés de conservation

a) Conservation du milieu d'un segment

Propriété : Par la symétrie centrale, l'image du milieu d'un segment est le milieu d'un segment. Alors les deux segments sont parallèles et de même longueur. On dit que la symétrie centrale conserve le milieu du segment et les longueurs.

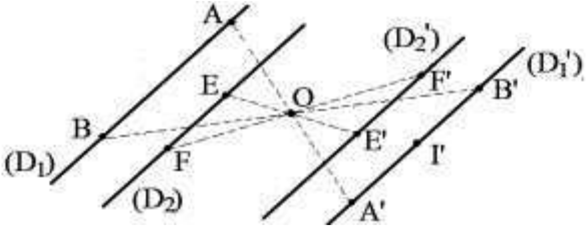
Exemple : En construisant le segment [M'N'], symétrique du segment [MN] par rapport au point O, on constate que MN = M'N'. Si I est milieu du segment [MN] alors son symétrique I' par rapport à O est milieu du segment [M'N'].



b) Conservation du parallélisme de deux droites

Propriété : Par la symétrie centrale, les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles. On dit que la symétrie centrale conserve le parallélisme.

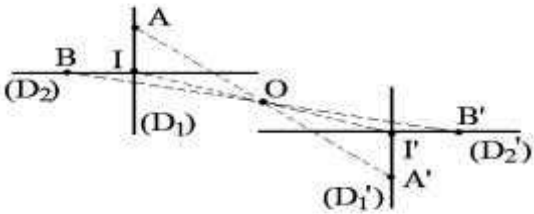
Exemple : En construisant les droites (D'_1) et (D'_2), symétriques respectifs des droites parallèles (D_1) et (D_2) par rapport au point O, on constate que les droites (D'_1) et (D'_2) sont parallèles.



c) Conservation de la perpendicularité de deux droites

Propriété : Par la symétrie centrale, les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. On dit que la symétrie centrale conserve la perpendicularité.

Exemple : En construisant les droites (D'_1) et (D'_2), symétriques respectifs des droites perpendiculaires (D_1) et (D_2) par rapport au point O, on constate que les droites (D'_1) et (D'_2) sont perpendiculaires.



4) Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est appelée relation de Chasles.

II) Composée de deux translations

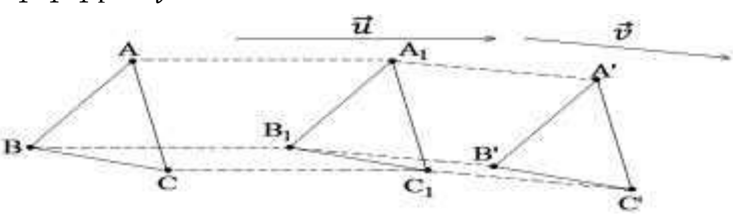
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts du plan. Construire le symétrique d'une figure par la composée $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ revient à construire ce symétrique par $t_{\vec{v}}$ o $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{v}}$ o $t_{\vec{u}}$ se lit : translation du vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation du vecteur $\vec{v}$ ou encore $t_{\vec{v}}$ rond $t_{\vec{u}}$.

1) Images de figures simples par la composée de deux translation

a) Image d'un triangle

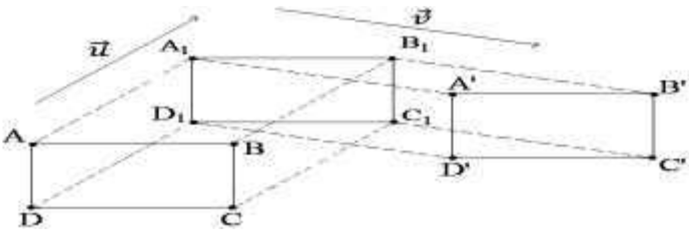
ABC est un triangle. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Construire le triangle $A_1B_1C_1$ image du triangle ABC par $t_{\vec{u}}$. Construire le triangle A'B'C' image du triangle $A_1B_1C_1$ par $t_{\vec{v}}$.



Remarque : $t_{\vec{v}}$ o $t_{\vec{u}}$ (ABC) = A'B'C'.

b) Image d'un rectangle

ABCD est un rectangle. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Construire le rectangle $A_1B_1C_1D_1$ image du rectangle ABCD par $t_{\vec{u}}$. Construire le rectangle A'B'C'D' image du rectangle $A_1B_1C_1D_1$ par $t_{\vec{v}}$.



Remarque : $t_{\vec{v}}$ o $t_{\vec{u}}$ (ABCD) = A'B'C'D'.

III) Multiplication d'un vecteur par un réel

1) Produit d'un vecteur par un réel

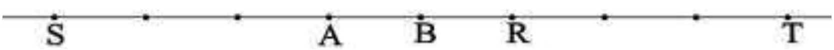
a) Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ deux vecteurs non nuls du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle produit d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tels que : (AB) // (MN) et $\overrightarrow{MN} = k \times \overrightarrow{AB}$.

- Si $k > 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont le même sens ⇒ MN = k ×AB.
- Si $k < 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont de sens contraires ⇒ MN= $-k$ ×AB.

Exemple : On considère A et B deux points distincts du plan. Construire les points R, S et T tels que : $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AS} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AT} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AR}$



b) Propriétés

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs du plan ; x et y des réels non nuls :

- $x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{CD}$;
- $(x + y)\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB}$;
- $(x.y)\overrightarrow{AB} = x(y.\overrightarrow{AB})$;
- $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

- $x.\vec{0} = \vec{0}$
- $0.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Exercice d'application

Simplifier les expressions suivantes :

a) $4(-3\overrightarrow{AB})$; b) $2\left(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}\right)$; c) $\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; d) $2\left(\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right) - \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

Correction

a) $4(-3\overrightarrow{AB}) = -12\overrightarrow{AB}$.

b) $2\left(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}\right) = 10\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{CD}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{4+3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$.

d) $2\left(\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right) - \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$2\left(\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right) - \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) = \frac{6-2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{9-1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{8}{3}\overrightarrow{CD}$

2) Vecteurs colinéaires

a) Définition

Deux vecteurs du plan $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

$\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$.

Exemple : On donne les expressions : $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF}$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Correction

$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{EF} = 6 \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

b) Alignement des points

Trois (3) points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est – à – dire $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$.

Exemple : On donne les expressions : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MN} = -4\overrightarrow{AC}$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Correction

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MN} = 2 \times -4\overrightarrow{AC} = -8\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AB} = -8\overrightarrow{AC}$ donc les points A, B et C sont alignés.

c) <u>Droites parallèles</u>

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

<u>Remarque</u> : Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

d) <u>Vecteur directeur d'une droite</u>

On appelle vecteur directeur d'une droite (D), tout vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ de même direction que (D) c'est-à-dire que (AB) // (D).

<u>Série d'exercices</u>

<u>Exercice 1</u>

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, trois points A, B et C. M est un point du plan.

1) Construire les points A_1, B_1 et C_1, images respectives de A, B et C par la translation du vecteur $\vec{u}$.

2) Construire les points A' et B' et C', images respectives de A_1, B_1 et C_1 par la translation du vecteur $\vec{v}$.

3) Représente en rouge $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$. Que constates-tu ?

4) Trouver une application qui à tout point M associe son image M' par la translation de suivie du vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation du vecteur $\vec{v}$.

<u>Exercice 2</u> : 1er groupe BEPC 2010

a) Construire un triangle quelconque ABC. Placer le point D symétrique du point A par rapport au point B et le point E image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation dont on précisera le vecteur.

<u>Exercice 3</u>

Soit un triangle ABC et I, J et K milieux respectives des cotés [AB], [AC] et [BC].

1) Quelle est l'image du triangle AIJ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$? Justifier.

2) Quelle translation amène le triangle JKC sur le triangle IBK ? Justifier.

Exercice 4

ABD est un triangle tels que AD = 5 cm, AB = 4 cm et BD = 8 cm. Soit I un point de [AD] tel que AI = 2 cm. La parallèle à (BD) passant par I coupe [AB] en J.

1) Calculer AJ et IJ.

2) Construire le point C image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 5 : BEPC 1999

A, B et C sont trois points non alignés, D est un point de [BC].

1) Construire les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

2) Démontrer que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD}$;$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{GD}$

Exercice 6

Soit DEF un triangle isocèle en D. Soient S et R les symétriques respectifs des points E et F par rapport au point D.

1) Quelle est la nature du quadrilatère RSFE ? Justifier

2) Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{ED}$, un vecteur égal à $\overrightarrow{ER}$

3) Compléter les égalités suivantes : $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \cdots$; $\overrightarrow{FS} + \overrightarrow{FE} = \cdots$

Exercice 7

ABC est un triangle quelconque.

1) Placer les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CA}$

2) Démontrer que C est milieu de [MN]

3) On donne les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

Exercice 8

A, B et C sont trois points non alignés

1) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$

2) Démontrer que les droites (CB) et (EF) sont parallèles

<u>Exercice 9</u> : BEPC 2003

BEP est un triangle rectangle en E tel que : EP = 8 cm et EB = 6 cm. Les points I, C et F sont tels que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$; $t_{\overrightarrow{EB}}(P) = C$ et $\overrightarrow{PF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{PC}$. Soit A le point de [BP] tel que PA = x et FA = 4 cm.

1) Faire la construction et tracer le cercle circonscrit au triangle BEP.

2) Calculer BP.

3) Quelle est la nature du quadrilatère BEPC ?

4) Trouver x pour que le triangle PAF soit rectangle.

<u>Exercice 10</u>

1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$. La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.

3) En déduire que B est le milieu de [EF].

4) On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B. Démontrer que. $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

<u>Exercice 11</u>

Réduire la somme suivante sans faire des constructions :

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{HK}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GK}$

3) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{SA}$

4) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{IV} + \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{VT} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{PO}$

5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

6) $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{VL} + \overrightarrow{RV} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{ML}$

7) $\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{TN} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CA}$

8) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{TV}$

COORDONNEES D'UN VECTEUR

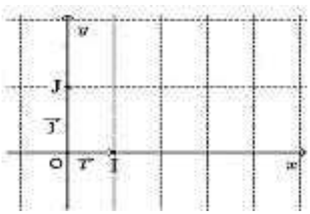
Résumé du cours

I) Rappels

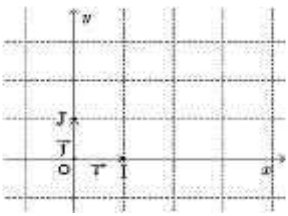
1) Repères du plan

Trois points non alignés O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).

❖ Dans un **repère orthogonal**, les axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et OI ≠ OJ.



❖ Dans un **repère orthonormé**, les axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et OI = OJ.



- ✓ La droite (OI) support du vecteur unitaire $\vec{i}$ est appelée axe des abscisses et $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.
- ✓ La droite (OJ) support du vecteur unitaire $\vec{j}$ est appelée axe des ordonnées et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$
- ✓ Le point O, point d'intersection des deux axes est appelé origine du repère.

Remarque :

- ✓ L'axe des abscisses est souvent horizontal, mais ce n'est pas une obligation.
- ✓ Le point I donne l'unité de l'axe des abscisses.
- ✓ Le point J donne l'unité de l'axe des ordonnées.
- ✓ Le repère (O, I, J) peut être aussi noté (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

2) Couple de coordonnées d'un point

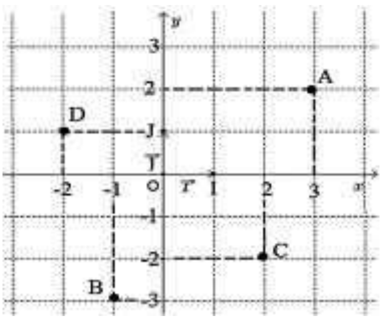
On considère un repère (O, I, J) du plan et un point M quelconque.

❖ En traçant la parallèle à (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'abscisse x_M du point M.

❖ En traçant la parallèle à (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'ordonnée y_M du point M.

❖ Le couple de réels (x_M ; y_M) est le couple de coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).

Exemple :



A(3 ; 2) ; B(−1 ; −3) ; C(2 ; −2) et D(−2 ; 1).

Remarque :

❖ Le couple (x ; y) est différent du couple (y ; x).

❖ Le coupe de coordonnées d'un point est noté (x ; y) ou $\binom{x}{y}$.

❖ Le couple (x ; y) est différent de la paire $\{x\ ;\ y\}$ dans laquelle l'ordre des éléments n'a pas d'importance.

3) Coordonnées du milieu d'un segment

Soit A et B deux points du plan muni d'un repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) tels que : A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$.

Si on note I milieu du segment [AB]alors : I$\left(\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{matrix}\right)$.

Exemple : Soit A(5 ; 1) ; B(1 ; −3). Calculer les coordonnées du point E milieu du segment [AB].

E milieu du segment [AB]alors : E$\left(\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{matrix}\right)$⇒ E$\left(\begin{matrix}\frac{5+1}{2}\\ \frac{1-3}{2}\end{matrix}\right)$⇒ E$\left(\begin{matrix}\frac{6}{2}\\ \frac{-2}{2}\end{matrix}\right)$⇒ E$\binom{3}{-1}$.

II) Coordonnées d'un vecteur

1) Définition et notation

Soit A et B deux points du plan muni d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) tels que : A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$, on appelle coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple des réels $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$. Il est noté $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.

Exemple : Soit A(1 ; 3) ; B(−2 ; 2) et C(4 ; −1). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{-2-1}{2-3} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$.

$\overrightarrow{AC}\binom{x_C-x_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\binom{4-1}{-1-3} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\binom{3}{-4}$.

$\overrightarrow{CB}\binom{x_B-x_C}{y_B-y_C} \Rightarrow \overrightarrow{CB}\binom{-2-4}{2+1} \Rightarrow \overrightarrow{CB}\binom{-6}{3}$.

Remarque : L'expression du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ est

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$.

2) Coordonnées d'une somme

Soit le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on donne $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. Alors $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $(\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit $\vec{u}\binom{1}{-1}$ et $\vec{v}\binom{2}{0}$.

$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow (\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix} 1-2 \\ -1-0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ un vecteur du plan et k un nombre réel. Alors $k.\vec{u}\binom{k.x}{k.y}$.

Exemple : Soit $\vec{u}\binom{-2}{3}$.

$2\vec{u}\binom{2\times-2}{2\times3} \Rightarrow 2\vec{u}\binom{-4}{6}$

$-\frac{3}{4}\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\times-2 \\ -\frac{3}{4}\times3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{3}{4}\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{6}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{3}{4}\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$

III) Egalités de deux vecteurs

Soit le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$), on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Si $\vec{u}=\vec{v}$ alors $\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$.

Exemple 1 : Soit A(0 ; 3) ; B(1 ; 2) ; C(−2 ; 4) et D(−1 ; 3). Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\2-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1+2\\3-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{\overrightarrow{AB}}=x_{\overrightarrow{CD}}\\y_{\overrightarrow{AB}}=y_{\overrightarrow{CD}}\end{cases}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

Exemple 2 : Soit A(3 ; 2) ; B(−1 ; 1) et C(2 ; 0). Calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\1-2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-2\\y_D-0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D-2=-4\\y_D-0=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_D=-4+2\\y_D=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_D=-2\\y_D=-5\end{cases} \Rightarrow$ D(−2 ; −1).

IV) Condition de colinéarité de deux vecteurs

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy'-x'y=0$.

Exemple 1 : Soit $\vec{u}$ (2 ; 1) et $\vec{v}$ (6 ; 3). Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy'-x'y=0 \Rightarrow 2\times 3-6\times 1=6-6=0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 2 : Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3-x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x+3\\1\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy'-x'y=0 \Rightarrow 1(3-x)-2(x+3)=0$

$\Rightarrow 3-x-2x-6=0 \Rightarrow -3x-3=0 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{3}=-1$.

V) Calcul dans un repère orthonormé

1) Produit scalaire

Soit (O, $\vec{i}, \vec{j}$) un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

<u>Exemple</u> : Soit $\vec{u}\binom{-1}{2}$ et $\vec{v}\binom{3}{4}$. Calculer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = -1 \times 3 + 2 \times 4 = -3 + 8 = 5.$

2) <u>Condition d'orthogonalité de deux vecteurs</u>

Soit (O, $\vec{i}, \vec{j}$) un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow xx' + yy' = 0.$

<u>Exemple 1</u> : Soit $\vec{u}$ (1 ; −3) et $\vec{v}$ (6 ; 2). Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow xx' + yy' = 0 \Rightarrow 1 \times 6 - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

<u>Exemple 2</u> : Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{u}\binom{x-2}{4}$ et $\vec{v}\binom{-3}{x-1}$ soient orthogonaux.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow xx' + yy' = 0 \Rightarrow -3(x-2) + 4(x-1) = 0$

$\Rightarrow -3x + 6 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$

3) <u>Distance de deux points</u>

La distance de deux points est la plus petite longueur du segment reliant ces deux points. Si dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ alors

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

<u>Exemple</u> : Soit A(1 ; 3) ; B(−2 ; 2) et C(4 ; −1). Calculer les distances AB, AC et CB.

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$

AB = $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

AC = $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

CB = $\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2}$

CB = $\sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

4) <u>Norme de vecteurs</u>

Soit A et B deux points d'un repère orthonormé. On appelle norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, la distance de A à B telle que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2}$.

Exemple : Soit A(1 ; 3) ; B(−2 ; 2) et C(4 ; −1). Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(x_{\overrightarrow{AB}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{AB}}\right)^2}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\left(x_{\overrightarrow{AC}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{AC}}\right)^2}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B-x_C \\ y_B-y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -2-4 \\ 2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{\left(x_{\overrightarrow{CB}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{CB}}\right)^2}$

$\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Remarque :

- Un vecteur dont la norme est 1 est appelé vecteur unitaire.
- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Exercice d'application 1

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$. On donne : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Placer ces points dans le repère.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Calculer les distances AB, AC et BC puis en déduire la nature du triangle ABC.

4) Calculer les coordonnées du point D image de C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

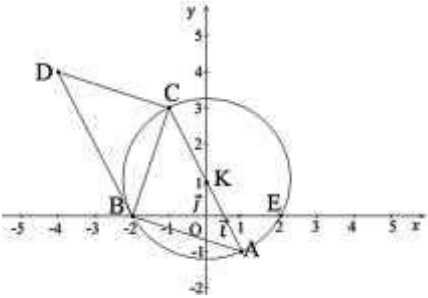
a) Calculer les coordonnées de son centre K.

b) Calculer son rayon.

6) Le point E(2 ; 0) appartient – il au cercle $(\mathcal{C})$?

Correction

1) Plaçons les points A, B et C dans le repère.



2) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}\binom{-2-1}{0+1} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}\binom{-3}{1}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AC}}\binom{-1-1}{3+1} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AC}}\binom{-2}{4}$.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{BC}}\binom{-1+2}{3-0} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{BC}}\binom{1}{3}$.

3) Calculons les distances AB, AC et BC puis déduisons la nature du triangle ABC.

$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}})^2 + (y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}})^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

$\mathrm{AC} = \sqrt{(x_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}})^2 + (y_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}})^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\mathrm{BC} = \sqrt{(x_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}})^2 + (y_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}})^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

AB = BC = $\sqrt{10}$ alors ABC est un triangle isocèle en B.

$\mathrm{AB}^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$; $\mathrm{AC}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$; $\mathrm{BC}^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$.

20 = 10 + 10 $\Rightarrow \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$.

Alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est un triangle rectangle en B.

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

4) Calculons les coordonnées du point D image de C par la translation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\mathrm{C}) = \mathrm{D} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\binom{-3}{1}$; $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix} x_D + 1 \\ y_D - 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = -3 \\ y_D - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 - 1 = -4 \\ y_D = 1 + 3 = 4 \end{cases}$ alors D$\binom{-4}{4}$

5) a) Calculons les coordonnées de son centre K.

K centre du cercle est milieu du segment [AC] alors K$\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_C}{2} \\ \frac{y_A+y_C}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ K$\begin{pmatrix} \frac{1-1}{2} \\ \frac{-1+3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ K$\begin{pmatrix} \frac{0}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ K$\binom{0}{1}$.

b) Calculons son rayon.

r = $\frac{d}{2} = \frac{\mathrm{AC}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ cm.

6) Vérifions si le point E(2 ; 0) appartient au cercle ($\mathcal{C}$).

E ∈ ($\mathcal{C}$) ⇔ KE = r.

KE = $\sqrt{(x_E - x_K)^2 + (y_E - y_K)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$

KE $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = r$ alors E ∈ ($\mathcal{C}$).

Série d'exercices

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on donne les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{BO} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OC} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$;
$\overrightarrow{OD} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OE} = -2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OF} = 3\vec{\imath}$; $\overrightarrow{GO} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OH} = -2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$;
$\overrightarrow{OI} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OJ} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.

2) Placer les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J dans le repère.

Exercice 2

Soient A(−1 ; 4) ; B(2 ; 1) ; C(−4 ; −5) et D(−2 ; 1).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$; $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$; $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$; $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

2) Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

3) Calculer les distances AB ; AC ; AD ; BD ; BC et DC.

Exercice 3

1) Déterminer x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{x+2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2x+3}{y-1}$ soient égaux.

2) On donne A$\binom{x}{-1}$, B$\binom{3}{2}$ et C$\binom{4}{1}$. Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), placer les points A$\binom{-1}{3}$; $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$; C$\binom{-2}{5}$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

3) Quelles sont les coordonnées du point N sachant que $\overrightarrow{AN} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$.

4) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment [AB].

5) Calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 5

a) Les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$ sont – ils colinéaires ?

b) Les points A(1 ; 2) ; B(3 ; 3) et C(−1 ; 1) sont – ils alignés ?

c) Trouver x pour que les points A(−3 ; −4) ; B(x ; 3) et C(2 ; 1) soient alignés.

d) Soient A(−3 ; −1), B(1 : 1), C(−3 ; −3) et D(3 ; 0).

Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

On donne $\overrightarrow{AB}(-\frac{1}{3}$; 2) ; $\overrightarrow{CD}(2$; $\frac{5}{3})$; $\overrightarrow{EF}(4$; $\frac{2}{3})$.

Deux d'entre eux sont orthogonaux. Trouve-les.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On donne $\overrightarrow{AB}(-\frac{1}{2}$; x) ; $\overrightarrow{CD}(\frac{2}{3}$; 2).

Trouver x pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient orthogonaux.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On donne : A$\binom{2}{2}$; B$\binom{4}{0}$; C$\binom{-3}{-3}$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Exercice 9

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$), on donne les points : M (-2 ; 3) ; N (3 ; 1) ; P (0 ; -2).

1) Calculer les distances MN et MP.

2) Quelle est la nature du triangle MNP ?

Exercice 10

(O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) est un repère orthonormé. On donne les points M(-3 ; 4) ; N(2 ; -3) et $\vec{u}$(4 ; -1). Calculer les coordonnées des points R et S tels que : $\overrightarrow{MR} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{SN} = \vec{u}$.

Exercice 11

Dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), on donne les points : M (-2 ; -2) ; N (-4 ; 4) ; Q (2 ; 6) ; P (4 ; 0).

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ sont orthogonaux.

2) Calculer les distances MN et MP.

3) Quelle est la nature du triangle MNP ?

4) Démontrer que le quadrilatère MNQP est un carré.

Exercice12 : **2e groupe BEPC 2009**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$), les points A, B et C sont définis par : $\overrightarrow{OA} = -5\vec{i} + 5\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - 3\vec{j}$; $\overrightarrow{BC} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$

1) a) Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

b) Placer les points A, B et C dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$). On complètera la figure au fur et à mesure.

2) On donne C(7 ; 1)

a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Quelle est la nature du triangle ABC.

3) Soit H la projection orthogonale de B sur (AC), calculer la distance BH.

4) Soit D, le symétrique du point B par rapport à H, quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 13

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$). On donne : A$\binom{2}{2}$; B$\binom{0}{6}$; C$\binom{-2}{0}$.

1) Placer ces points dans le repère.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Calculer les distances AB, AC et BC puis en déduire la nature du triangle ABC.

4) Calculer les coordonnées du point D image de C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Calculer les coordonnées de son centre K.

b) Calculer son rayon.

6) Montrer que le point D appartient au cercle.

Exercice 14

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points $A\binom{-1}{-3}$, $B\binom{-4}{1}$ et $C\binom{3}{0}$.

1) a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

c) Calculer les distances AB et AC.

d) En déduire la nature du triangle ABC.

2) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer les coordonnées de son centre I ainsi que son rayon r.

Exercice 15

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, place les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OC} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1) Calculer les distances AB ; AC et BC.

2) Montrer que ABC est triangle rectangle isocèle.

3) Soit (C) le cercle de centre I circonscrit au triangle ABC.

a) Déterminer les coordonnées du point I.

b) Calculer le rayon r du cercle (C).

4) Déterminer les coordonnées des points D et E respectivement images de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et par la symétrie de centre I.

5) Montrer que C est milieu de [DE].

Exercice 16

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On donne : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OB} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{CO} = -2\vec{\jmath}$.

1) Préciser les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et$\overrightarrow{BC}$.

3) On donne les points : D(5 ; -3) et F(x ; 3).

a) Démontrer que les points A, C et D sont alignés.

b) Déterminer x pour que (FC) // (BD).

4) Calculer les coordonnées du point M pour que ABMC soit un parallélogramme.

5) Calculer les coordonnées d'un point E tel que le point B soit milieu de [EA].

<u>Exercice 17</u> : BEPC 2000

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on donne les points : A(x ; 0) ; B(0 ; 4) ; C(4 ; 8) ; D(8 ; 4).

a) Calculer x pour que ABC soit un triangle rectangle en B.

b) Placer les points A, B, C et D

c) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer son rayon puis les coordonnées de son centre I.

d) Calculer les distances DC et AD

e) Montrer que I est le milieu de [BD].

f) Quelle est la nature précise du quadrilatère ABCD ? Justifier.

<u>Exercice 18</u>

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne les points A, C et E définis par : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{CO} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OE} = -3\vec{\jmath}$.

1) Déterminer et placer les coordonnées des points A, C et E.

2) Calculer les distances AC, AE et CE. En déduire la nature du triangle ACE.

3) Calculer les coordonnées du centre I et le rayon R du cercle (C) circonscrit au triangle ACE.

4) a) Déterminer les coordonnées du point D image du point E par la symétrie de centre I.

b) Quelle est la nature précise du quadrilatère AECD ?

5) le point D appartient-il au cercle (C) ?

Exercice 19

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-2\ ;\ 2)$; $B(-5\ ;\ 4)$; $C(0\ ;\ 5)$.

1) Placer les points A, B et C dans un repère. La figure est complétée au fur et à mesure.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Calculer les distances AB, AC et BC. Puis en déduire la nature du triangle ABC.

4) Calculer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].

5) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Calculer le rayon du cercle.

b) Calculer les coordonnées du point D pour que ABDC soit un parallélogramme.

Exercice 20

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $M(-2\ ;\ 4)$; $S(-2\ ;\ 1)$ et $E(2\ ;\ 1)$.

1) Placer les points M, S et E dans ce repère.

2) Montrer que MS = 3, ME = 5 et SE = 4.

3) Montrer que le triangle MES est rectangle en S.

4) Soit (C) le cercle de centre I et de rayon r.

a) Construire (C).

b) Calculer les coordonnées du point I puis le rayon r.

5) Calculer les coordonnées du point K pour que MSEK soit un parallélogramme.

Exercice 21

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(1\ ;\ 4)$; $B(4\ ;\ 4)$; $C(1\ ;\ -2)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis exprimer chaque vecteur en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Quelle est la nature du triangle ABC ?

4) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme

5) Soit H le projeté orthogonal de B sur (DC). Calculer BH et DH.

EQUATIONS DE

Résumé du cours

I) Notion d'équation de droite

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), toute droite (D) admet une équation de la forme$ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ appelée équation cartésienne (ou générale) de la droite (D).

Remarque : Une droite admet une infinité d'équations.

II) Coordonnées du vecteur directeur

1) Equation de droite passant par deux points

Pour déterminer une équation cartésienne (générale) d'une droite (AB) passant les points A et B :

- ❖ on choisit un point M$(x ; y) \in$ (AB) ;
- ❖ on calcule les coordonnées de deux vecteurs à partir de ces trois points ;
- ❖ on applique la colinéarité de ces deux vecteurs.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A$(1 ; -1)$ et B$(2 ; 3)$.

Soit M$\binom{x}{y} \in$ (AB) tel que $\overrightarrow{AM}$ col $\overrightarrow{AB} \Rightarrow xy' - x'y = 0$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y+1}$; $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{2-1}{3+1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{1}{4}$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y+1}$ col $\overrightarrow{AB}\binom{1}{4} \Leftrightarrow 4(x-1) - 1(y+1) = 0 \Rightarrow 4x - 4 - y - 1 = 0$.

Alors (AB) : $4x - y - 5 = 0$.

2) Equation de droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Pour déterminer une équation cartésienne (générale) d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée :

- ❖ on choisit un point M$(x ; y)$ appartenant à cette droite ;
- ❖ on applique la colinéarité des vecteurs de ces deux droites après avoir calculé leurs coordonnées.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et parallèle à (BC) sachant que A$(-1 ; 3)$; B$(2 ; 1)$ et C$(0 ; 4)$.

Soit M$\binom{x}{y}$ ∈ (D) tel que $\overrightarrow{AM}$ col $\overrightarrow{BC} \Rightarrow xy' - x'y = 0$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-3}$; $\overrightarrow{BC}\binom{x_C - x_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\binom{0-2}{4-1} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\binom{-2}{3}$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-3}$ col $\overrightarrow{BC}\binom{-2}{3} \Leftrightarrow 3(x+1) + 2(y-3) = 0 \Rightarrow 3x + 3 + 2y - 6 = 0$.

Alors (D) : $3x + 2y - 3 = 0$.

3) <u>Equation de droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée</u>

Pour déterminer une équation cartésienne (générale) d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée :

❖ on choisit un point M(x ; y) appartenant à cette droite ;

❖ on applique l'orthogonalité des vecteurs de ces deux droites après avoir calculé leurs coordonnées.

<u>Exemple</u> : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et parallèle à (BC) sachant que A(2 ; 0) ; B(3 ; −2) et C(1 ; 2).

Soit M$\binom{x}{y}$ ∈ (D) tel que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow xx' + yy' = 0$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-0}$; $\overrightarrow{BC}\binom{x_C - x_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\binom{3-1}{-2-2} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\binom{2}{-4}$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-0} \perp \overrightarrow{BC}\binom{2}{-4} \Leftrightarrow 2(x-2) - 4(y-0) = 0 \Rightarrow 2x - 4 - 4y = 0$.

Alors (D) : $2x - 4y - 4 = 0$ ou (D) : $x - 2y - 2 = 0$.

4) <u>Vecteur directeur d'une droite</u>

a) <u>Définition</u>

Un vecteur directeur$\vec{u}$ d'une droite (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est un vecteur qui possède la même direction que (D), il est noté $\vec{u}(-b\ ;\ a)$.

<u>Exemple</u> :

(D_1) : $x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1(-3\ ;\ 1)$.

(D_2) : $-2x - y + 4 = 0 \Rightarrow \vec{u}_2(1\ ;\ -2)$.

(D_3) : $-3x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow \vec{u}_3(-2\ ;\ -3)$.

<u>Remarque</u> : Tout vecteur colinéaire au vecteur directeur est aussi un vecteur directeur.

b) <u>Equation de droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite</u>

Pour déterminer une équation cartésienne (générale) d'une droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite :

- on choisit un point M(x ; y) appartenant à cette droite ;
- on applique la colinéarité des vecteurs.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A(-2 ; -2) et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 5)$.

Soit $M\binom{x}{y} \in (D)$ tel que $\overrightarrow{AM}$col$\vec{u} \Rightarrow xy' - x'y = 0$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x+2}{y+2}$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x+2}{y+2}$ col $\vec{u}\binom{1}{5} \Leftrightarrow 5(x+2) - 1(y+2) = 0 \Rightarrow 5x + 10 - y - 2 = 0$.

Alors (D) : $5x - y + 8 = 0$.

III) <u>Coefficient directeur d'une droite</u>

1) <u>Coefficient directeur d'une droite d'équation donnée sous la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$</u>

Pour déterminer le coefficient d'une droite écrite sous la forme $ax + by + c = 0$, on tire la valeur de y.

Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c$

$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Donc l'équation $y = mx + p$ est appelée équation réduite de la droite (D) avec $m = -\frac{a}{b}$: le coefficient directeur de (D) et $p = -\frac{c}{b}$: son ordonnée à l'origine.

<u>Remarque</u> :

- Un vecteur directeur de (D) : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ est $\vec{u}\left(1 ; -\frac{a}{b}\right)$.
- L'équation réduite peut être écrite sous la forme $y = ax + b$ avec a : le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
- Une droite peut avoir plusieurs vecteurs directeurs.

Exemple :

$(D_1) : x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}$

$(D_2) : -2x - y + 4 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{-2}{-1} = -2.$

$(D_3) : -3x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}.$

2) Calcul du coefficient directeur d'une droite passant par deux points

Soit $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$

Exemple : Soit $A\binom{2}{-1}$ et $B\binom{0}{5}$ alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+1}{0-2} = \frac{6}{-2} = -3.$

3) Equation de droite connaissant son coefficient directeur et un point de cette droite

Pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant son coefficient directeur et un point de la droite :

- on remplace le coefficient directeur par sa valeur dans l'équation réduite de la droite ;
- on détermine l'ordonnée à l'origine en utilisant les coordonnées du point de la droite.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A(1 ; 3) et de coefficient directeur -2.

Soit (D) : $y = ax + b . a = -2 \Rightarrow y = -2x + b.$

$A \in (D) \Rightarrow y_A = -2x_A + b \Rightarrow 3 = -2(1) + b \Rightarrow 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5.$

Alors (D) : $y = -2x + 5.$

II) Construction d'une droite dans un repère orthonormé

1) Appartenance d'un point à une droite

Un point appartient à une droite lorsque ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

Exemple : Soit (D) : $2x - y + 1 = 0$. Vérifie si les points A(2 ; 1) ; B(0 ; 1) et C(1 ; 3) appartiennent à la droite (D).

$A \in (D) \Leftrightarrow 2x_A - y_A + 1 = 0 \Rightarrow 2(2) - 1 + 1 = 2 \neq 0$ alors $A \notin (D)$.

$B \in (D) \Leftrightarrow 2x_B - y_B + 1 = 0 \Rightarrow 2(0) - 1 + 1 = 0$ alors $B \in (D)$.

$C \in (D) \Leftrightarrow 2x_C - y_C + 1 = 0 \Rightarrow 2(1) - 3 + 1 = 3 - 3 = 0$ alors $C \in (D)$.

2) <u>Construction d'une droite à partir de son équation</u>

Pour construire une droite connaissant son équation, on détermine les coordonnées de deux points appartenant à la droite en remplaçant x ou y dans l'équation par des valeurs.

<u>Exemple</u> : Construire les droites $(D_1) : x - y = 0$et $(D_2) : 2x + 3y - 4 = 0$.

$(D_1) : x - y = 0$

Si $x = 3 \Rightarrow 3 - y = 0 \Rightarrow y = 3$

Si $x = 0 \Rightarrow 0 - y = 0 \Rightarrow y = 0$

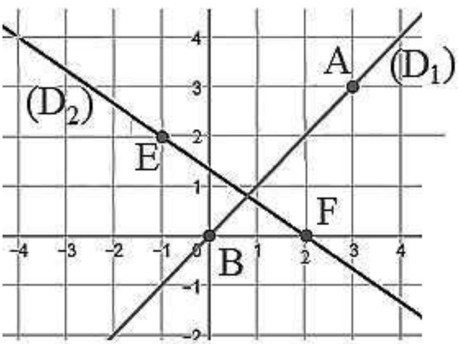
	A	B
x	3	0
y	3	0

$(D_2) : 2x + 3y - 4 = 0$

Si $x = -1 \Rightarrow 2(-1) + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

Si $x = -1 \Rightarrow 2(2) + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 0$

	E	F
x	-1	2
y	2	0

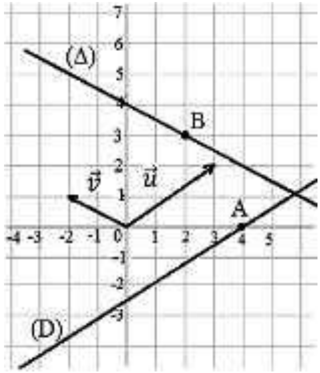


3) <u>Construction d'une droite connaissant son vecteur directeur et un point de cette droite</u>

Pour construire une droite dont on connaît son vecteur directeur et un point de celle – ci :

- ❖ on place le point dont on connaît les coordonnées et le vecteur directeur ;
- ❖ on construit cette droite qui correspond à la parallèle au vecteur directeur passant par le point de coordonnées connues.

<u>Exemple</u> : Construction de la droite (D) passant par A(4 ; 0) et de vecteur directeur $\bar{u}$(3 ; 2) puis de la droite (Δ) passant par B(2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 1)$.



4) <u>Construction d'une droite connaissant son coefficient directeur et un point de cette droite</u>

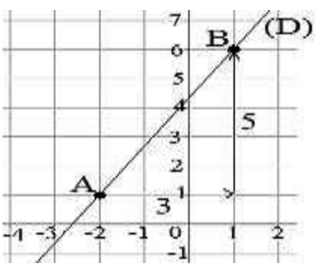
Pour construire une droite dont on connaît son coefficient directeur $\frac{a}{b}$ et un point de celle – ci :

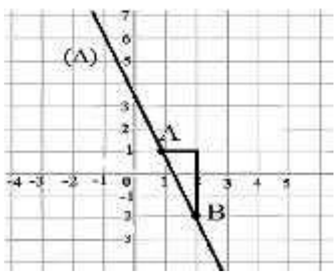
❖ on place le point dont on connaît les coordonnées ;

❖ on place un deuxième point à l'aide du coefficient directeur en se déplaçant successivement vers la droite de b unités sur l'axe des abscisses puis de a unités verticalement (vers le bas si $a < 0$ et vers le haut si $a > 0$) sur l'axe des ordonnées.

❖ on relie les deux points pour obtenir la droite à construire.

<u>Exemple</u> : Construire la droite (D) passant par A$(-2\ ;\ 1)$ et de coefficient directeur $\frac{5}{3}$ puis la droite (Δ) passant par A$(1\ ;\ 1)$ et de coefficient directeur -2.





III) <u>Positions relatives de deux droites</u>

1) <u>Droites parallèles</u>

❖ Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs respectifs a et a' sont parallèles dans un repère si et seulement si $a = a'$.

Exemple : Soit $(D_1) : y = 2x + 3$ et $(D_2) : y = 2x - 1$.

$(D_1) : y = 2x + 3 \Rightarrow a_1 = 2$; $(D_2) : y = 2x - 1 \Rightarrow a_2 = 2$.

$a_1 = a_2 = 2$ alors les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

❖ Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs respectifs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{u}'(x';y')$ sont parallèles dans un repère si et seulement si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $(xy' - x'y = 0)$.

Exemple : Soit (D) : $y = -2x + 2$ et (D') : $2x - y - 6 = 0$.

(D) : $y = -2x + 2 \Rightarrow \vec{u}(1\,;-2)$; (D') : $4x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow \vec{u}'(-2\,;4)$.

$\vec{u}$ col $\vec{u}' \Leftrightarrow xy' - x'y = 0 \Rightarrow 1 \times 4 -(-2)(-2) = 4 - 4 = 0$ alors les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

2) <u>Droites perpendiculaires</u>

❖ Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs respectifs a et a' sont perpendiculaires dans un repère si et seulement si $a \times a' = -1$.

Exemple : Soit $(D_1) : y = 3x - 2$ et $(D_2) : y = -\frac{1}{3}x + 4$.

$(D_1) : y = 3x - 2 \Rightarrow a_1 = 3$; $(D_2) : y = -\frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{3}$.

$a_1 \times a_2 = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$ alors les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

❖ Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs respectifs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{u}'(x';y')$ sont perpendiculaires dans un repère si et seulement si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux $(xx' + yy' = 0)$.

Exemple : Soit (D) : $y = 3x + 1$ et (D') : $x - 3y - 5 = 0$.

(D) : $y = 3x + 1 \Rightarrow \vec{u}(1\,;3)$; (D') : $x - 3y - 5 = 0 \Rightarrow \vec{u}'(-3\,;1)$.

$\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Rightarrow 1 \times (-3) + 3 \times 1 = -3 + 3 = 0$ alors les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

3) <u>Droites parallèles aux axes de coordonnées</u>

❖ Une droite est parallèle à l'axe des abscisses lorsque son équation est de type $y = b$ $(b \in \mathbb{R})$.

Exemple : (D) : $y = 2$; (D') : $y + 3 = 0$.

❖ Une droite est parallèle à l'axe des ordonnées lorsque son équation est de type $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$.

<u>Exemple</u> : (D) : $x - 4 = 0$; (D') : $x = -1$.

IV) <u>Coordonnées du point d'intersection</u>

1) <u>Coordonnées du point d'intersection d'une droite avec les axes</u>

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite avec l'axe des abscisses, il suffit de chercher la valeur de x pour laquelle $y = 0$.
- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite avec l'axe des ordonnées, il suffit de chercher la valeur de y pour laquelle $x = 0$.

<u>Exemple</u> : Soit la droite (D) d'équation $2x - y + 4 = 0$. Déterminer les cordonnées de A et B, points d'intersection respectifs de (D) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Sur (xx'), $y = 0 \Rightarrow 2x - 0 + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$. Alors A($-2$; 0).

Sur (yy'), $x = 0 \Rightarrow 2(0) - y + 4 = 0 \Rightarrow -y = -4 \Rightarrow y = 4$. Alors B(0 ; 4).

2) <u>Coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes</u>

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$car chacune des équations de droite est une équation à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$. Pour cela on utilise l'une des méthodes : addition ou combinaison, substitution, comparaison ou graphique.

V) <u>Equation des droites particulières</u>

1) <u>Equation de la tangente à un cercle</u>

La tangente à un cercle en un point est une droite qui est perpendiculaire au rayon en ce point. Pour déterminer l'équation de la tangente à un cercle en un point, on choisit un point M(x ; y) appartenant à cette droite puis on applique l'orthogonalité des vecteurs.

<u>Exemple</u> : Soit I(0 ; 2) centre du cercle passant par A(2 ; -1). Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle en A.

Soit M$\binom{x}{y} \in$ (D) tel que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow xx' + yy' = 0$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y+1}$; $\overrightarrow{AI}\binom{x_I - x_A}{y_I - y_A} \Rightarrow \overrightarrow{AI}\binom{0-2}{2+1} \Rightarrow \overrightarrow{AI}\binom{-2}{3}$.

$\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y+1} \perp \overrightarrow{AI}\binom{-2}{3} \Leftrightarrow -2(x-2)+3(y+1)=0 \Rightarrow -2x+4+3y+3=0.$

Alors (D) : $-2x+3y+7=0.$

2) <u>Equation de la médiatrice d'un segment</u>

Pour déterminer l'équation de la médiatrice d'un segment, on choisit un point M(x ; y) appartenant à cette droite puis on applique l'orthogonalité des vecteurs.

<u>Exemple</u> : Soit A(1 ; 1) ; B(5 ; 3) et I milieu du segment [AB]. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment [AB].

I milieu du segment [AB] $\Leftrightarrow I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow I\begin{pmatrix}\frac{1+5}{2}\\ \frac{1+3}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow I\binom{3}{2}.$

Soit M$\binom{x}{y}$ ∈ (D) tel que $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA}=0 \Rightarrow xx'+yy'=0.$

$\overrightarrow{IM}\binom{x_M-x_I}{y_M-y_I} \Rightarrow \overrightarrow{IM}\binom{x-3}{y-2}$; $\overrightarrow{IA}\binom{x_A-x_I}{y_A-y_I} \Rightarrow \overrightarrow{IA}\binom{1-3}{1-2} \Rightarrow \overrightarrow{IA}\binom{-2}{-1}.$

$\overrightarrow{IM}\binom{x-3}{y-2} \perp \overrightarrow{IA}\binom{-2}{-1} \Leftrightarrow -2(x-3)-(y-2)=0 \Rightarrow -2x+6-y+2=0.$

Alors (D) : $-2x-y+8=0.$

Série d'exercices

<u>Exercice 1</u>

Le plan est muni d'un repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$). Trouve une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

1) A $(-3$; $1)$ et B $(2$; $5)$; 2) A $(2$; $2)$ et B $(3$; $-4)$; 3) A $(-\frac{1}{2}$; $2)$ et B $(-2$; $\frac{1}{2})$;

4) A $(3$; $1)$ et B $(-1$; $-1)$; 5) A $(1$; $0)$ et B $(-3$; $-2)$; 6) A $(1$; $3)$ et B $(0$; $-2)$.

<u>Exercice 2</u>

Le plan est muni d'un repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$). A (5 ; 3), B $(-3$; 2) et C (0 ; 4).

Trouve une équation de la droite (L) dans chacun des cas suivants :

1) (L) est la droite passant B et parallèle à la droite (AC).

2) (L) est la droite passant A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

3) (L) est la droite passant C et perpendiculaire à la droite (AB).

<u>Exercice 3</u>

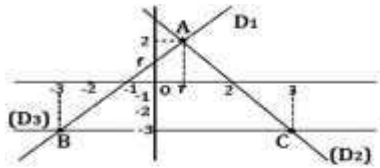
Le plan est muni d'un repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

La droite (L) est la droite d'équation : $-2x + 3y - 1 = 0$.

Parmi les points suivants : A (1 ; 1), B (−0,5 ; 0), C (2 ; 0) et D (2 ; −1) indique ceux qui appartiennent à (L).

Exercice 4

Soit la figure ci-dessous. Déterminer une équation de chacune des droites (D_1), (D_2) et (D_3).



Exercice 5

Le plan est muni d'un repère (0, I, J). Dans chacun des cas suivants, calcule le coefficient directeur de la droite (AB) :

1) A(3 ; 1) et B(5 ; −2) ; 2) A(−1 ; −3) et B(−4 ; −2)

3) A($-\frac{1}{2}$; 2) et B(−2 ; $\frac{1}{2}$) ; 4) A(3 ; 1) et B(−1 ; −1)

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère (0, I, J). Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (D) passant par le point A et parallèle à la droite (L) :

1) A(2 ; 1) ; (L) : $2x + y - 1 = 0$

2) A(−3 ; 2) ; (L) : $4x - 3y + 2 = 0$

3) A(−1 ; −1) ; (L) : $-x + 2y = 0$

4) A(0 ; 3) ; (L) : $x + y + 1 = 0$

5) A(1 ; 0) ; (L) : $y + 3 = 0$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère (0, I, J). Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (D) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (L) :

1) A(2 ; −1) ; (L) : $x + y - 1 = 0$

2) A(3 ; 3) ; (L) : $x - 2y + 3 = 0$

3) A(1 ; −4) ; (L) : $3x + y + 1 = 0$

4) A(−2 ; 0) ; (L) : $4x - 5y + 8 = 0$

5) A(0 ; 1) ; (L) : $2x + 3y - 3 = 0$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère (0, I, J). Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (D) passant par A et parallèle à la droite (BC) :

1) $A(-1\,;2)$; $B(1\,;2)$; $C(-3\,;2)$
2) $A(4\,;-3)$; $B(3\,;2)$; $C(1\,;0)$
3) $A(1\,;4)$; $B(3\,;-1)$; $C(5\,;-3)$
4) $A(0\,;-2)$; $B(-2\,;0)$; $C(1\,;1)$

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère (0, I, J). Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par A et perpendiculaire à la droite (BC) :

1) $A(-1\,;2)$; $B(0\,;-2)$; $C(1\,;-3)$
2) $A(2\,;-1)$; $B(4\,;-3)$; $C(3\,;2)$
3) $A(1\,;3)$; $B(1\,;-1)$; $C(1\,;-2)$
4) $A(0\,;4)$; $B(-2\,;-2)$; $C(-1\,;-1)$

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère (0, I, J).Construis les droites :

(D_1) : $x+y-1=0$; (D_2) : $y=2x+3$; (D_3) : $2x+\ y=0$
(D_4) : $2x-4=0$; (D_5) : $y=3$; (D_6) : $0=x-2y+4$

Exercice 11

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\ )$, on donne les points $A(-2\,;4)$; $B(4\,;1)$; $C(1\,;-5)$.

1) Ecrire une équation de la droite (AB).
2) Ecrire une équation de la droite (D_1) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;3)$.
3) Ecrire une équation de la droite (D_2) passant par C et perpendiculaire à $\vec{v}\,(-2\,;1)$.
4) Pour chacune des droites, trouver un vecteur directeur et un coefficient directeur :
(D_3) : $2x-y-7=0$; (D_4) : $7x+y+11=0$ et (D_5) : $y=3x+2$.

Exercice 12

1) Dans un repère, (D) est la droite d'équation : $y=2x+5$.

a) Vérifier que les points A $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ et B(0 ; 5) appartiennent à la droite (D).

b) Les points A, B et C(−1 ; 3) sont – ils alignés ?

2) Dans un repère, (D) est la droite d'équation : $y = \frac{3}{2}x - 1$.

a) A est le point de (D) d'abscisse 6 ; quelle est son ordonnée ?

b) B est le point de (D) d'abscisse -4 ; quelle est son ordonnée ?

c) C est le point de (D) d'ordonnée 3 ; quelle est son abscisse ?

d) E est le point de (D) d'ordonnée $-\frac{1}{2}$; quelle est son abscisse ?

<u>Exercice 13</u>

Déterminer les équations des droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) puis les construire dans un repère orthonormé puis $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sachant que :

1) (D_1) passe par le point A(−3 ; −1) et de coefficient directeur $a = -1$.

2) (D_2) passe par le point B(2 ; −1) et d'ordonnée à l'origine $b = 3$.

3) (D_3) passe par le point C(1 ; 4) et parallèle à la droite d'équation $x = 2$.

4) (D_4) passe par le point E(2 ; 1) et parallèle à la droite d'équation $y = -4$.

<u>Exercice 14</u>

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

Si la droite (D) a pour équation $3x + 2y - 1 = 0$ alors (D) :

1) passe par l'origine du repère.

2) passe par I(1 ; -1).

3) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2\ ;\ 3)$.

4) a pour coefficient directeur $\frac{3}{2}$.

<u>Exercice 15</u>

Dans chacune des situations suivantes, dire si les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes. Si elles le sont, donner le point d'intersection.

a) (D_1) : $y = x - 1$ et (D_2) : $y = -3x + 3$.

b) (D_1) : $y = 5x - 1$ et (D_2) : $y = -2x$.

c) (D_1) : $y = 5x - 1$ et (D_2) : $y = 2 + x$

<u>Exercice 16</u>

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne :

(D) : $ax + (a+1)y + a - 1 = 0$

1) a) Pour quelle valeur de a la droite passe-t-elle par l'origine du repère ?

   b) Ecrire dans ce cas l'équation de la droite (D)

2) a) Pour quelle valeur de a la droite (D) est-elle parallèle à l'axe (OI) ?

   b) Ecrire dans ce cas l'équation de la droite (D)

3) a) Pour quelle valeur de a la droite (D) est-elle parallèle à l'axe (OJ) ?

   b) Ecrire dans ce cas l'équation de la droite (D)

Exercice 17

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne :

$\overrightarrow{OA} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{CO} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AD} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1) a) Déterminer les coordonnées des points A, C et D.

b) Placer ces points dans le repère.

2) Soit S_E la symétrie de centre E qui transforme le point A en C. Calculer les coordonnées du point E.

3) a) Ecrire l'équation de chacune des droites (AD) et (DC).

b) Soient m, le coefficient directeur de la droite (AD) et m' celui de la droite (DC). Déterminer m et m'.

c) Montrer que les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires

d) Calculer les distances AD et DC. En déduire la nature du triangle ADC.

4) Calculer les coordonnées du point B pour que ABCD soit un parallélogramme

5) a) (C) est le cercle circonscrit au triangle ADC. Déterminer les coordonnées de son centre ainsi que son rayon.

b) Démontrer que le point B appartient au cercle (par calcul).

6) Soit (T) la droite tangente au cercle © en B

a) Ecrire l'équation de la droite (T).

b) (T) coupe l'axe des abscisses au point M et celui des ordonnés au point N. Déterminer les coordonnées des points M et N.

7) Soit F(4 ; 1), écrire l'équation de la droite (Δ) médiatrice du segment [CF].

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1) Construire :

a) La droite (D) d'équation : $y = x - 4$

b) La droite (D') d'équation : $y = 3x - 2$

2) Ces droites se coupent en E et coupent respectivement l'axe des abscisses en F et G. Trouver les coordonnées de E, F et G.

Exercice 19

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soient les points A, B, C définis par $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u} + 8\vec{v}$; $\overrightarrow{BC} = -3\vec{u} - 3\vec{v}$; $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B et C et les placer dans le repère.

2) Calculer les coordonnées du point D, image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et placer le point D.

3) Déterminer une équation de la médiatrice (D_1) de [BD].

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (D_1) avec les axes du repère.

Exercice 20

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne :

(D_1) : $2x + 3y - 2 = 0$ et A(-2 ; 2).

1) Donner le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite (D_1)

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_2) passant par A et perpendiculaire à (D_1)

3) a) Calculer l'abscisse du point B de la droite (D_1) et d'ordonnée -2.

b) Montrer que C(2 ; 8) appartient à la droite (D_2).

c) Calculer les distances AB et AC. En déduire la nature précise du triangle ABC.

4) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer :

a) les coordonnées de E, son centre et la valeur de son rayon r.

b) une équation de la droite (T) tangente à (C) en B.

5) a) Construire le point D, image de A par $S_{(BC)}$. Donner graphiquement ses coordonnées.

b) En déduire : - la nature précise du quadrilatère ABDC.

- que le point D est l'image de C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- que le point D appartient au cercle (C).

Exercice 21

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne : A(2 ; -1) ;
$\overrightarrow{CO} = -3\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{BC} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points B et C.

b) Placer les points A, B et C dans le repère.

2) Calculer les distances AB ; AC et BC puis en déduire la nature du triangle ABC.

3) a) Construire le cercle (C) circonscrit au triangle ABC puis donner les coordonnées de son centre K ainsi que son rayon.

b) Calculer les coordonnées du point D image de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

4) a) Ecrire l'équation de la droite (L) médiatrice du segment [AC].

b) Ecrire l'équation de la droite (T) tangente au cercle © au point B.

c) Calculer les coordonnées des points E et F intersections respectifs de la droite (T) avec l'axe (OI) et (OJ).

Exercice 22

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne :
(D_1) :$2x - 3y - 6 = 0$ et (D_2) : $6x + 4y - 5 = 0$.

1) Trace les droites (D_1) et (D_2).

2) Sachant que (D_1) ∩ (D_2) = $\{E\}$, détermine les coordonnées du point E.

3) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

4) Soient les points F(4,5 ; 1) et G($-0,5$; 2), vérifie que Fϵ(D_1) et Gϵ(D_2).

5) Calculer :

a) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

b) Les distances EF et EG.

6) Quelle est la nature précise du triangle EFG ? Justifier votre réponse.

7) Calculer :

a) Les coordonnées du centre K du cercle circonscrit au triangle EFG.

b) Le rayon du cercle circonscrit au triangle EFG.

Exercice 23 : BEPC 2009

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne les points A(-3 ; 1) ; B(2 ; 3) et C($\frac{x^2}{4}$; -2) ou x est un nombre réel.

1) Trouver les réels x pour que les droites (AB) et (BC) soient perpendiculaires.

2) Soit C(4 ; -2), placer les points A, B et C dans le repère. On complétera la figure au fur et à mesure.

3) Calculer les distances AB, BC et AC puis préciser la nature exacte du triangle ABC.

4) Calculer les coordonnées du point I, centre du cercle © circonscrit au triangle ABC puis tracer le cercle.

5) a) Déterminer l'équation de la droite (Δ) médiatrice du segment [AC] ; tracer (Δ).

b) Trouver les coordonnées du point D tel que ABCD soit un carré.

Le point D appartient-il au cercle © ? (On justifiera le résultat).

<u>Exercice 24</u> : BEPC 2006

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne les droites

(Δ_1) : $2x + 3y - 2 = 0$ et (Δ_2) : $3x - 2y + 10 = 0$.

1) a) Construire les droites (Δ_1) et (Δ_2).

b) Démontrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonales.

2) K étant le point d'intersection des (D_1) et (D_2), déterminer graphiquement les coordonnées du point K.

3) Soient les points A(-2 ; 2) ; B(-5 ; 4) et C(0 ; 5).

a) Montrer que B∈(Δ_1) et C∈(Δ_2).

b) Les distances AB et AC puis en déduire la nature précise du triangle ABC.

4) a) Calculer les coordonnées du point I centre du cercle © circonscrit au triangle ABC.

b) Calculer les coordonnées du point du point D symétrique du point A par rapport à I.

c) Préciser la nature quadrilatère ABDC.

5) On donne la droite (T) : $5x + y - 5 = 0$. Montrer que (T) est tangente au cercle ©.

6) Soit le point E(4 ; -2), montrer que les points A, B et E sont alignés.

<u>Exercice 25</u>

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne

(D_1) : $x + 2y - 6 = 0$; (D_2) :$2x - y + 3 = 0$ et (D_3) : $x - 3y - 1 = 0$.

1) a) Tracer les droites (D_1), (D_2) et (D_3) dans un repère.

b) (D_1) ∩ (D_2) = $\{A\}$; (D_1) ∩ (D_3) = $\{B\}$; (D_2) ∩ (D_3) = $\{C\}$.
Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B et C.
2) a) Montrer que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
b) Calculer les distances AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.
3) a) Calculer les coordonnées du point I milieu de [BC].
b) Calculer les coordonnées du point D tel que S_I (A) = D.
4) La droite (D_1) coupe l'axe des abscisses en un point M et l'axe des ordonnées en un point N. Calculer les coordonnées des points M et N.

<u>Exercice 26</u>

1) a) Construire les droites (D_1) ; (D_2) et (D_3) sachant que : (D_1) passe A$\binom{1}{-3}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_1\binom{3}{4}$; (D_2) passe B$\binom{-3}{2}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_2\binom{2}{0}$ et (D_3) passe C$\binom{0}{-3}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_3\binom{1}{1}$.
b) Déterminer les équations cartésiennes de chacune des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).
2) a) Construire les droites (L_1) ; (L_2) et (L_3) sachant que : (L_1) passe A$\binom{-5}{1}$ et a pour coefficient directeur $m_1 = 3$; (L_2) passe B$\binom{2}{-1}$ et a pour coefficient directeur $m_2 = -2$ et (L_3) passe C$\binom{3}{2}$ et a pour vecteur directeur $m_3 = -\frac{2}{5}$.
Déterminer les équations cartésiennes de chacune des droites (L_1) ; (L_2) et (L_3).

<u>Exercice 27</u>

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel a pour que le point A appartient à la droite (D) :
1) (D) : $2x + y - 4 = 0$ et A(2 ; a).
2) (D) : $y = 2x - 1 = 0$ et A(a ; 1).
3) (D) : $ax - (a+2)y - 3 + 5a = 0$ et A(2 ; -5).

APPLICATIONS DU THEOREME DE PYTHAGORE

Résumé du cours

1) Théorème direct

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemple : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 4,8 cm et AD = 3,6 cm. Calculer la distance BD.

D'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (4{,}8)^2 + (3{,}6)^2$

$BD^2 = 23{,}04 + 12{,}96 = 36 \Rightarrow BD = 6$ cm.

N.B : Le théorème de Pythagore est utilisé pour la mesure du côté manquant.

2) Réciproque de la propriété

Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple : Soit un triangle EFG tel que EF = 5 cm ; EG = 4 cm et FG = 3 cm. Démontrer que EFG est un triangle rectangle en G.

$EF^2 = 5^2 = 25$; $EG^2 = 4^2 = 16$; $FG^2 = 3^2 = 9$.

$25 = 16 + 9 \Rightarrow EF^2 = EG^2 + FG^2$.

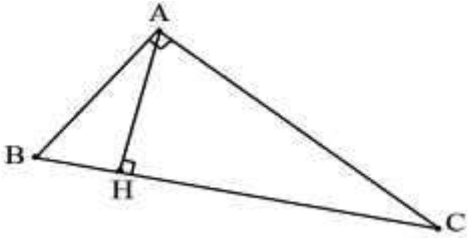
Alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore EFG est un triangle rectangle en G.

N.B : La réciproque du théorème de Pythagore est utilisée pour démontrer qu'un triangle est rectangle.

3) Propriété métrique

Dans un triangle rectangle, le produit de la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit par la mesure de l'hypoténuse est égal au produit des mesures des deux autres côtés du triangle.

ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue du sommet A.



Alors on a :

- $AB \times AC = AH \times BC$;
- $AC^2 = CH \times BC$;
- $AB^2 = BH \times BC$;
- $AH^2 = CH \times BH$

<u>Exemple</u> : On considère un triangle ABC tel que AB = 6 cm ; AC = 8 cm et BC = 10 cm. H est le pied de la hauteur issue de A. Calculer la distance AH ; BH et CH.

$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$ cm.

$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6$cm.

$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{8^2}{10} = \frac{64}{10} = 6{,}4$cm.

Série d'exercices

Exercice 1

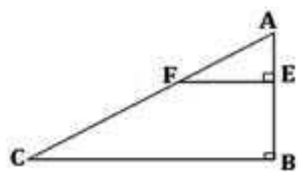
Un terrain (rectangulaire) ABCD de mesure AB = 95 m et AD = 72 m.

Calculer la longueur d'une diagonale de ce terrain (on arrondira ce résultat au centième).

Exercice 2

On considère la figure ci-contre :

AE = 3cm ; BE = 5cm ; BC = 6cm. Calculer AC, EF et AF.



Exercice 3

Un objet de forme carrée a pour côté a.

1) Exprimer la longueur de la diagonale d en fonction de a.

2) Faire l'application numérique. a = 60 cm (On arrondira ce résultat au dixième).

Exercice 4

1) Construire un triangle MNP rectangle en M tel que MN = 4 cm et MP = 3 cm.

2) Calculer en utilisant le théorème de Pythagore la mesure de NP.

3) Soit H le pied de la hauteur issue de M. Calculer les distances MH, NH et PH.

Exercice 5

ABCD est un rectangle de côtés AB = 12 cm et AD = 9 cm. Placer les points E et F respectivement sur les segments [BC] et [DC] tels que : AE = 13 cm et DF = 5cm.

1) Faire la figure.

2) Calculer la longueur AF.

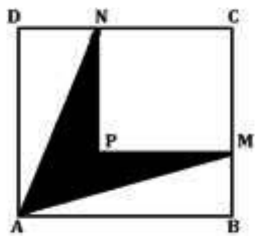
3) Calculer la longueur BE.

4) Calculer les longueurs CE et CF, puis la longueur EF.

5) Le triangle AFE est-il rectangle ?

Exercice 6

Nous considérons un carré *ABCD* de côté 5 cm. Le point *M* est sur [*BC*] et *N* sur [*CD*] et sont tels que *BM* = *DN*. Le point *P* est placé de telle façon à ce qu *MCNP* soit un carré.



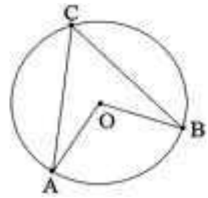
Sachant que DN = 2cm calculer AM et NP.

ANGLES –

Résumé du cours

I) Angle inscrit – Angle au centre

1) Définitions



Soit la figure ci – contre

❖ Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts.

Exemple : L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit.

❖ Un angle au centre est un angle dont le somment est le centre du cercle.

Exemple : L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.

❖ Un arc de cercle est la partie du cercle comprise entre deux points de ce cercle.

Exemple : $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ sont des arcs de cercle.

Remarque : Tout angle inscrit qui intercepte le diamètre du cercle mesure 90°.

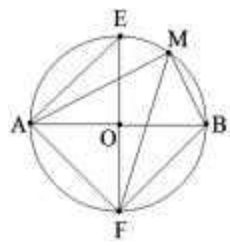
2) Propriétés sur les angles inscrits et angles au centre

Dans un cercle :

❖ Si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ces deux angles ont la même mesure.

❖ Si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Exercice d'application



On considère la figure ci – contre où $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et [AB] et [EF] deux diamètres perpendiculaires en O. M est un point sur $(\mathcal{C})$.

1) Citer les angles inscrits de sommet M.

2) Citer les angles inscrits ayant pour sommet un point autre que M et qui intercepte le même arc qu'un angle inscrit de sommet M.

3) Quelles sont les mesures des angles : $\widehat{AMB}$, $\widehat{AOF}$, $\widehat{AMF}$?

Correction

1) Les angles inscrits de sommet M sont : $\widehat{AMF}$ et $\widehat{AMB}$.

2) Les angles inscrits $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ABF}$ interceptent le même arc $\widehat{AF}$ que l'angle $\widehat{AMF}$.
L'angle inscrit $\widehat{AFB}$ intercepte le même arc $\widehat{AB}$ que l'angle $\widehat{AMB}$.
3) L'angle $\widehat{AMB}$ mesure 90° car c'est un angle inscrit qui intercepte le diamètre [AB].
L'angle $\widehat{AOF}$ mesure 90° car l'arc $\widehat{AF}$ est formé par deux rayons perpendiculaires.
L'angle $\widehat{AMF}$ mesure 45° car c'est un angle inscrit qui intercepte le même arc $\widehat{AF}$ que l'angle au centre $\widehat{AOF}$ ($\widehat{AMF} = \frac{\widehat{AOF}}{2}$).

II) <u>Trigonométrie</u>

1) <u>Rapports trigonométriques d'un angle aigu (sinus, cosinus, tangente)</u>

Dans un triangle rectangle :

- ❖ On appelle le cosinus d'un angle aigu, le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.
- ❖ On appelle le sinus d'un angle aigu, le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.
- ❖ On appelle la tangente d'un angle, le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent ou le quotient du sinus del'angle par le cosinus du même angle.

2) <u>Calculs dans le triangle rectangle</u>

a) <u>Calcul du sinus, cosinus ou tangente d'un angle d'un triangle rectangle dont on connaît les côtés</u>

<u>Exemple</u> : Soit ABC un triangle rectangle en A tels que AB = 4 cm ; AC = 3 cm et BC = 5 cm. Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

$$sin\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6.$$

$$cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}8.$$

$$tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}75.$$

b) <u>Calcul de la mesure de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle et un autre côté</u>

<u>Exemple 1</u> : Soit ABC un triangle rectangle en B tels que $sin\widehat{BAC} = 0{,}5$ et AC = 10 cm. Calculer AB et BC.

$sin\widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \times \ sin\widehat{BAC} = 10 \times 0{,}5 = 5cm.$

ABC est un triangle rectangle en B alors $AC^2 = BC^2 + BA^2 \Rightarrow BA^2 = AC^2 - BC^2$

$\Rightarrow BA^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm.

Exemple 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A tels que $tan\widehat{ABC} = 1{,}5$ et AB = 4 cm. Calculer AC et BC.

$tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \times tan\widehat{ABC} = 4 \times 1{,}5 = 6cm.$

ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 6^2$

$\Rightarrow BC^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm.

3) Propriétés

Pour tout angle aigu αon a :

- $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$
- $(cos\alpha)^2 + (sin\alpha)^2 = 1$

4) Rapports trigonométriques des angles remarquables

A	0°	30°	45°	60°	90°
sin (α)	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos (α)	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tan (α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Série d'exercices

Exercice 1

On considère dans un cercle, deux angles inscrits et un angle au centre qui interceptent le même arc. Dans chaque cas, indique la réponse exacte.

1) Si l'angle au centre mesure 40°, alors chaque angle inscrit mesure :

a) 40° b) 20° c) 80°

2) Si l'un des angles inscrits mesure 50°, alors l'autre angle inscrit mesure :

a) 50° b) 25° c) 100°

3) Si l'un des angles inscrits mesure 30°, alors l'angle au centre mesure :

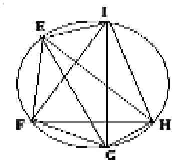
a) 30° b) 15° c) 60°

Exercice 2

Soit (C) un cercle de centre O. E, F, G, H et I sont des points de ce cercle.

1) Citer les angles inscrits de sommet E.

2) Cite les angles inscrits ayant pour sommet un point autre que E et qui intercepte le même arc qu'un angle inscrit de sommet E.



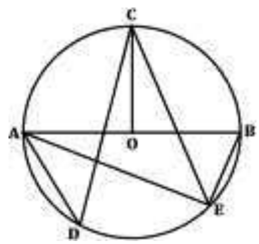
Exercice 3

Soient [IJ] et [KL] deux diamètres perpendiculaires en un point O centre du cercle.

1) Placez un point M sur le petit arc $\widehat{IK}$.

2) Quelles sont les mesures des angles :$\widehat{IML},\ \widehat{IMJ},\ \widehat{LMJ},\ \widehat{LMK},\ \widehat{IMK}$?

Exercice 4



[AB] est un diamètre du cercle de centre O. Le point C est situé sur le cercle de telle sorte que la droite (OC) soit perpendiculaire à la droite (AB).

1) Donner en justifiant la mesure des angles : $\widehat{CEA}$; $\widehat{CDA}$; $\widehat{BEA}$; $\widehat{BEC}$.

2) Que représente la droite (CE) pour l'angle BEA ?

Exercice 5

Soit © le cercle de centre O, circonscrit au triangle équilatéral ABC. Placer un point M sur le petit arc $\widehat{BC}$ de ce cercle. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{BMA},\ \widehat{AMC}\ et\ \widehat{BMC}$.

Exercice 6

Tracer le cercle © de centre O et de diamètre [AB] mesurant 10 cm

Placer un point D sur ce cercle tel que AD = 5 cm.

1) Que pouvez-vous dire du triangle AOD ?

2) Donner les mesures des angles $\widehat{AOD},\ \widehat{ABD}\ et\ \widehat{ADB}.$

3) Calculer BD.

Exercice 7

Soit © le cercle de centre O. tracer deux diamètres [AB] et [CD] de ce cercle. Placer un point M sur ce cercle.

1) Comparez les angles $\widehat{AOC},\ \widehat{AMC}\ et\ \widehat{BMD}.$

2) puis les angles $\widehat{AMC},\ \widehat{ADC}, \widehat{BCD}\ et\ \widehat{BMD}.$

Que pouvez-vous dire des droites (AD) et (BC) ?

Exercice 8

ABC est un triangle rectangle en A tels que mes$\hat{B} = 60°$ et BC = 12 cm.

1) Calculer en degré la mesure de l'angle $\hat{C}$.

2) Recopie puis complète le tableau ci-contre.

3) Calculer AB et AC.

α en degré	30	45	60
$\cos \alpha$			
$\sin \alpha$			

Exercice 9

Tracer un cercle © de centre O et placer un point A sur (C). Sur (C), placer les points B et C dans cet ordre tels que $\widehat{AOB} = 120°$ et $\widehat{BOC} = 120°$

1) Calculer $\widehat{AOC}$.

2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 10

ABC est un triangle tels que AB = 4 cm, AC = 3 cm et BC = 5 cm.

1) Faire la figure.

2) Calculer le $\sin \hat{B}$, le $\cos \hat{B}$ et la $\tan \hat{B}$.

3) Calculer la mesure en degré de l'angle $\hat{B}$.

4) Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]. Calculer AH, BH et CH.

Exercice 11

1) ABC est un triangle rectangle en B tel que mes $\hat{A} = 30°$ et AB = 2 cm.
Calculer AC et BC.

2) ABC est un triangle rectangle en B tel que mes $\hat{A} = 60°$ et AC = 2 cm.
Calculer BC et AB.

Exercice 12

1) Construire un triangle RST tel que ST = 8 cm, $\widehat{RST} = 30°$ et $\widehat{RTS} = 60°$

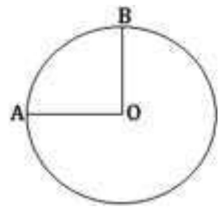
2) a) Donner la nature du triangle RST. Justifier.

b) Calculer les distances RT et SR.

3) Soit (C) le cercle de centre I circonscrit au triangle RST. Déterminer les angles $\widehat{SIR}$ et $\widehat{RIT}$. Justifier.

Exercice 13

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm (voir figure).



1) Quelle est la nature du triangle AOB ? Justifier votre réponse.

2) Calculer la distance AB.

3) Placer le point C symétrique du point A par rapport à O.

a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$? Justifier votre réponse.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 14 : BEPC 2001

On considère un triangle MNO rectangle en O. on suppose que mes $\widehat{MNO} = 60°$ et MN = 15 cm.

1) Calculer en degré la mesure de l'angle $\widehat{OMN}$.

2) Recopier puis compléter le tableau ci-contre.

α en degré	30	45	60
$\cos\alpha$			
$\sin\alpha$			

3) Calculer OM et ON.

4) Construire la médiane du triangle MON issue de M ; elle coupe [ON] en A. Construire la médiane du triangle MON issue de N ; elle coupe [OM] en B. Calculer AB.

Exercice 15 : BEPC 2008

1) Construire un triangle ABC rectangle en A tels que mes $\widehat{ABC} = 60°$ et BC = 15 cm.

2) Calculer en degré, puis en radian la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

3) Recopier puis compléter le tableau suivant :

Angle α	BAC	ABC	ACB
Valeur de α			
sin α			
cos α			
Cos² α + Sin² α			

Exercice 16 : BEPC 2007

Soit α un angle géométrique. On donne $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Sachant que : 90°< α<180°, calculer $\cos\alpha$ puis tg α.

2) Déterminer la valeur de α en degrés.

3) En déduire sin60° puis cos60°.

Exercice 17 : BEPC 1998

Construire un cercle © de centre O et de 3 cm de rayon. Placer le point A tel que OA = 9 cm. Le segment [OA] coupe le cercle © en E. Tracer le cercle ©' de diamètre OA.

Le cercle ©' coupe le cercle © en B et C.

1) Quelle est la nature du triangle OBA ? Justifier.

2) Montrer que AB = $6\sqrt{2}$.

3) Soit M l'image de A dans la translation du vecteur $\overrightarrow{BO}$. Placer le point M sur la figure. Quelle est la nature précise du quadrilatère OBAM ? Justifier.

Exercice 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soient les points A, B, C définis par $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u} + 8\vec{v}$; $\overrightarrow{BC} = -3\vec{u} - 3\vec{v}$; $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A, B et C et les placer dans le repère.

b) Calculer AB, AC et BC.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

d) Soit α la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$. Calculer sin α ; cos α et tg α.

2) a) Calculer les coordonnées du point D, image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et placer le point D.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ADBC ? Justifier votre réponse.

Exercice 19 : BEPC 2008

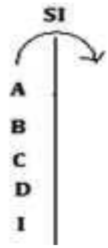
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), on donne les points A, B,C et D tels que : $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\overrightarrow{OD} = -\vec{i} + 3\vec{j}$

1) a) Préciser les coordonnées des points A, B et D puis les placer dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

b) Déterminer x et y tel que ABCD soit un parallélogramme puis préciser les coordonnées du point C.

2) Soit I(1 ; 2), montrer que le point I est le milieu des segments [BD] et [AC].

3) Soit S_I la symétrie centrale de centre I, compléter le tableau suivant :



4) a) Montrer que OBD est rectangle et isocèle.

b) calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{OBD}$

c) Donner la mesure de l'angle $\widehat{OBD}$.

5) Soit © le cercle circonscrit au triangle OBD.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle.

b) Soit la droite (Δ) passant par O et perpendiculaire à (OI).

- Déterminer une équation de la droite (Δ).
- Que peut-on dire de la droite (Δ) et le cercle © ?

POLYGONES

Résumé du cours

I) Rappels

❖ On appelle polygone une figure géométrique plane, limitée uniquement par des segments.

Un polygone a un nom qui indique le nombre de ses côtés.

Nom du polygone	Nombre de côtés
Triangle	3
Quadrilatère	4
Pentagone	5
Hexagone	6
Octogone	8
Décagone	10

❖ Une diagonale d'un polygone est un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.

❖ On appelle côté d'un polygone, chaque segment qui constitue ce polygone.

❖ On appelle sommets d'un polygone, les extrémités de ses côtés.

II) Polygone régulier

1) Définition

Un polygone qui a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure est un polygone régulier.

Exemple : triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier….

2) Propriétés

❖ Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle c'est-à-dire qu'il admet un cercle circonscrit dont le centre est appelé centre du polygone et le rayon de ce cercle est la distance du centre à un sommet du polygone.

❖ Chaque médiatrice d'un côté d'un polygone régulier est un axe de symétrie de ce polygone.

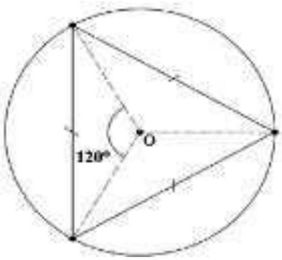
- ❖ Dans un polygone régulier, il y a autant de côtés que d'axes de symétrie.

3) Construction

Pour construire un polygone régulier dans un cercle de rayon r :

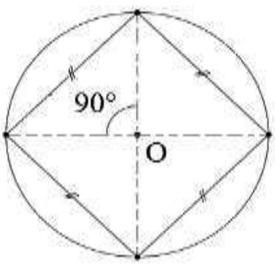
- ❖ On construit ce cercle à l'aide du compas ;
- ❖ On trace à l'aide de la règle un rayon en reliant un point du cercle et son centre ;
- ❖ On construit les angles au centre dont les mesures correspondent à $\frac{360°}{n}$ avec n : le nombre de côtés du polygone.
- ❖ On relie à l'aide des segments tous les points consécutifs du cercle.

a) Le triangle équilatéral



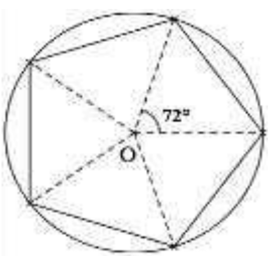
$$\frac{360°}{3} = 120°$$

b) Le carré



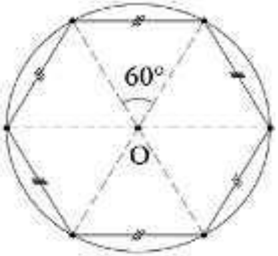
$$\frac{360°}{4} = 90°$$

c) Le pentagone régulier



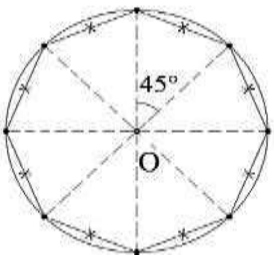
$$\frac{360°}{5} = 72°$$

d) L'hexagone régulier



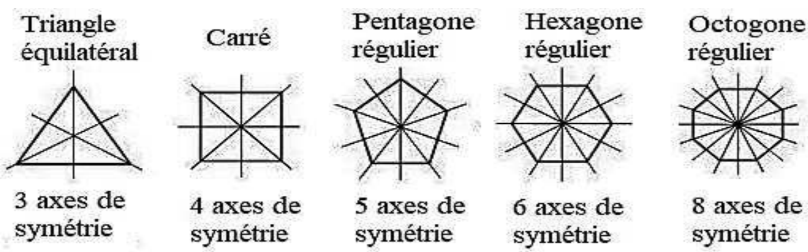
$$\frac{360°}{6} = 60°$$

e) L'octogone régulier



$$\frac{360°}{8} = 45°$$

4) Polygones réguliers et axes de symétrie



5) L'aire d'un polygone régulier

Soit A l'aire d'un polygone régulier de côté a inscrit dans un cercle de rayon R. Alors on a :

- Triangle équilatéral : A = $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$;
- Carré : A = $a^2 = 2R^2$;
- Pentagone : A = $\frac{5}{2\tan(36°)}a^2 = \frac{5}{2}R^2\sin(72°)$;
- Hexagone : A = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$;
- Octogone : A = $\frac{5}{2\tan(22{,}5°)}a^2 = 2R^2\sqrt{2}$

6) <u>Somme des angles d'un polygone régulier</u>

La somme des angles inscrits d'un polygone régulier est égale à $180°(n-2)$ avec n le nombre de côtés.

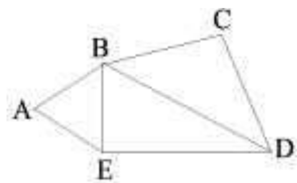
<u>Exemple</u> :

Polygones réguliers	Triangle équilatéral	Carré	Pentagone	Hexagone	Octogone
Somme des angles	180°	360°	540°	720°	1080°

Série d'exercices

Exercice 1

Soit la figure ci – contre :



1) Citer les polygones de la figure.

2) Citer les polygones qui ont :

a) trois côtés. b) quatre côtés. c) cinq côtés.

2) Que représente :

a) A pour ABE ? b) BE pour BDE ? c) BD pour BCDE ?

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1) Un carré est un quadrilatère qui possède 4 côtés de même longueur et 4 angles droits.

2) Un rectangle est un quadrilatère qui possède 4 côtés de même longueur.

3) Tout polygone est inscriptible dans un cercle.

4) Tout polygone est un quadrilatère.

5) Un polygone qui a 5 côtés est appelé pentagone.

6) Le triangle isocèle et le rectangle sont des polygones réguliers.

7) Le triangle équilatéral possède 3 axes de symétrie.

Exercice 3

1) Tracer un cercle de centre O et construire un carré ABCD inscrit dans ce cercle.

2) Construire l'octogone régulier de centre O dont un sommet est le point A.

Exercice 4

Recopier et compléter le tableau suivant :

Polygones réguliers	Triangle équilatéral	Carré	Pentagone	Hexagone	Octogone
Nombre de côté					
Mesure de l'angle au centre					
Somme des angles					
Mesure de l'angle du polygone					
Nombre d'axes de symétrie					

Exercice 5

1) Construire un triangle ACE équilatéral inscrit dans le cercle © de centre O.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$.

3) Calculer la somme des angles du polygone.

4) Construire les points D, F et B symétriques respectifs des points A, C et E par rapport à K.

5) Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?

Exercice 6

On veut construire un pentagone régulier ABCDE de centre O tel que AB = 5cm.

1) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2) Construire le triangle AOB.

3) Construire le pentagone ABCDE.

Exercice 7

On considère un octogone régulier ABCDEFGH de centre O.

1) Calculer l'angle $\widehat{ABO}$.

2) En déduire l'angle $\widehat{ABC}$

Exercice 8

1) Tracer un cercle de centre O et de rayon 5 cm.

2) Placer sur ce cercle un point G et construire l'hexagone régulier GHIJKL inscrit dans ce cercle.
3) Tracer le triangle GIK. Quelle semble être sa nature ?
4) a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{KGI}$.
b) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{GIK}$.

<u>Exercice 8</u>

1) Construire un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côté de centre O.
2) Soit © le cercle circonscrit au triangle ABC. (Δ) la médiatrice de [AB] recoupe © en E. Construire le triangle EFG image du triangle CAB par la symétrie de centre O.
3) Quelle est la nature du polygone AEBFCG ?
4) Calculer les mesures des angles $\widehat{AOE}$ et $\widehat{ACE}$.

<u>Exercice 9</u>

ABCDE est un pentagone régulier, le point I est le milieu de [AB]. On donne :
OA = OB = OC = OD = OE = 5cm.
1) Faire la figure
2) a) Quelle est la nature du triangle AOB ?
b) Montrer que $\widehat{AOB} = 72°$
3) Calculer AB et OI
4) Calculer l'aire du triangle AOB, puis en déduire l'aire du pentagone ABCDE.

PYRAMIDES ET CONES

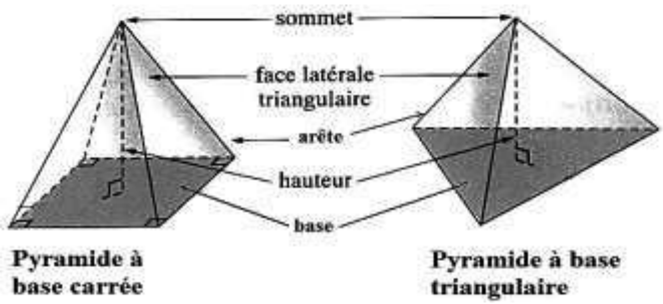
Résumé du cours

I) Pyramide

1) Description

Une pyramide est un solide formé :

- D'une base qui est polygone ;
- Des faces latérales triangulaires ayant un sommet en commun appelé sommet de la pyramide ;
- Des côtés communs à deux des faces appelés arêtes.



Remarque : Dans une pyramide, il y a plusieurs sommets.

2) Pyramide régulière

Une pyramide est dite régulière si toutes faces latérales sont des triangles isocèles superposables et sa base est un polygone régulier.

3) Patron d'une pyramide

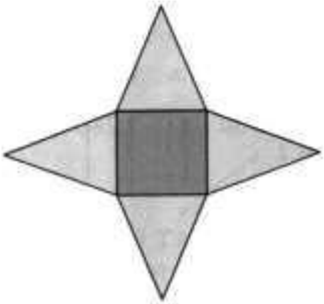
a) Définition

Le patron d'une pyramide est un dessin aplati qui après découpage et pliage donne la pyramide.

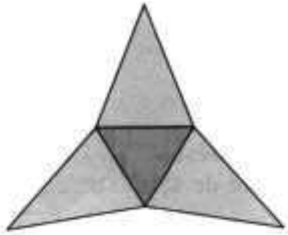
Il est constitué d'un polygone qui correspond à la base de la pyramide et de triangles qui correspondent aux faces latérales de la pyramide.

b) Construction

Pour construire le patron d'une pyramide, on construit d'abord la base puis les faces latérales.



Patron d'une pyramide
à base carrée



Patron d'une pyramide
à base triangulaire

Remarque : Pour une même pyramide, il y a plusieurs patrons possibles.

4) Calcul du volume

Le volume d'une pyramide de hauteur h et dont la base a pour aire S_B est donné par la formule $V = \frac{1}{3}S_B \times h$.

Exemple : Calculer le volume, en cm^3, d'une pyramide à base carrée de côté 5 cm et de hauteur 18 cm.

$V = \frac{1}{3}S_B \times h = \frac{1}{3}c \times c \times h = \frac{1}{3} \times 5cm \times 5cm \times 18cm = 150\ cm^3$.

5) Calcul d'aire

L'aire totale d'une pyramide est égale à la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base avec l'aire latérale qui est égale à la somme des aires de toutes les faces latérales.

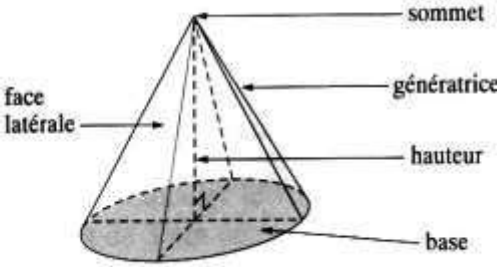
II) Cône de révolution

1) Description

Un cône de révolution est obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autre d'un des côtés de l'angle droit.

Un cône de révolution est un solide formé :

- D'un disque appelé base ;
- D'un sommet situé sur la perpendiculaire en son centre au disque de base ;
- D'une surface courbe appelée face latérale ;
- D'un segment joignant le sommet du cône et un point du cercle définissant le disque de base appelé génératrice.



Remarque

La longueur du côté de l'angle droit du triangle rectangle, ne générant pas l'axe de rotation est égale au rayon du disque de base.

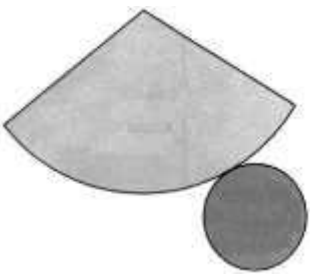
La longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle est égale à la longueur d'une génératrice.

La hauteur du cône est égale à la longueur du côté de l'angle droit générant l'axe de rotation.

2) Patron d'un cône de révolution

a) Définition

Le patron d'un cône de révolution est formé d'un disque de base et d'un secteur circulaire. La longueur de l'arc de cercle de ce secteur est égale au périmètre du cercle.



3) Calcul du volume

Le volume d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base a pour aire S_B est donné par la formule $V = \frac{1}{3}S_B \times h$ avec $S_B = \pi r^2$.

Exemple : Calculer le volume, en cm^3, d'un cône de hauteur 12 cm et dont le rayon du disque de base mesure 4 cm.

$V = \frac{1}{3}S_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (4cm)^2 \times 12cm = 200{,}96\ cm^3$.

4) Calcul d'aire

L'aire du cône est la somme de l'aire de la base et de l'aire de la surface latérale.

L'aire de la base est : πr^2 et l'aire de la surface latérale est : $\pi r\ell$ avec r : le rayon et ℓ : la longueur de la génératrice.

Alors l'aire du cône est A = $\pi r^2 + \pi r\ell$.

Série d'exercices

Exercice 1

Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de côtés de la base d'une pyramide	3	4	5	6
Nombre d'arrêtes				
Nombre de faces				
Nombre de sommet				

Exercice 2 : 1er groupe BEPC 2011

On donne une pyramide de base rectangulaire ABCD et de hauteur [ED], telle que EDA soit un triangle rectangle en D. on donne AB = 5 cm ; BC = 12 cm et ED = 8 cm.

1) Déterminer le volume de cette pyramide.

2) Calculer la tangente de l'angle $\widehat{AED}$.

Exercice 3

La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée est de 8 cm. Le périmètre de la base est 16 cm. Calculer son volume et son aire.

Exercice 4

Un cône de révolution a une génératrice de 20 cm ; sa base a un rayon de 12 cm. Calcule la hauteur de ce cône et son volume (π = 3,14).

Exercice 5

Un cône de révolution a une base cubique 8 cm de diamètre et une hauteur 8 cm. Calculer le volume du cône.

Exercice 6

Un cône de révolution a une base de 8 cm de diamètre et une hauteur de 8 cm. Calculer le volume du cône.

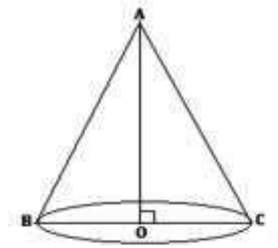
Exercice 7

La pyramide du Louvre est une pyramide régulière à base carrée de 35 cm de côté ; sa hauteur est de 22 cm. Calculer le volume de cette pyramide.

Exercice 8

On considère un cône SO = 20 cm et de base le cercle de rayon OA = 15 cm. Calculer le volume et l'aire de ce cône.

Exercice 9



1) Calculer le rayon OC de la base du cône.

2) Calculer le volume du cône arrondi au dixième (π = 3,14).

La figure ci-contre est un cône de révolution.

On donne AB= AC = 10 cm et AO = 8 cm

Exercice 10

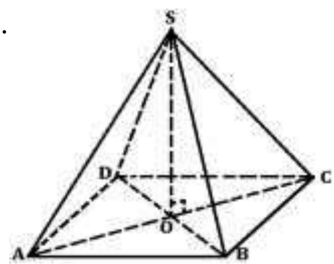
SABC est une pyramide ayant pour base le triangle ABC et pour hauteur SA tels que AB = 6 cm ; BC = SA = 8 cm et AC = 10 cm.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) Calculer le volume de la pyramide SABCS.

Exercice 11

SABCD est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arrêtes mesurent a. O est le centre de ABCD et [SO] est la hauteur de la pyramide.



1) Exprimer AC et AO en fonction de a.

2) Montrer que SO = $a\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Déterminer en fonction de a le volume SABCD.

4) Calculer ce volume lorsque $a = \sqrt{2}$

Exercice 12

On considère un cône de révolution semblable à celui qui est représenté ci-contre avec : AO = 2 cm et BO = 3 cm.

1) Calculer la longueur de la génératrice [AB] : donner en cm la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

2) Calculer le volume du cône : donner en cm3 la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.

Exercice 13

Une pyramide régulière à base carrée EFGH de côté 3 cm mesure 4 cm de hauteur. Sachant que les arêtes latérales mesurent chacune :

1) Calculer la distance EG.

2) Calculer le volume de cette pyramide.

3) Construire un patron de cette pyramide.

Exercice 14

Calculer le volume des pyramides suivantes :

Aire de la base (B)	9 cm²	8,25 cm²	80 cm²	2 dm²
Hauteur (H)	4 cm	10 cm	141 mm	24 cm
Volume (V)				

Exercice15

Calculer l'aire de la base et le volume des pyramides à base triangulaire suivants :

	Pyramide 1	Pyramide 2	Pyramide 3	Pyramide 4
Côté (b)	13 cm	12,5 cm	7 cm	12 cm
Hauteur correspondante (h)	5 cm	10 cm	3 cm	12 cm
Aire de la base				
Hauteur (H)	11 cm	15 cm	21 cm	3 cm
Volume (V)				

Exercice 16

Calculer l'aire de la base puis le volume des cônes de révolution suivants (on arrondira les calculs au dixième) :

	Cône 1	Cône 2	Cône 3	Cône 4
Rayon (R)	5 cm	6 cm	1,1 cm	12,5 cm
Aire de la base				
Hauteur (H)	4 cm	6,5 cm	10 cm	12,5 cm
Volume (V)				

Sujet BEPC de 2010 à 2021

BEPC : Session 2010

1er groupe

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

I. On donne le réel $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

a) Calculer x^2 et $(1-x)$

b) Déduire $x^2 + (-1+x)$, que peut-on dire de x^2 et $(1-x)$

II. Soient a, b et c trois réels tels que :

a = $\frac{5}{6} - \frac{3}{2}$; b = $\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ et c = $\frac{(3^2)^3}{3^4}$

1) Simplifier l'écriture des réels a, b et c

2) Calculer le réel E = 12a + b + c.

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

Exercice 2

Moussa possède un champ carré dont la mesure en mètre de la diagonale est de $60\sqrt{2}$. Ali possède un champ rectangulaire de même périmètre que celui de Moussa et dont les mesures de la longueur et de sa largeur sont respectivement proportionnelles à 7 et 5.

a) Trouver la mesure du côté du champ de Moussa.

b) Trouver les mesures de la longueur et de la largeur du champ d'Ali.

Exercice 3

On donne la fonction g définie par :

$g(x) = -3(x-3) + (x^2-9) + (3-x)(2x-5)$

a) Développer, réduire et ordonner $g(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

b) Factoriser $g(x)$

c) Déterminer les antécédents des réels 0 et 1 par la fonction g.

STATISTIQUE

Exercice

Lors de la dernière composition de Mathématiques, les notes des élèves de la classe de 3ème du CEG rural de Doungouro sont reparties selon le tableau suivant :

Notes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
Effectifs	3	1	5	4	8	5	13	12	6	5	8	3	2	2

1) Quel est l'effectif de cette classe de 3ème ?

2) Calculer la note moyenne de la classe.

3) Réorganiser ces données en classe d'amplitude égale à 5, la première étant [0 ; 5[et dresser le tableau des effectifs des classes. Tracer le diagramme à bandes correspondant. Echelle : en abscisse une classe d'amplitude 5 sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 4 élèves sera représenté par 1cm.

4) Calculer la moyenne en utilisant les centres des classes. Obtient-on le même résultat à la 2e question ? Justifier la réponse.

Géométrie

Exercice 1

a) Construire un triangle quelconque ABC. Placer le point D symétrique du point A par rapport au point B et le point E image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). L'unité étant le centimètre.

1) Placer les points A(-3 ; 4) ; B(0 ; 10) ; C(7 ; -1) et le milieu I de $[BC]$.

2) Calculer les coordonnées de I.

3) Calculer les longueurs AB ; AC et BC.

4) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

5) Déterminer le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

6) a) Quel est le centre du cercle © circonscrit au triangle ABC ? On justifiera la réponse.

b) Déterminer les points d'intersection du cercle © et de l'axe des ordonnées.

c) Tracer le cercle ©.

d) Soit J(0 ; 1). Comparer les mesures des angles $\widehat{AJB}$ et $\widehat{ACB}$.

Sujet N°2

Algèbre

Mathématiques 3ème

Exercice 1

I. On donne $A = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

a) Calculer A pour les valeurs de n suivantes : n = 1 ; n = 2 ; n = 3 et n = 4

b) Soit le réel $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Pour quelle valeur de n on a A = B

II. 1) On donne le système suivant : $\begin{cases} x + y = 30 \\ 3x + y = 58 \end{cases}$

Parmi les couples des réels suivants indiquez ceux qui sont solution du système :
(13 ; 17) ; (14 ; 16) ; (18 ; 4).

2) Une classe de 3ème de 30 élèves organise une sortie. Ils cotisent ensemble la somme de 11600F. Chaque garçon cotise 600F et chaque fille 200F. Quels sont, dans cette classe, le nombre de garçons et le nombre de filles ?

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

Exercice 2

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

1) Donner le degré de $f(x)$.

2) a) Calculer les images des réels 0 et $\sqrt{2}$ par f.

b) Donner un encadrement de $f(\sqrt{2})$ à 10^{-2} prés sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

3) a) Trouver le (s) antécédent(s) du réel 3.

b) La fonction f est-elle bijective ?

4) On donne la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 3 + (x-2)^2$.

Factoriser $g(x)$.

STATISTIQUE

Exercice

Après un devoir de mathématiques dans une classe de 3è de 50 élèves, le professeur a relevé les notes suivantes :

3	4	11	0,5	8	3	7	0	15	17
12	8	10	5	4	12	2	6	8,5	7
5	9	13	10,5	14	18	16	14,5	1	6
5,5	9,5	10	10,5	12,5	13,5	2	17 ,5	6,5	7,5
8	9	9,5	6	7	8,5	10,5	11	12	14

1) a) Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique en regroupant les modalités en classes d'amplitudes 5 dont la 1ère étant [0 ; 5[.

b) Indiquer la classe qui le plus grand effectif.

2) Construire le diagramme à bandes représentant ce regroupement en classes. On prendra 1cm pour 2 élèves en ordonnées et 1cm pour 5 points en abscisses.

Géométrie

Exercice 1

Le triangle ABC est tel que AB = 6 cm ; AC = 12 cm et BC = 8 cm. M est un point de (AB) et N un point de [AC] tels que (MN) // (BC) et AN = 5 cm.

1) Faire la figure.

2) Calculer les distances AM et MN.

3) La parallèle à la droite (BN) passant par M coupe la (AC) en K.

a) Exprimer $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{AK}{AN}$ en fonction de $\frac{AM}{AB}$

b) Démontrer que $AN^2 = AK \times AC$.

c) Calculer la distance AK.

Exercice 2

a) Tracer un triangle ABC et placer les points M et N tels que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

b) Etablir que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ puis $\overrightarrow{\mathrm{NB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

c) En déduire que M a pour image N dans la symétrie de centre B.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-1 ; 3)$; $B(-2 ; 2)$ et $C(4 ; -2)$.

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

2) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

3) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A puis calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

4) Soit © le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Déterminer son rayon et les coordonnés de son centre I.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (Δ) au cercle © au point A.

c) Faire une figure complète de l'exercice.

2è Groupe

Algèbre

Soit la fonction définie par g(x) = $x^2 - \frac{1}{4} + 3x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

1) Développer, réduire et ordonner g(x) suivant les puissances décroissantes de x.

2) Factoriser g(x).

3) a) Calculer g(0) ; g(-2) ; g($\sqrt{3}$).

b) Donner un encadrement de g($\sqrt{3}$) à 10^{-2} près sachant que 1,732< $\sqrt{3}$ <1,733.

4) Résoudre dans ℝ, l'équation g(x) = 0.

Géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

On donne A(0 ; 4) ; B(0 ; 1) et C(2 ; 1).

1) a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Soit © le cercle circonscrit au triangle ABC. Quel est son centre K ? Quel est le rayon r ?

3) Calculer les coordonnées de E pour que ACEB soit un parallélogramme

4) Calculer la tangente et le sinus de l'écart angulaire $\widehat{BAC}$

5) On complétera la figure au fur et à mesure avec les points K, E et le cercle ©

BEPC : Session 2011

1er groupe

Sujet 1

Algèbre

Exercice 1

On donne les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 2\left(\frac{\frac{-1}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{7}}$; $B = \frac{2^2 \times 10^{-2} \times 5}{0{,}4 \times 0{,}2 \times 0{,}125}$; $C = a^2 - a - 1$ avec $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1) Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2) Ecrire B sous la forme $2^n \times 5^p$ ou n et p sont des entiers relatifs.

3) a) Déterminer la valeur de C.

b) Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, donner un encadrement de a à 10^{-2}.

Exercice 2

1) On donne la fonction polynôme définie par : $P(x) = (4x-1)^2 - (2x+1)^2$

a) Développer, réduire et ordonner P(x) suivant les puissances croissantes de x.

b) Résoudre dans ℝ l'équation P$(x) = 0$. P est-elle bijective ?

2) On pose : A$(x) = P(x) - x^2 + 2x - 1$. Factoriser $A(x)$.

STATISTIQUE

Exercice

Après un examen blanc dans une classe de 3ède 50 élèves, le professeur construit à l'aide des notes des élèves le tableau suivant :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20]
Fréquences	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

1) a) Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique regroupée en classe.

b) Indiquer la classe modale.

2) Tracer le diagramme en bande correspondant à cette série statistique. (On pourra utiliser en ordonnée les effectifs ou bien les fréquences ; Echelle : en abscisse une classe d'amplitude 5 sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 5 élèves ou une fréquence de $\frac{1}{10}$ sera représentée par 1cm).

3) Calculer la moyenne de cette série statistique en utilisant le centre des classes.

Géométrie

Exercice 1

1) Construire un cercle © de centre O et de rayon 5 cm. Placer les points A, B et K tels que [AB] est diamètre de © et K un point du cercle distinct de A et B.

2) Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{AKB}$? Justifier

3) Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$. Elle recoupe le cercle en M, calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOM}$

4) a) Construire le point C, image du point A par la translation du vecteur qui transforme O en M. Quelle est la nature du quadrilatère OMCA ? Justifier

b) Quelle est l'image du point A par la rotation r de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct ?

(Question hors programme).

<u>Exercice 2</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-2\ ;\ 1)$; $C(4\ ;\ -1)$ et $E(0\ ;\ -3)$.

1) Placer les points A, C, E dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Montrer que le triangle AEC est un triangle rectangle et isocèle

3) a) Déterminer les coordonnées du point I milieu de [AC]

b) Que représente la droite (IE) pour le segment [AC]. Déterminer une équation cartésienne de la droite (IE) ?

4) Préciser le centre et le rayon du cercle © circonscrit au triangle AEC et tracer © dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) a) Déterminer le point D, image du point E par la symétrie de centre I et placer D dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère AECD ?

<u>Sujet 2</u>

<u>Algèbre</u>

<u>Exercice 1</u>

On donne les expressions suivantes :

$A = -\frac{3}{2} + \frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}$; $B = \frac{(0,75)^2\times(-3,2)^3\times(3)^{-2}}{(-0,5)^2\times(0,4)^3\times2^7}$; $C = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Calculer les expressions A, B et C puis comparer.

Exercice 2

1) a) Ecrire le polynôme $R(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ sous la forme réduite et ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

b) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ donner un encadrement de R($\sqrt{2}$) à 10^{-2} près.

2) Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 1 - (x-1)(x+5)$.

3) Résoudre P$(x) = 0$. L'application P est-elle bijective.

Géométrie

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 3 cm et AB = 9 cm. Soit J le milieu de [BC] et I le point de [AB] tel que IB = 5 cm.

a) Faire une figure.

b) Calculer les longueurs BC et IC. Que représente la droite (IJ) pour le segment [BC] ? Justifier.

Quelle est la nature du triangle CIB ?

c) La parallèle à (AC) passant par I coupe (BC) en E. Calculer BE et EI.

Exercice 2

On donne une pyramide de base triangulaire ABCD et de hauteur [ED], telle que EDA soit un triangle rectangle en D. On donne AB = 5 cm ; BC = 12 cm et ED = 8 cm.

1) Calculer le volume de cette pyramide.

2) Calculer la tangente de l'angle $\widehat{AED}$.

NB : La représentation graphique de la pyramide n'est pas exigée.

Exercice 3

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on donne la droite Δ_1 d'équation $2x + 3y - 2 = 0$ et le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 2)$.

1) a) Donner le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite Δ_1.

b) Trouver une application affine f qui a pour représentation graphique Δ_1. Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ_2 passant par A et perpendiculaire à Δ_1.

3) Soient les points B(−5 ; 4) et C(0 ; 5).

a) Montrer que le point B appartient à Δ_1 et C appartient Δ_2.

b) Calculer les distances AB, AC et BC puis en déduire la nature du triangle ABC.

4) a) Calculer les coordonnées du point I centre du cercle © circonscrit au triangle ABC et celles du point D symétrique du point A par rapport à I.

b) Préciser la nature du quadrilatère ABCD.

5) Tracer Δ_1, Δ_2 et © puis placer les points A, B, C, D et I.

2nd Groupe

Algèbre

I. Soit g la fonction polynôme définie par g(x) = $ax^2 + bx + 1$ ou a et b sont des réels. On donne g(1) = 0 et g(−2) = 9.

1) Déterminer a et b puis factoriser g(x).

2) Résoudre l'équation $x^2 - 2x + 1 = \frac{9}{4}$

II. Un marchand a acheté une première fois 2kg de sucre et 3kg de pomme de terre à 2400F. Une deuxième fois, il a acheté 5kg de pomme de terre et 3kg de sucre à 3850F. Déterminer le prix d'un kg de sucre et celui d'un kg de pomme de terre, sachant que pour chaque produit, le prix du kg ne change pas.

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

Géométrie

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Placer les points A(−2 ; −3) ; B(2 ; 5) ; C(8 ; 3).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

3) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment [AC].

4) Soit (Δ) la médiatrice du segment [AC]. Trouver une équation cartésienne de (Δ).

5) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme et placer D dans le repère.

6) a) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (Δ) avec l'axe des ordonnées.

BEPC : Session 2012

1er groupe

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne les nombres réels suivants : X = $3\sqrt{3} + \sqrt{300} - \sqrt{432} + \sqrt{3}$; Y = $-2\sqrt{2}$.

1) Ecrire X sous la forme a$\sqrt{b}$ où a et b sont des réels avec b > 0.

2) Soit S = X + Y. Calculer S^2 puis $\frac{S^2}{4}$.

3) Déterminer le signe de $\frac{S^2}{4}$.

Exercice 2

Soit l'expression E = $(2x - 3)(3x + 2) - (4x^2 - 9)$.

1) a) Développer, réduire et ordonner l'expression suivant les puissances décroissantes de x.

b) Résoudre, dans ℝ, l'équation E = 3.

2) a) Factoriser $4x^2 - 9$.

b) En déduire la factorisation de l'expression E.

c) Résoudre, dans ℝ, l'équation $(2x - 3)(x - 1)$ = 0.

3) a) Calculer la valeur numérique de l'expression E pour x= $\sqrt{3}$. Soit m ce réel.

b) Comparer les réels 9 et $5\sqrt{3}$.

c) En déduire le signe de m.

d) Sachant que 1,732$<$ $\sqrt{3}$ <1,733, donner un encadrement du rée l m à 10^{-2} prés.

Exercice 3

C'est la saison des récoltes du mil. Trois cultivateurs Ado, Ari et Ada s'entendent pour louer une charrette afin de ramener leurs récoltes du champ. Ils décident de ramener la même quantité. Ado a son champ à 7 km de son domicile, Ari et Ada ont leurs récoltes respectivement à 12 km et à 16 km. Le charretier leur demande de payer 4900F.

Ils conviennent que chacun payera proportionnellement à la distance parcourue pour arriver chez lui. Déterminer le montant de la somme que chacun payera.

Géométrie

Exercice 1

ABCD est un rectangle tel que AB = 4,8 cm, AD = 3,6 cm et E le point du segment [AB] tel que AE = 2,1 cm. La parallèle à (BD) passant par E coupe [AD] en F.

1) Faire la figure

2) Calculer la distance BD

3) Déterminer les distances AF et EF.

Exercice 2

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité 1 cm, on donne les points B, C et M tels que : B(8 ; 0), C(0 ; 6), M(4 ; 0).

1) Placer les points B, C et M dans ce repère.

2) La parallèle à (BC) passant par M coupe (OC) en N.

a) Montrer que le point N a pour coordonnées (0 ; 3).

b) Déterminer les coordonnées du point I, milieu de [MN].

3) a) Construire le point P tel que NPBM soit un parallélogramme.

b) Déterminer les coordonnées du point P.

4) a) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en P.

b) Préciser le centre et le rayon du cercle © circonscrit au triangle MNP. Tracer ce cercle.

c) Le point O appartient-il à © ? Justifier.

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

Soit les réels a = $\frac{1}{10}\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right]$; b = $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et C = $-1+\sqrt{3}$

1) Calculer le réel a.

2) a) Montrer que les réels b et c sont inverses.

b) Comparer les réels (b × c) et a.

3) Etablir que b^2 = b $+\frac{1}{2}$

Mathématiques 3ème

Exercice 2

On donne le polynôme P(x) = $(x-3)^2 - 16$.

1) a) Calculer P(0) et P(6), puis les comparer.

b) L'application P est-elle bijective ? Justifie votre réponse.

c) Calculer P($\sqrt{2}$).

d) Sachant que 1,414< $\sqrt{2}$ <1,415 donner un encadrement du réel P($\sqrt{2}$) à 10^{-2} près.

2) a) Développer, réduire et ordonner le polynôme P(x) suivant les puissances croissantes de x.

b) Résoudre, dans ℝ, l'équation P(x) = -16.

3) a) Mettre P(x) sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

b) Résoudre, dans ℝ, l'équation P(x) = 0.

Géométrie

Exercice 1

1) Tracer une droite (d) et placer sur cette droite les points E, B, F et C dans cet ordre tels que : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$ et EB = BF = FC = 3 cm.

2) a) Tracer le cercle © de centre B et de diamètre 6 cm.

b) Les points E, F et C appartient-ils à © ? Justifier.

3) a) Placer un point A de © tel que AF = r (r est le rayon du cercle ©).

b) Donne la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ABC}$, puis de l'angle $\widehat{AEF}$.

4) a) Tracer la parallèle à (AE) passant par B, elle coupe (AC) en I.

b) Exprimer la distance AI en fonction de la distance AC.

Exercice 2

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité 1 cm. On donne les points A(2 ; -1), B(-4 ; -3), C(0 ; 5).

1) Placer les points A, B et C dans ce repère.

2) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e t $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Calculer les distances AB, BC et AC.

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

3) Soit D(-6 ; 3). Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Préciser la nature exacte du quadrilatère ABDC.

4) Soit © le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Déterminer le centre E et le rayon r de ce cercle.

b) Le point D appartient-il au cercle ? Justifier.

c) ABDC est-il un polygone régulier ? Si oui, Préciser ses axes de symétrie.

5) a) Soit F(-5 ;0). Vérifier que F est milieu de [BD].

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (EF) puis la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

BEPC : Session 2013

1er groupe

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

I. On donne les réels suivants : A = $\frac{\frac{9}{4}-\frac{5}{2}}{2-\frac{5}{3}}$; B = $\sqrt{0{,}75} + 2\sqrt{1{,}08} - \sqrt{1{,}47}$

1) a) Mets A sous la forme d'une fraction irréductible.

b) Trouver l'opposé et l'inverse de A.

2) a) Mets B sous la forme a$\sqrt{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel.

b) Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donne un encadrement du réel B à 10^{-2} près.

II. On considère la fonction polynôme f définie par :

$f(x) = 3x^2 - 18x + 27 + (x-3)(x+1)$

1) Calculer l'image de 0 par f.

2) a) Donne la forme factorisée de $f(x)$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

c) La fonction f est-elle bijective ?

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

Exercice 2

Les notes obtenues par 10 élèves à un devoir sont classées dans l'ordre croissant comme suit : a ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14 ; 15 ; b.

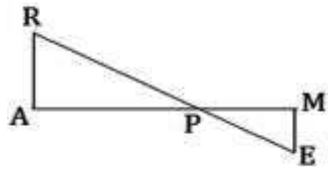
Sachant que la moyenne de ces notes est de 10 et que la différence entre la plus grande note et la plus petite est de 16, calcule a et b.

Géométrie

Exercice 1

On donne la figure ci-contre. Les points R, P et E sont alignés ainsi que les points A, P et M. RAP est un triangle rectangle avec AR = 3 cm, MP = 2 cm et RP =5 cm.

Les droites (AR) et (EM) sont parallèles.



1) Calcule AP.

2) Trouve les distances PE et ME.

3) Explique pourquoi les angles $\widehat{RPA}$ et $\widehat{MPE}$ ont la même mesure.

NB : la figure n'est pas en vraie grandeur.

Exercice 2

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(6\ ;-1)$, $B(2\ ;-2)$ et $C(5\ ;3)$.

1) Donne les coordonnées du point G milieu de $[BC]$ puis place les points A, B, C et G dans ce repère.

2) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

b) Calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis prouve que ces vecteurs sont orthogonaux .

c) Donne les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme puis place D dans le repère.

3) a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Donne la nature précise du triangle ABC puis celle du quadrilatère ABDC.

4) a) Montrer que le quadrilatère ABDC est un polygone régulier.

b) Donne puis trace les axes de symétrie de ce polygone.

c) Donne une rotation qui laisse invariant ce polygone. (Question hors programme).

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

Mathématiques 3ème

I. On donne les réels suivants : A = $\frac{\frac{4}{9}}{5-\frac{11}{3}}$; B = $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}-\sqrt{50}}$

1) Mets A sous la forme d'une fraction irréductible.

2) Ecris $\sqrt{72}-\sqrt{50}$ sous la forme a$\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, puis simplifier B.

3) Calcule le produit des réels A et B. Que constate-t-on ?

II. On considère la fonction polynôme f définie par

$f(x) = 4x^2 - 25 - (2x-5)(x+1)$

1) Donne la forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x du polynôme $f(x)$.

2) a) Donne l'ensemble des solutions de chacun des systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R}$ ci – après :

$\begin{cases} 2x+3<0 \\ x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3>0 \\ x<0 \end{cases}$

b) Déduis les solutions de l'inéquation f(x)< -20

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

<u>Exercice 2</u>

Une enquête effectuée auprès des professeurs du CES Annour, sur leur nombre d'années dans l'enseignement, a donné les résultats suivants :

Ancienneté	[0 ; 6[	[6 ; 12[	[12 ; 18[	[18 ; 24[	[24 ; 30[
Nombre de professeurs	35	28	17	8	5

1) Calcule l'effectif des professeurs de cet établissement.

2) Donne la classe modale de cette série statistique.

3) Trace le diagramme à bandes de cette série statistique.

(On donne sur l'axe des abscisses 1 cm pour 6 années d'ancienneté et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 5 professeurs).

<u>Géométrie</u>

<u>Exercice 1</u>

ABCD est un carré de centre G dont le côté mesure 4 cm.

a) Construire le point P tel que $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GP}$ puis précise la nature du quadrilatère AGPD.

b) Donner l'image du triangle ABG par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

c) Le carré ABCD est la base d'une pyramide régulière SABCD de hauteur SH = 5cm. Donner le volume de cette pyramide.

Exercice 2

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) d'unité 1 cm, on considère les points P(-2 ; 0), D(0 ; 4), S(1 ; 2) ; et I(-1 ; -2).

1) Placer ces points dans ce repère.

2) Montrer que le quadrilatère PDSI est un parallélogramme.

3) a) Vérifier que le point E(-1 ; 2) est milieu de [DP] puis place E dans le repère.

b) Calculer les distances EI, ES et SI.

c) Préciser la nature du triangle ESI.

d) Déterminer le centre et le rayon du cercle © circonscrit au triangle ESI puis construire ce cercle.

4) Donner la valeur exacte de sin $\widehat{EIS}$.

2ème groupe

ALGEBRE

Exercice

I. Au cours d'un devoir de mathématiques trois élèves Ado, Haoua et Saley ont obtenu des notes sur 20, respectivement proportionnelles aux nombres 4, 6 et 8. Sachant qu'ils ont totalisé à trois 36 points, calcule la note obtenue par chacun d'eux.

II. On considère l'expression : E = $x^2 - 16 + (2x - 3)(4 - x)$.

1) Développer, réduire et ordonner l'expression E suivant les puissances croissantes de x.

2) Factoriser E.

3) Calculer la valeur de E pour $x = -2$.

4) a) Résoudre, dans ℝ, l'équation E = 0.

b) Les solutions de cette équation sont-elles des décimaux ?

GEOMETRIE

Exercice

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité 1 cm. On donne les points A(0 ; 4) ; B(4 ; 0), C(2 ; −2) ; D(−2 ; 2).

1) a) Placer les points A, B et C dans ce repère.

b) Déterminer les coordonnées du point I milieu de [AC] puis place I dans le repère.

c) Donne une équation cartésienne de la droite (OI).

2) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e t $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

3) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer puis compare les distances AC et BD.

c) Préciser la nature exacte du quadrilatère ABCD.

4) a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle ©.

b) Préciser le centre et le rayon de ce cercle.

c) Tracer le cercle © dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

BEPC : Session 2014

1er Groupe

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne les réels suivants : A = $\frac{5+\frac{5}{3}}{5-\frac{5}{3}}$; B = $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; C = $\sqrt{200} - \sqrt{242} - \sqrt{18}$

1) Mets chacun des réels A et B sous la forme d'une fraction irréductible.

2) Mets le réel C sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel.

3) Ecris le réel $(-4\sqrt{2})^2$ sous la forme 2^n où n est un entier naturel que l'on déterminera.

Exercice 2

Soit la fonction polynôme g définie par g(x) = $2(4x^2 - 1) - (2x + 1)^2$.

1) Montre que g(x) peut s'écrire g(x) = $4x^2 - 4x - 3$.

2) a) Calcule g(0) et g(1).

b) Montre que la fonction g n'est pas bijective.

3) a) Factorise l'expression $4x^2 - 1$.

b) Déduis la factorisation de g(x).

4) Résoudre dans ℝ, l'expression $(2x + 1)(2x - 3) = 0$.

Exercice 3

Dans une ferme de Gorko, il ya des vaches et des poules sans handicap. Le fermier a compté 108 têtes et 300 pattes. Donne le nombre de vaches et celui de poules.

Géométrie

Exercice 1

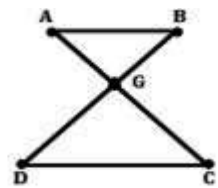
On donne la figure ci-contre : AG = BG = 3cm ; CG = DG = 4,5cm et CD = 5,1cm.

1) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Calcule la distance AB.

3) Donne deux triangles semblables dans cette figure.

NB : La figure n'est pas en vraie grandeur.



Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité 1cm, on donne la droite (D) d'équation : $x - 3y + 2 = 0$ et les points $A\binom{1}{1}$ et $S\binom{-2}{0}$.

1) a) Montre que les points A et S appartiennent à la droite (D).

b) Trace la droite (D) dans le repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

2) Soit le point E$\binom{-3}{3}$.

a) Place le point E dans le repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

b) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ *et* $\overrightarrow{SE}$ sont orthogonaux.

c) Calcule et compare les distances SA et SE.

d) Donne la nature précise du triangle ASE.

3) Soit © le cercle circonscrit au triangle ASE.

a) Calcule les coordonnées de son centre K.

b) Calcule son rayon.

c) Trace ©.

4) a) Vérifie que le point $I\binom{0}{4}$ appartient au cercle ©.

b) Montre que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{IE}$ et que le quadrilatère ASEI est un polygone régulier dont on précisera le nom.

c) Calcule le volume d'une pyramide de base ASEI dont la hauteur mesure 3cm.

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

1) Compare les réels 2 et $\sqrt{5}$ puis donne le signe du réel $2 - \sqrt{5}$.

2) On donne le réel E = $2 - \sqrt{5}$

a) Calcule E^2.

b) Donne la racine carrée du réel $9 - 4\sqrt{5}$ sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.

c) Rends rationnel le dénominateur de l'inverse de E.

d) Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, donne un encadrement de E à 10^{-2} près.

Exercice 2

Soit l'application affine f définie par $f(x) = -2x + 1$

1) Détermine les images par f des réels $\frac{1}{2}$ et 0.

2) Détermine l'ensemble des réels x dont les images par f sont strictement supérieures à 2.

3) Donne le sens de variation de l'application f. Justifie la réponse.

4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $[f(x)]^2 = 9$.

Exercice 3

Les notes obtenues par les 30 élèves de la classe de 3ème du CEG Haské, à un devoir de Mathématiques sont regroupées en classes de même amplitude selon le tableau suivant :

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs	3	x	9	6	y

Mathématiques 3ème

1) Calcule l'amplitude d'une classe.

2) Sachant que x est le double de y, détermine x et y.

3) Pour la suite, on prendra $x = 8$ et $y = 4$.

a) Donne la classe modale.

b) Calcule la moyenne des notes en utilisant les centres des classes.

c) Trace le diagramme à bandes correspondant.

Echelle : en abscisse une classe sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 2 élèves sera représenté par 1cm.

Géométrie

Exercice 1

($\mathcal{C}$) est le cercle de centre O et de diamètre [AB], E est un point du cercle ($\mathcal{C}$) tel que $\widehat{BAE}$ = 30°. On donne AB = 6cm.

1) Fais la figure.

2) Donne la nature du triangle ABE. Justifie la réponse.

3) a) Compare les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BOE}$ en justifiant la réponse.

b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BOE}$.

c) Montre que le triangle BOE est équilatéral et déduis la distance BE.

4) Calcule la distance AE.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on considère les points A$\binom{1}{2}$; B$\binom{-1}{3}$ et C$\binom{2}{4}$

1) a) Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

b) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

c) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et déduis que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

d) Calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

e) Montre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2) Soit le point D (0 ; 5).

a) Place le point D dans le repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

b) Montre que $t_{\overrightarrow{AB}}$ (C) = D où $t_{\overrightarrow{AB}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Donne la nature exacte du quadrilatère ABDC.

3) On pose $t_{\overrightarrow{CA}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}(C) = F$.

a) Montre que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BF}$.

b) Construis le point F.

c) Détermine les coordonnées du point F.

2ème Groupe

Algèbre

I. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

II. Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = (2x-1)^2 - (3x+2)^2$

1) Montre que $P(x) = -5x^2 - 16x - 3$

2) Calcule l'image de $\sqrt{2}$ par P.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) l'équation $P(x) = -3$.

b) l'inéquation $P(x)+5x^2 \leq 0$.

4) Factorise $P(x)$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(-x-3)(5x+1) = 0$.

Géométrie

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points : $A\binom{-1}{-2}$; $B\binom{2}{1}$; $C\binom{-1}{4}$ et $D\binom{-4}{1}$.

1) Place les points A, B, C et D dans le repère.

2) a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) Trouve une équation cartésienne de la droite (AC).

3) Montre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

4) On appelle K le centre du parallélogramme ABCD. Calcule les coordonnées de K.

5) a) Calcule les distances AB, BC et AC.

b) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$?

c) Donne la nature précise du quadrilatère ABCD. Justifie la réponse.

d) Précise le centre et le rayon du cercle ($\mathcal{C}$) circonscrit au quadrilatère ABCD puis trace ($\mathcal{C}$).

BEPC : Session 2015

1er groupe

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

Soient les réels m et n suivants : m = $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et n = $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

1) Compare les réels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ puis déduis le signe du réel m.

2) Calcule m^2.

3) Exprime n en fonction de m puis déduis que les réels m et n sont opposés.

4) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, encadre m par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Exercice 2

I) Dans le centre d'examen du BEPC de Radi, les $\frac{2}{5}$ des candidats sont du CEG de Radi, les $\frac{4}{7}$ des candidats sont du CEG de Bouka et les 9 élèves qui restent sont des candidats libres.

1) Traduis cet énoncé par une équation du premier degré d'inconnue x où x est l'effectif des candidats dudit centre.

2) Sachant que l'effectif x des candidats du centre de Radi est la solution de l'équation $-\frac{1}{3}x + 105 = 0$, trouve x.

II) Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = -\frac{1}{3}x + 105$ et

$g(x) = \sqrt{-\frac{1}{3}x + 105}$

1) a) La fonction f est-elle affine ou linéaire ? Justifie ta réponse.

b) Donne le sens de variation de la fonction f. Justifie ta réponse.

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $-\frac{1}{3}x + 105 \geq 0$.

b) Déduis l'ensemble de définition Dg de la fonction g.

Géométrie

Exercice 1

On considère les points A, I et M tels que AM = 6 cm et I milieu du segment $[AM]$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[AM]$. B est un point de (C) tel que mes $\widehat{AIB}$ = 60°.

1) Fais la figure.

2) a) Donne un angle inscrit dans le cercle (C) et un angle au centre du cercle (C).

b) Enonce la propriété qui permet de comparer un angle inscrit et l'angle au centre correspondant.

c) Compare les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AIB}$ en justifiant ta réponse.

3) a) Construis le polygone régulier inscrit dans le cercle (C) dont [AB] est un côté.

b) Donne le nom de ce polygone.

c) Trouve la somme des angles de ce polygone.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm, on donne les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = 2x + 4$ et $x + 2y - 3 = 0$.

1) Trace ces deux droites dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Montrer que le point B(-4 ; -4) appartient à la droite (D_1).

b) C est le point de la droite (D_2) d'ordonnée -1. Trouve l'abscisse du point C.

3) a) Détermine le coefficient directeur de chacune des droites $D_1)$ et (D_2).

b) Montre que ces deux droites sont perpendiculaires.

4) a) Soit A le point d'intersection des droites $D_1)$ et (D_2). Détermine les coordonnées de A.

b) Sachant que $A(-1\ ;\ 2)$ et $C(5\ ;\ -1)$, calcule les distances AB, BC et AC.

c) Déduis que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

5) a) Calcule sin $\widehat{ACB}$.

b) Déduis la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

Soit le réel A tel que A = $\left(3 - 2\sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) + \sqrt{147} - \sqrt{75}$.

Mathématiques 3ème

1) Calcule les réels $7^2 \times 3$ et 3×5^2.

2) Mets le réel A sous la forme $m\sqrt{3}$ où m est un entier relatif.

3) On suppose $1{,}732 < A < 1{,}733$.

a) Traduis cet encadrement par l'appartenance de A à un intervalle.

b) Trouve un encadrement de $\frac{1}{A}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

Exercice 2

I) Dans une classe de 20 élèves, on a relevé le nombre de pulsations par minute (rythme cardiaque) de tous les élèves et l'on a obtenu les résultats suivants :

86	60	50	63	77	78	81	73	89	93	61	70	87	75	77	67	76	68	97	69

On se propose de regrouper ces résultats en classe d'égale amplitude 10.

1) Complète le tableau suivant :

Classes	[50 ; 60]	[60 ; 70]	[70 ; 80]	[80 ; 90]	[90 ; 100]
Effectifs					

2) Calcule la moyenne de cette série statistique en utilisant les centres des classes.

II) On donne la fonction polynôme P définie par :

$P(x) = (3x - 2)(2x - 1) - (3x - 2)^2$

1) a) Factorise $P(x)$.

b) Montre que $P(x) = -3x^2 + 5x - 2$

2) a) Calcule $P\left(\frac{2}{3}\right)$ et $P(1)$.

b) Justifie que la fonction P n'est pas bijective.

N.B : les parties I et II sont indépendantes.

Géométrie

Exercice 1

Soit ABD un triangle rectangle en A tels que : AB = 4,5 cm et AD = 6 cm. E est le point du segment [AB] tel que AE = 3 cm et M est le point du segment [AD] tel que AM = 4 cm.

1) Fais la figure.

2) Enonce la réciproque de la propriété de Thalès.

3) Montre que les droites (EM) et (BD) sont parallèles.
4) Calcule la tangente de l'angle $\widehat{ADB}$.

Exercice 2

Soit le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On donne les points A$(-3\ ;-1)$; B$(0\ ;-3)$ et la droite (D) d'équation : $2x + 3y - 4 = 0$.

1) a) Place les points A et B dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   c) Trouve une équation de la droite (AB).
2) a) Montre que les droites (AB) et (D) sont parallèles.
   b) La droite (D) coupe l'axe des abscisses en E. Montre que E(2 ; 0).
3) Soit le point F(-1 ; 2). Montre que :
   a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$
   b) les distances AB et BE sont égales.
   c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux.
4) a) Détermine une translation qui laisse invariant le quadrilatère ABEF. Justifie ta réponse.
   b) Calcule le volume d'une pyramide de base ABEF et dont la hauteur 3 cm.

2ème Groupe

Algèbre

I) Soit la fonction polynôme h définie par $h(x) = (5 - 2x)^2 - 16$

1) Calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2) Développe, réduis et ordonne le polynôme $h(x)$.
3) Factorise $h(x)$.
4) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $(1 - 2x)(9 - 2x) = 0$.

II) Soit l'équation $2x + y - 5 = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1) Vérifie que le couple (1 ; 3) est solution de l'équation $2x + y - 5 = 0$.
2) La droite d'équation $2x + y - 5 = 0$ est la représentation graphique d'une fonction affine f.
   a) Montre que $f(x) = 5 - 2x$.
   b) Donne le sens de variation de f. Justifie ta réponse.
3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations $\begin{cases} f(x) \geq -1 \\ f(x) < 9 \end{cases}$

b) Représente l'ensemble des solutions de ce système sur une droite graduée.

N.B : les parties I et II sont indépendantes.

Géométrie

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité 1cm. On donne les points A(-3 ; 4) ; B(1 ; 0) ; C(3 ; 2) et M(0 ; 1).

1) Place les points A, B, C et M dans le repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$).

2) a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$.

b) Compare les vecteurs $\frac{3}{4}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$, puis déduis que le point M appartient à la droite (AB).

c) Montre que AM = $3\sqrt{2}$, AB = $4\sqrt{2}$ et AC = $2\sqrt{10}$.

d) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ puis déduis la nature du triangle ABC.

3) La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AC) en P.

a) Place le point P.

b) Montre que $\frac{AP}{AC} = \frac{3}{4}$

c) Déduis la distance AP.

BEPC : Session 2016

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne les réels a et b suivants : a = $\sqrt{21} - \sqrt{14}$ et b = $\sqrt{21} + \sqrt{14}$.

1) Etablis que $\sqrt{21} \times \sqrt{14} = 7\sqrt{6}$.

2) Montre que : a² = $35 - 14\sqrt{6}$; b² = $35 + 14\sqrt{6}$ et ab = 7.

3) Calcule le réel $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

4) a) A l'aide du résultat donné par la calculatrice, trouve un encadrement de chacun des réels $\sqrt{21}$ et $\sqrt{14}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

b) Donne un encadrement du réel a = $\sqrt{21} - \sqrt{14}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1, sachant que : 4,58 $< \sqrt{21} <$ 4,59 et 3,74 $< \sqrt{14} <$ 3,75.

Exercice 2

Soient les fonctions affines f et g définies par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$.

1) Donne le sens de variation de chacune de ces fonctions en justifiant tes réponses.

2) a) Donne l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Détermine l'image du réel 2 par la fonction f.

3) Soient les droites (D_1) et (D_2) les représentations graphiques respectives de f et g dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Trace les droites (D_1) et (D_2) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Trouve l'ensemble des points dont les couples de coordonnées des solutions du système suivant : $\begin{cases} x + 2y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$

Exercice 3

Sur la couverture d'un livre de géométrie, il y a des triangles et des rectangles qui n'ont aucun point commun. En tout, on compte 15 figures et 54 sommets. Trouve le nombre de triangles et celui de rectangles qui sont sur la couverture du livre.

Géométrie

Exercice 1

L'unité est le centimètre. ABE est un triangle rectangle en E tel que AE = 6 et $\widehat{EAB} = 30°$. (C) est le cercle de centre O et de diamètre [AB]. On donne $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

N°	Question	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1	La distance AB est égale à	$12\sqrt{3}$	12	$4\sqrt{3}$
2	La distance BE est égale à	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{21}$	$4\sqrt{3} - 6$
3	L'angle $\widehat{AOE}$ est	La moitié de l'angle $\widehat{ABE}$	Le double de l'angle $\widehat{ABE}$	Egale à l'angle $\widehat{ABE}$
4	Le volume du cône de hauteur 3cm, de base le disque de centre O et de rayon $2\sqrt{3}$cm est	$V = 12\pi cm^3$	$V = 6\pi cm^3$	$V = 48\pi cm^3$

Pour chacune des questions ci-dessus, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Pour chaque question, recopie sur ta copie le numéro de la question et la réponse exacte.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(4 ; 2), B(6 ; −4) et C(0 ; −2).

1) Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).

2) a) Montre que le point K(2 ; 0) est milieu du segment [AC].

b) Trouve une équation cartésienne de la droite (L) médiatrice du segment [AC].

3) Montre que les droites (AC) et (BK) sont perpendiculaires.

4) Construis en pointillés l'image du triangle ABC par la composée des symétries orthogonales $S_{(AC)}$ et $S_{(BK)}$ notée $S_{(AC)} o S_{(BK)}$.

5) On donne le point E(−2 ; 4).

a) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ puis les distances AB et BC.

b) Donne la nature précise du quadrilatère ABCE en justifiant ta réponse.

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Pour chaque question, recopie sur ta copie le numéro de la question et la réponse exacte.

N°	Question	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1	L'expression $\frac{5}{12} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$ est égale à	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{6}$
2	L'expression $\frac{(10^2)^3 \times 10^{-1}}{10^5}$ est égale à	10^{-1}	1	10^{10}
3	L'expression $(1-\sqrt{2})^2 + \sqrt{50} - \sqrt{18}$ est égale à	3	$-1+4\sqrt{2}$	$-1+2\sqrt{2}$
4	L'ensemble des solutions dans IR du système : $\begin{cases} -x+1 \leq 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$ est	$[-1 ; \frac{3}{2}[$	$[1 ; \frac{3}{2}[$	$]-\infty ; -1]$

Exercice 2

Soit le polynôme p(x) définie par p$(x) = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$

1) Calcule la valeur du polynôme $p(x)$ pour $x = \frac{1}{2}$ et pour $x = 2$.

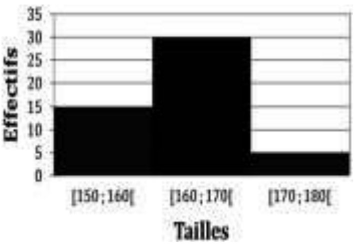
2) a) Etablis que $p(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$.

b) Donne le degré de $p(x)$.

3) Montre que $p(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2)$.

Exercice 3

Le diagramme à bandes suivant nous donne la répartition des tailles des élèves de troisième du CEG Bozari. Ces tailles sont regroupées en classes d'égale amplitude.



1) Donne l'effectif des élèves de la troisième du CEG Bozari.

2) Précise le nombre de classes et l'amplitude d'une classe.

3) Donne la classe qui a le plus grand effectif.

4) Calcule la taille moyenne des élèves de troisième du CEG Bozari en considérant les centres des classes.

Géométrie

Exercice 1

ABP est un triangle équilatéral de côté 6cm. H et K sont respectivement les pieds des hauteurs issues de A et B. Ces deux hauteurs se coupent en I. (C) est le cercle de centre I passant par A, B et P.

1) Fais la figure.

2) a) Justifie que les points H et K sont les milieux respectifs des segments [BP] et [AP].

b) Montre que les droites (HK) et (AB) sont parallèles.

3) Construis l'hexagone régulier ADBEPC inscrit dans le cercle (C).

4) Donne une symétrie orthogonale qui laisse invariant l'hexagone régulier ADBEPC.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1cm). On donne les points $A(3 ; -4)$ et $B(-3 ; 0)$.

1) a) Place les points A et B dans le repère orthonormé (O, I, J).

b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Soit (d) la droite passant par le point E(1 ; 1) et de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

a) Trace la droite dans le repère orthonormé (O, I, J). (On laissera les traces de la construction).

b) Trouve une équation cartésienne de la droite (d).

3) Pour la suite, on prendra (d) d'équation cartésienne : $2x + 3y - 5 = 0$.

a) Situe le point A par rapport à la droite (d) en justifiant ta réponse.

b) Détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).

c) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

d) Donne la position des droites (d) et (AB).

e) La droite (d) coupe l'axe des abscisses en F. Trouve les coordonnées de F.

4) Trouve une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point B.

2ème Groupe

Exercice 1

Soient les réels suivants :

A = $1 - \sqrt{3}$; B = $1 + \sqrt{3}$; C = $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ et D = $\frac{A}{B}$

1) Compare les réels 1 et $\sqrt{3}$ puis déduis le signe de A.

2) Calculer A² puis donne une écriture de C comportant un seul radical.

3) Rends rationnel le dénominateur de D.

Exercice 2

Soit le polynôme f(x) défini par $f(x) = x^2 - 4 + (x+3)(x-2)$

1) Montre que $f(x) = 2x^2 + x - 10$.

2) Calcule la valeur de $f(x)$ pour $x = 2$.

3) Factorise $x^2 - 4$.

4) Déduis la factorisation de $f(x)$.

Exercice 3

EFG est un triangle rectangle en F tel que EF = 4cm et EG = 6cm. I est le point du segment [EF] tel que EI = 3cm. La parallèle à la droite (FG) passant par I coupe la droite (EG) en J.

1) Fais la figure.

2) Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la distance FG.

3) Utilise la propriété de Thalès pour calculer la distance EJ.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1cm).

On donne les points A(-1 ; 0) et B(1 ; -2).

1) Place les points A et B dans le repère orthonormé (O, I, J).

2) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Calcule la distance AB.

4) Calcule les coordonnées du point I milieu du segment [AB].

5) Trouve une équation cartésienne de la droite (L) passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;3)$.

BEPC : Session 2017

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne les réels a, b et c suivants : a = $3-2\sqrt{2}$; b = $3+2\sqrt{2}$ et c = $\frac{a}{b}$.

1. Calcule le produit ab. Que peut – on dire des réels a et b ?
2. Calcule a^2.
3. Rends rationnel le dénominateur de c.
4. Compare les réels a^2 et c.
5. Sachant que $0{,}17 < a < 0{,}18$ et $5{,}82 < b < 5{,}83$, donne un encadrement du réel a – b par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : f(x) = $4x^2-(x+2)^2$.

1. Développe, réduis et ordonne f(x).
2. Calculer f(2) et f($-\frac{2}{3}$).
3. La fonction f est – elle bijective ? Justifier ta réponse.
4. Utilise une identité remarquable pour factoriser f(x).

Exercice 3

Le tableau suivant indique la consommation en riz par semaine des familles du village de Bozari.

Consommation (en kg)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25]
Nombre de familles	10	14	4	15	7

1. Donne l'amplitude d'une classe.
2. Calcule l'effectif total de cette classe.
3. Précise la classe qui a le plus grand effectif.
4. Calcule, en utilisant les centres des classes, la consommation moyenne en riz par semaine des familles du village de Bozari.

Géométrie

Exercice 1

1. Choisis la bonne réponse et complète la phrase suivante :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est …………….

a. une translation   b. une symétrie centrale   c. une symétrie orthogonale

2. Recopie et complète :

a. Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs respectifs a et a' sont perpendiculaires dans un repère orthonormé si et seulement si …………..

b. La somme en degrés des angles inscrits d'un pentagone régulier est égale à …….°.

c. Si un angle inscrit dans un cercle mesure 60° alors l'angle au centre associé mesure…...°.

3. Donne une propriété caractéristique de deux triangles semblables.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(-2 ; 3) ; B(0 ; 4) et la droite (D) d'équation : $2x + y + 1 = 0$.

1. Place les points A et B dans le repère orthonormé (O, I, J).
2. Montre que le point A appartient à la droite (D).
3. Trace la droite (D) dans le repère orthonormé (O, I, J).
4. La droite (D) coupe l'axe des ordonnés en F. Trouve les coordonnées de F.
5. a. Donne un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D).

b. Détermine le coefficient directeur de la droite (D).

6. a. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

7. Trouve une équation cartésienne de la droite (L) passant par B et parallèle à la droite (D).

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

I. On donne les réels a et b suivants : a = $-\frac{(2^2\times3)^3}{2^7\times3^2\times2^{-1}}$ et b = $\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{21}}{\sqrt{14}}$

1. Ecris le réel a sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Montre que le réel b est un entier naturel.
3. Montre que les réels a et b sont opposés.

II. Recopie et complète :

1. La forme factorisée de l'expression $4x^2 - 25$ est …………………..
2. Si a est un réel positif et b un réel négatif alors l'écriture sans radical de $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{b^2}$ est………..
3. Le monôme $3x^2$ a pour partie littérale …, pour coefficient…. et pour degré …..
4. Si x $<$ 5 alors x appartient à l'intervalle …. dont la représentation sur un axe est …..

Exercice 2

I. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases}$$

II. Haoua Mai wayna fabrique deux types de galettes sucrées, notées A et B. Une galette de type A nécessite 20 g de sucre et une galette B nécessite 30 g de sucre. Haoua a utilisé 430 g de sucre pour fabriquer 18 galettes.

1. Traduis cette situation par un système de deux équations à deux inconnues.
2. Déduis de la question I. le nombre de galettes produites par chaque type.

Géométrie

Exercice 1

L'unité est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 et BC = 10.

1. Montre que AC = 8.
2. P est le point du segment [AB] tel que AP = 1,2. La parallèle à la droite (BC) passant par P coupe la droite (AC) en Q. Montre que AQ = 1,6.
3. S est le point du segment [BC] tel que CS = 8. Montre que les droites (QS) et (AB) sont parallèles.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(-1 ; 3) ; B(- 4 ; 0) et C(3 ; - 1).
1. Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).
2. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Déduis la nature du triangle ABC.
3. Montre que AB = $3\sqrt{2}$ et AC = $4\sqrt{2}$.
4. Calcule la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.
5. Trouve une équation cartésienne de la droite (AB).
6. $\overrightarrow{AK}$ est le vecteur tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
a. Construis le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en laissant les traces de la construction.
b. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AK}$.

BEPC : Session 2018

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne les intervalles I et J suivants : I = $]-\infty\,;\,3]$ et J = $[-2\,;\,5[$.
1. Recopie et complète à l'aide d'une inégalité ou d'un encadrement :
a. L'intervalle I est l'ensemble des réels x tels que………………
b. L'intervalle J est l'ensemble des réels x tels que………………
2. représente les intervalles I et J sur un même axe.
3. Détermine l'ensemble I ∩ J, intersection des intervalles I et J.

Exercice 2

On donne les monômes A, B, C et D suivants :
A = $-5x^2$; B = $6x$; C = 9 ; D = $6x^2$.

1. Donne le degré de chacun de ces monômes.
2. Donne deux monômes semblables parmi ces monômes.
3. Réduis le polynôme E = A − B + C + D.
4. Utilise une identité remarquable pour factoriser le polynôme F = $x^2 - 6x + 9$.

Exercice 3

Une enquête effectuée auprès des vingt (20) familles du village de Bakin Rigia sur le nombre d'enfants par famille a donné le tableau suivant :

Nombre d'enfants	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	Total
Nombre de familles	5	6	a	2	20

1. Que représente le nombre réel a dans le tableau ?
2. Trouve la valeur de a.
3. Sachant que a = 7, calcule, en utilisant les centres des classes, le nombre moyen d'enfants par famille du village de Bakin Rigia.

Géométrie

Exercice 1

L'unité est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 et AC = 8.

E est le point de la demi- droite [AC) tel que AE = 12. La parallèle à la droite (BC) passant par E coupe la droite (AB) en F.

1. Faire la figure.
2. Montre que BC = 10.
3. Calcule la distance AF.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(2 ; 1) ; B(1 ; − 2) et le vecteur $\vec{u}$ (3 ; − 1).

1. Place les points A et B dans le repère orthonormé (O, I, J).
2. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
4. $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI) et $S_{(OJ)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Construis le segment [A'B'] image du segment [AB] par la composée des symétries orthogonales $S_{(OI)} o S_{(OJ)}$(A' étant l'image de A' et B' celle de B).

5. Justifie que le point O est le milieu des segments [AA'] et [BB'].

6. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a. Trace la droite (D) dans le repère orthonormé (O, I, J).

b. Montre que la droite (D) a pour équation : $x + 3y - 5 = 0$.

c. La droite (D) coupe l'axe des abscisses en F. Trouve les coordonnées de F.

<u>Sujet N°2</u>

<u>Algèbre</u>

<u>Exercice 1</u>

On donne les réels x et y suivants :

$x = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{4}}$; $y = \sqrt{2 \times 5^2} - \sqrt{2 \times 3^2}$

1. Montre que le réel x est un entier naturel.

2. Ecris le réel y sous forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier naturel.

3. Détermine, en justifiant ta réponse, le signe du réel $3 - 2\sqrt{2}$.

<u>Exercice 2</u>

On donne les polynômes A et B suivants :

$A = x^2 - 4x + 3$ et $B = (x - 3)(2x - 1) - x(x - 3)$.

1. Montre que A = B.

2. Factorise B.

3. Calcule la valeur de A pour $x = \sqrt{2}$.

4. Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, donne un encadrement du réel $a = -5 + 4\sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

<u>Exercice 3</u>

Une enquête effectuée auprès des vingt (20) familles du village de Bakin Rigia sur le nombre d'enfants par famille a donné le tableau suivant :

Nombre d'enfants	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	Total
Nombre de familles	5	6	a	2	20

1. Que représente le nombre réel a dans le tableau ?
2. Trouve la valeur de a.
3. Sachant que a = 7, calcule, en utilisant les centres des classes, le nombre moyen d'enfants par famille du village de Bakin Rigia.

Géométrie

Exercice 1

Recopie et complète :

1.

α	0°	30°	45°	60°
sin (α)	…..	…..	…..	…..
cos (α)	…..	…..	…..	…..

2. Une droite d'équation de type x = a est parallèle à ……………………
3. L'aire A d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r est donnée par la formule : A = ……….

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(2 ; 1) ; B(−2 ; −2), C(0 ; −3) et la droite (D) d'équation : $2x - y - 3 = 0$.

1. Vérifie si les points A et B appartiennent à la droite (D).
2. Détermine un vecteur directeur de la droite (D).
3. Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).
4. Montre que $AC = 2\sqrt{5}$.
5. Sachant que AB = 5 et $BC = \sqrt{5}$, montre que le triangle ABC est rectangle.
6. (C) est le cercle de centre K et de diamètre [AB].

a. Construis le cercle (C).

b. Donne un angle inscrit dans le cercle (C) puis un angle au centre du cercle (C).

BEPC : Session 2019

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

La représentation graphique d'une fonction affine f définie sur IR passe par les points A(2 ; −3) et B(−1 ; 3).

Mathématiques 3ème

1. Montrer que f(x) = 1 − 2x.

2. Trouve l'ensemble de définition de la fonction f.

3. Donne l'image du réel $\frac{1}{3}$ par la fonction f.

4. Donne en justifiant ta réponse le sens de variation de la fonction f.

5. Résous dans IR l'équation f(x) = 0.

Exercice 2

Soit le polynôme P suivant : P = $(x+2)(x^2+1)-10(x+2)$.

1. Montre que P = $x^3+2x^2-9x-18$.

2. Donne le degré de P.

3. Calcule la valeur de P pour $x = 3$.

4. Factorise le polynôme $x^2 - 9$.

5. Ecris le polynôme P sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

Exercice 3

Une enquête menée auprès des élèves de la classe de troisième du CEG Makourdi sur la durée en minutes de leur trajet pour se rendre à l'école a permis d'obtenir les résultats suivants : 5 ; 8 ; 20 ; 12 ; 7 ; 15 ; 18 ; 25 ; 29 ; 6 ; 14 ; 10 ; 4 ; 11 ; 27 ; 13 ; 9 ; 28 ; 15 ; 22 ; 10 ; 17 ; 24 ; 16 ; 20.

1. Calcule l'étendue de cette série statistique.

2. On décide de regrouper ces données en classes d'égale amplitude 10.

a. Recopie et complète le tableau suivant :

Durée du trajet (en min)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[
Nombre d'élèves			

b. Déterminer l'effectif des élèves de la classe de troisième du CEG Makourdi.

c. Trace le diagramme à bandes correspondant à la série regroupée en classes.

(On prendra : en abscisse 2 cm pour une classe et en ordonnée 1 cm pour 2 élèves).

Géométrie

Exercice 1

1. Recopie et complète les phrases suivantes :

a. Les côtés correspondants de deux triangles semblables ont des longueurs…………

b. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une……………

c. La droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$ a pour coefficient directeur…………………

d. Deux droites (D) et (D') de coefficients directeurs a et a' sont parallèles si et seulement si…………..

2. Construis un octogone régulier HANKOURI inscrit dans un cercle (C) de centre J et de rayon 4 cm.

<u>Exercice 2</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, U, V) tel que OU = OV = 1cm, on donne les points A(-2 ; -3) ; B(2 ; 1) ; C(0 ; 3) et la droite (D) d'équation $3x - y - 5 = 0$.

1. Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, U, V).
2. Montre que le point B appartient à la droite (D).
3. Trace la droite (D) dans le repère orthonormé (O, U, V).
4. La droite (D) coupe l'axe des ordonnées en K. Trouve les coordonnées du point K.
5. Détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D).
6. Montre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
7. Montre que AB = $4\sqrt{2}$.
8. Sachant que BC = $2\sqrt{2}$ et AC = $2\sqrt{10}$, montre que le triangle ABC est rectangle.

<u>Sujet N°2</u>

<u>Algèbre</u>

<u>Exercice 1</u>

I. Recopie et complète les phrases suivantes :

1. L'intersection des intervalles [-2 ; 5[et]0 ; $+\infty$[est l'intervalle……………...
2. L'ensemble de solutions de l'inéquation $-x + 4 < 0$ est l'intervalle B = ………...
3. La valeur du polynôme $3x^2 - x + 2$ pour $x = -1$ est………….
4. La forme factorisée de l'expression $(x-2)^2 - 5$ est ……………
5. Si $2 < x < 3$ et $5 < y < 6$ alors ….< $\frac{x}{y}$ < ….

II. On donne les réels a et b suivants : a = $\frac{2-\frac{11}{9}}{\frac{1}{3}+2}$ et b = $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{8}$

1. Calcule a et donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Montre que b est un entier naturel.
3. Montre que les réels a et b sont inverses l'un de l'autre.
4. Vérifie que le couple $\left(\frac{1}{3}\ ;3\right)$ est une solution de l'équation $3x - 2y + 5 = 0$.

Exercice 2

A l'occasion d'une fête scolaire, les 312 élèves du CEG Kouzari ont planté 2019 arbustes. Chaque fille a planté 8 arbustes et chaque garçon a planté 5 arbustes.

1. Traduis cette situation par un système de deux équations à deux inconnues.
2. Trouve le nombre de filles et le nombre de garçons du CEG Kouzari.

Géométrie

Exercice 1

L'unité est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et mes$\widehat{ABC}$ = 60°.

1. Montre que BC = 8.
2. Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la distance AC.
3. M est le point du segment [AB] tel que BM = 3 et N est le point du segment [BC] tel que BN = 6. Montre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.
4. (C) est le cercle de centre I et de diamètre [BC], donne en justifiant ta réponse la mesure de l'angle $\widehat{AIC}$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, U, V) tel que OU = OV = 1cm, on donne les points A(-1 ; 0) ; B(1 ; 2), C($-$ 4 ; 3) et F(-1 ; 4).

1. Place les points A, B, C et F dans le repère orthonormé (O, U, V).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$.
3. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$ puis déduis la position relative des droites (AC) et (BF).
4. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.
5. Montre que AB = BF = $2\sqrt{2}$.
6. Donne en justifiant ta réponse la nature précise du triangle ABF.
7. Calcule le volume d'une pyramide de hauteur 3 cm ayant pour base le triangle ABF.

BEPC : Session 2020

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

On donne le réel a = $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

1. Calcule les réels $(\sqrt{3}-1)^2$ et $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$.
2. Déduis une écriture du réel a sans radical au dénominateur.
3. Compare les réels a et $(-2+\sqrt{3})$.

Exercice 2

Soit le polynôme A = $(1-x)(9+2x)-x(2x-7)$.

1. Montre que A = $9-x^2$.
2. Donne le degré de A.
3. Calcule la valeur de A pour $x=2$ puis pour $x=\frac{3}{2}$.
4. Utilise une identité remarquable pour factoriser le polynôme A.

Exercice 3

Une enquête menée auprès de vingt – cinq patients atteints de la COVID – 19 sur leur âge a permis d'obtenir les résultats suivants :

Age	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[
Nombre de patients	2	6	17

1. Donne l'amplitude d'une classe.
2. Calcule, en utilisant les centres des classes, l'âge moyen de ces patients.
3. Trace le diagramme à bandes correspondant à la série regroupée en classes.

(On prendra : en abscisse 2 cm pour une classe et en ordonnée 1 cm pour 2 élèves).

Géométrie

Exercice 1

1. Recopie et complète les phrases suivantes :

a. Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si………………

b. Une pyramide régulière de hauteur 3 cm a pour base un carré dont le côté mesure 5 cm. Le volume en cm^3 de cette pyramide est égal à …………………

2. Une droite (D) a pour équation $3x - 2y + 4 = 0$. Donne un vecteur directeur $\vec{v}$ de cette droite.

3. Construis un pentagone régulier COVID inscrit dans un cercle (C) de centre K et de rayon 4 cm.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(−1 ; 0) ; B(3 ; 0) ; C(3 ; −3).

1. Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).

2. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Montre que AB = 4.

4. Sachant que BC = 3 et AC = 5, montre que le triangle ABC est rectangle.

5. Calcule $\cos\widehat{ABC}$.

6. M est le point du segment [AC] tel que AM = 2. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AB) en N. Calcule la distance AN.

7. Trouve une équation cartésienne de la droite (AC).

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

Recopie et complète :

1. L'expression $\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}}$ est égale à la fraction irréductible……………...

2. L'expression $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ est égale à ………...

3. L'équation $3 - 2x = 0$ a pour solution dans $\mathbb{R}$ le réel $x =$ …………

4. La forme factorisée de l'expression $(x + 3)(2x - 1) - x(x + 3)$ est ……………

5. Le système d'inéquations $\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ 3 + 2x > 0 \end{cases}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$ l'intervalle………..

Exercice 2

Soit le système d'équations suivant : $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases}$

1. Vérifie que le couple (11 ; 7) est une solution de l'équation $2x + 3y = 43$.

2. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système.

Exercice 3

Une enquête menée auprès de vingt – cinq patients atteints de la COVID – 19 sur leur âge a permis d'obtenir les résultats suivants :

Age	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[
Nombre de patients	2	6	17

1. Donne l'amplitude d'une classe.
2. Calcule, en utilisant les centres des classes, l'âge moyen de ces patients.
3. Trace le diagramme à bandes correspondant à la série regroupée en classes.

(On prendra : en abscisse 2 cm pour une classe et en ordonnée 1 cm pour 2 élèves).

Géométrie

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.

RST est un triangle rectangle en S tel que ST = 4 et RT = 6.

1. Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la distance RS.
2. P est le point de la demi – droite [ST) tel que SP = 6 et Q est le point de la demi – droite [RT) tel que RQ = 9.

a. Fais la figure.

b. Démontre que la droite (PQ) est parallèle à la droite (RS).

3. Construis le point Q' image du point Q par la composée des symétries orthogonales $S_{(RS)} o S_{(ST)}$.
4. Justifie que le point S est le milieu du segment [QQ'].

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(1 ; 0) ; E(4 ; 1), M(3 ; 4) et R(0 ; 3).

1. Place les points A, E, M et R dans le repère orthonormé (O, I, J).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EM}$.
3. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.
4. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont égaux.

5. Calcule et compare les distances AR et AE.

6. Montre que le quadrilatère ARME est un carré.

BEPC : Session 2021

Sujet N°1

Algèbre

Exercice 1

1) Compare les réels 2 et $\sqrt{5}$ puis donne le signe du réel $2 - \sqrt{5}$.

2) On donne le réel E = $2 - \sqrt{5}$.

a) Calcule E^2.

b) Donne la racine carrée du réel $9 - 4\sqrt{5}$ sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 4x^2 - (x+2)^2$.

1. Développe, réduis et ordonne $f(x)$.

2. Calculer f(2) et $f(-\frac{2}{3})$.

3. La fonction f est – elle bijective ? Justifier ta réponse.

4. Utilise une identité remarquable pour factoriser $f(x)$.

Exercice 3

Les notes obtenues par les 30 élèves de la classe de $3^{ème}$ du CEG Toudou, à un devoir de Mathématiques sont regroupées en classes de même amplitude selon le tableau suivant :

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs	3	x	9	6	y

1) Calcule l'amplitude d'une classe.

2) Sachant que x est le double de y, détermine x et y.

3) Pour la suite, on prendra x = 8 et y = 4.

a) Donne la classe modale.

b) Calcule la moyenne des notes en utilisant les centres des classes.

c) Trace le diagramme à bandes correspondant.

Echelle : en abscisse une classe sera représentée par 1cm et en ordonnée un effectif de 2 élèves sera représenté par 1cm.

Géométrie

Exercice 1

Soit ABD un triangle rectangle en A tels que : AB = 4,5 cm et AD = 6 cm. E est le point du segment [AB] tel que AE = 3 cm et M est le point du segment [AD] tel que AM = 4 cm.

1) Fais la figure.
2) Enonce la réciproque de la propriété de Thalès.
3) Montre que les droites (EM) et (BD) sont parallèles.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1cm). On donne les points A(3 ; −4) et B(−3 ; 0).

1) a) Place les points A et B dans le repère orthonormé (O, I, J).

b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Soit (d) la droite passant par le point E(1 ; 1) et de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

a) Trace la droite dans le repère orthonormé (O, I, J). (On laissera les traces de la construction).

b) Trouve une équation cartésienne de la droite (d).

3) Pour la suite, on prendra (d) d'équation cartésienne : $2x + 3y - 5 = 0$.

a) Situe le point A par rapport à la droite (d) en justifiant ta réponse.

b) Détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).

c) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

d) Donne la position des droites (d) et (AB).

e) La droite (d) coupe l'axe des abscisses en F. Trouve les coordonnées de F.

4) Trouve une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point B.

Mathématiques 3ème

Sujet N°2

Algèbre

Exercice 1

On donne les réels a et b suivants : a = $\sqrt{21} - \sqrt{14}$ et b = $\sqrt{21} + \sqrt{14}$.

1) Etablis que $\sqrt{21} \times \sqrt{14} = 7\sqrt{6}$.

2) Montre que : a² = $35 - 14\sqrt{6}$; b² = $35 + 14\sqrt{6}$ et ab = 7.

3) Calcule le réel $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

4) a) A l'aide du résultat donné par la calculatrice, trouve un encadrement de chacun des réels $\sqrt{21}$ et $\sqrt{14}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

b) Donne un encadrement du réel a = $\sqrt{21} - \sqrt{14}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1, sachant que : $4{,}58 < \sqrt{21} < 4{,}59$ et $3{,}74 < \sqrt{14} < 3{,}75$.

Exercice 2

Soient les fonctions affines f et g d'finies par : $f(x) = 2 - 3x$ et $g(x) = 5x + 1$.

1. Donne le sens de variation de chacune d'elles en justifiant tes réponses.
2. Résous dans ℝ : a) $f(x) = g(x)$ b) a) $f(x) < g(x)$.
3. Soit le polynôme $p(x)$ défini par : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$.

a) Développe, réduis et ordonne $p(x)$.

b) Factorise $p(x)$.

Exercice 3

42 livres de mathématiques et d'Anglais ont respectivement 3 cm et 2 cm d'épaisseur. Empilés les uns sur les autres, ils atteignent 100 cm de hauteur.

1. Traduis cette situation par un système de deux équations à deux inconnues.
2. Détermine le nombre de livres de chaque sorte.

Géométrie

Exercice 1

($\mathcal{C}$) est le cercle de centre I et de diamètre [AB], F est un point de ($\mathcal{C}$) tel que AF = 4 cm. On donne AB = 6 cm.

1. Fais la figure.
2. Donne la nature du triangle ABF. Justifie ta réponse.

3. Montre que BF = $2\sqrt{5}$.

4. Compare les angles $B\widehat{A}F$ et $B\widehat{I}F$ en justifiant ta réponse.

5. Calcule sin $A\widehat{B}F$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1cm, on donne les points A(-2 ; 2), B(2 ; 5), C(5 ; 1) et D(1 ; -2).

1. Place les points A, B, C et D dans le repère orthonormé (O, I, J).

2. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

3. Déduis la nature du quadrilatère ABCD.

4. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

5. Calcule les distances AB et BC.

6. Trouve une équation cartésienne de la droite (L) passant par B et de coefficient directeur $\frac{3}{2}$.

2ème Groupe

Algèbre

Exercice 1

Soient les réels suivants :

A = $1-\sqrt{3}$; B = $1+\sqrt{3}$; C = $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ et D = $\frac{A}{B}$

1) Compare les réels 1 et $\sqrt{3}$ puis déduis le signe de A.

2) Calculer A² puis donne une écriture de C comportant un seul radical.

3) Rends rationnel le dénominateur de D.

Exercice 2

Soit le polynôme f(x) défini par $f(x) = x^2 - 4 + (x+3)(x-2)$

1) Montre que $f(x) = 2x^2 + x - 10$.

2) Calcule la valeur de $f(x)$ pour $x = 2$.

3) Factorise $x^2 - 4$.

4) Déduis la factorisation de $f(x)$.

<u>Géométrie</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1 cm, on donne les points A(2 ; 1) ; B(3 ; −2) ; C(−1 ; 0) et la droite (D) d'équation : $x - 2y + 1 = 0$.

1) Place les points A ; B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).

2) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

4) Calcule les distances AB et AC.

5) Donne la nature du triangle ABC. Justifie ta réponse.

6) Montre que le point C appartient à la droite (D).

7) Détermine le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite (D).

8) Trouve une équation de la droite (L) passant par B et parallèle à (D).

Caractères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 4 si les deux derniers chiffres du nombre sont divisibles par 4.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- Un nombre est divisible par 25 si les deux derniers chiffres du nombre sont divisibles par 25.
- Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par un zéro.
- Un nombre est divisible par 100 s'il se termine par deux zéros.
- Un nombre est divisible par 1000 s'il se termine par trois zéros.

Quelques définitions

- Un nombre est pair s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un nombre est impair s'il se termine par 1 ; 3 ; 5 ; 7 ou 9.
- Un angle est défini par deux demi – droites de même extrémité.
- Un angle nul est angle dont la mesure fait 0°.
- Un angle droit est un angle dont la mesure fait 90°.
- Un angle plat est un angle dont la mesure fait 180°.
- Un angle aigu est un angle dont la mesure est inférieure à 90° (< 90°).
- Un angle obtus est un angle dont la mesure est comprise entre 90 et 180°.
- Deux angles sont complémentaires lorsque la somme des mesures de ces angles est égale à 90°.
- Deux angles sont supplémentaires lorsque la somme des mesures de ces angles est égale à180°.

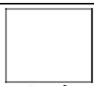
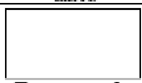
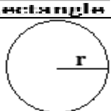
Propriété : la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

- Une droite est un ensemble de points alignés.
- Une demi – droite est une partie de droite délimitée par un point appelé origine.
- Un segment est une partie de droite délimitée par deux points. Ces deux points sont les extrémités du segment.
- La médiatrice d'un segment est une droite qui coupe ce segment en son milieu et qui est perpendiculaire au support de ce segment.
- Dans un triangle la médiane est la droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Mathématiques 3ème

- Dans un triangle la hauteur est la droite perpendiculaire à un côté qui passe par un sommet.
- La bissectrice d'un angle est la demi – droite qui partage l'angle en deux angles de même mesure.
- Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur et deux angles de même mesure.
- Un triangle équilatéral est un triangle qui trois côtés de même longueur et trois angles de même mesure (les trois angles mesurent 60° chacun).
- Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit (90°).

Périmètre et surface de quelques figures géométriques

Figures	Périmètres	Surfaces
 Carré	$P = 4 \times C$	$S = C \times C = C^2$
 Rectangle	$P = 2L + 2\ell = 2(L + \ell)$	$S = L \times \ell$
 Cercle	$P = 2\pi \times r = \pi \times d$	$S = \pi \times r^2 = \pi \times \frac{d^2}{4}$