ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

Compléter le tableau de conversion suivant :

Radian	π					1	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Degré		$20°$	$60°$	$65°$	1					

EXERCICE 2

Placements de points sur le cercle

Le cercle trigonométrique suivant est gradué de $\frac{\pi}{12}$ en $\frac{\pi}{12}$, vous pouvez donc placer la majorité des points directement, sauf les multiples de $\frac{\pi}{8}$

Placer sur le cercle les points images des réels suivants : 0 et π

Puis $\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$

Et enfin $\frac{71\pi}{12}$; $-\frac{35\pi}{12}$

EXERCICE 3

Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer dans chaque cas, deux points A et B tels que la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ soit :

$-\frac{2\pi}{3}$ $\qquad \frac{\pi}{2}$ $\qquad -\frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{3\pi}{4}$ $\qquad -\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 4

Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle :

$\frac{5\pi}{3}$ $\qquad -\frac{40\pi}{3}$ $\qquad \frac{35\pi}{6}$ $\qquad \frac{21\pi}{4}$ $\qquad \frac{53\pi}{2}$ $\qquad -\frac{13\pi}{7}$

EXERCICE 5

C est le cercle trigonométrique de centre O et A est un point de C. Dans chaque cas, placer le point M tel qu'une mesure en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)$ soit :

a) $\frac{7\pi}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{23\pi}{4}$ $\qquad$ c) $-\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ d) $-\frac{47\pi}{3}$ $\qquad$ e) $\frac{1308\pi}{2}$ $\qquad$ f) $-\frac{33\pi}{4}$

g) $\frac{67\pi}{5}$ h) $-\frac{65\pi}{7}$

EXERCICE 6

Soit x un nombre réel de l'intervalle $[-\pi;0]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{5}$

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point M associé à ce nombre réel.
2. Déterminer le signe , puis la valeur exacte de sin x .

EXERCICE 7

Tracer un hexagone régulier ABCDEF de centre O. Donner, en radians, la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}\right)$

EXERCICE 8

Lecture de cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique

Donner les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants, après avoir placé sur le cercle trigonométrique les réels correspondants.

1. $\cos(2\pi)$
2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$
4. $\sin\pi =$
5. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$
6. $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) =$
7. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$
8. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$
9. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$

EXERCICE 9

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x + 1,$ pour tout réel x
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
6. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
7. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
8. $\cos(x+2\pi) = \cos x$
9. $\sin(-x) = \sin x$
10. si x est positif, alors $\sin x$ est positif aussi

EXERCICE 10

Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M, N et P tels que

1. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}}\right)=-\dfrac{38\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}}\right)=x,\text{avec } 3x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

EXERCICE 11

Soir (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

1. Construire les points C, D, E et F du cercle (C) tels que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$

2. Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}\right)$

EXERCICE 12

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que AC=5 et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)=\dfrac{2\pi}{5}(2\pi)$

1. Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}}\right)$

EXERCICE 13

1. Sachant que $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur exacte de $\cos x$ et de $\tan x$
2. Tout le monde sait bien que $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !). Calculer $\sin\dfrac{\pi}{8}$

EXERCICE 14

Pour tout réel x, simplifier l'expression $A(x)=\cos(3\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

EXERCICE 15

1. Déterminer la mesure de l'angle x vérifiant : $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

2. Sachant que $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !), déterminer $\cos\frac{11\pi}{10}$

3. Déterminer une valeur exacte de x sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$

4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de a sachant $\cos a = -0,25$ et $a \in [-\pi; 0]$

EXERCICE 16

1. Simplifier au maximum, pour tout réel t, l'expression $(1-\cos t)(1+\cos t)$
2. Démontrez que pour tout nombre réel x, : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$, puis que $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

EXERCICE 17

1. Démontrer que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
2. Puisque vous connaissez $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$, déterminez une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ puis de $\cos\frac{\pi}{24}$

EXERCICE 18

Toutes les constructions de cette activité sont à faire à la règle et au compas. Toutes les mesures d'angles seront données en radians.
Soit (C) un cercle de centre 0, de rayon 8 cm et A un point de (C).

1) Construire en justifiant le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct. Donner une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2) Construire en justifiant le point D tel que le triangle OAD soit un triangle direct rectangle et isocèle en O. Donner une mesure de l'angle $\widehat{AOD}$.

3) Construire en justifiant le point E tel que le triangle OAE soit un triangle direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{4}$ rad.

4) Construire en justifiant le point F tel que le triangle OFD soit équilatéral direct.
Calculer une mesure de l'angle $\widehat{AOF}$.

5) Construire en justifiant le point G tel que le triangle OAG soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOG} = \frac{2\pi}{3}$ rad.

6) Construire en justifiant le point H tel que le triangle OAH soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOH}$ = $\frac{3\pi}{4}$ rad.

7) Construire en justifiant le point K tel que le triangle OAK soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOK}$ = $\frac{5\pi}{6}$ rad.

8) Construire en justifiant le point A' tel que l'angle $\widehat{AOA'}$ soit plat. En donner une mesure.

9) Construire le point K' de (C) tel que $\widehat{AOK'}$ = $\frac{7\pi}{6}$ rad.

10) Construire le point H' de (C) tel que $\widehat{AOH'}$ = $\frac{5\pi}{4}$ rad.

11) Construire le point G' de (C) tel que $\widehat{AOG'}$ = $\frac{4\pi}{3}$ rad.

12) Construire le point D' de (C) tel que $\widehat{AOD'}$ = $\frac{3\pi}{2}$ rad.

13) Construire le point B' de (C) tel que $\widehat{AOB'}$ = $\frac{5\pi}{3}$ rad.

14) Construire le point E' de (C) tel que $\widehat{AOE'}$ = $\frac{7\pi}{4}$ rad.

15) Construire le point F' de (C) tel que $\widehat{AOF'}$ = $\frac{11\pi}{6}$ rad.

16) Donner une autre mesure des angles construits dans les questions 9) à 15).

17) Comment sont F et K ? F et F' ? F et K' ? Citer d'autres couples de points qui ont les mêmes propriétés.

EXERCICE 19

1. Construire es représentants de trois vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$ et $\widehat{(\vec{u},\vec{w})}=\frac{2\pi}{3}+k'2\pi$
2. Déterminer une mesure de $\widehat{(\vec{v},\vec{w})}$

EXERCICE 20

Quelles sont les mesures $\widehat{(-\vec{u},\vec{v})}$, $\widehat{(\vec{u},-\vec{v})}$ et $\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})}$ si l'angle orienté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ a pour mesures $\frac{\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

EXERCICE 21

Sachant que $\cos a=-\frac{2}{3}$ avec $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$, sans calculer a, déterminer $\sin a$, puis $\tan x$

EXERCICE 22

Calculer sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $\cos x$ sachant que :

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{3}{5}$
2. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{3}$

EXERCICE 23

Calculer sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $\sin x$ sachant que :

1. $0 < x < \pi$ et $\cos x = \frac{1}{4}$
2. $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ et $\cos x = -0,8$

EXERCICE 24

Sachant que $\sin a = \frac{3}{7}$ avec $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, calculer $\cos a$

En déduire

1. $\sin(-a)$
2. $\cos(-a)$
3. $\sin(\pi - a)$
4. $\cos(\pi - a)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

EXERCICE 25

Donner la valeur exacte de $\cos a$ et $\sin a$ pour :

1. $a = \frac{5\pi}{6}$
2. $a = \frac{11\pi}{6}$
3. $a = -\frac{7\pi}{6}$

EXERCICE 26

Sachant que $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$, utiliser les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

1. $\sin\frac{4\pi}{5}$
2. $\cos\frac{4\pi}{5}$
3. $\sin\frac{3\pi}{10}$
4. $\cos\frac{3\pi}{10}$
5. $\sin\frac{6\pi}{5}$
6. $\cos\frac{6\pi}{5}$
7. $\sin\frac{7\pi}{10}$
8. $\cos\frac{7\pi}{10}$

EXERCICE 27

On donne $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Déterminer $\cos\frac{\pi}{8}$, puis $\sin\frac{5\pi}{8}$ et $\cos\frac{5\pi}{8}$

EXERCICE 28

Soit x un nombre réel, utiliser les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ puis $\sin x$

1. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)$
3. $\sin\left(x-15\pi\right)$

EXERCICE 29

Soit x un nombre réel, utiliser les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ puis $\sin x$

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi+x)+\cos(\pi-x)+\sin(\pi+x)$
2. $3\sin\left(\pi+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin(-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$
3. $2\sin(4\pi-x)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
4. $\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi-x)+\sin(7\pi+x)$
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)-\sin(7\pi-x)$

EXERCICE 30

Calculer le nombre A dans chacun des cas

1) $A=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\pi$

3) $A=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\frac{2\pi}{3}$

5) $A=\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+\cos\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{23\pi}{4}$

2) $A=\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{6\pi}{3}+\sin\frac{8\pi}{3}$

4) $A=\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{17\pi}{6}$

6) $A=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{1}{}$

7) $A=\sin(-x)+\sin(\pi-x)$

8) $A = \cos(-x) + \cos(\pi + x)$

9) $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$

10) $A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(x - 3\pi)$

11) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

EXERCICE 31

Calculer les nombres réels suivants :

1. $A = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}$
2. $B = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}$

EXERCICE 32

Tracer les représentants d'origines O des vecteurs définis par leurs coordonnées dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$

1. $\vec{u}_0(1;0)$
2. $\vec{u}_1\left(\cos\frac{\pi}{3};\sin\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\vec{u}_2\left(\cos\frac{2\pi}{3};\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\vec{u}_3\left(\cos\frac{3\pi}{3};\sin\frac{3\pi}{3}\right)$
5. $\vec{u}_4\left(\cos\frac{4\pi}{3};\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
6. $\vec{u}_5\left(\cos\frac{5\pi}{3};\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Vérifier que $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 + \vec{u}_5 = \vec{o}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

EXERCICE 33

Construire deux triangles ABC non superposables de hauteur [AH] tels que AB= 8cm ; AH=2 cm et HC=4 cm.

Calculer dans chaque cas, la longueur du segment [BC].

EXERCICE 34

Soit ABC un triangle et H le pied de sa hauteur issue de A. On a BC=5 cm ; BH=1 cm et AH=2 cm.

Le triangle ABC est-il rectangle ?

EXERCICE 35

Soit ABC un triangle. B' et C' sont les milieux des côtés [AC] et [AB]. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Démonter que la droite (B'C') est la médiatrice du segment [AH].

EXERCICE 36

Deux cercles C et C'de centres respectifs O et O' sont sécants en A et B. Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle C et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle C'.

1°) Démontrer que les points E, B et F sont alignés.

2°) Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (OO').

3°) On a AO=3 cm ; AO'=4 cm et (AO)⊥(AO').

a) Calculer la longueur du segment [EF].

b) Calculer l'aire du triangle AEF. En déduire la longueur du segment [AB].

EXERCICE 37

Soit ABCD un rectangle. Soit I le milieu du segment [CD], E le symétrique de B par rapport
au point I et F le symétrique de C par rapport au point D.

1°) Démontrer que A, D et E sont alignés.

2°) Démontrer que ACEF est un losange.

3°) Sachant que AB= 4 cm et AD=2 cm, calculer l'aire du triangle BEC. En déduire la distance du
point C à la droite (BC).

EXERCICE 38

Soit ABC un triangle et H son orthocentre.

1°) Déterminer les orthocentres des triangles ABH, BCH et CAH.

2°) Quelle remarque peut-on faire quand ABC est rectangle en A ?

EXERCICE 39

Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M un point du segment [BC], H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

Démontrer, en calculant les aires des triangles ABM et ACM, que MH+MK=BB'.

EXERCICE 40

Soit ABCD un trapèze tel que AB=4 cm, (AB)//(CD). E et F sont les projet´es orthogonaux

de A et de B sur la droite (CD) ; ABFE est un carré. AED est un triangle rectangle isocèle. BFC

est un triangle rectangle en F avec $\widehat{FCB} = 60°$.

1°) Calculer les longueurs des diagonales [AC] et [BD].

2°) Soit I le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. Calculer $\frac{IA}{IC}$ et $\frac{IB}{ID}$

3°) Calculer les longueurs IA, IC, IB et ID.

EXERCICE 41

Un triangle ABC rectangle en A est tel que BC=4,5 cm et AB=3,6 cm.

1°) Calculer la longueur AC.

2°) Soit H le projet´e orthogonal de A sur (BC).

En écrivant $\sin\widehat{B}$ de deux manières, calculer AH. En déduire BH et HC.

3°) Tracer la parallèle à (AB) passant par H. Elle coupe (AC) en E. Calculer HE, AE et EC.

4°) La bissectrice de l'angle $\widehat{BHA}$ coupe (AB) en D. Soient K et L les projet´es orthogonaux,

respectivement sur (AH) et (BH).

a) Montrer que DKLH est un carré. Soit a son côté.

b) En utilisant le théorème de Thalès, calculer a puis BD et AD.

EXERCICE 42

ABC est un triangle et O un point du plan tel que (OA) coupe (BC) en D. Par D, on trace la parallèle à (OC) qui coupe (AC) en F et la parallèle `a (OB) qui coupe (AB) en E. Démontrer que (EF)//(BD).

EXERCICE 43

ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. Les
parallèles menées par O à (BC) et (CD) coupent respectivement (AB) en M et (AD) en N.
Démontrer que (MN)//(BD).

EXERCICE 44

Soit ABC un triangle. Construire à l'extérieur du triangle le carré BCDE. Les droites (AD) et (BC) se coupent en M. Les droites (AE) et (BC) se coupent en N. La droite passant par N
et perpendiculaire à (BC) coupe la droite (AB) en P. La droite passant par M et perpendiculaire à
(BC) coupe la droite (AC) en Q.

1°) Démontrer que (PQ)//(BC). Quelle est la nature de MNPQ ?

2°) Démontrer que PN=NM. Quelle est la nature de MNPQ ?

EXERCICE 45

Soit ABC un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. D est le milieu du segment [KJ].

1°) Démontrer que les points A, D, I sont alignés et que D est le milieu de [AI].

2°) Soit J' le point du segment [AC] tel que $AJ'=\frac{1}{3}AC$.

K' est le point du segment [AB] tel que $AK'=\frac{1}{3}AB$. E est l'intersection des droites (AI) et (J'K').

Démontrer que le point E est le milieu du segment [J'K'].

EXERCICE 46

Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. A_1 est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). B_1 est le projeté orthogonal de B sur (AC). C_1 est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le point A_1 se projette orthogonalement en M sur la droite (AB) et en N sur la droite (AC).

Démontrer que $(MN)//(B_1C_1)$.

EXERCICE 47

Tracer un triangle ABC non rectangle et mener de B la perpendiculaire `a (AB) et de C la
perpendiculaire à (AC). Ces deux droites se coupent en D.
Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. (Indication : on considèrera le
cercle de diamètre [AD].)

EXERCICE 48

ABCD est un parallélogramme de centre O. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Les droites (DI) et (BL) se coupent en un point noté E. Les droites (BK) et (DJ) se coupent en un point noté F.

1°) Démontrer que les points A, E, O, F et C sont alignés.(Indication : on considèrera les médianes
des triangles ADB et DCB.)

2°) Démontrer que AE=EF=FC.

EXERCICE 49

Soient ABC et A'BC deux triangles rectangles de même hypoténuse [BC]. Soit I le point d'intersection des droites (AC) et (A'B). La perpendiculaire à (BC) passant par I coupe la
droite (AB) en J.
Montrer que les points C, A' et J sont alignés. (Indication : utiliser les hauteurs du triangle ICJ).

EXERCICE 50

Soit ABCD un carré. Soit E le point intérieur au carré tel que ABE soit un triangle équilatéral.
Soit F le point extérieur au carré tel que BCF soit un triangle équilatéral.

1°) Calculer les mesures des angles $\widehat{DEA}$, $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BEF}$

2°) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

EXERCICE 51

Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle C. H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à B dans le cercle C.

1°) Déterminer 5 couples de droites perpendiculaires.

2°) En déduire que le quadrilatère AHCD est un parallélogramme.

EXERCICE 52

Sur un cercle C de centre O, on marque deux points A et B tels que (OA) soit perpendiculaire à (OB). Calculer l'angle $\widehat{AMB}$ lorsque M est un point du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

EXERCICE 53

Sur un cercle de centre O et de rayon 4 cm, marquer trois points A, B et C tels que $\widehat{BAC} = 60°$

Calculer la longueur du petit arc d'extrémités A et B.

EQUATIONS ET INEQUATIONS

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}=0$
2. $2x+\sqrt{3}=0$
3. $3x-5=\frac{1}{2}x$
4. $\frac{2}{3}x+1=x-3$
5. $\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$
6. $2(x-3)=\frac{1}{4}(3x-2)+\frac{1}{2}$
7. $2x-3(x+1)=\frac{1-2x}{2}$
8. $2(x-1)=\sqrt{2}(x+1)-1$
9. $x-\sqrt{3}\left(x+1\right)=2-x$
10. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=12x-1$
11. $\frac{7x-9}{4}-x=\frac{5x}{2}+3$
12. $-3x+5=7(2x-3)-17x$
13. $\frac{1-x}{4}-\frac{3x-2}{3}=\frac{2x+5}{6}-(3x+1)$
14. $16(x-3)^2-25=0$
15. $\frac{3-2x}{1-x}$
16. $\frac{(3x+1)^2-4(x-3)^2}{5x^2-5}$
17. $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+3}{x-2}$
18. $\frac{2x-2}{2x+1}=2-\frac{2x}{2x-1}$
19. $(x^2-16)^2=(x+4)^2$
20. $9x^3+18x^2=x+2$
21. $\frac{2x-3}{9}-\frac{x+1}{6}=\frac{11-2x}{2}$
22. $\frac{5x-3}{4}-\frac{9x-1}{8}=3-\frac{3+4x}{2}$
23. $\frac{2x-1}{5}-\frac{3x-4}{2}=-x-\frac{7x-6}{10}$
24. $\frac{2x-5}{2}-\frac{x-1}{3}=4x+3$
25. $3x-\frac{5x-1}{15}-\frac{7x-1}{5}=\frac{1}{3}\left(2x-\frac{3x+11}{5}\right)+\frac{5}{3}x$
26. $\frac{3x-1}{2}-\frac{1}{4}\left(x+1-\frac{x+2}{3}\right)=\frac{3x+1}{6}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{4x+3}{5}\right)$
27. $\frac{1}{4}\left(2x+\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{5}x=\frac{1}{4}x-\frac{3(x+1)}{35}$
28. $\frac{4x-3}{2}-\frac{3x-1}{6}+\frac{2x+1}{3}=3x-\frac{5x+7}{12}$
29. $\frac{5x-4}{2}-\left(x-\frac{x-3}{6}\right)=5$
30. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$
31. $\left(x+1\right)\left(3x-2\right)=0$
32. $2\left(1-x\right)\left(2x-5\right)=0$
33. $\left(x+1\right)^2\left(x-3\right)=0$
34. $\left(4x-2\right)\left(7x+1\right)\left(12x-6\right)=0$
35. $\left(2x-1\right)^2=\left(2x-1\right)\left(x+3\right)$
36. $\left(3x+1\right)^2-\left(x+1\right)^2$
37. $\left(2x-1\right)\left(x+1\right)=5x+5$
38. $\left(x+1\right)^2-\left(2x+2\right)=0$
39. $\left(x-1\right)^2=\left(2x+1\right)^2$
40. $\left(4x^2-9\right)-2\left(2x-3\right)+x\left(2x-3\right)=0$
41. $x^2-6x+9=0$
42. $3x^2-6x+3=0$
43. $x^3-4x^2+4x=0$
44. $4x^2=4x-1$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $x-2\leq 0$
2. $x+4>0$
3. $2x+7>0$
4. $\frac{1-3x}{4}\geq 0$
5. $3x-3<1-2x$
6. $2(x-3)\geq 8-3x$
7. $2(x+1)<3+2x$
8. $\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{2}\geq 0$
9. $\frac{x}{2}-\frac{4-x}{4}>5$
10. $4x+1>x-2$
11. $4(3x-2)\geq 7x-8$
12. $x-1\geq x+1$
13. $|x|<x$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{-x-5}{2}-\frac{5}{3}+\frac{2x+1}{3}>\frac{2x}{3}$
2. $3\left(x-\frac{3x-1}{2}\right)+\frac{3-2x}{4}\leq\frac{1-4x}{2}+1$
3. $\frac{x-1}{3}-\frac{x-6}{2}>\frac{15-x}{6}$
4. $\frac{8x+11}{3}-\frac{2x+3}{6}\geq\frac{7x+8}{3}-2$
5. $\frac{8x+5}{9}-\frac{2x+23}{6}>\frac{x+4}{4}-\frac{x}{12}$
6. $\frac{8x-1}{21}-\frac{4x+3}{2}\leq\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{7}+\frac{2x-1}{6}$
7. $\frac{x+1}{6}-\frac{2x+3}{2}\geq\frac{5x-1}{3}-2x$
8. $2\left(3x-\frac{x+1}{3}\right)-\frac{2x-1}{9}\leq\frac{3x-1}{9}\leq\frac{3x-1}{6}+\frac{10x}{3}$
9. $\frac{2x-1}{3}-\frac{8x+4}{5}-\frac{4x-7}{30}\geq\frac{5x+1}{6}-\frac{19}{10}x-\frac{16}{15}$
10. $\frac{3x+2}{12}-\frac{3}{4}<2(x+1)+\frac{5}{6}(2x+1)$
11. $\frac{4x-1}{14}-\frac{5x+3}{7}<2-\frac{3x}{7}$
12. $x^2+4<0$
13. $(x-4)^2\leq -1$
14. $-2x+3\leq 4$
15. $2(3x-5)>-4+6x$
16. $(1-5x)(3x+1)\geq 0$
17. $x^2+3\geq 0$
18. $-x^2-5\geq 0$
19. $25-4x^2>0$
20. $\frac{x+1}{2-x}\leq 0$
21. $\frac{x(x^2+3)}{(2x-1)^2}<0$
22. $\frac{3x-2}{5-2x}\leq\frac{1-6x}{4x+1}$
23. $\frac{4x^2-12x+9-2(2x-3)(4x+1)}{(25x^2-4)(1-x)}\geq 0$
24. $4x+1>2(2x-1)$
25. $x^2-9<0$
26. $(4x-1)(2x+3)>0$
27. $t^3-t\geq 0$
28. $-y(5+y)\leq 0$
29. $y^2+1\leq 0$
30. $3x^2<6x-3$
31. $(a+3)^2\leq(2a-5)^2$
32. $\frac{x+1}{x^2+1}<0$
33. $(y-5)(2y-14)\leq 4(3y-21)$
34. $\frac{x}{x^2-1}\leq 0$
35. $\frac{2a-5}{(a+1)^2}\leq 0$
36. $\frac{(x+7)(-2-x)}{4x^2-12x+9}<0$
37. $\frac{(3-2x)(x+5)}{2x+3}$
38. $\frac{5-3a}{a^2-4}<0$
39. $8(3x-5)-5(2x-8)\leq 4(3x-1)+16$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} 3(x-1)+5x+2>12x+6 \\ \frac{x+3}{5}-\frac{x-2}{5}\leq\frac{5x+3}{2}-\frac{1}{15} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{3x-5}{2}-\frac{x}{8}>2-\frac{1}{3}x \\ \frac{3x+5}{3}-\frac{4-x}{2}\leq\frac{x+1}{4}+7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{x+1}{6}-\frac{3}{2}x<\frac{x-1}{3}-2x \\ \frac{2x-1}{2}\leq\frac{3x-1}{5}+2x+4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\leq-\frac{2x}{7} \\ \frac{3x+1}{2}-\frac{x+1}{8}<\frac{2x-5}{4} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x-1}{3}+\frac{1}{2}<\frac{4-5x}{9} \\ \frac{x+3}{2}-\frac{65}{6}\geq\frac{x}{3}-\frac{1}{4} \end{cases}$

6. $4-3x\leq 2+x\leq 3+\frac{5}{2}x$

7. $\frac{3x-1}{6}\leq 3x\leq\frac{5(1+3x)}{12}$

8. $4-\frac{x-3}{4}<x<2+\frac{3}{2}x$

9. $\begin{cases} (2x+1)^2-(x+2)^2>0 \\ 4x^2-16\leq 0 \end{cases}$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\frac{2x-1}{5}-\frac{|x-2|}{3}=\frac{4x-1}{15}$
2. $\frac{x+8}{2}+\frac{|2x-7|}{3}=\frac{7x}{6}+\frac{5}{3}$
3. $|-2(x+2)|+|-7+x|<-1$
4. $|x|=1$
5. $x+|x-1|=1+|x|$
6. $2|x|+6=0$
7. $|x^2+1|=0$
8. $|x-2|+|x+4|=6$
9. $|x-2|=2|x+4|$
10. $2|x-2|=|x+4|$
11. $|2x-3|-1=0$
12. $|2x-1|=-2$
13. $|x-5|+6=0$
14. $|3x+10|=|5x-4|$
15. $|x-5|=12$
16. $|x-\pi|+|x+2|=0$
17. $|3-x|\leq 5$
18. $\left|3x+\frac{\pi}{2}\right|+\frac{|x|}{2}=-3$
19. $|x-5|=-2$
20. $|x+7|>2$
21. $|x-1|=3$
22. $|x-6|=|x+8|$
23. $|x+1|+\frac{11}{2}=0$
24. $|x-2|=|x^2-4x+4|$
25. $|2x-3|=1-\sqrt{2}$
26. $\sqrt{x^2-2x+1}=0{,}3$
27. $|x+1|-|3x+2|=4$
28. $\frac{3x-4}{|x+5|}=-2$
29. $|x|=2x+3$
30. $|3x-5|=|x+1|$
31. $|x|+x=0$
32. $|3x-5|\leq 2x+3$
33. $\sqrt{(2x-1)^2}<2$
34. $\frac{|x+1|}{1+|x|}\geq 0$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $|8x-11|\geq 5$
2. $|3-5x|<1$
3. $|2x-3|<0$
4. $|-5x+1|<-5$
5. $|5x-7|>-3$
6. $|-x+6|>7$
7. $|x|<1$
8. $|-x|<\frac{1}{2}$
9. $|x|<0$
10. $|x|+1\leq 0$
11. $|x+3|+|x-3|\leq 0$
12. $|-x+1|<\frac{1}{3}$
13. $|-x-5|<4$
14. $|2-x|>1,5$
15. $1<|x-2|<\frac{5}{4}$
16. $2<|2-x|<3$
17. $|5-x|>|1-x|$
18. $|x+3|<|x-1|$
19. $|2x+8|<|6-2x|$
20. $|10-x|<|5+x|$
21. $|x^2+2x-3|>2$
22. $|x-2|+|x-1|<3$
23. $2x+3-|x+2|\geq\frac{1}{2}x-3$
24. $x+|x-1|=1+|x|$
25. $|x^2+2x-3|>2$
26. $|x-2|+|x-1|<3$
27. $|4x-1|\leq 3$
28. $|4x^2-1|\leq 3$
29.

EXERCICE 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation du premier degré d'inconnue x

$$\frac{3-x}{5}-\frac{2x+1}{10}\geq\frac{1}{2}x+3$$

On donnera l'ensemble solution sous la forme d'un intervalle.

2. On donne $P(x) = 5(9-x^2) - (x-5)(2x-6)$ $\quad x\in\mathbb{R}$

a. Démontrez que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $P(x) = (3-x)(7x+5)$

b. Etudiez dans un tableau le signe de $P(x)$

c. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) > 0$

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 15$ (Bonus)

3. a On considère l'inéquation d'inconnue x : $\frac{x}{1+x}\leq 1+\frac{1}{2x-1}$ (1)

Démontrez que résoudre (1) en revient à résoudre : $\frac{-3x}{(1+x)(2x-1)}\leq 0$

b. Etudiez dans un tableau le signe de $\frac{-3x}{(1+x)(2x-1)}\leq 0$ et en déduire l'ensemble solution de (1)

EXERCICE 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $x(x-1)\geq 0$
2. $(2x-3)(1-7x)<0$
3. $x^2-16<0$
4. $(4x^2-9)(x+1)>0$
5. $\frac{3-x}{x+4}>0$
6. $\frac{5-2x}{1-x}\geq 0$
7. $\frac{x(x+1)}{3-2x}\leq 0$
8. $\frac{x^2-9}{1-x}>0$
9. $\frac{5-3x}{x^2-1}\leq 0$
10. $\frac{2x+1}{x+2}\leq 1$
11. $\frac{1-3x}{1-x}\geq 2$

12. $\frac{1-3x}{1-x} \geq 2$
13. $\frac{x+5}{4-5x} < \frac{1}{2}$
14. $\frac{x+5}{4-5x} \leq \frac{x-3}{x+2}$
15. $\frac{2x-1}{x+3} > \frac{2x}{x-4}$
16. $\frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1}$
17. $\frac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$
18. $\frac{x+3}{4-x} \geq 0$
19. $\frac{2x-1}{1-x} < 0$
20. $\frac{1-x}{1+x} \leq 1$
21. $\frac{x+2}{3-x} > 2$
22. $\frac{x-3}{2x-4} \geq \frac{x-2}{2x-5}$
23. $\frac{(2-x)(x+1)}{x^2+9} \leq 0$
24. $\frac{2x+1}{x^2-1} \geq 0$
25. $\frac{1-3x}{x^2-4} < 0$
26. $\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} < 1$
27. $9(x+2)^2 - (2x-2)^2 \leq 0$
28. $\frac{3}{1-3x} \geq \frac{2}{1+2x}$
29. $\frac{x}{4} - 3 \leq x\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$
30. $\frac{2x+5}{1+2x} > \frac{1-2x}{5-2x}$
31. $\begin{cases} -3x + \frac{2}{3} \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x + 2 > 1 - x \end{cases}$
32. $(2-x)(x+7) \geq 4 - x^2$
33. $0 < \frac{4x-8}{-5x-3} \leq 2$
34. $\frac{1}{x^2} < -7$
35. $(2x-3)^2 < 7$
36. $\frac{3}{x} \geq -1$
37. $81 - (3x-4)^4 \geq 0$
38. $\frac{x^2+1}{x^2-4} \leq 1$
39. $\frac{x-3x^2}{(x-3)^2} \geq 0$
40. $\frac{7-x^2}{\sqrt{2x+3}} \geq 0$
41. $\frac{1}{x-2} - \frac{5}{2x+4} \leq \frac{-3x}{x^2-4}$
42. $(2x+3)\sqrt{1-4x^2} \leq 0$

EXERCICE 9

Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe des expressions suivantes :

1. $(x-4)(x-3)$
2. $(1-2x)(x+2)$
3. $5x(3x-2)(x+5)$
4. x^2-9
5. $(1-x^2)(x-4)$
6. $\frac{3-x}{2+x}$
7. $\frac{4-2x}{x+3}$
8. $\frac{x(x+1)}{3x-2}$

EXERCICE 10

1) Déterminer cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405.
2) Déterminer deux entiers tels que l'un soit le triple de l'autre et dont le produit est 243.

3) La somme de deux entiers est 924. En ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient le double de l'autre. Déterminer ces deux nombres.

EXERCICE 11

1) $\frac{1}{x}=2$
2) $\frac{2}{x+1}=3$
3) $\frac{2x+1}{3x-2}=0$
4) $\frac{7x+1}{2x-3}=2$
5) $\frac{x^2-2x}{2+x}=0$
6) $\frac{x^2-9}{3x}=0$
7) $\frac{\frac{x}{2}-1}{3-2x}=2$
8) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=0$
9) $\frac{9}{x+1}=5-x$
10) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-1}=0$
11) $\frac{x^2}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$
12) $2x-7=\frac{4}{2x-7}$
13) $\frac{x^2+4x-3}{x^2-1}=1$
14) $\frac{9x^2-25}{(x+2)(3x+5)}=0$
15) $\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}=0$
16) $9(x+2)^2-(2x-2)^2=0$
17) $(x-11)^2+(33-3x)(x+2)=0$
18) $(x-2)(2x+7)-(x^2-4)=0$
19) $2t-3(t+1)=\frac{1-3t}{2}$
20) $2(3-x)+3\left(x-\frac{1}{3}\right)=5+x$
21) $\left(\frac{7}{2}a-3\right)(5-a)=0$
22) $5x^2=25x$
23) $\sqrt{2}t+\sqrt{3}=\sqrt{2}(t+7)+\sqrt{3}-7\sqrt{2}$
24) $\frac{x+7}{4}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{3}$
25) $3(2x+4)-2x=14-2(1-2x)$
26) $5x^2-7x=0$
27) $(2x+3)^2=36$
28) $(3x-4)(x-2)-(6x-8)(x-3)$
29) $\frac{2x+3}{x-1}=0$
30) $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+3}{x-2}$
31) $\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-7}{x+5}$
32) $\frac{x+3}{2}-\frac{4x-3}{3}=1-\frac{5x-12}{6}$
33) $(-2x+4)^2+(-2x+4)(5x-25)=0$
34) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=0$
35) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{14}{x^2-4}$

EXERCICE 12

1) Soient a et b deux réels quelconques, montrer que : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2) Soit $P(x)=2(x^3-27)+11(9-x^2)+18(x-3)$ avec x un réel quelconque.

Factoriser P(x) sous la forme d'un produit de deux facteurs.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x)=(x-3)(x^2-x-1)$

EXERCICE 13

Résoudre dans $\mathbb{N}$ $\frac{2}{3}(x-3)-4x\geq 5\left(\frac{x}{3}-\frac{7}{5}\right)$

EXERCICE 14

Un cycliste effectue un parcours en 9 heures. Sa vitesse est de 30 km/h sur le premier tiers de la distance totale, 20 km/h sur le second tiers et 15 km/h sur le troisième tiers. Trouver la distance parcourue.

EXERCICE 15

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 715.

EXERCICE 16

A 9 heures du matin Paul part de A vers B en bicyclette (vitesse 15 km/h) . A 10 heures moins le quart, Pauline en fait autant de B vers A (vitesse 20 km/h). Ils se rencontrent à mi-chemin pour pique-niquer. Quelle heure est-il alors ?

EXERCICE 17

Valérie et Maria doivent parcourir 30 km chacune. Valérie met 3h de plus que Maria. Si elle doublait sa vitesse, elle mettrait 2h de moins. Quelle est la vitesse de chacune ?

EXERCICE 18

" Un homme est entré dans un verger et a cueilli des fruits. Mais le verger avait trois portes et chacune était gardée par un gardien. Cet homme donc partagea en deux ses fruits avec le premier et lui en donna deux de plus; puis il partagea le reste avec le second et lui en donna deux de plus, enfin il fit de même avec le troisième. Il sortit du jardin avec un seul fruit. Combien en avait-il cueilli ? "

EXERCICE 19

On veut disposer un certain nombre de jetons en carré (par ex avec 9 jetons on fait un carré de 3 sur 3). En essayant de constituer un premier carré, on s'aperçoit qu'il reste 14 jetons. On essaie alors de faire un deuxième carré en mettant un jeton de plus par côté. Il manque alors 11 jetons. Combien y avait-t-il de jetons au départ ?

EXERCICE 20

Une somme de 3795 $ est partagée en trois parts proportionnelles aux nombres 3, 5 et 7. Déterminer ces trois parts.

EXERCICE 21

Un magicien demande à un spectateur de :

penser à un nombre;

de le multiplier par deux;

de retrancher 3 à ce produit;

de multiplier le tout par 6.

Le spectateur annonce comme résultat 294. Quel était le nombre du départ ?

EXERCICE 22

Lorsqu'on descend un escalier comptant moins de 200 marches, 2 marche par 2 marches, il en reste une.

Lorsqu'on le descend 3 marches par 3 marches, il en reste 2. Lorsqu'on le descend 4 marches par 4 marches

il en reste 3.

Lorsqu'on le descend 5 marches par 5 marches il en reste 4.

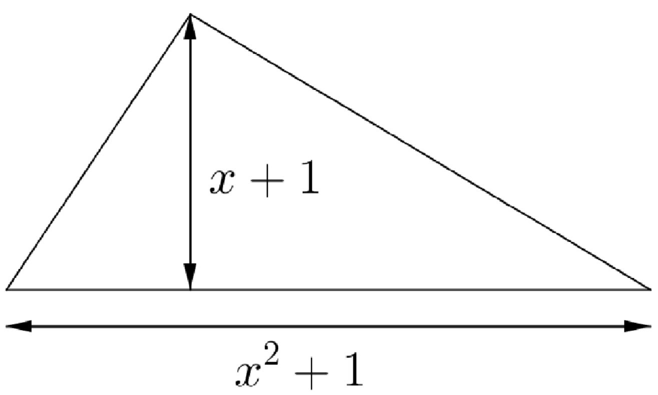
Lorsqu'on le descend 6 marches par 6 marches, il en reste 5.

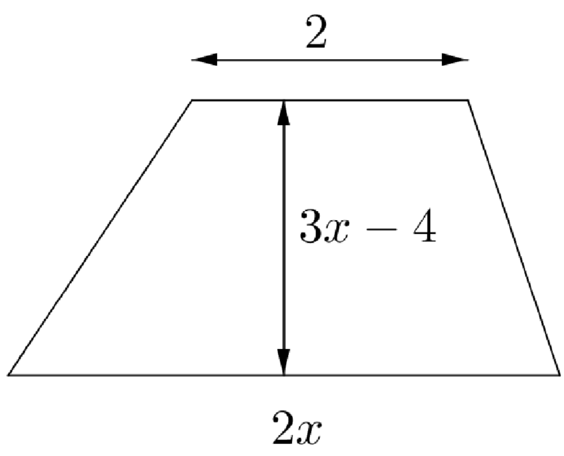
Lorsqu'on le descend 7 marches par 7 marches, il n'en reste pas.

Combien l'escalier a-t-il de marches ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 23

1. Résoudre $x^2-6x+9=0$ 2.
2. Un géomètre prétend qu'on peut construire un triangle et un trapèze de même aire avec les dimensions suivantes (en cm).





Si le géomètre a raison, pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce possible ?

EXERCICE

FONCTIONS

EXERCICE

Traduire les énoncés suivants en utilisant les symboles des fonctions.

1) L'image de -2 par *f* est 3.
2) -7 est l'image de 4 par *g*.
3) 3 est l'antécédent de -6 par *h*.
4) 0 a pour image -1 par *p*.
5) -4 a deux antécédents par *h*, -3 et 4.
6) Les antécédents de 5 par *h* sont 2 et -3.

EXERCICE

Soit *f* la fonction définie sur [-15 ; 15] par $f(x) = -3 + 4x$.

1) Calculer les images par f des nombres réels suivants : $x = -2; x = -1; x = 0; x = \frac{1}{2}; x = \frac{2}{3}$
2) Déterminer le (ou les) antécédent(s) de -7 par f.
3) Déterminer le (ou les) antécédent(s) de -3 par f.

EXERCICE

la fonction *f* définie pour tout nombre *x* par $f(x) = 2x^2$.

1) Calculer *f*(0), *f*(1), *f*(2), *f*(3), et *f*(Soit 4).
2) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0		2	3	4	5
f(x)		2				

EXERCICE 1

Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4	3	2	-1	-3	-4	-3	-4	0

a. Quelle est l'image de -3 ?

b. Quelle est l'image de 1 ?

c. Quel est l'antécédent de 2 ?

d. Quels sont les antécédents de -4 ?

e. Quels sont les deux nombres, différents de 1 et 3, qui ont la même image ?

EXERCICE 2

Voici le tableau de valeurs d'une fonction f telle que f(x)= $x^2 - 2x - 1$

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
f(x)	-1,75	-1,84	-1,91	-1,96	-1,99	-2	-1,99	-1,96	-1,91

Compléter les égalités :

f(0,5) = ……	f(……) = -1,84	f(1,2) = ……	f(……) = -2	f(1,1) = ……	f(……) = -1,91

EXERCICE 3

On considère la fonction définie par $f(x) = 2x + 1$. Calculer les images de 2 ; 3 ; 4 ; -2 ; -3 et 0.

EXERCICE 4

Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

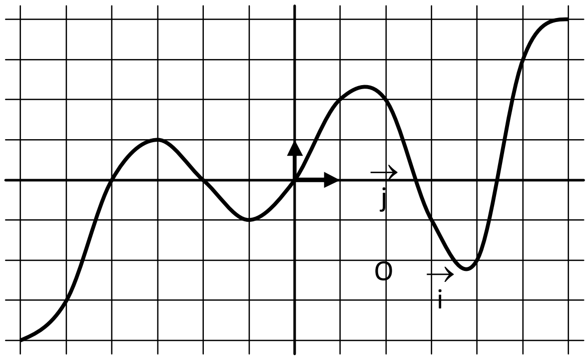
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	6	4	2	7	8	1	3	4	7

Compléter les égalités :

f(4) = ……	f(……) = 2	f(5) = ……	f(……) = 4	f(7) = ……	f(……) = 7

EXERCICE 5

La courbe ci-contre représente la fonction f



a. Compléter les phrases suivantes :

- L'image de 1 est …..
- L'antécédent de -3 est ……
- L'image de …… est 4.
- L'antécédent de ...... est 4.

b. Compléter les égalités : f(-3) = …… f(0) = …… f(……) = 3

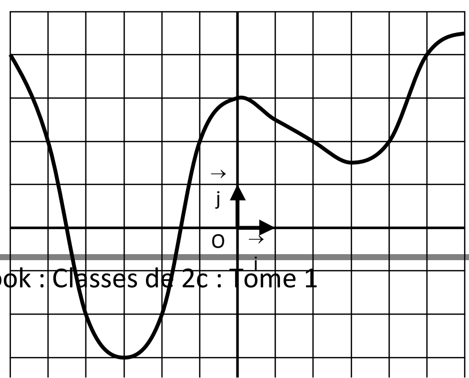
f(……) = -4

c. Compléter le tableau de valeurs

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$													

EXERCICE 6

Une fonction f est représentée ci-contre.



1. Déterminer l'image par f de :

a) -4 b) -1 c) 1

……………… ……………… …………………..

2. Déterminer :

a) $f(-6)$ b) $f(3)$ c) $f(5)$ d) $f(0)$

…………………… ……………………. ………………….. ……………………….

3. Déterminer le ou les antécédents, s'il y en a de :

a) 4 b) -4 c) -3 d) 0

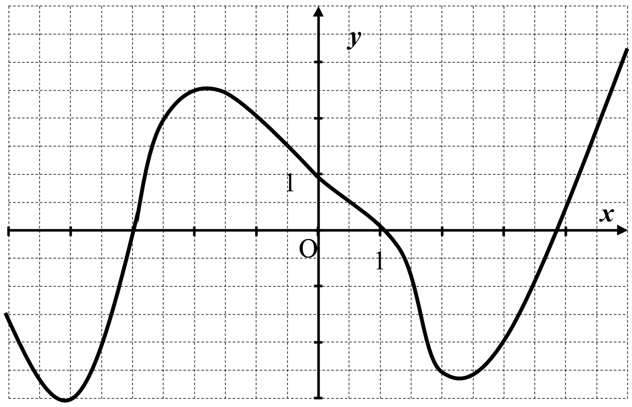
……………… ………………. …………………. ………………….

4. Compléter le tableau de valeurs :

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$							

EXERCICE 7

Une fonction *f* est représentée ci-contre.



1. Déterminer l'image par *f* de :

a) -5 b) -1 c) 1

……………… ………………. ………………….

2. Déterminer :

a) $f(-4)$ b) $f(-0{,}5)$ c) $f(4{,}5)$ d) $f(0)$

………………… ………………….. ……………….. ……………………

3. Déterminer le ou les antécédents, s'il y en a de :

a) 4 b) -3 c) 1 d) 0

……………… ………………. …………………. ………………….

4. Compléter le tableau de valeurs :

x	-6	-2	0,5	2	5
$f(x)$					

EXERCICE 8

On considère la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$. Calculer les images de 2 ; 3 ; 5 ; -1 ; -3 et 0.

EXERCICE 9

On considère la fonction définie par $f(x) = -0{,}5x - 6$. Calculer les images de -8 ; -6 ; -1 ; 0 ; 2 et 8.

EXERCICE 10

Déterminer si les fonctions *f* suivantes définies sur l'ensemble D sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.

a) D = [–3 ; 3] $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ b) D = [–3 ; 5] $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

c) D = IR $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ d) D = [–4 ; 4] $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

e) D = IR $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ f) D = IR $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$

g) D = IR–{–1 ; 1} $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

EXERCICE 11

Dans cet exercice, $f(x)$ est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

EXERCICE 12

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x-3)(x+1)$

1/ Quelles sont les images par f de 2 et de –10 ?

2/ Quels sont les antécédents de 0 par f ?

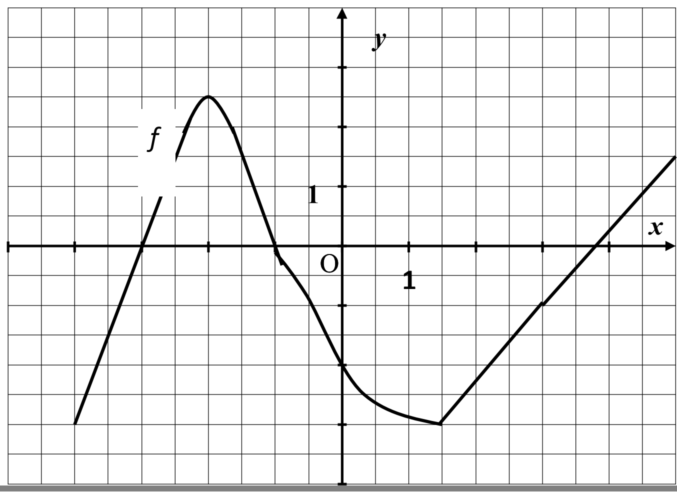
3/ Les points de coordonnées (–1 ; 3), (0 ; –3), et (1 ; 0) sont-ils des points de la représentation graphique de f ?

EXERCICE 13

Pour chaque fonction de l'exercice précédent, déterminer lorsque c'est possible les images des nombres suivants :

$0 \;;\; 1 \;;\; \dfrac{1}{2} \;;\; -\sqrt{2} \;;\; -4$

EXERCICE 14



Une fonction f est tracée ci-contre.

1. Déterminer l'image par f de :

   (*Laisser des pointillés sur le repère)*

   a) 3. ……………………

   b) -2. ……………………

   c) 2. ……………………

2. Déterminer :

   a) f(1) ……………………………

   b) f(0) ……………………………

c) f (-2,5) …………………………….

3. Déterminer le ou les antécédents, s'il y en a de :

a) 6 ………………………………….

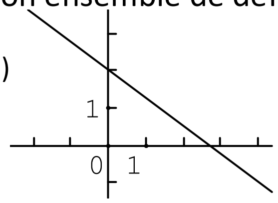
b) 0 ………………………………….

c) -3 ………………………………….

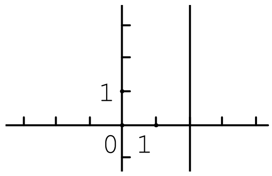
EXERCICE 15

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction et, dans ce cas, préciser son ensemble de définition.

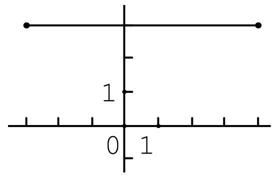
a)



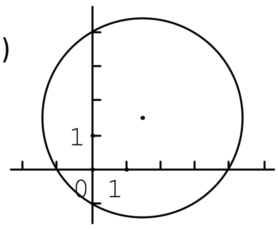
b)



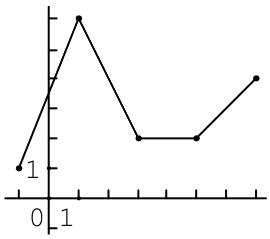
c)



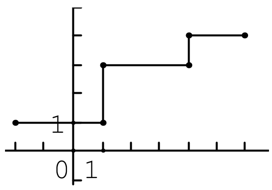
d)



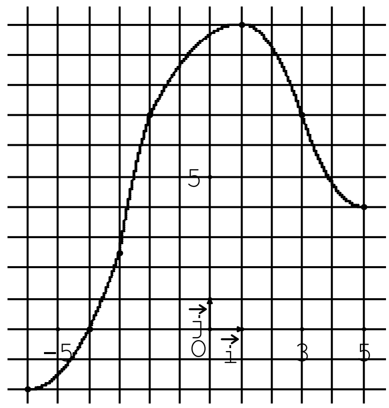
e)



f)



EXERCICE 16



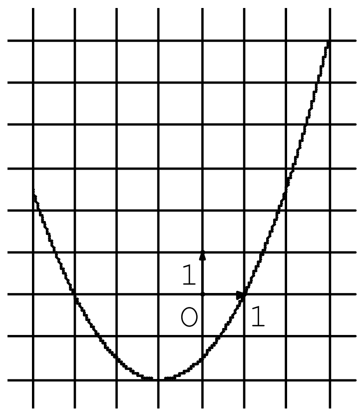
f est la fonction définie sur IR par $f : x \mapsto 2x^2$

a) Calculer les images par f des réels 0; $\sqrt{2}$; -4.

b) Vérifier que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont pour image 4.

c) Pourquoi -4 n'est-il l'image d'aucun réel ?

EXERCICE 17

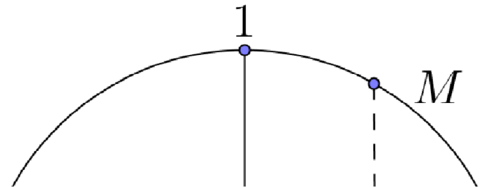


La courbe C ci-contre représente dans ce repère une fonction *f* définie sur [-2 ; 4] par $f(x) = 0{,}5(x + 1)^2 - 2$.

1. A l'aide du graphique, dire si chacun des points suivants appartient ou non à la courbe C:

A(0 ; -1,5) ; B(1 ; 0) ; C(2 ; 2) ; D(-3 ; 0) ; E(1,5 ; 1) ; F(-1 ; -2)

2. Déterminer par le calcul l'image de 0, de -1 et de $\sqrt{2}$.
   Retrouver les résultats sur la courbe.
3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0, -3 et -2. Retrouver les résultats sur la courbe.



EXERCICE 18

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal.

C est le demi-cercle de centre O et de rayon 1.

1. a) La courbe C est-elle la représentation graphique d'une fonction *f* ?
   b) Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

2. M est le point du demi-cercle C d'abscisse $\frac{1}{2}$. Calculer l'ordonnée de M.

   En déduire $f\left(\frac{1}{2}\right)$

3. De la même manière, calculer : $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{2}{5}\right)$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f(0)$.

4. Trouver les réels *x* de l'intervalle [-1 ; 1] qui ont pour image par *f* : 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. *x* est un réel de l'intervalle [-1 ; 1] et M le point de C d'abscisse *x*. Calculer l'ordonnée de M en fonction de *x*. En déduire l'expression de f(x)

EXERCICE 19

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$

a) Calculer les images par *f* des réels 0; 1; $-\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$.

b) Trouver tous les réels qui ont pour image 1 par *f*.

EXERCICE 20

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^2$

b) Quel est le réel pour lequel on ne peut pas calculer $\frac{1}{x}$?

Donner alors l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

c) Quels sont les réels pour lesquels on peut calculer $\sqrt{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

EXERCICE 21

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur I = [–2 ; 5].

1/ Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$															

2/ Placer les points de coordonnées (x ; $f(x)$) dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ en prenant comme unité 1 cm. Tous ces points appartiennent à la représentation graphique de f . La tracer en joignant ces points.

3/ Déterminer le minimum de la fonction f ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint.

4/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) = 0$.

EXERCICE 22

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [–5 ; 5] par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+4}$ Compléter un tableau donnant les images par f (arrondies à 10^{-2} près) des réels allant de –5 à 5 par pas de 0,5. Placer les points correspondants dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) puis tracer la représentation graphique de f.

EXERCICE 23

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$f(x) = -x^2 + 2x$ et $g(x) = 2x - 1$

1/ a) Donner une table de valeurs de f pour x allant de –2 à 3.

b) Tracer sur un même graphique (unité 1 cm ou 1 carreau) les courbes représentatives de f et g que l'on notera C_f et C_g.

2/ Résoudre graphiquement en expliquant :

a) l'équation : $f(x) = g(x)$.

b) l'inéquation : $f(x) \| 0$.

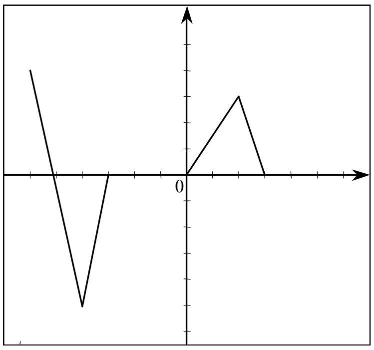
3/ Déterminer graphiquement le maximum de la fonction f.

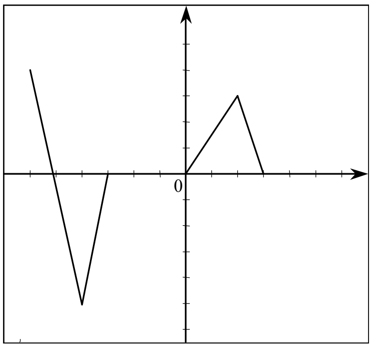
EXERCICE 24

1/ Une fonction f est définie sur [–6 ; 6]. Une partie de sa représentation graphique est donnée.

Compléter la représentation graphique dans les cas suivants :

a) f est paire. b) f est impaire.





2/ Une fonction *f* est définie sur [–5 ; 5]. Une partie de son tableau de variation est donnée ci-dessous.

x	0		1		4		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

Recopier et compléter le tableau dans les cas suivants :

a) *f* est paire. b) *f* est impaire.

EXERCICE 25

On pose $f(x) = \dfrac{-3x-5}{x+2}$.

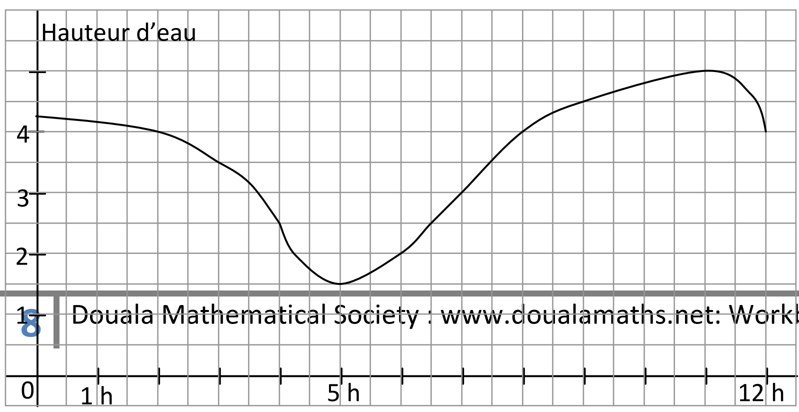
a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	–6	–4	–3	–2,5	–2,25	–2	–1,75	–1,5	–1	0	2	3
$f(x)$												

b) Représenter dans un graphique $f(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 26

1/ Le graphique suivant donne la hauteur de la mer dans un port selon l'heure de la journée.



a) Quelle est la hauteur de la mer à 2 h ? à 6 h ?

b) À quelle heure la hauteur de l’eau est-elle de 4 m ? de 1,5 m ? de 1 m ?

c) À quelle heure la hauteur de l’eau est-elle maximale ? Quelle est cette hauteur ?

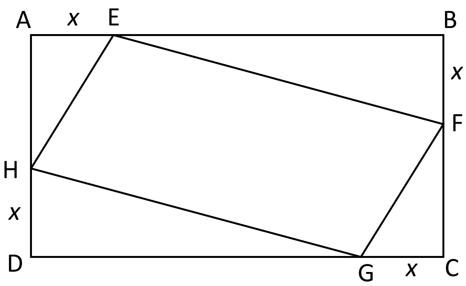
d) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

Heure	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
Hauteur (en m)										

e) Un bateau ne peut entrer dans le port que si la hauteur de l’eau dépasse 3,50 m. Quels sont les horaires d’arrivées possibles pour les bateaux

EXERCICE 27

2/ ABCD est un rectangle tel que AB = 9 cm et AD = 5 cm. E, F, G et H sont tels que AE = BF = CG = DH = x. On appelle S l’aire de EFGH.



a) Sur quel intervalle x peut-il varier ?

b) Calculer S lorsque x = 2 cm.

c) Calculer S en fonction de x.

d) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x (en cm)	0	1	2	3	4	5
S (en cm²)						

e) Représenter dans un graphique l’évolution de S en fonction de x.

f) Pour quelle valeur de x l’aire S semble-t-elle maximale ?

EXERCICE 28

On donne le tableau suivant :

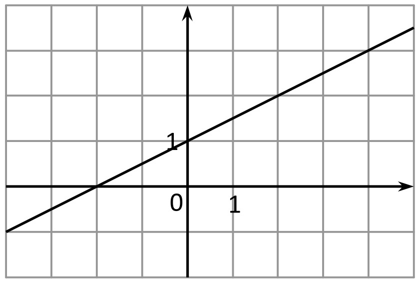
a	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

b	5	0	–1	1	3	4	3	2	2,5

Représenter dans un graphique *b* en fonction de *a*.

EXERCICE 29

On donne le graphique suivant :



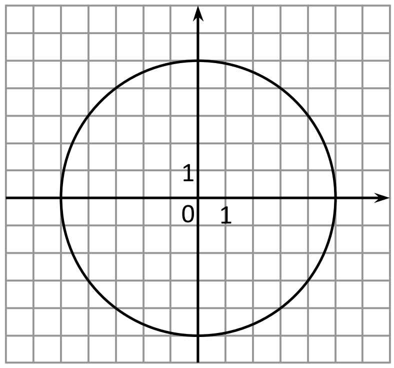
a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous qui concerne les points de la droite :

Abscisse x	–2	–1	0	1	2
Ordonnée y					

b) Peut-on trouver une formule qui permette de calculer y connaissant x ?

EXERCICE 30

On donne la courbe suivante.



Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous qui concerne les points du cercle :

Abscisse x	–5	–3	0	3	4	5	6
Ordonnée y							

Quelle est la particularité de la situation de l'exercice6 par rapport à toutes les autres ?

EXERCICE 31 : Étude d'une fonction rationnelle 1

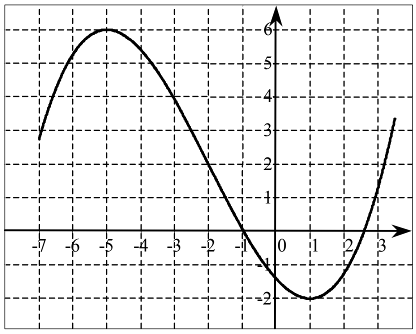
Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$–{3} par $r(x) = \dfrac{5}{x-3}$

1/ En utilisant la méthode vue précédemment déterminer le sens de variation de r sur $]3\,;+\infty[$ puis sur $]-\infty\,;3[$.

2/ Dresser le tableau de variation de la fonction r.

EXERCICE 32

Une fonction *f* définie sur $[-7\ ;\ 3{,}5]$ est représentée ci-contre.



a) Déterminer le minimum et le maximum de *f* sur $[-7\ ;\ 3{,}5]$ ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

b) Déterminer le minimum et le maximum de *f* sur $[-7\ ;\ -2]$ ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

EXERCICE 33

On donne le tableau de variation d'une fonction *f* définie sur $[-2\ ;\ 5{,}5]$.

a) Déterminer le minimum et le maximum de *f* sur $[-2\ ;\ 5{,}5]$ ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

b) Déterminer le minimum et le maximum de *f* sur $[-1\ ;\ 4{,}5]$ ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

c) Déterminer le minimum et le maximum de *f* sur $[1\ ;\ 4]$ ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

x	-2		0		4		$5,5$
$f(x)$	-1	↗	6	↘	-1	↗	$2,2$

EXERCICE 34

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que *f* admet un maximum *M* en *a* si $\begin{cases} \text{.....................} \\ \text{.....................} \end{cases}$

On dit que *f* admet un minimum *m* en *a* si $\begin{cases} \text{.....................} \\ \text{.....................} \end{cases}$

EXERCICE 35 : Étude d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -2x + 5$.

1/ Quel est le sens de variation de f. Justifier

2/ L'objet de cette question est de démontrer ce qui précède.

a) On considère deux nombres réels a et b.
Démontrer que $f(a) - f(b) = 2(b - a)$

b) On suppose que $a \parallel b$.
Que peut-on dire de $b - a$? de $2(b - a)$? de $f(a) - f(b)$?

c) Recopier et compléter :
Si $a \parallel b$ alors $f(a)$ …… $f(b)$.

d) Conclure.

EXERCICE 36: Étude de la fonction « carré »

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^2$. On veut déterminer les variations de g.

1/ On considère deux nombres réels a et b.
Calculer et factoriser $g(a) - g(b)$.

2/ a) On suppose que $0 \quad a \parallel b$.
Que peut-on dire de $a - b$? de $a + b$? de $g(a) - g(b)$?

b) Quel est le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$?

3/ a) On suppose que $a \parallel b \quad 0$.
Que peut-on dire de $a - b$? de $a + b$? de $g(a) - g(b)$?

b) Quel est le sens de variation de g sur $]-\infty ; 0]$?

4/ Dresser le tableau de variation de la fonction g.

EXERCICE 37 : Étude d'une fonction polynôme du second degré

Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = -x^2 + 4x - 6$.

1/ On considère deux nombres réels a et b.
Démontrer que $h(a) - h(b) = (b - a)(b + a - 4)$.

2/ On suppose que $a \parallel b \quad 2$.
Déterminer le signe de $h(a) - h(b)$. En déduire le sens de variation de h sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

3/ On suppose que $2 \quad a \parallel b$.
Déterminer le signe de $h(a) - h(b)$. En déduire le sens de variation de h sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

4/ Dresser le tableau de variation de la fonction h.

EXERCICE 38: Étude d'une fonction rationnelle 2

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

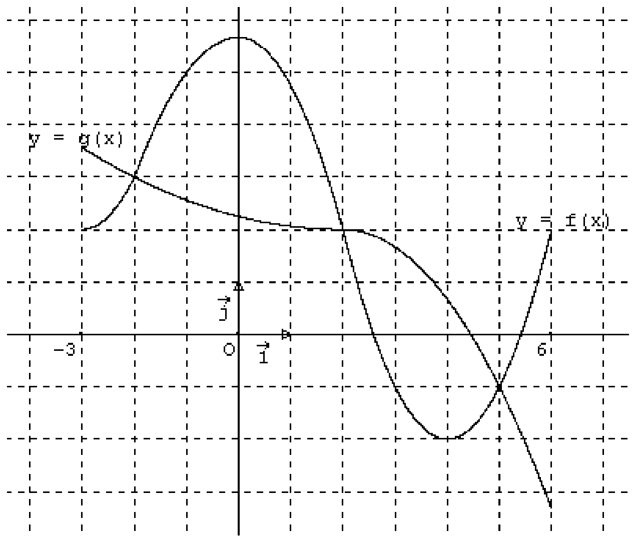
On veut déterminer les variations de f.

1/ Représenter cette fonction sur l'écran d la calculatrice et faire une conjecture quant aux variations.

2/ Appliquer la méthode vue précédemment pour vérifier cette conjecture.

EXERCICE 39:

Les fonctions f et g sont définies sur $[-3 ; 6]$; leurs représentations graphiques sont données ci-contre.



Résoudre graphiquement :

a) l'équation $f(x) = g(x)$;

b) l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

EXERCICE 40

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 7]$.

x	-5	-4	2	3	7
$f(x)$	-2 ↗	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-1

1. Dessiner une courbe susceptible de représenter la fonction f.

2. Combien de solutions a l'équation $f(x) = 0$? Donner ces solutions.

3. Indiquer le signe de $f(x)$.

EXERCICE 41

La courbe ci-après représente une fonction *f* sur l'intervalle [-4 ; 4].

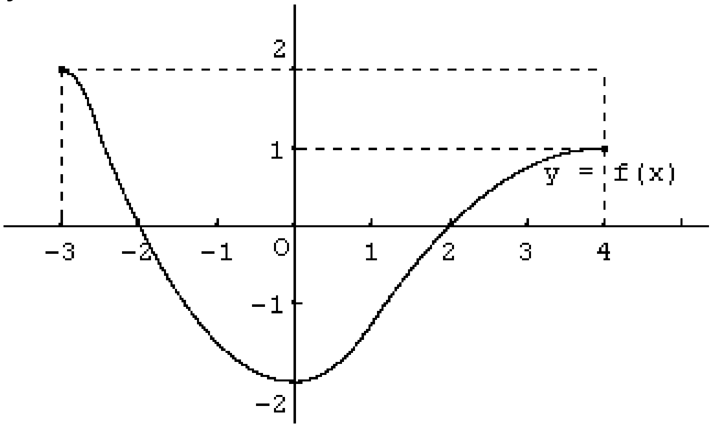
Décrire le comportement de *f* en utilisant :

« *f* est croissante sur … ».

« *f* est décroissante sur … ».

« *f* admet un maximum pour *x* = … et ce maximum vaut … ».

« *f* admet un minimum pour *x* = … et ce minimum vaut … ».



EXERCICE 42

On considère la fonction *f* définie sur [-5 ;3] dont voici la représentation graphique :

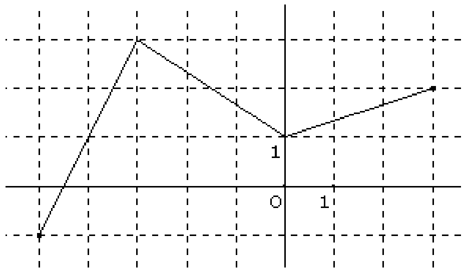
1. Dresser le tableau de variation de *f* .

2. Recopier et compléter les phrases suivantes :

Si $-5 \leq x \leq -3$, alors … $\leq f(x) \leq$ …

Si $-3 \leq x \leq 0$, alors … $\leq f(x) \leq$ …

Si $-5 \leq x \leq 3$, alors … $\leq f(x) \leq$ …



EXERCICE 43

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f* sachant que :

- *f* est définie sur l'intervalle [0 ; 5] ;
- *f* est croissante sur cet intervalle ;
- $f(0) = 1$ et $f(5) = 4$.

EXERCICE 44

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f* sachant que :

- *f* est définie sur l'intervalle [-3 ; 3] ;
- *f* est décroissante sur [-3 ; -1] ;
- *f* est croissante sur [-1 ; 3] ;
- pour tout $x \in [-3 ; 3]$, $-1 \leq f(x) \leq 4$.

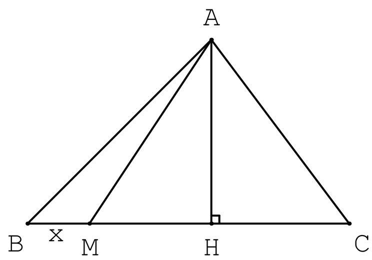
EXERCICE 45

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :

- f est définie sur l'intervalle [-3 ; 4] ;
- f admet un minimum en -1 et un maximum en 2 ;
- les images de -3 et de 4 sont respectivement 2 et 1 ;
- 0 a deux antécédents : -2 et 1.

EXERCICE 46

On considère le triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A. Le point M est un point de [BC]. On donne AH = 4, BC = 7, BH = 4 et on pose BM = x.



1. Dans quel intervalle le nombre x peut-il varier ?
2. On note $f(x)$ l'aire du triangle ABM.

a) Faire deux dessins, le premier avec $x = 4$, le second avec $x = 2$. Calculer $f(4)$ et $f(2)$.

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c) Que peut-on dire de l'aire du triangle ABM lorsque x augmente, c'est à dire lorsqu'on déplace le point M vers le point C ? Quel est le sens de variation de f ?

3. On note $g(x)$ l'aire du triangle AMC.

a) Calculer $g(4)$.

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

c) Quel est le sens de variation de la fonction g ?

4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$:

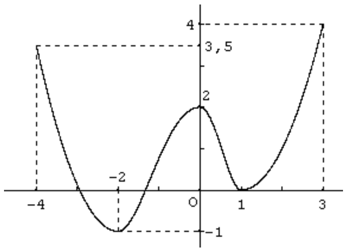
- par le calcul
- par des considérations géométriques.

EXERCICE 47

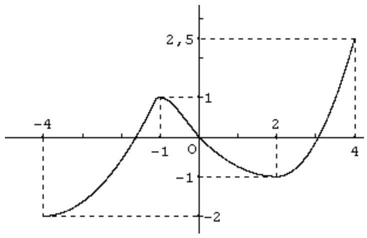
Dans chacun des cas, la fonction est donnée par sa courbe.

Dresser son tableau de variation.

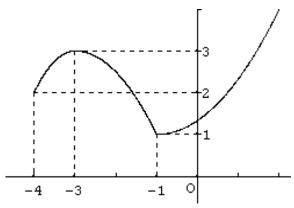
a)



b)

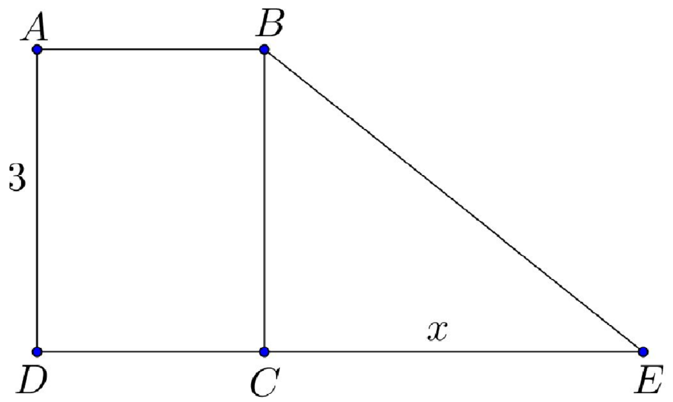


c)



EXERCICE 48

On considère la figure ci-dessous : DE = 6, AD = 3. Le point C varie sur [DE] et on note : CE = x. On note $f(x)$ l'aire de ABCD, $g(x)$ l'aire de BCE, $h(x)$ le périmètre de ABCD et $k(x)$ le périmètre de BCE.



1. Dans quel intervalle le nombre x peut-il varier ?
2. Tracer deux figures, l'une pour x = 1, l'autre pour x = 4.
3. Calculer les images de 1 et de 4 pour chacune des quatre fonctions f, g, h et k.
4. Exprimer, en fonction de x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$.
5. a) En partant d'une figure donnée, on suppose que x augmente, c'est à dire que le point C se rapproche de D.

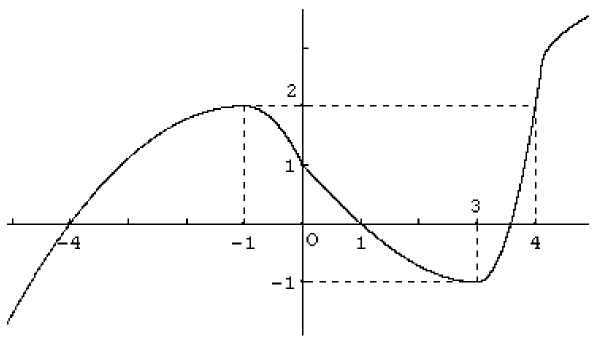
L'aire du rectangle ABCD va-t-elle augmenter ou bien va-t-elle diminuer ?

Donner le sens de variation de la fonction f.

b) Donner de même le sens de variation des fonctions g, h et k.

EXERCICE 49

La courbe C ci-dessous est la courbe d'une fonction f définie sur 3. on précise de plus que $f(3,5) = 0$.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Résoudre graphiquement les inéquations

   $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

   En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.

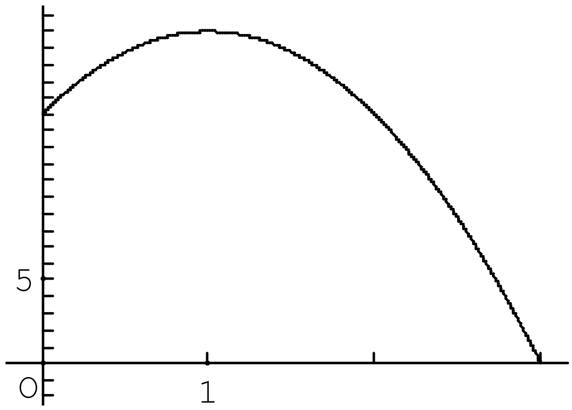
EXERCICE 50

f est la fonction définie sur 3 par $f(x) = -2 + (x + 1)^2$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que pour tout réel, $f(x) \geq -2$?

2. Avant d'affirmer que -2 est le minimum de *f* sur 3, il faut démontrer que *f*(*x*) prend effectivement la valeur -2. Le démontrer et conclure.

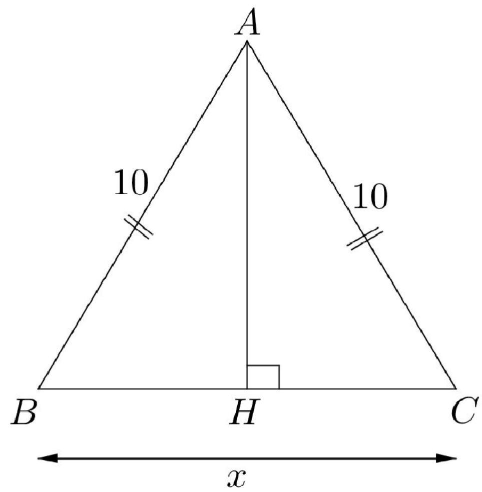
EXERCICE 51



La trajectoire d'une balle de jeu est donné par : $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec $x \in [0 ; 3]$, et $f(x)$ est la hauteur de la balle au dessus du sol, exprimée en mètres.

1. Interpréter $f(0)$ et $f(3)$.
2. a) D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?
   b) Donner les instants où la hauteur est égale à 15 m.
   c) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 18$. En donner une interprétation concrète.

EXERCICE 52



ABC est un triangle isocèle en A avec : AB = AC = 10 cm.
H est le pied de la hauteur issue de A.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle lorsqu'on fait varier la longueur x (en cm) du côté [BC].

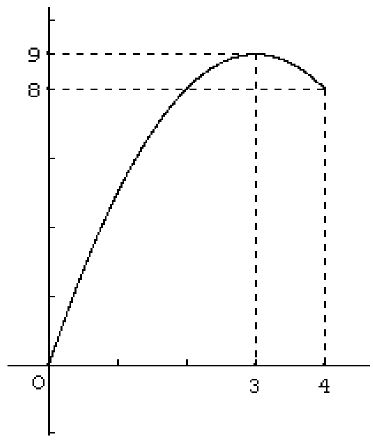
1. a) Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC lorsque $x = 5$, puis lorsque $x = 10$.
b) Peut-on avoir $x = 30$? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?
2. a) Exprimer AH en fonction de x.
   b) On désigne par $f(x)$ l'aire de ABC. Démontrer que : $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.
   c) Calculer $f(x)$ pour chacune des valeurs entières de x prises dans [0 ; 20] : arrondir les résultats au dixième et les présenter dans un tableau.
   d) Dans un repère orthogonal bien choisi, placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ du tableau précédent. Donner alors l'allure de la courbe représentant f.

EXERCICE 53

ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x.
La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1. a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.
   b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.
2. On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle [0 ; 4].
   a) Montrer que $f(x) = x(6 - x)$ et vérifier que $f(x) = 9 - (x - 3)^2$.
   b) Compléter le tableau suivant :

longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, $f(x)$						



3. Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle [0 ; 4].
   Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a) Lorsque AM = $\frac{1}{4}$ AD, quelle est l'aire de AMNP ?
   b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?
   c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm² ?
   d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2}$ cm².
4. Répondre aux questions suivantes en choisissant pour $f(x)$ l'expression la mieux adaptée.
   a) Démontrer que $f(x) \leq 9$.
   Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximale lorsque $x = 3$? Quelle est la nature de AMNP lorsque $x = 3$?
   b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\frac{17}{2}$ cm² lorsque

$x = \dfrac{6-\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 54

En utilisant le tableau de signes ci-dessous :

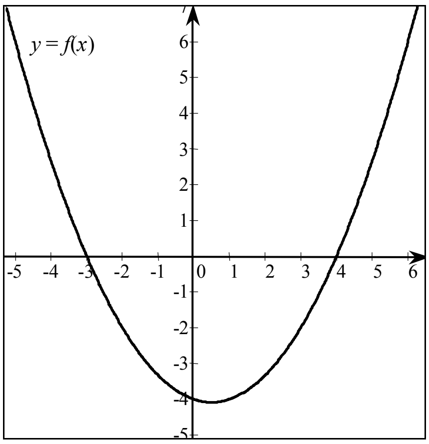
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	[illegible]	−	0	+	

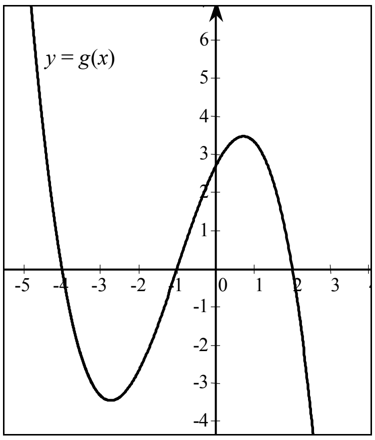
1/ Déterminer le signe de $f(3)$; $f(-2)$; $f\left(-\dfrac{11}{3}\right)$ et $f(1)$.

2/ Résoudre les inéquations : $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

EXERCICE 55

Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.





EXERCICE 56

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x - 6$; $g(x) = -2x - 1$; $h(x) = -5x + 7$; $k(x) = 2x$

EXERCICE 57

1/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 + 4$

a) Calculer $f(0)$.

b) Que peut-on dire de x^2 sur IR ? de $x^2 + 4$?

c) Conclure quant à l'existence d'un minimum pour f.

2/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = -x^2 + 4x$

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'existence d'un maximum pour g.
b) Calculer et factoriser $g(2) - g(x)$.
c) Déterminer le signe de $g(2) - g(x)$.
d) Conclure.

EXERCICE 58

1/ Rappeler la règle des signes d'un produit, la règle des signes d'un quotient.

2/ A et B sont deux fonctions dont les tableaux de signes sont les suivants :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $A(x)$	+	0	−

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $B(x)$	+	0	−

Recopier et compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $A(x)$	
signe de $B(x)$	
signe de $A(x)\times B(x)$	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $A(x)$	
signe de $B(x)$	
signe de $\frac{A(x)}{B(x)}$	

3/ En utilisant ces tableaux, résoudre le inéquations suivantes :

$A(x)\times B(x) < 0$ $\qquad$ $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$

EXERCICE 59

Pour chacune des fonctions suivantes :

1/ Tracer sa représentation graphique sur l'écran de la calculatrice.

2/ Conjecturer l'existence d'un maximum ou d'un minimum ainsi que la valeur a pour lequel il est atteint.

3/ Démontrer cette conjecture en étudiant $f(x) - f(a)$ (ou $f(a) - f(x)$).

a) f est définie sur IR par $f(x) = x^2 - 8x + 3$

b) g est définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

c) h est définie sur $]3 ; +\infty[$ par $h(x) = x - 8 + \dfrac{4}{x-3}$

EXERCICE 60

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 2]$ par $f(x) = -2x^2-4x$

1) Factoriser au maximum f(x)
2) Montrer que pour tout réel x de $[-4 ; 2]$, $f(x) = -2(x+1)^2+2$
3) a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le maximum de f sur $[-4 ; 2]$
   (c'est-à-dire essayer de le deviner sans le démontrer en traçant la courbe Cf sur votre calculatrice graphique)
   b) Pour quelle valeur ce maximum semble-t-il atteint ?
   c) Démontrer les conjectures faites en 3)a) et 3)b) par le calcul.
4) a) Compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs exactes)

x	−4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)													

   b) Tracer Cf, la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal donné à l'annexe 2.
5) a) Résoudre graphiquement sur $[-4 ; 2]$, l'inéquation $f(x) < 0$
   b) Retrouver par le calcul le résultat de la question 5)a) en vous aidant de la question 1) et en faisant un tableau de signes.
6) a) Tracer dans le repère la droite d : $y = x-3$
   b) Résoudre graphiquement sur $[-4 ; 2]$, l'inéquation $f(x) \geq x-3$
   c) Montrer que pour tout réel x, $(x+3)(1-2x) = -2x^2 - 5x +3$
   d) En déduire par le calcul le résultat de la question 6)b)
   (on pourra étudier le signe de $f(x) - (x-3)$ en faisant un tableau de signes)

EXERCICE 61

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 3x + 5$

1)a) Calculer l'image de $1+5\sqrt{2}$ par f , on donnera le résultat sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b deux décimaux .

b) Reprendre la question précédente avec $5 - \sqrt{3}$

2) Déterminez les antécédents de 5 par f

3) a)Démontrez que pour tout x réel on a $f(x) = -\frac{4}{5}\left(\left(x-\frac{15}{8}\right)^2 - \frac{625}{64}\right)$

b) En déduire l'expression factorisée de f(x)

c) Déterminez alors les antécédents de 0 par f

EXERCICE 62

Les questions 1. à 5. Comportent trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

Une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question. L'absence de réponse à une question ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-5;5]$ dont le tableau de variation est le suivant :(on suppose que la courbe représentative de f sur $[-5;5]$ s'obtient « sans lever le crayon »)

x	-5		-1		3		5
$f(x)$	-2	↗	2	↘	1	↗	3

1. Si on note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère, alors C_f coupe l'axe des abscisses :	☐ en un point ☐ en deux points ☐ en trois points
2. L'image de 0 est	☐ égale à 0 ☐ négative ☐ inférieure à 2
3. Si $-5 < b < a < -1$, alors	☐ $f(a) < f(b)$ ☐ $f(a) > f(b)$ ☐ $f(a)$ et $f(b)$ sont négatifs
4. Si $-1 \le x \le 5$ alors	☐ $2 \le f(x) \le 3$ ☐ $-1 \le f(x) \le 5$ ☐ $1 \le f(x) \le 3$
5. Si x et y sont deux réels de l'intervalle $[-1;3]$ tels que x est positif et y est négatif, alors	☐ $f(x) < f(y)$ ☐ $f(x) > f(y)$ ☐ $f(x)$ et $f(y)$ sont de signes opposés

6. Dans un repère orthonormé, proposer le tracé d'une courbe de fonction f vérifiant le tableau

De variation ci-dessus.

EXERCICE 63

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, calculer et remplissez le tableau suivant

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

2. Peut – on conclure que cette fonction est croissante sur [0 ;2]
3. Calculer f(0,4). Vérifiez votre réponse à la question 2)

EXERCICE 64

On donne le tableau de variation suivant.

x	-4		-2		0		4		6
$f(x)$	-1	↗	4	↘	-3	↗	3	↘	1

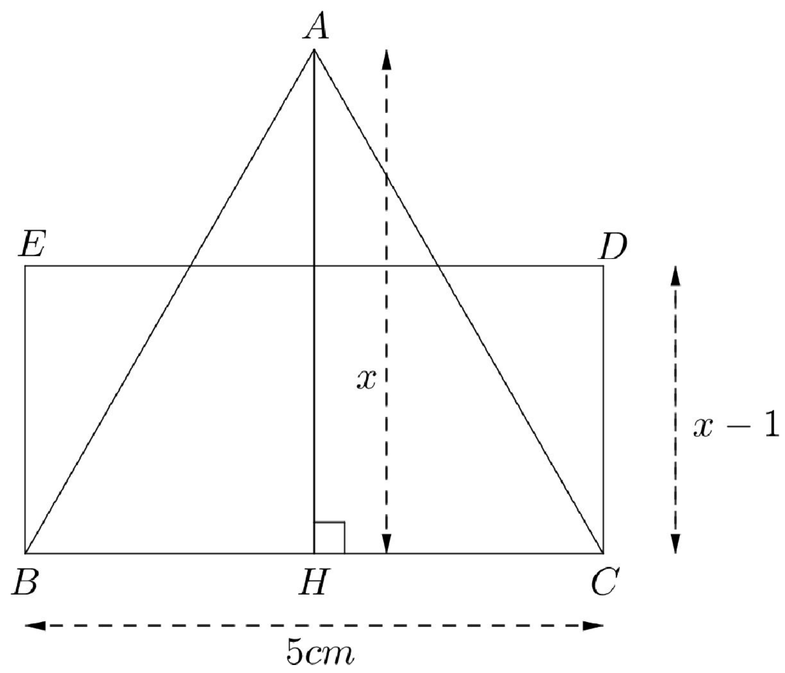
1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Décrire les variations de f.
3. En justifiant ses réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.
   a. $f(1) < f(3)$
   b. $f(1) = 0$
   c. $f(-2) > f(-1)$
   d. $f(2) > 3$
   e. $f(-3) < 4$
   f. $f(-3{,}5) = f(2)$
   g. $f(0{,}1) < 0$
   h. le minimum de f sur $[-4;6]$ est -3

EXERCICE 65

L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm^2

ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 5.

H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AH = x.



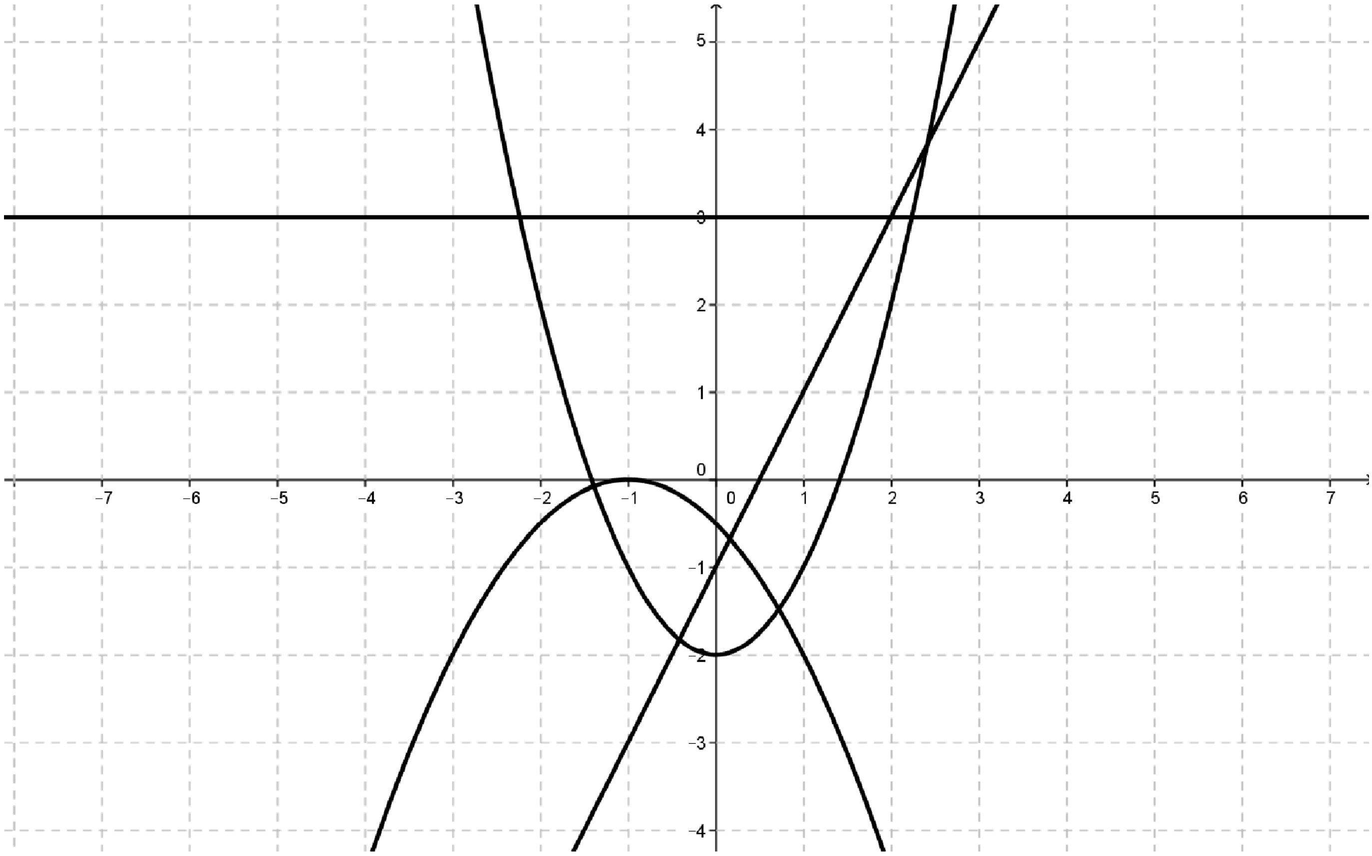
BCDE est un rectangle tel que BC = 5 et EB =x − 1

1°) Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du triangle ABC et l'aire g(x) du rectangle BCDE.

2°) Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonctions f et g. (les calculs devront figurer sur la copie.)

3°) Trouver la hauteur AH pour laquelle le triangle ABC et le rectangle BCDE ont la même aire. On traitera cette question graphiquement et algébriquement.

EXERCICE 66



Voici les représentations graphiques des fonctions :

$f : x \mapsto x^2 - 2$; $g : x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)^2$; $h : x \mapsto 2x - 1$; $l : x \mapsto 3$

Attribuer sa courbe à chaque fonction.

EXERCICE 67

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 5x^2 - 5x + 6$1

1. Calculer les images de 0 et de 3.
2. Déterminer les antécédents de 6 et de $-\frac{1}{4}$
3. Montrer que $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
4. Quel est le minimum de la fonction f ? Pour quelle valeur est-il atteint ?
5. Tracer la courbe de f.
6. En d´déduire le tableau de variation de f.
7. Retrouver graphiquement les résultats du 1˚) et du 2˚).
8. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation f (x) = 0.

9. Tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto -x+4$
10. Résoudre graphiquement f(x)=g(x) et f (x) ≤ g(x).
11. Compléter : $a \leq b \leq \frac{5}{2}$ alors $f(a)\ldots\ldots f(b)\ldots\ldots -\frac{1}{4}$ car f est ....sur........................

EXERCICE 68

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, placer les points A(−1 ;5) ; B(1 ;1) ; C(3 ;2) et D(1 ;−4)

a) Déterminer la fonction f dont la courbe représentative est la droite (AB).

b) Déterminer la fonction g dont la courbe représentative est la droite (CD).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

d) En déduire la solution de l'´equation f(x)=g(x).

e) Résoudre par le calcul l'inéquation f (x) ≤ g(x).

EXERCICE 69

f est une fonction affine telle que f(2) = 1 et f(−3) = 4.

1. Exprimer f(x) en fonction de x.
2. Sans effectuer la représentation graphique de la fonction f, donner, en justifiant, le sens de variation de f.
3. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
4. Résoudre l'inéquation f(x)= ≥ −2.

EXERCICE 70

1) Représenter graphiquement la fonction inverse définie par $g(x) = \frac{1}{x}$
2) Compléter :

   Si $x < -1$ alors $\ldots\ldots < \frac{1}{x} < \ldots\ldots$

   Si $1 \leq x \leq 2$ alors $\ldots\ldots \leq \frac{1}{x} \leq \ldots\ldots$
3) Résoudre dans R :
   a. $\frac{1}{x} = 3$
   b. $\frac{1}{x} \geq 2$
   c. $\frac{1}{x} \leq 1$

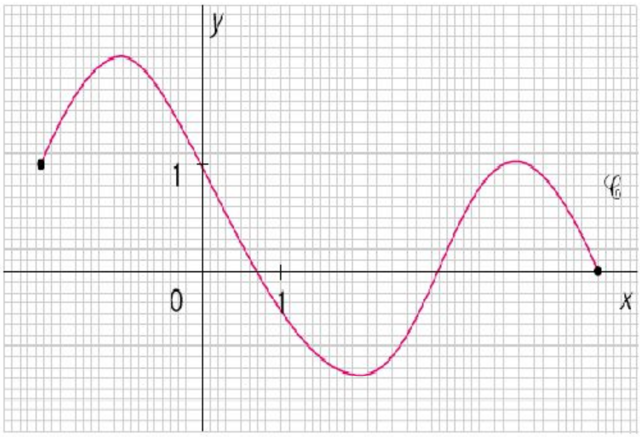
EXERCICE 71

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

EXERCICE 72

Dans le plan, muni d'un repère, la courbe c représente une fonction f définie sur [–2 ; 5].

Compléter le tableau de variation.



x	-2 … … … 5
f	

EXERCICE 73

f et g sont deux fonctions

1. Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :

a) L'image de −1 par la fonction f est 3.

b) L'antécédent de $\sqrt{2}$ par la fonction f est 3.

c) −3 a pour image 1 par la fonction g. d) 3 a pour antécédents −1 et 2 par la fonction g.

2. On sait que $f(-2)=1$ et $g(1)=-2$

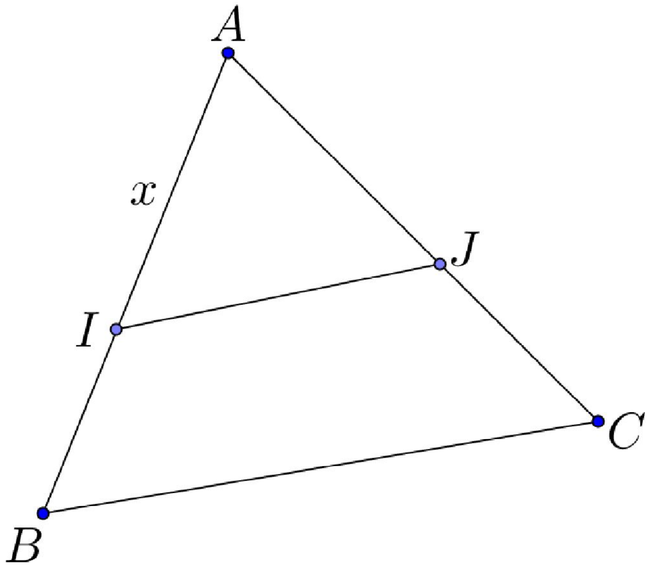
a) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "image".

b) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "antécédent"

EXERCICE

EXERCICE

ABC est un triangle isocèle en A avec AB = 7 et BC = 9. Soit I un point du segment [AB], la parallèle à la droite
(BC) coupe le segment [AC] au point J . On pose $AI = x$.

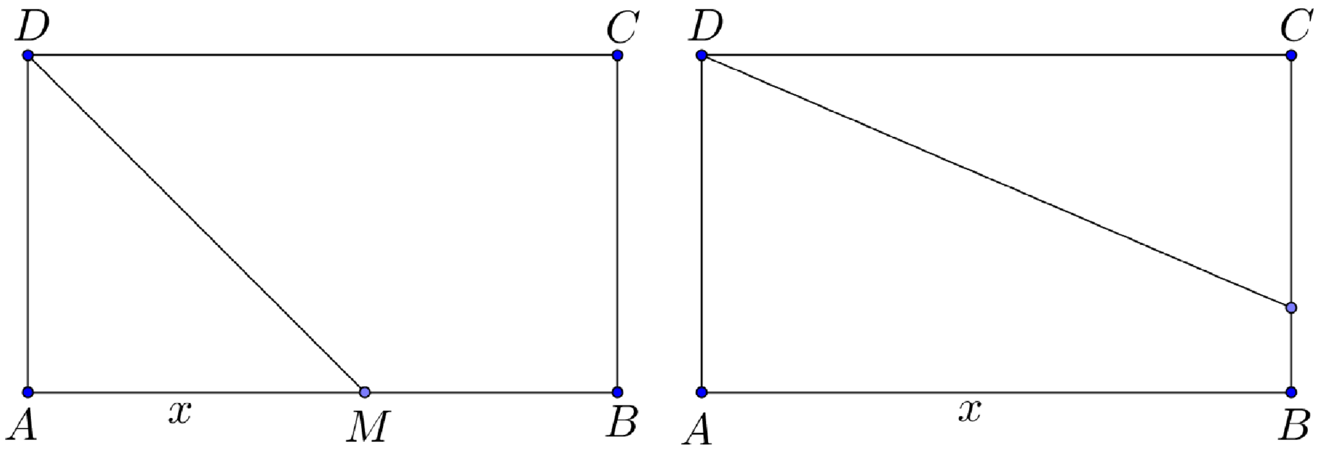


1. Exprimer la distance IJ en fonction de x.
2. On note f la fonction qui à x associe le périmètre du triangle AIJ.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Donner une expression de f (x).
3. On note g la fonction qui à x associe le périmètre du quadrilatère IJCB. Donner une expression de g(x).
4. Déterminer la position du point I telle que IJCB et AIJ aient le même périmètre.

EXERCICE

ABCD est un rectangle de longueur AB = 10 et de largeur AD = 4.
M est un point mobile le long de la ligne brisée ABC.
Si M ∈ [AB], on pose x = AM ; si M ∈ [BC], on pose x = AB + BM



1. A (x) est selon la position du point M l'aire du triangle ADM ou du trapèze ADMB.
Exprimer A (x) en fonction de x.
2. Représenter la fonction A dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Déterminer la position du point M telle que l'aire A (x) soit égale au tiers de l'aire du rectangle.

EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(0;4), B(−3;0) et C(7,5;0).

M(x;0) est un point du segment [BC]. Soit f la fonction qui à x associe la distance AM.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. a) Établir le tableau des variations de la fonction f .

b) En déduire le nombre de solutions de chacune des équations suivantes

f (x) = 3 ; f (x) = 4 ; f (x) = 5 et f (x) = 9.

3. Résoudre les équations f (x) = 4,1 et f (x) = 5,8.

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=(x-2)^2-9x^2$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de $-\frac{1}{2}$?
4. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère ?
5. Quelles sont les abscisses des points de la courbe C_f qui ont pour ordonnée 4 ?

EXERCICE

Soit f une fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\frac{9-4x^2}{x^2+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
2. Étudier le signe de $f(x)-f(0)$. En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction f .
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x)>-4$. Peut on conclure que −4 est le minimum de la fonction f ?

EXERCICE

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [−3;4] par $f(x)=2x^2-3x$.

1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f (x)								

3. Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f n'est pas monotone sur [−3;4] ?
4. Calculer l'image de 0,8. Le tableau permet-il de trouver le minimum de la fonction f ?
5. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [−3;4], $f(x)-f\left(\frac{3}{4}\right)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$.

b) En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction f .

NOMBRES REELS

EXERCICE 0

Calculer

1) $\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\frac{1}{81}$

2) $\frac{8}{3}+\frac{5}{18}-\frac{4}{9}$

3) $-\frac{6}{35}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$

4) $\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{64}$

5) $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$

6) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)-\frac{10}{45}+\frac{17}{315}$

7) $\frac{1}{16}+\frac{1}{72}+\frac{3}{80}+\frac{10}{112}$

8) $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)$

9) $\frac{143}{22}-\frac{14}{84}+\frac{7}{63}-\frac{315}{150}$

10) $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}$

11) $\dfrac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}$

12) $\dfrac{1-\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{12}}+\dfrac{1+\frac{1}{12}}{1+\frac{1}{15}}$

13) $\dfrac{3-\frac{5}{7}+\frac{1}{2}}{3+\frac{5}{7}-\frac{1}{2}}+\dfrac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$

14) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

15) $\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\dfrac{1}{1+\frac{1}{292}}}}$

EXERCICE 1

Calculer

$A=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-3\right)$

$B=\frac{2}{a}-\frac{7}{a}\times\dfrac{1}{\frac{a}{4}-\frac{a}{2}}$

$C=\dfrac{\frac{3}{2}-1}{1,5+1}\times\frac{5^3}{18}$

$D=a^{-2}+\dfrac{\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{5}{4}}$

$E=\dfrac{\frac{7}{6}-\frac{a}{3}}{1-\frac{4a}{14}}\times\frac{a^2}{7}$

$F=\frac{2+3}{2+7}\div\left(\frac{5}{3}\right)^2+1$

$G=\frac{7}{18}\times\frac{2}{7}-\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+1$

$H=\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)^2\div\frac{5}{8}-\frac{8}{3}$

$I=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\times\frac{7}{21}-\frac{7}{21}$

$J=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}\div\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}$

$K=\dfrac{a+\frac{a}{3}-\frac{a}{2}}{2a+\frac{3a}{4}+\frac{a}{3}}$

$L=\dfrac{-5+3^2\times2+4}{12\times2+10}$

$M=\frac{2}{a+1}+\dfrac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$

$\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{2}}$

EXERCICE 2

Calculer

a) $\dfrac{\frac{9}{2}-2}{\frac{8}{7}+8}$

b) $\dfrac{1+\frac{2}{5}}{3-\frac{7}{5}}$

c) $40-(-20)\times\dfrac{-5}{56}$

d) $\dfrac{-1}{7}\div\left(\dfrac{13}{9}-\dfrac{3}{2}\right)$

e) $\dfrac{\frac{-3}{5}+3}{\frac{-5}{4}-6}$

f) $-4-\dfrac{9}{16}\div\dfrac{9}{14}$

g) $\dfrac{-3}{5}\times\left(\dfrac{-9}{7}+\dfrac{-13}{2}\right)$

h) $-4-\dfrac{-4}{9}\times\dfrac{-81}{16}$

i) $\dfrac{\frac{-8}{9}-7}{\frac{-2}{5}+9}$

j) $\dfrac{7}{8}\times\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{-9}{8}\right)$

k) $\dfrac{8}{7}\times\left(\dfrac{-9}{7}+\dfrac{-10}{13}\right)$

l) $\dfrac{-3}{5}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5}{12}$

m) $\dfrac{\frac{10}{9}+1}{\frac{-7}{5}+4}$

n) $\dfrac{\frac{-2}{5}+8}{\frac{-1}{4}+6}$

o) $\dfrac{-1}{4}\times\left(\dfrac{11}{4}+\dfrac{12}{5}\right)$

p) $2+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-12}{5}$

q) $-6+\dfrac{3}{2}\div\dfrac{-15}{4}$

r) $\dfrac{\frac{-5}{8}-6}{\frac{9}{7}-5}$

s) $\dfrac{3}{4}\div\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{7}{11}\right)$

t) $\dfrac{-1}{3}\div\left(\dfrac{-3}{4}-\dfrac{9}{5}\right)$

u) $\dfrac{3}{13}-\dfrac{-1}{39}\div\dfrac{10}{13}$

v) $\dfrac{\frac{4}{9}-4}{\frac{4}{3}-4}$

w) $\dfrac{3\times10^{7}}{21\times10^{-8}}+\dfrac{10^{15}}{7}-\dfrac{10^{10}}{35^{-6}}$

x) $\dfrac{1,3\times10^{-4}\times8\times10^{5}\times9\times10^{3}\times6,5}{0,065\times2600\times10^{-3}\times0,036}$

y) $\dfrac{10^{-1}+2\times10^{-2}+3\times(-3)}{11\times10^{-2}+11\times10^{-3}+0,002}$

z) $\dfrac{3^{7}\times\left(2^{-3}\right)^{5}\times6^{4}}{\left(3^{2}\right)^{5}\times\left(2^{-5}\right)^{2}}$

aa) $\dfrac{10^{4}\times15^{2}}{\left(2^{3}\right)^{2}\times12^{3}}$

bb) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\sqrt{\dfrac{98}{25}}$

cc)

EXERCICE 3

Calculer

$A=\dfrac{49\times(-2)^{5}\times(-3)^{-2}}{-7^{3}\times16\times3^{-3}}$

$B=\dfrac{(-5)^{4}\times7^{2}\times(-2)^{-3}}{(-4)^{4}\times(-1)^{5}\times25}$

$C=\left(\dfrac{\left(a^{2}\times b^{4}\right)^{2}}{a^{3}}\right)^{-3}$

$D=0,0000000005\times1004000000$

$E=\dfrac{2^{3}}{3^{4}}\div\dfrac{2^{2}}{3^{5}}$

$F=\dfrac{\left(a^{2}b\right)^{3}}{(-a)(-b)^{2}}$

$G=\left(\dfrac{4^{-2}\times8^{4}}{90^{7}\times30^{-2}}\right)^{3}$

$H=\left(\dfrac{5^{5}\times24^{-3}}{\left(100^{-7}\times15^{6}\right)^{4}}\right)^{2}$

$I=\dfrac{2^{2}\times10^{-10}\times2^{7}\times10^{-6}}{32\times10^{-15}}$

$J=\left(\dfrac{a^{3}\times b^{-2}}{a^{4}b^{-3}}\right)^{-2}\times\dfrac{\left(3a^{2}\times b^{3}\right)^{3}}{\left(2^{-1}\times ab\right)^{2}}$

$K=\dfrac{5^{3}\times3^{8}\times5^{2}}{125\times5^{2}\times81\times7^{0}}$

$L=\dfrac{0,9\times7\times10^{-1}\times250}{14\times10^{3}\times0,5\times10^{-2}}$

$M=\dfrac{\left(56^{8}\times81^{-2}\times25^{7}\right)^{3}}{\left(50^{5}\times700^{3}\right)^{4}}$

$$N=\frac{0,04\times 2^{-2}\times\left(10^{-2}\right)^{3}\times 10^{2}}{3\times 10^{-8}\times 10^{-2}}$$

$$O=\frac{25\times\left(10^{2}\right)^{-5}\times 121}{11\times 75\times 10^{-9}}$$

$$P=\frac{9^{n+1}+9^{n}}{3^{2n+1}-3^{2n}}$$

$$Q=\frac{\left(ab^{2}\right)^{2}\left(ab^{-1}\right)^{3}\left(a^{2}b\right)^{-2}}{a^{2}c^{-5}\left(a^{-1}bc^{2}\right)^{3}}$$

$$R=\frac{\left(ab^{-2}c^{3}\right)^{4}\left(a^{4}b^{5}c^{-6}\right)^{-2}}{\left(a^{-7}b^{8}c^{7}\right)^{3}\left(a^{6}b^{5}c^{4}\right)^{2}}$$

EXERCICE 4

Calculer

$$A=\sqrt{2}+3\sqrt{8}-6\sqrt{50}$$

$$B=2+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$C=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$$

$$D=\frac{2\sqrt{21}\sqrt{75a^{2}}}{\sqrt{35}\sqrt{20}}$$

$$E=\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{2}$$

$$F=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^{3}$$

$$G=\left(2a+\sqrt{b}\right)^{2}+\left(1-2a\sqrt{b}\right)^{2}-\left(2a\sqrt{b}\right)^{2}$$

$$H=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}}$$

$$I=\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

$$J=\left(4+3\sqrt{2}\right)^{2}-\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$K=\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}$$

$$L=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,0016}}+\frac{\sqrt{0,01}}{\sqrt{0,04}}$$

$$N=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{2}$$

$$O=\sqrt{\frac{a^{6}+a^{6}+a^{6}+a^{6}}{5^{2}+5^{2}+5^{2}+5^{2}}}$$

$$P=\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{\frac{4\sqrt{27}}{3\sqrt{3}}}}}}}$$

$$Q=\sqrt{\frac{48a^{6}b^{12}}{243(ab)^{4}}}$$

$$R=\sqrt{\frac{4^{80}+5\times 8^{53}}{28\times 2^{155}}}$$

$$S=\left(\sqrt{1+\sqrt{1-a^{2}}}+\sqrt{1-\sqrt{1-a^{2}}}\right),\ \left(\mathrm{a}\in[0;1]\right)$$

$$T=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

EXERCICE 5 Vrai ou Faux ? Justifier la réponse.

1. Un nombre décimal ne peut pas être un entier.
2. Un nombre décimal est un rationnel.
3. Un nombre décimal est un réel.
4. Un nombre irrationnel peut être un entier.
5. Un nombre entier relatif est un décimal.
6. L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.
7. L'inverse d'un entier autre que 0 est un décimal.
8. a b − et b a − sont deux nombres inverses.
9. l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

EXERCICE 6

Comparer

1) $\sqrt{2}$ et $\dfrac{941664}{665857}$

2) $a=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ et $b=9-4\sqrt{5}$

EXERCICE 7

1. Montrer que 0,2006200620062006… est un nombre rationnel
2. Écrire M =8,51515151515 ... sous la forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 8

Effectuer les opérations suivantes sans avoir recours à une calculatrice et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

1) $5^3\times 5^2$
2) 7×7^2
3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$
4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\div\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$
5) $(-1)^5\times(-1)^7$
6) $10^4\times 10^{-1}$
7) $3^7\times 3^{-5}$
8) $\left(2^2\right)^3$
9) $\left((-1)^{11}\right)^{11}$
10) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(-\dfrac{3}{3}\right)^5$
11) $\dfrac{2^{13}}{2^{10}}$
12) $(-2,5)^2\div(-2,5)$
13) $\dfrac{5^7}{5^7}$
14) $4^5\times 4^{-5}$
15) $\left(6^7\right)^0$
16) -5^3
17) $(-5)^3$
18) $(-0,01)^2$
19) $-(-10)^3$
20) 7^0
21) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$
22) $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^4$
23) $\left(-\dfrac{7}{3}\right)^2$
24) $\left(10^2\right)^3$
25) $10^{-2}\times 10^{-2}$
26) $\left(10^6\right)^0$
27) $10^2+10^4\times 10^{-5}$
28) $0,01\times 0,001\times 10^6$
29) $\dfrac{10^9}{10^7}$
30) $\dfrac{1}{(0,01)^3}$
31) -4^{-3}
32) $(-2)^{-3}$
33) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$
34) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4$
35) $\dfrac{5^6\times 2^6}{100000}$
36) $\dfrac{(-1)^2-(-1)^3-(-1)^4}{(-2)^2-(-2)^3-2^4}$
37) -0^7
38) $(-1)^{157845}$
39) $(-1)^{157846}$
40) $3^2\times\left(3^2+3^4\right)$
41) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^5}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}$
42) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\div\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right]^4$

EXERCICE 9

Combien faudrait-il de chiffres pour écrire $\left(\left((10)^{10}\right)^{10}\right)^{10}$ sous forme décimale ?

EXERCICE 10

Simplifier un maximum les expressions suivantes.

1) $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-6\sqrt{50}$
2) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{8}}$
3) $\dfrac{2\times\sqrt{21}\times\sqrt{75}}{\sqrt{35}\times\sqrt{20}}$
4) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2$
5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}}$
6) $\sqrt{\dfrac{2^6+2^6+2^6+2^6}{5^2+5^2+5^2+5^2}}$

EXERCICE 11

Démontrer les égalités ci – dessous

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $6x^2+3x-9=3(x-1)(2x+3)$
2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2x^2-18x+15=2(x-2)^2+7$
3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+3)(x-3)=(x+1)^2-16$
4) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)^2-9+(x-2)^2+3=2\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\right)$
5) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x-2)(x+3)(x-1)=x^3-7x+6$
6) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\sqrt{x^2+3x+\dfrac{9}{4}}=2x+3$
7) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$ et $x\neq -1$, on a $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{9}{x-1}=\dfrac{-8x+10}{x^2-1}$
8) $1+3+3^2+3^3=\dfrac{3^4-1}{2}$
9) $1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$
10) Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}$
11) Pour tout $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$ $1+q+q^2=\dfrac{q^3-1}{q-1}$

EXERCICE 12

Simplification avec l'aide de valeurs absolues

Pour a > 1, simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$

EXERCICE 13

Soit n un entier, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

EXERCICE 14

Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

EXERCICE 15

Le nombre d'or est le nombre : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\Phi^2 = \Phi + 1$

b) $\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$

c) $\Phi^3 = 2\Phi + 1$

EXERCICE 16

Montrer que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} = 1$

EXERCICE 17

Factoriser

$A = x^2 - 9 - (2x-6)x + (x-3)^2$

$B = (x-11)^2 + (33-3x)(x+2)$

$C = (x^4-1)(x^2+2x+1)$

$D = -0,3(2x-3)^2 + 0,7x(1,5-x)$

$E = 0,25x^2 - x + 1$

$F = x^2 - 3x + 2$

$G = -9x^2 - 6x - 1$

$H = -10 + (x+5)^2 - 2x$

$I = -2x^2 + x + 1$

$J = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

$K = x^2 - 2$

$L = 4x^2 - 12x + 8$

$M = x - (3x-1)^3 + 2x - 1$

$N = (2x-1)x + (1-2x)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$O = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2(x+1)^2$

$P = x^2 - (x+1)^2$

$Q = 5(1-x)^2 - 45x^2$

$R = (x+1)^2 + 2(x+1) + 1$

$S = x^5 + 4x^4 + 4x^3$

$T = (5x-1)(x+3) + 3(25x^2-1)$

$U = 49 - 28x + 4x^2 + (7-2x)(5-3x)$

$V = x^2(x-4) + 2x(x-4) + x - 4$

$W = x^2 + 6x + 5$

$X = 3x^2 + 7x + 2$

$Y = -2x^2 - x + 1$

$Z = 2x^2 - 3x + 1$

EXERCICE 18

1. Montrer que pour : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
2. En déduire $E\left(\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

EXERCICE 19

Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier

EXERCICE 20

Montrer que $\sqrt[3]{2000+1998+\sqrt{19980005}} + \sqrt[3]{2000+1998-\sqrt{19980005}} = \sqrt[3]{1999}$

EXERCICE 21

Démontrer que $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$ est irrationnel

EXERCICE 22

1/ Démontrer que les nombres suivants sont des nombres rationnels en les mettant sous la forme $\frac{a}{b}$ où a st un nombre entier et b, un entier relatif non nul

a/ 1,5 b/ - 0,38 c/ $\frac{1,2}{0,4}$ d/ 3 x 0,01 e/ 12,305 f/ $\frac{0,7}{0,003}$

g/ $-\frac{7}{5}$ h/ $\frac{5}{40 \times 10^{-2}}$ i/ 15000 j/ $\frac{0,125}{62,5}$ k/ $\frac{0,03}{21} \times 10^2$ l/ $\frac{3}{0,04} \times 10^{-2}$

2/ Parmi ces nombres lesquels sont des nombres décimaux ? Justifier la réponse en les mettant sous la forme

$\frac{a}{10^p}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

EXERCICE 23

1/ Donner la notation scientifique des nombres suivants ainsi que l'ordre de grandeur de ces nombres.

a/ 251,3 b/ 0,095 c/ 27,31 x 10^{3} d/ 150 x 10^{-3}

2/Donner l'ordre de grandeur du résultat des calculs suivants, puis effectuer les calculs et donner le résultat en notation scientifique, comparer à l'ordre de grandeur trouvé précédemment.

a/ 851,7 x 0,0018 x 0,073 b/ 0,05 x 1200 x 10^{-3} c/ 5698,3 x 2314,89 d/ $\frac{181,47}{78,956}$

EXERCICE 24

Donner l'écriture fractionnaire irréductible des nombres rationnels suivants :

a) 3,456 b) 33,67 c) 0,0006 d) 458,5

EXERCICE 25

Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne sont pas premiers, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

27 35 56 31 17 147 264 81 105 621 819000

EXERCICE 26

Démontrer que 1 184 et 1 210 sont deux nombres amiables

EXERCICE 27

1) Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 56, 60 et 24.

2) En déduire le plus petit multiple commun (souvent noté PPCM) à 56, 60 et 24.

3) En déduire la simplification de : $B=\frac{5}{56}-\frac{7}{60}+\frac{11}{24}$

EXERCICE 28

1/ Simplifier les fractions suivantes en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers. Préciser les nombres décimaux.

$\frac{48}{75}$ $\frac{68}{102}$ $\frac{225}{30}$ $\frac{1755}{2295}$ $\frac{198}{726}$ $\frac{585}{1275}$

2/ Simplifier les racines carrées suivantes en les décomposant en produit de facteurs premiers.

$\sqrt{54}$ $\sqrt{189}$ $\sqrt{845}$ $\sqrt{246}$ $\sqrt{363}$ $\sqrt{1044}$

3/ Calculer, en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, les PGCD suivants.

PGCD (48 ; 72) PGCD (125 ; 175) PGCD (74 ; 185)

EXERCICE 29

1. Calculer la somme de 5 entiers consécutifs. Que remarque-ton ? (*Faire plusieurs essais)*

2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5

EXERCICE 30

Dans chacun des cas suivants, déterminer le(s) chiffre(s) a, b, c sachant que :

1/ 23a4 est divisible par 3.

2/ 23a4 est divisible par 3 mais pas par 9.

3/ 23b5c est divisible par 3 et par 5.

EXERCICE 31

Soit le nombre A = $2^{3} \times 5^{2} \times 7$.

1/ Vérifier que A possède 24 diviseurs.

2/ Trouver le plus petit entier naturel k tel que kA soit le carré d'un entier.

3/ Trouver le plus petit entier naturel m tel que mA soit le cube d'un entier.

EXERCICE 32

1. Calculer le produit de quatre entiers consécutifs et ajouter 1.

Que remarque-t-on ? (*Faire plusieurs essais)*

2. Montrer que, pour tout réel x, on a $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2$

Expliquer le résultat observé à la question **1.**

EXERCICE 33

1. Un nombre pair s'écrit sous la forme …………………………….

Un nombre impair s'écrit sous la forme …………………………….

2. Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair

3. Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair

4. a) Calculer la somme de trois entiers impairs consécutifs.

Le résultat est-il un nombre premier ? *(Faire plusieurs essais)*

b) Démontrer ce que vous avez observé à la question a)

5. a) Développer et réduire l'expression $(n+1)^2-n^2$

b) En déduire que tout nombre impair s'écrit comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

c) Appliquer ce résultat aux entiers 13, 45 et 101.

EXERCICE 34

1. Déterminer le PGCD de 2520 et 2646.
2. Calculer, puis simplifier les fractions suivantes :
   a. $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+1$
3. Ecrire les résultats suivants sous forme de multiplication de puissances de 2, 3 et 5 :
   a. $\frac{2^2\times3^{-4}\times5}{2\times3^2\times5^{-3}}$ b. $\frac{6^3\times25}{40^2}$

EXERCICE 35

Ecrire plus simplement :

$A=(-2x)^2$ $B=(-2x)^3$ $C=3x^2y^3-y(xy)^2$ $D=x^{-1}\times5x^3$

EXERCICE 36

Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^p\times3^q\times5^r$

150 36 $\frac{150}{36}$ $(150)^2\times36$ $\frac{(150)^3}{36}$ $\frac{2}{150^2}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2$

EXERCICE 37

Décomposer 1400 en produit de facteurs premiers.

1. Ecrire tous les diviseurs de 1400.
2. Compléter par un nombre entier :
   a) 1400×………est le carré d'un nombre entier.
   b) 1400×………est le cube d'un nombre entier.

EXERCICE 38

a, b et c sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p\times b^q\times c^r$

$A=\frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ $B=a^5(bc)^2\times\frac{1}{(a^3b)^2}$ $C=\frac{ab^2}{ca^{-2}}$ $D=(a^3b^{-5})^2$

EXERCICE 39

Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

EXERCICE 40

Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

Démontrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est un nombre irrationnel.

EXERCICE 41

Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si a + b est rationnel, alors soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. Si a + b est irrationnel, alors soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. Si a est irrationnel, alors la partie décimale de a + b est irrationnelle.
5. Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

EXERCICE 42

Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a|<|a|$. Démontrer que

$a-|a|<x<a+|a|$ et en déduire que x est du signe de a

EXERCICE 43

Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x}+s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$1+\sqrt{2}$ $\quad\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ $\quad\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\quad\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$ $\quad\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

EXERCICE 44

Soient x et y des réels, montrer que :

1) $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$
2) $1+|xy-1| \leq \left(1+|x-1|\right)\left(1+|y-1|\right)$

EXERCICE 45

Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $E(x)+E(-x)$.

EXERCICE 46

Soit $x \in \mathbb{R}$, comparer $E(x)$ et $E(-x)$.

EXERCICE 47

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $E(x+1)=E(x)+1$.
2. $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$

EXERCICE 48

Calculer, pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)$

EXERCICE 49

Montrer que pour x réel et n ≥ 1, on a $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$

EXERCICE 50

Soit la fonction f définie par $f(x) = E(2x) - 2E(x)$

Calculer $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ puis pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$.

EXERCICE 51

Résoudre l'équation $E\left(\sqrt{x}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right)$

EXERCICE 52

Soient x et y deux réels quelconques.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que $2|x| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. En déduire que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

EXERCICE 53 : Questions de cours :

Soit A une partie non vide et majorée de R. Soit a un réel.

1. Quand dit-on que a est un majorant de A ?
2. Quand dit-on que a est le plus grand élément de A ?
3. Quand dit-on que a est la borne supérieure de A ?
4. Quand dit-on que A est un intervalle ?
5. Démontrer que si A est un intervalle majoré, non minoré, et si a est la borne supérieure de A, alors A =] − ∞, a [ou bien A =] − ∞, a].

EXERCICE 54

Montrer, en utilisant la caractérisation de la partie entière, que pour tout $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$

EXERCICE 55

Soient A et B deux parties non vides et bornées de R telles que A ⊂ B, montrer que sup A ≤ sup B et inf B ≤ inf A.

EXERCICE 56

Soit $x \geq 0$ un nombre réel tel que $x \neq \sqrt{3}$. Posons $y = \frac{x+3}{x+1}$. Calculer $\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ et en déduire que $y - \sqrt{3} < x - \sqrt{3}$

EXERCICE 57

Compléter le tableau suivant :

nombre	valeur approchée à 10^{-3} près	valeur approchée à 10^{-2} près par défaut	notation scientifique à 5 chiffres significatifs
$1132,77 \times 10^{-3}$			
$69,32944$			
$-20,329622$			

EXERCICE 58 - QCM VRAI - FAUX

Soient x et y deux réels quelconques.

1) Si $x < y$ alors $x^2 < y^2$.
2) Si $0 < x < y$ alors $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
3) Si $x < y$ alors $1 - x > 1 - y$.
4) Si $x < y$ alors $x^2 < xy$.
5) Si $0 < x < y$ alors $xy^2 < x^2 y$.

EXERCICE 59 - QCM VRAI - FAUX

On considère l'ensemble A suivant : $A = \left\{(-2)^n, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) L'ensemble A est majoré.
2) L'ensemble A possède une borne inférieure finie.
3) L'ensemble A possède un plus petit élément.
4) sup(A) = +∞.

EXERCICE 60 - QCM VRAI - FAUX

On considère l'ensemble A suivant. $A = \left\{1 + (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) L'ensemble A est majoré.
2) L'ensemble A possède un plus grand élément.
3) sup(A) = 2.
4) 1 est un minorant de A.

EXERCICE 61

Soient A et B deux intervalles de R.

1. Montrer que A ∩ B est un intervalle.
2. Montrer que si A ∩ B est non vide, alors A ∪ B est un intervalle.
3. Montrer par un exemple que A ∪ B peut être un intervalle même si A ∩ B est vide.

EXERCICE 62

Pour chacun des ensembles de réels suivants :

a) $\left\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

c) $\left\{(-1)^n n, n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $\left\{\frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $\left\{\frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$

f) $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$

g) $\left\{\frac{m+n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

h) $\left\{\frac{2m+n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

i) $\left\{\frac{2m-n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

EXERCICE 63

Simplifier les expressions suivantes en montrant les étapes de simplification :

$A = \dfrac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}}$ $B = \dfrac{1}{10^{118}} - \dfrac{1}{10^{119}}$ $C = 5^{108} \times 11 \times \dfrac{1}{10^{107}}$

EXERCICE 64

Compléter le tableau suivant

Nombre	Valeur arrondie à 3 chiffres significatifs	Valeur approchée par excès à 10^{-3} près	Valeur approchée par défaut à 10^{-1} près	Valeur arrondie à 2 chiffres significatifs	Valeur arrondie à 10^{-3} près
$\dfrac{3\pi}{2}$					
$\dfrac{25\sqrt{5}+4}{2\sqrt{2}}$					
$1205\sqrt{3} \times 4 \cdot 10^{-4}$					
$0{,}1205 \times 7{,}15 \times 10^{-2}$					
$2\sqrt{21} \times 69 \times 10^{-3}$					

EXERCICE 65

Compléter le tableau suivant

Nombre	$39 \times 10^5 \times 45{,}89 \times 10^2$	123 456 000	0,00024682	$5\,002\,500 \times 10^{-4}$	$5\sqrt{3} \times 10^{-8}$
Valeur arrondie à 2 chiffres significatifs					
Valeur arrondie à 4 chiffres significatifs					

EXERCICE 66

1) Le nombre 403 est-il premier ? Justifier.
2) Le nombre 307 est-il premier ? Justifier.
3) Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

A = 252 B = $28 \times 55 \times 44$

EXERCICE 67

1) Donner à laide de la calculatrice une valeur approchée de $A = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2$ puis Développer A .

2) Simplifier $\frac{8\sqrt{2}+56}{16}$

3) Ecrire sous forme de fraction irréductible : $A = \frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{5}$

EXERCICE 68

Simplifier les expressions suivantes, en montrant les étapes de simplification :

A= $\frac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}}$ B= $\frac{1}{10^{118}} - \frac{1}{10^{119}}$ C = $5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \frac{1}{10^{107}}$

EXERCICE 69

1) Montrer que pour tout nombre a et b de IR on a l'égalité suivante :

$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) Utiliser cette égalité pour factoriser $(x^3 - 8)$

EXERCICE 70

Ecrire A = $\sqrt{98} + \sqrt{2}$ sous la forme a $\sqrt{b}$ où b est le plus petit possible.
Ce nombre est - il un élément de $\mathbb{Q}$?

EXERCICE 71

1/ Après avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.
Donner aussi leur nature.

a) $\frac{0,21}{1,05}$ b) $\frac{7\pi + 14}{3\pi + 6}$ c) $\frac{18}{5\sqrt{81}}$ d) $\frac{16}{6} - \frac{11}{3}$ e) $\frac{-8\pi}{-2}$ f) $\frac{2}{\sqrt{2+1}} - 2\sqrt{2}$

2/ a) Donner un rationnel non décimal.
b) Donner un réel non rationnel.
c) Donner un décimal non entier.
d) Donner un entier non naturel.

EXERCICE 72

On donne

$3,01 \leq x \leq 3,02$

$7,48 \leq y \leq 7,49$

$-3,25 \leq z \leq -3,24$

$-1,12 \leq t \leq -1,11$

Donner un encadrement à 10^{-2} près de $x + y$; $x - y$; $2x - 3y + 5z$; xy ; yz ; zt ; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{y}{z}$; x^2 ; y^2

EXERCICE 73

Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont écrits en notation scientifique. Ecrire les autres sous forme scientifique.

a) 12×10^{-3}
b) $6,4 \times 10^{5}$
c) $5,03 \times 10^{-4}$
d) $0,124 \times 10^{2}$
e) $1,5 \times 10^{2}$
f) $0,1053 \times 10^{-3}$
g) 1563×10^{5}

EXERCICE 74

1/ Après avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

Donner aussi leur nature.

a) $\frac{24,6}{10,8}$ b) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}}$ c) $\frac{15}{25} - \frac{2}{15}$ d) $\frac{21 - 7\pi}{33 - 11\pi}$ e) $\frac{-21}{3\sqrt{49}}$

2/ a) Donner un rationnel non décimal.

b) Donner un réel non rationnel.

c) Donner un décimal non entier et non rationnel.

d) Donner un entier non naturel.

e) Donner un irrationnel compris entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$.

f) Donner un entier relatif mais non naturel supérieur à l'inverse de : $1 - \sqrt{3}$.

EXERCICE 75

1. Apres avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent. Donner aussi leur nature.

a) $\frac{0,21}{1,05}$
b) $\frac{7^{14}}{3^{6}}$
c) $\frac{18}{5\sqrt{81}}$
d) $\frac{16}{6} - \frac{11}{3}$
e) $\frac{-8}{-2}$
f) $\frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}$

EXERCICE 76

Quelle est la nature du nombre réel suivant : $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2-1}}$?

EXERCICE 77

Compléter :

a) $[-1\,;5\,[\,\cap\,]\,2\,;+\infty\,[$ =
b) $[-3\,;0\,]\,\cup\,[\,0{,}5\,;4\,[$ =
c) $[-1\,;5\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$ =
d) $]-\infty\,;7\,[\,\cap\,]\,5\,;15\,[$ =
e) $[-3\,;0\,]\,\cap\,[\,0{,}5\,;4\,[$ =
f) $]-\infty\,;7\,[\,\cup\,]\,5\,;15\,[$ =

EXERCICE 78

Compléter le tableau suivant en vous aidant de votre calculatrice

a	a^2	a^3	$\frac{1}{a}$	Classer les valeurs trouvées dans l'ordre croissant
1				
2				
10				
0,3				
4				
0.8				
2,9				
0,99				
0,**01**				

1. Dans quelle situation peut-on dire que $a>a^2>a^3$?…………………………………………………………………………
2. Dans quelle situation peut-on dire que $a<a^2<a^3$?…………………………………………………………………………
3. Dans quelle situation peut-on dire que $a>\frac{1}{a}$?…………………………………………………………………………
4. Dans quelle situation peut-on dire que $a<\frac{1}{a}$?…………………………………………………………………………..

EXERCICE 79

Comparer les nombres suivants :

a) $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{5}-3$ et $\sqrt{15-6\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt{5}-5$ et $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

En déduire une écriture simple de $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$.

EXERCICE 80

A est un nombre strictement négatif. Comparer dans chaque cas *a* et *b*.

1. $a=\dfrac{5A}{12}$ et $b=\dfrac{3A}{8}$ 2. $a=\dfrac{5}{12}-A$ et $b=\dfrac{3}{8}-A$

3. $a=\dfrac{2}{3A}$ et $b=\dfrac{5}{6A}$

EXERCICE 81

Dans chaque cas, *a* et *b* sont deux réels strictement positifs. Comparer A et B en étudiant le signe de A – B.

1. $A = ab + 1$ et $B = (a + 1)(b + 1)$
2. $A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ et B = 2.

EXERCICE 82

x désigne un nombre réel tel que $x \geq 2$.

$A = (x-1)^2$ et $B = (x-2)^2$.

a) Factoriser la différence A – B.

b) En déduire le signe de A – B et comparer alors A et B.

EXERCICE 83

Soient *a* et *b* deux réels strictement positifs. Démontrer que $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

EXERCICE 84

Ranger dans l'ordre croissant a, a^2 et a^3 pour $a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et pour $a=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}$.

EXERCICE 85

x désigne un nombre réel tel que $0 < x < 1$. Comparer les nombres $(1-x)$ et $(1-x)^3$.

EXERCICE 86

Soit *x* un réel vérifiant $x > 2$.

Préciser dans quels intervalles se trouvent : $\dfrac{1}{x}$; x^2 ; $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\dfrac{1}{x-2}$.

EXERCICE 87

Calculer la valeur absolue des nombres suivants :

$A = 10^{-4} - 10^{-3}$ $B = 9 \times 10^{-3} - 10^{-2}$

$C = \pi - 4$ $D = 13 - 4\pi$

$E = -2 - \sqrt{2}$ $F = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

EXERCICE 88

x est l'abscisse d'un point M d'une droite graduée. Les points A, B et C de cette droite ont pour abscisses respectives 3, -3 et 5.

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue et placer sur la droite les points M correspondants (une droite par question):

1. La distance OM vaut 5.
2. La distance OM est inférieure ou égale à 1.
3. La distance AM vaut 7.
4. La distance CM vaut 3 et la distance AM est strictement inférieure à 2.

EXERCICE 89

Justifier les égalités suivantes :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$

b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

EXERCICE 90

Trouver les réels *x* satisfaisant à la condition indiquée.

a) $|x - 3| = 2$ b) $|3 - x| = 3$

EXERCICE 91

Caractériser à l'aide de la notation valeur absolue l'ensemble des réels *x* satisfaisant à la condition indiqué :

a) $x \in [2 ; 12]$

b) $x \in]-2 ; 9[$

EXERCICE 92

a, b et c étant trois nombres réels, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\right) + \frac{b+c}{bc}\left(b^2+c^2-a^2\right) + \frac{c+a}{ca}\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

EXERCICE 93

x, y et z étant trois nombres réels, tels que xyz = 1, simplifier l'expression

$$A = \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1}$$

EXERCICE 94

On pose

$X = a+b+c+d$; $Y = a+b-c-d$; $Z = a-b+c-d$; $T = a-b-c+d$

Démontrer que si l'on a $ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2)$, on a aussi $XY(X^2+Y^2) = ZT(Z^2+T^2)$

EXERCICE 95

a, b, c , d, p, q, r étant six réels tels que $pqr \neq 0$

Démontrer que si l'on a $p+q+r=1$ alors $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0$

EXERCICE 96

Démontrer que a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ que si deux de ces nombres sont opposés

EXERCICE 97

Simplifier l'expression $E = \frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{4b^2-1}{(b-a)(b-c)}+\frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$

EXERCICE 98

On considère le produit $P = \left[x^{2p}+y^{2p}\right]\times\left[x^{2p}-y^{2p}\right]$

1) Développer ce produit.
2) En supposant $x=10^4$, $y=10^2$, $p=2$, déterminer le nombre de zéros le nombre P est terminé.

EXERCICE 99

Calculer le nombre positif v tel que l'on ait $v^2 = \frac{(0,0000000004)^3\times 8100000000}{(0,00000012)^4}$

EXERCICE 100

Simplifier l'expression $A = \frac{ab^{-2}\times(a^{-1}b^2)\times(ab^{-1})^2}{a^{-2}b\times(a^2b^{-1})^3\times a^{-1}b}$ et calculer sa valeur pour $a=10^{-3}$, $b=-10^{-2}$

EXERCICE 101

m et n étant deux entiers, positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression : $A = \frac{5(-1)^m+7(-1)^{n+1}+8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m-n}}$

EXERCICE 102

m et n étant deux nombres quelconques, comparer les nombres $x=|m-n|$ et $y=\big||m|-|n|\big|$

EXERCICE 103

a et b étant trois réels strictement positifs tel que l'on ait $a^2=b^2+c^2$

1. Comparer a et $b+c$
2. Comparer a^3 et b^3+c^3

EXERCICE 104

1. Comparer les nombres $5-2\sqrt{5}$ et $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$
2. Calculer la moyenne proportionnelle des nombres $5+2\sqrt{5}$ et $85-38\sqrt{5}$

EXERCICE 105

On considère le nombre $A=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}$

Calculer A^2 et en déduire la valeur de A

EXERCICE 106

Rendre rationnel le dénominateur du nombre $A=\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

EXERCICE 107

Simplifier le nombre $A=\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$

EXERCICE 108

1. Rendre le dénominateur de la fraction $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, puis la mettre sous forme d'une différence de deux fractions ayant toutes deux le nombre 1 pour numérateur.
2. Calculer la somme $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

EXERCICE 109

On désigne par a, b et m trois réels positifs tels que $a>b$ et m strictement positif

Comparer les nombres $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ et $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$

EXERCICE 110

Soit a, b, c, a', b', c' des nombres réels strictement positifs.

Montrer que si l'on a $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$, on a aussi $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$

EXERCICE 111

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $A=\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}$
2. $B=\sqrt{\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

EXERCICE 112

Calculer la valeur numérique de l'expression $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ pour

1. $x=2+\sqrt{3}$
2. $x=2-\sqrt{3}$

EXERCICE 113

a et b étant deux réels strictement positifs, calculer la valeur de l'expression $y=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ pour $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

EXERCICE 114

On considère l'expression $y=x+\sqrt{x^2-1}$

1. Sachant que $x=\sqrt{\dfrac{a}{8}}+\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$ (a>0), calculer x^2-1, puis $\sqrt{x^2-1}$
2. Exprimer y en fonction de a. Vérifier le résultat pour a = 1 et pour a = 6

EXERCICE 115

Démontrer que quels que soient les nombres réels x et y distincts et non nuls, on a :

$$A=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left[\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{y^2}}{y}\right]=1$$

EXERCICE 116

Déterminer a et b pour que le polynôme ax^4+bx^3+1 puisse se factoriser, l'un des facteurs étant $(x-1)^2$

EXERCICE 117

Factoriser le polynôme $P=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en facteurs du second degré sachant que l'on a $a+d=b+e=c$

EXERCICE 118

Déterminer les coefficients a et b pour que le polynôme $x^4-6x^3+ax^2+bx+1$ soit le carré d'un autre polynôme.

EXERCICE 119

Déterminer les coefficients a et b pour que le polynôme $4x^4+ax^3+bx^2+2x+1$ soit le carré d'un autre polynôme.

EXERCICE 120

Montrer que l'expression $A=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ se réduit à un polynôme.

EXERCICE 121

Factoriser si possible les trois polynômes suivants :

$A=3x^2-5x-2$; $B=-2x^2-x+1$; $C=5x^2+2x+3$

EXERCICE 122

Développer le plus simplement possible les produits suivants

1. $P(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$
2. $P(x)=\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)$

EXERCICE 123

Etant donné le polynôme $f(x)=4x^3-24x^2+45x-27$

Calculer f(3), puis factoriser ce polynôme.

EXERCICE 124

Calculer la valeur du polynôme $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+y^4-2x^3y+2xy^3$ pour $x=\sqrt{3}$ et $y=\sqrt{2}$, puis , du résultat obtenu, déduire la valeur du polynôme pour $x=\sqrt{15}$ et $y=\sqrt{10}$

EXERCICE 125

Simplifier l'expression $A=(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$

EXERCICE 126

Simplifier la fraction $y=\dfrac{x^2-2bx-4a(a-2b)-3b^2}{x^2-4ax+4a^2-b^2}$

EXERCICE 127

1. Décomposer en produit de facteurs l'expression $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
2. Application : calculer la valeur de l'expression $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{c+a}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$

EXERCICE 128

Soit l'expression $y=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de y
2. Simplifier y

EXERCICE130

Effectuer l'addition $y=\dfrac{x-x^q}{(1-x)(1-x^q)}+\dfrac{x^q-x^{pq}}{(1-x^q)(1-x^{pq})}$, $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$

EXERCICE 131

Calculer la valeur numérique de l'expression $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pour $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)$

EXERCICE 132

Déterminer l'ensemble de définition de l'expression $A=\dfrac{x}{1-x}\sqrt{\dfrac{(1+x)^2(x-1)}{x^2}}$

EXERCICE 133

On considère l'expression $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

1. Déterminer son ensemble de définition
2. Simplifier cette expression, en calculant d'abord y^2. Vérifier le résultat obtenu dans les deux cas suivants : $x=\frac{5}{4}$, $x=5$

EXERCICE 134

Mettre les nombres réels suivants sous forme de fractions irréductibles.

1. $\dfrac{\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}\times\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$
2. $\dfrac{8\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right]^2-\frac{1}{2}}{9\left[\frac{1}{3}+2\right]^2+\frac{1}{6}}$
3. $\dfrac{-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\left(\frac{7}{2}\right)^2}{5\left(\frac{2}{5}\right)^2-6\left(\frac{4}{3}\right)^2}$
4. $\dfrac{6\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(4+\frac{1}{3}\right)}{12\left(5+\frac{1}{4}\right)\left(7-\frac{1}{3}\right)}$
5. $\dfrac{\frac{7}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}\times\left(1+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}$
6. $\dfrac{\dfrac{3+\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{4}}}{\dfrac{5+\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{2}}}$
7. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)}{\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{4}\right)}$

EXERCICE 135

1. Montrer que le réel $\dfrac{9\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{6\sqrt{7}+4\sqrt{2}}$ est rationnel
2. Soit a et b deux réels strictement positifs, montrer que $\dfrac{9\sqrt{a}+6\sqrt{b}}{6\sqrt{a}+4\sqrt{b}}$

EXERCICE 136

1. Montrer que le réel $\dfrac{7\sqrt{15}+\sqrt{0,6}}{5\sqrt{15}+\sqrt{0,6}}$ est rationnel
2. Soit a , b , c et d quatre rationnels tels que $d+5c\neq 0$, montrer que $\dfrac{a\sqrt{15}+b\sqrt{0,6}}{c\sqrt{15}+d\sqrt{0,6}}$ est rationnel

EXERCICE 137

Démontrer que si $a \geq 2$ et $b \leq -6$ alors $0 < \frac{b-a}{ab} < \frac{2}{3}$

EXERCICE 138

On donne $a \geq 2$ et $b \leq -3$

Encadrer $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

EXERCICE 139

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{x}{1-\sqrt{5}} \leq 1+\sqrt{5}$
2. $\frac{1}{x} \geq -2$

EXERCICE 140

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

EXERCICE 141

Déterminer tous les triplets de nombres réels (a ; b ; c) tels que :

- $1 \leq a < b < c \leq 100$
- Chaque nombre a, b et c est premier.
- $b = a+2$ et $c = b+2$

EXERCICE 142

Montrer les égalités suivantes

1. $(x+3)^2 + x^2 = 2x(x+3)+9$ pour tout réel x.
2. $1+3^1+3^2+3^3 = \frac{3^4-1}{2}$
3. $1+2^1+2^2+2^3+2^4 = 2^5-1$
4. $2x^2-8x+15 = 2(x-2)^2+7$
5. $(x+5)(x-3) = (x+1)^2-16$
6. $a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ pour tous réels a et b
7. $\frac{1}{x+1} - \frac{9}{x-1} = -\frac{8x+10}{x^2-1}$ avec x $\neq 1$ et x $\neq -1$
8. Montrer que, $1+q+q^2 = \frac{q^3-1}{q-1}$ avec q ≠ 1
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x+1)^2-9+(x-2)^2+3 = 2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)$
10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x-2)(x+3)(x-1) = x^3-7x+6$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2\sqrt{x^2+3x+\frac{9}{4}}=2x+3$

EXERCICE 143

Compléter les expressions suivantes :

$(....+....)^2=4x^2+....+y^2$

$(x+....)^2=....+4xy+....$

$(4x-....)^2=....-....+9y^2$

$(....-....)^2=....-6ab+b^2$

$(....+....)^2=4x^2+....+y^2$

$(x+....)^2=....+4xy+....$

$(4x-....)^2=....-....+9y^2$

$(....-....)^2=....-6ab+b^2$

$(....-3y)^2=....-12xy+....$

$(....-2y)(....+2y)=9x^2-....$

$(3\sqrt{5}+....)(3\sqrt{5}-....)=.....-1$

$(....+....)(....+....)=25x^2-4$

$(....-3y)^2=....-12xy+....$

$(....-2y)(....+2y)=9x^2-....$

$(3\sqrt{5}+....)(3\sqrt{5}-....)=.....-1$

$(....+....)(....+....)=25x^2-4$

EXERCICE 144

Comparer $1+\sqrt{7}$ et $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$.

EXERCICE 145

Soit x un nombre réel strictement positif.

On note A = $x+\dfrac{1}{x}$ et B = 2.

Comparer A et B.

EXERCICE 146

Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que : $m < p$.

1. Comparer $\dfrac{1}{m+3}$ et $\dfrac{1}{p+3}$.

2. Comparer $\sqrt{\dfrac{m+1}{5}}$ et $\sqrt{\dfrac{p+1}{5}}$.

EXERCICE 147

b est un réel tel que : $2 < b < 3$

1. Donner un encadrement de $\dfrac{2-b^2}{5}$.

2. On se donne de plus le réel a tel que : $1 < a < 2$. Donner un encadrement de $b-2a$.

EXERCICE 148

Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne sont pas premiers, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

27 ; 35 ; 56 ; 31 ; 17 ; 147 ; 264 ; 81 ; 105 ; 621 ; 819000

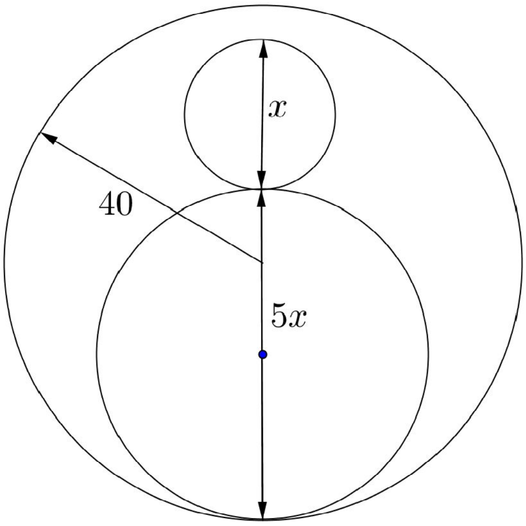
EXERCICE 149

Ranger les nombres a, a^2, a^3 dans l'ordre croissant dans les deux cas suivants :

1. $a = \sqrt{2} - 1$

2. $a = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$

EXERCICE 150



La figure représente une pièce métallique percée.

La somme des périmètres des deux cercles intérieurs est entre 187 mm et 190 mm.

1. a) Exprimer la somme des périmètres P(x) des deux cercles en fonction de x.

b) Exprimer l'aire A(x) de la pièce métallique en fonction de x.

2. a) Déterminer un encadrement de x par deux décimaux d'ordre 1 (c'est à dire avec un chiffre après la virgule). Indication : utiliser le périmètre des deux cercles.

b) Encadrer l'aire par deux entiers.

EXERCICE 151

Simplifiez les expressions suivantes

$$A = \left(2^3 \times 2^{-4}\right)^2 \times \left(3^3\right)^2 \times 3^{-5}$$

$$B = 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5}$$

$$C = \left(2^3 \times 3^2\right)^2$$

$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3^3$$

$$E = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 5^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$F = \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{-49}{2}\right)^3$$

$$G = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$$

$$H = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

EXERCICE 152

1) Choisir trois chiffres distincts. Calculer leur somme s.
2) Ecrire les six nombres possibles que l'on peut obtenir en permutant ces trois chiffres.
3) Calculer la somme S de ces six nombres. Calculer le quotient de S par s.
   Recommencer deux fois avec trois autres chiffres. Que remarque-t-on ?
4) Démontrer le résultat conjecturé à la deuxième question.

EXERCICE 153

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

EXERCICE 154

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

EXERCICE 155

Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ En déduire l'existence d'irrationnels a, b > 0 tels que a^b soit rationnel

Montrer que $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$

EXERCICE 156

Montrer que $\forall u,v \geq 0,\ 1+\sqrt{uv} \leq \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$

EXERCICE 157

x, y et z sont des réels positifs

1) Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$
2) Montrer $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ quand a – ton l'égalité ?
3) En déduire que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

EXERCICE 158

x et y sont des réels dont la somme est égale à 1

1) Exprimer y en fonction de x et montrer que $xy \leq \dfrac{1}{4}$
2) Montrer qu'on a $x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{2}$

   Comment faut – il choisir x et y pour que cette inégalité devienne une égalité ?

EXERCICE 159

x et y sont des nombres strictement positifs. On considère les nombres les nombres $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$ et $c=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

1) vérifier que $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$ et exprimer $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ et $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ à l'aide de a
2) A partir du calcul de a^2 et b^2 , et abc, montrer que $a^2+b^2+c^2=4$
3) Montrer que a et c vérifient $a \geq 2$ et $c \geq 2$ et en déduire que $a+b+c \geq 2$ et que $abc \geq 8$

   Est –il vrai que $a^2+b^2+c^2 \geq 2$
4) On suppose que $0,2 \leq x \leq 0,3$ et $-2 \leq y \leq -1$. Donner alors le meilleur encadrement possible pour a, b et c

EXERCICE 160

a et b sont des réels et c est un réel positif.

Montrer que si $|a|<c$ et $|b|<c$ alors $\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c$

Montrer que si $\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c$ alors $|a|<c$ et $|b|<c$

EXERCICE 161

Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal, les ensembles de points dont les coordonnées x et y vérifient :

$|x-5|\geq 1$ et $|x-5|\leq 2$

$1\leq|x-5|\leq 2$ et $1\leq|y-3|\leq 2$

EXERCICE 162

1) Vérifier que, pour tout réel x et y réels, on a : $x+y+xy+1=(x+1)(y+1)$ et $x+y-xy-1=(x-1)(1-y)$
2) On se place dans le cas où $|x|<1$ et $|y|<1$ Montrer que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$

EXERCICE 163

Déterminer la nature des nombres suivants :

$A=-\frac{\sqrt{144}}{3}$ $\quad C=\frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}-3\right)}{400}$ $\quad E=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}$

$B=\frac{\pi}{314}$ $\quad D=0,3333$

EXERCICE 164

Deux nombres a et b vérifient les conditions :

$a+b=1$et $a^2+b^2=2$

a) Calculer la valeur du réel ab. a et b sont-ils des entiers relatifs ?

b) Vérifier que les deux réels $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Vérifient les conditions imposées.

c) Utiliser la calculatrice pour donner les arrondis, notés a' et b' à 10^{-5} de a et de b.

d) L'arrondi à 10^{-5} près de $a^2+b^2=2$ est-il égale à l'arrondi à 10^{-5} près de $a'^2+b'^2$?

EXERCICE 165

Déterminer à quels intervalles appartiennent les nombres x, y et z sachant que :

• l'arrondi de x à 10^{-2} près est 2,52.

• la valeur approchée par défaut de y à 10^{-2} près est 4,21.

• la valeur approchée par excès de z à 10^{-2} près est 12,340

EXERCICE 166

1. On donne $A = -\frac{13}{80}$ et $F = \frac{17}{26}$

   En utilisant la calculatrice, expliquer comment le résultat d'une division permet de dire que $E \in D$ et que $F \notin D$.

2. Montrer que E peut s''ecrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour E ?

3. Expliquer pourquoi F ne peut pas s''ecrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ o`u $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 167

a et b sont deux nombres tels que $\left|a - \frac{1}{2}\right| \leq 1$ et $|b-1| \leq \frac{1}{2}$

1) A quels intervalles appartiennent a et b ?
2) Donner un encadrement de a+b , a-b , $a^2 + b^2$

EXERCICE 168

Sachant que $|x-1| < 2$ et $|y| \leq \frac{1}{2}$ donner un encadrement à l'aide de nombres décimaux à une décimale de :

$|x|$ $\quad |y| \quad \frac{1}{|y|} \quad \left|\frac{x}{y}\right| \quad \frac{x}{y}$

EXERCICE 169

a, b et c sont trois réels

1) Montrer que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$
2) Développer et réduire $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$ En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0$
   Dans quel(s) cas cette inégalité est –elle une égalité.
3) Montrer que $\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ Dans quel cas y a t- il égalité ?
4) On suppose que x, y et z sont des réels positifs. Montrer que $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{3} \leq \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$

EXERCICE 170

1. Choisir deux nombres strictement positifs et vérifier que le quotient de leur produit par leur somme est inférieur au quart de cette somme.
2. Ce qui a été constaté sur un exemple est toujours vrai.

En effet : démontrer que si a > 0 et si b > 0 alors on a $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. En déduire que si a>0, b> 0 et c>0 alors $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$

EXERCICE 171

Soit p le produit de quatre entiers naturels consécutifs : $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que : $(n+1)(n+2) = n(n+3)+2$

2) On pose : $a = (n+1)(n+2)$ $a = (n+1)(n+2)$

Exprimer p en fonction de a.

3) En déduire que $p+1$ est un carré parfait.

Rappel : Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

EXERCICE 172

On pose pour x réel : $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$

On définit ensuite : $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$,

puis $f_3(x) = f_1(f_1(f_1(x)))$, $f_4(x) = f_1(f_1(f_1(f_1(x))))$, etc ...

Déterminer $f_{2006}(2006)$

EXERCICE 173

Démontrer que $5+\sqrt{8} = \sqrt{33+20\sqrt{2}}$

2) Démontrer que pour tous réels x et y non nuls : $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy} = \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2$

3) Démontrer que pour tout entier relatif n et tout réel x non nul : $\left(x^n+x^{-n}\right)^2 - \left(x^n-x^{-n}\right)^2 = 4$

EXERCICE 174

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ax^{2004}+bx^4+cx^2+5$ ou a, b et c sont des réels donnés.
si $f(-2004) = 2004$, peut on en déduire $f(2004)$? (justifier !!)

EXERCICE 175

1) Déterminer le nombre d' entiers premiers inférieurs à 10000 se terminant par 2 ?
2) Déterminer le nombre d' entiers premiers inférieurs à 100 se terminant par 3 ?
3) Peut-on trouver trois entiers premiers consécutifs ?

EXERCICE 176

Le nombre ci-dessous est-il entier ? (justifier bien sûr !!)

$$L = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9998}+\sqrt{9999}}+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}$$

EXERCICE 177

1. Etablir pour tout entier naturel non nul p l'égalité suivante :

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p(p+1)}$$

2. En déduire la valeur de la somme suivante : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004}+\frac{1}{2004\times 2005}$

EXERCICE 178

Dans cet exercice, nous utiliserons le fait que tout entier naturel pair (resp. impair) s'écrit sous la forme $2n$ (resp. $2n+1$) où n est un entier naturel.

Démontrer les assertions suivantes :

1. La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
2. Le produit d'un entier pair par un entier impair est pair.
3. Le produit de deux entiers consécutifs est un entier pair.
4. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de

EXERCICE 179

Ecrire A sous forme de fraction irréductible. $A=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

2. a. Montrer que A est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

   b. A est-il une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près ?

EXERCICE 180

1.La somme de deux entiers consécutifs est-elle divisible par 2 ?

2. On considère trois entiers consécutifs quelconques. On note n le premier.

Exprimer la somme de ces trois entiers en fonction de n et expliquer pourquoi elle est divisible par 3.

3. Soit n un entier naturel impair. Expliquer pourquoi $(n-1)\times n\times(n+1)$ est divisible par 8.

4. a) Soit n un entier naturel, développer le produit $(n+1)(n+2)$

   En déduire une factorisation de $E(n)=\left(n^2+3n+1\right)^2-1$

   b) Lorsque l'on augmente de 1 le produit de quatre nombres entiers consécutifs, obtient-on un carré parfait ?

EXERCICE 181

1) Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{4}$ pour obtenir le double de $\frac{5}{4}$?

2) Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{7}{3}$ pour obtenir l'inverse de $\frac{7}{3}$?

EXERCICE 182

Simplifier l'écriture des nombres suivants, puis indiquer lesquels sont des nombres décimaux :

1) $a = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5^4}{2^3 \times 3 \times 5^3}$

2) $b = \frac{2^{-1} \times 5}{5^2 \times 3^{-2} \times 6^3}$

3) $c = \frac{2^6 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-2}}{13 \times 10^{-2}}$

EXERCICE 183

Pour chacun des nombres suivants, simplifier l'écriture puis, en déduire le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

$A = \left(1 - \sqrt{16}\right)^2$

$B = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{180}}$

$C = \left(\frac{\sqrt{8} - \sqrt{18}}{3}\right)^2$

$D = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{3}}$

$E = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$F = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

$G = \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}{2 - \sqrt{3}}$

$H = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} - \sqrt{8}}$

$I = \left(\sqrt{4 - \sqrt{12}} - \sqrt{4 + \sqrt{12}}\right)^2$

$J = -\sqrt{(\pi - 4)^2} - \sqrt{(-2 + \pi)^2}$

$K = \frac{16 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^4}{-24 \times 10^{-3}}$

$M = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \div \frac{16}{9}$

EXERCICE 184

Le réel $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est-il solution de l'équation $x^2 - x - 1$?

2. Soit le réel $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $1 + \frac{1}{b} = b$.

3. L'opposé du réel b est-il égal à l'inverse du réel a ?

EXERCICE 185

1) Montrer que pour tout entier naturel n, le réel $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est l'inverse du réel $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2) En déduire la valeur de $A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{3}}$.

EXERCICE 186

1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

Ranger dans l'ordre croissant a, b, leurs moyennes arithmétique m_1, géométrique m_2 et harmonique m_3.

$m_1 = \frac{a + b}{2}$; $m_2 = \sqrt{a \times b}$; $\frac{2}{m_3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

2. Soient x, y et z trois réels, démonter que : $\left.\begin{matrix}|x+y|\leq z\\|x-y|\leq z\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+y\leq z, \forall z\in\mathbb{R}^+$

EXERCICE 187

1. Soit x un réel strictement négatif.

On pose : $F(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}-2x+1$

a) Donner une écriture simplifiée de $F(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|F(x)+3x-1|>\dfrac{3}{4}$

2. Résoudre dans R les inéquations suivantes.

a) $|x+1|-|3x+2|>0$

b) $|x-2|\geq|x^2-4x+4|$

c) $\dfrac{|x+1|}{2x-1}<0$

EXERCICE 188

1. $x=\dfrac{a+b}{2}$ et $y=\dfrac{a-b}{2}$, exprimer x^2-y^2 en fonction de a et b.
2. $x+y=a$ et $xy=b$. Exprimer $(x-y)^2$ en fonction de a et b.

EXERCICE 189

Écrire sans radical au dénominateur $A=\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$

2) Simplifier l'expression suivante : $B=\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2$

3) En déduire que le triangle EFG dont les dimensions sont données ci-dessous est rectangle.

$EF=\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$ FG = $FG=\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ $EG=\sqrt{\dfrac{26}{15}}$

EXERCICE 190

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A=\dfrac{\left(3^2\times7^5\right)^{-3}}{\left(7^2\times3^{-3}\right)^2}\times\left(\dfrac{(7\times3)^2}{3^2\times7}\right)$ et $B=\dfrac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

2. Comparer les réels suivants :

$C=\sqrt{3}-5$ et $D=\sqrt{28-10\sqrt{3}}$, $E=\sqrt{5}-1$ et $F=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3. Écrire les nombres suivants sous une forme plus simple :

$G=\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$

$H=\sqrt{20}-2\sqrt{125}+\sqrt{180}$

$I=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3}$

$J=\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}}{\sqrt{135}-\sqrt{15}}$

EXERCICE 191

1. $K = \dfrac{(0,05)^3 \times 21^3 \times (-49^{-3})}{-25 \times 81 \times (35)^{-3}}$

a) Préciser le signe de K.

b) Écrire K sous la forme d'un produit de puissance de nombres premiers.

2. Soit $L = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

a) Calculer L^2.

b) Préciser le signe de L en justifiant votre réponse.

c) Déduire de a) et de b) la valeur de L.

EXERCICE 192

a) Étant donné a tel que : $a = \sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\dfrac{152}{27}}}$. Montrer que $a^3 + 5a$ est un entier.

b) Déterminer une expression algébrique P à coefficients entiers telle que $P(a) = 0$:

i) quand $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

ii) quand $a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

c) Démontrer que les assertions suivantes sont vraies :

i) Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Montrer que $b^2 + 3a^2 < (a+b)^2$ et en déduire que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 > 9$

ii) Pour tous réels x et y on a : $|x-y| \leq |x| + |y|$.

EXERCICE 193

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $abc > 1$ et $a+b+c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

1. Montrer qu'aucun de ces trois nombres n'est négatif.
2. Montrer que l'un au moins est plus petit que 1.

POLYNOMES, FRACTIONS RATIONNELLES

EXERCICE 1

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2-15x+36$
2. $2x^2+7x-9$
3. $2x^2+5x+7$
4. $x^4+3x^2-11x^2-3x+10$
5. x^4+x^2+1
6. x^8-256
7. x^4-3x^2-6x+8
8. $(x+y)^5-\left(x^5+y^5\right)$
9. $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-3x^2y^2z^2$
10. $\left(b-c\right)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$
11. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$
12. $4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$
13. $2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2$
14. $a^2-2b^2-6c^2+ab-ac+7bc$
15. $\left(x^2-a^2\right)^2+2ay\left(x^2+y^2-a^2\right)-y^4$
16. x^3+3x-4
17. x^4-13x^2+36
18. x^4+4
19. x^8-16
20. x^4-8x^2+4
21. $\left(x+y\right)^3-\left(x^3+y^3\right)$
22. $(a+b)^3+2\left(a^3+b^3\right)$
23. $xy\left(a^2+b^2\right)+ab\left(x^2+y^2\right)$
24. $\left(ax-by\right)^2-\left(ay-bx\right)^2$
25. $\left(a^2+3ab+b^2\right)^2-b^4$
26. $x^2-y^2+yz+2z^2+3zx$
27. $2a^2-b^2-3c^2+ab+ac+4bc$
28. $z^3-3xz^2+(x-2y)^2(3x-z)$

EXERCICE 2

Mettre les polynômes suivants sous la forme canonique et dire s'ils sont factorisables ou pas.

1) $2x^2-3x+2$
2) x^2+3x+1
3) $3x^2-x$
4) $2x^2-9x+4$
5) $9x^2+6x+1$
11) $4x^2+8x+5$
12) $3x^2+8x-3$
13) $0,01x^2-2x+100$
14) $-x^2-x+6$
15) $x^2-11x+30$
16) $-7x^2+5x+2$
17) $-x^2+6x+2$
6) x^2-3x-2
7) $6x^2+2x+1$
8) $-3x^2+x+1$
9) $25x^2-10x+1$
10) x^2-x+2
18) $\frac{3}{2}x^2+11x-6$
19) $-\frac{1}{2}x^2-x-1$
20) $2x^2-3x+4$
21) $2x^2+9x$
22) $-16x^2+24x-9$
23) $10x^2-4x-6$
24) $-8x^2-x-3$
25) $-\frac{5}{3}x^2-\frac{4}{5}x-12$
26) $11x^2+2x+3$
27) $24x^2+13x-9$

EXERCICE 3

Simplifier les expressions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{(x+y-1)^2+1}{(xy-1)^2-(x-y)^2}$

2. $\dfrac{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)}{ab\left(x^2+y^2\right)-xy\left(a^2+b^2\right)}$

3. $\dfrac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-4a^2b^2}{\left(a^2-b^2+c^2\right)^2-4a^2c^2}$

4. $\dfrac{(x+y)^5-\left(x^5+y^5\right)}{(x+y)^3-\left(x^3+y^3\right)}\times\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$

5. $\dfrac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^2-y^3)}$

6. $\dfrac{a\left(x^2-1\right)+b\left(a^2-1\right)}{a\left(x^2+1\right)+b\left(a^2+1\right)}$

7. $\dfrac{(ax+mby)^2+m(ay+bx)^2}{\left(x^2-my^2\right)^2+4mx^2y^2}$

8. $\dfrac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-4(ab+cd)^2}{\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2-4(ac+bd)^2}$

9. $\dfrac{x^5+y^5+z^5-(x+y+z)^5}{x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3}$

10. $\dfrac{2x^2+2y^2+z^2-5xy+3xz-3yz}{2x^2-2y^2-3xy+2xz+yz}$

EXERCICE 4

1. Déterminer les constantes a et b pour que, pour que, quel que soit $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$
2. Calculer la somme $S=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

EXERCICE 5

Calculer en fonction de : a+b = s et ab = P l'expression symétrique suivante :

$$\frac{a^4-a^3b+a^2b+ab^3-ab^2-b^4}{a^3+2a^2b-2ab^2-b^3}$$

EXERCICE 6

Sachant que $x^3+x-3=0$, calculer la valeur numérique de :

$$\frac{x^9+x^8+x^7-4x^6-4x^5+7x^3+7x^2+2x+14}{x^8-2x^5+x^4+6x^3-x+4}$$

EXERCICE 7

Déterminer les constantes a et b pour que, pour que, quel que soit

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{b}{(x+1)(x+2)}$$

1. Calculer la somme $S=\dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

EXERCICE 8

On donne les polynômes suivants :

$A=x^4-3x+5$ $\quad B=x^3-5x^2+7x-6$ $\quad C=x^4+7x^2-3x-9$

Calculer

A + B + C $\quad$ B + C – A $\quad$ C + A – B $\quad$ A + B – C

EXERCICE 9

On donne les polynômes suivants :

$A = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ $B = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 9x - 1$ $C = x^4 + 7x^2 - 5x - 1$ $D = x^4 + 11x^3 - 3x + 7$

Calculer

(A + B) - (C + D) (A - B) + (C - D) (A - B) - (C - D)

EXERCICE 10

On donne les polynômes suivants :

$A = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ $B = 2x^3 - 11x - 1$ $C = 5x^2 - 4x - 9$

Calculer

AB BC A^2 C^2

AC ABC B^2

EXERCICE 11

Déterminer le polynôme du second degré ayant pour racines 1 et -3 et tel que p(-2)=6

EXERCICE 12

Déterminer le polynôme du second degré dont l'une des racines est 2 et p(1)=3 et p(2)=5

EXERCICE 13

On pose $x = a - b$ avec $ab = 1$

1. Calculer l'expression $A = x^6 + 6x^4 + 9x^2 - 1$
2. Montrer que pout $x = \sqrt[3]{\sqrt{6} + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ l'expression A est un nombre entier

EXERCICE 14

Démontrer que les polynômes suivants sont les carrés de polynômes que l'on déterminera

1. $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$
2. $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1$
3. $4x^6 - 20x^4 + 28x^3 + 25x^2 - 70x + 49$
4. $x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
5. $x^8 - 6x^7 + 13x^6 - 18x^5 + 24x^4 - 18x^3 + 13x^2 - 6x + 1$

EXERCICE 15

Soit $p(x) = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$

1. Comment faut – il choisir les coefficients de ce polynôme pour que l'on ait à la fois

   $p(x) \equiv x^6 p\left(\frac{1}{x}\right)$ et $p(x) \equiv p(x-1)$
2. Montrer que $p(x)$ s'écrit : $(x^2 - x + 1)^2 + m(x^2 - x)$. Calculer les six racines de ce polynôme en fonction de l'une d'elles $x = \lambda$

EXERCICE 16

Effectuer les divisions suivantes

a) $5x^3-6x^2+7x+8$ par x^2-3x+4

b) $7x^4-4x^2+3x-5$ par $2x^2+3x-1$

c) $2x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+2$ par x^3+x^2+x+1

d) $4x^3-5x^2+7x-3$ par $x-2$

e) $5x^4+3x^3+4x^2+3x-9$ par $x+3$

EXERCICE 17

Décomposer les expressions rationnelles suivantes en éléments simples

1) $\frac{x^2+3x+7}{x-1}$

2) $\frac{(x-3)(2x+5)}{3x+1}$

3) $\frac{-x^2+2x-5}{x+3}$

4) $\frac{4x^2-5x+3}{x^2-1}$

5) $\frac{-6x^3+5x^2+7-2}{(x-1)^2}$

6) $\frac{2x^2-3}{x+1}$

7) $\frac{x^2+3x+4}{x^2+x+1}$

8) $\frac{x^2+3x+7}{x-1}$

9) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$

10) $\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$

11) $\frac{x^3-2}{x-1}$

12) $\frac{x^3-8}{x^2+1}$

13) $\frac{x^3+27}{3x+9}$

14) $\frac{3x^2+4x-7}{2x^2+x-3}$

15) $\frac{2x^3-5x+6}{3x^2+7x+2}$

16) $\frac{x^3-1}{x(-x+3)}$

17) $\frac{x^3}{x-1}$

18) $\frac{x^3+1}{2x+1}$

EXERCICE 18

Décomposer les expressions rationnelles suivantes en éléments simples

1) $\frac{x^2}{x(x-1)}$

2) $\frac{x-1}{3-x}$

3) $\frac{2x-1}{x+2}$

4) $\frac{x^2+x+2}{x+1}$

5) $\frac{x^2+5x+6}{2x-6}$

6) $\frac{x}{2x-1}$

7) $\frac{x^2}{x+1}$

8) $\frac{x^2+3x}{x^2-1}$

9) $\frac{2x^2+x}{x-1}$

10) $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

11) $\frac{1}{x^2(x+1)}$

12) $\frac{2x-3}{x^2(x+2)}$

13) $\frac{x}{(x+2)(2-x)}$

14) $\frac{x}{(x-1)^2}$

15) $\frac{1-x}{x^2(x+1)(x-2)}$

16) $\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}$

17) $\frac{x^2+3x}{x^3(1-x)^2}$

18) $\frac{1-x^2}{(3x-1)^2}$

EXERCICE 19

Donner suivant la valeur de x, le signe de p(x) dans chacun des cas suivants :

$p(x)=2x+3$ $\quad p(x)=-\frac{1}{3}x+1$ $\quad p(x)=-5x+2$ $\quad p(x)=-2x+7$

EXERCICE 20

Ecrire tous les polynômes du second degré admettant :

a) 2 et 3 pour racines
b) 3 pour racine double
c) 0 et -1 pour racine
d) $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ pour racines
e) 0 pour racine double
f) $\frac{1}{3}$ et -3 pour racines

EXERCICE 21

On donne des polynômes de degré 2 par leur forme canonique : en déduire leur forme factorisée et leur forme développée, puis vérifier en passant de l'une à l'autre. Cela est – il toujours possible ?

1) $f(x)=(x+3)^2-4$
2) $f(x)=(x-1)^2-1$
3) $f(x)=(x+2)^2-3$
4) $f(x)=(x+4)^2+6$
5) $f(x)=4\left[(x+1)^2-9\right]$
6) $f(x)=-\left[(x+3)^2+4\right]$
7) $f(x)=2\left(x-\sqrt{3}\right)^2-4$
8) $f(x)=\frac{1}{100}\left[(x+1000)^2-900\right]$
9) $f(x)=-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{3}\right]$
10) $f(x)=\frac{2}{3}\left[(x-1)^2-1\right]$
11) $f(x)=\frac{16}{}\left[(x+1)^2-\frac{4}{9}\right]$
12) $f(x)=-2\left[(x-1)^2-4\right]$
13) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1$
14) $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+3$
15) $f(x)=0,25\left[(x+240)^2-1296\right]$
16) $f(x)=49\left[\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+100\right]$

EXERCICE 22

Calculer le discriminant des polynômes suivants. En déduire le nombre de racines et éventuellement une forme factorisée du polynôme.

1) x^2-x+2
2) $2x^2-3x+4$
3) $25x^2-10x+1$
4) $-3x^2+x+1$
5) $-16x^2+24x-9$
6) $6x^2+2x+1$
7) x^2-3x-2
8) $x^2-11x+30$
9) $9x^2+6x+1$
10) $-x^2-x+6$
11) $2x^2-9x+4$
12) $0,01x^2-2x+100$
13) $3x^2-x$
14) $3x^2+8x-3$
15) x^2+3x+1
16) $3x^2+8x-3$
17) x^2-6x+8
18) $-x^2+9x-8$
19) $-x^2+4x-6$
20) $10x^2+3x-1$
21) $4x^2+7x-2$
22) $3x^2-6x+3$
23) $-6x^2+5x+1$
24) $10x^2+999x-100$
25) $30x^2-700x+2000$
26) $3x^2+353x-840$
27) $2x^2+1999x-1000$

28) $0,01x^2-0,5x-500$

29) $50x^2-1495x-150$

30) $0,032x^2-7,36x+103,2$

EXERCICE 23

Trouver une racine évidente des polynômes suivants et les factoriser

1) x^2+2x-3 2) x^2-3x-4 3) x^2+2x 4) x^2+x-10

EXERCICE 24

Factoriser par la méthode la plus rapide les polynômes suivants

1) x^2+3x-4
2) $5x^2-10$
3) $3x^2+6x$
4) $-x^2+1$
5) $3x^2-4x-7$
6) x^2-25

EXERCICE 25

Trouver les coordonnées du sommet S des paraboles, courbes représentatives des fonctions suivantes.

1) $f(x)=x^2-x+1$
2) $g(x)=1-2x^2$
3) $h(x)=1-6x+x^2$
4) $i(x)=(x+2)^2-3$
5) $f(x)=3\left[(x-1)^2+2\right]$
6) $f(x)=-x+x^2-3$
7) $l(x)=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-3$
8) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+4$

EXERCICE 26

Dans chacun des cas, mettre la fonction sous la forme $f(x)=k(x-\alpha)^2+\beta$ k,α où et β sont trois réels. Tracer les courbes représentatives des fonctions associées.

1) $f(x)=x^2+2x-1$
2) $f(x)=2x^2-x+4$
3) $f(x)=-3x^2+x+2$
4) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-1$
5) $f(x)=2x^2-20x+1$
6) $f(x)=-(x+2)^2$
7) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$
8) $f(x)=-4x^2+2x+\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 27

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $16x^2-9\le 0$
2) $-x^2-x+2\ge 0$
3) $x^2+6>0$
4) $\dfrac{1}{4}x^2-4x+16\ge 0$
5) $2x^2-11x+5\le 0$
6) $x^2+2x-8>0$
7) $2x^2-9\le 0$
8) $(2x+5)^2\le 25$
9) $(x-7)^2-25>0$
10) $3x^2-7x<0$
11) $4x^2-9\le 4x-6$
12) $2x^2-9\le 0$
13) $-x^2+1\ge 0$

14) $3x^2+5x-2>0$

15) $9x^2+12x+4\le 0$

16) $(3x+7)(x-2)+x^2-4\ge 0$

17) $x^2-9>2(x-3)^2$

18) $3x^2-5x+9\le 3x-1$

19) $4x^2-7>13-2x$

EXERCICE 28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\dfrac{4}{x}=4-x$

2) $\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{1}{x}+2$

3) $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

4) $\dfrac{2}{x}+1=\dfrac{6}{x+1}$

5) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4x+2}+\dfrac{1}{x+2}$

6) $\dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{1}{4x-3}=2$

7) $\dfrac{2}{4-x}-3=\dfrac{6x}{4-5x}$

8) $\dfrac{5x}{x+3}+\dfrac{4}{2x+6}=-8$

EXERCICE 29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{1}{x-1}<2$

2) $\dfrac{1}{x}\le 4$

3) $3-\dfrac{6}{x+2}>x$

4) $\dfrac{x^2-6x-7}{x+2}<0$

5) $\dfrac{(x-1)^2+4}{x-1}\ge 0$

$\dfrac{4}{x^2-2}\le -1$

6) $\dfrac{1}{(x-2)^2}>25$

7) $2+\dfrac{2-11x}{x^2+3x}<0$

8) $\dfrac{9-x}{x^2+1}\ge 9-x$

9) $\dfrac{x^2-6x+8}{2x-1}$

10) $\dfrac{-x^2+8x-15}{x^2+3}$

11) $\dfrac{x-1}{x-2}\ge 3x+\dfrac{1}{2}$

12) $\dfrac{2x-1}{x+2}\ge 2x+3$

13) $x-8+\dfrac{16}{x}>0$

14) $x-1-\dfrac{6}{x+4}\le 0$

15) $x-2\ge\dfrac{-1}{x}$

16) $\dfrac{1}{16x}\le x^3$

EXERCICE 30

1) Tracer la représentation graphique des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+2$ et $g(x)=\dfrac{1}{4}(x-3)^2-1$

2) Déterminer graphiquement, puis vérifier par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des deux fonctions.

EXERCICE 31

Soit $p(x)$ le polynôme x^3-7x-6

1) Calculer p(-1). Déduisez – en que $p(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$ où a, b et c sont trois nombres qu'il faut déterminer.

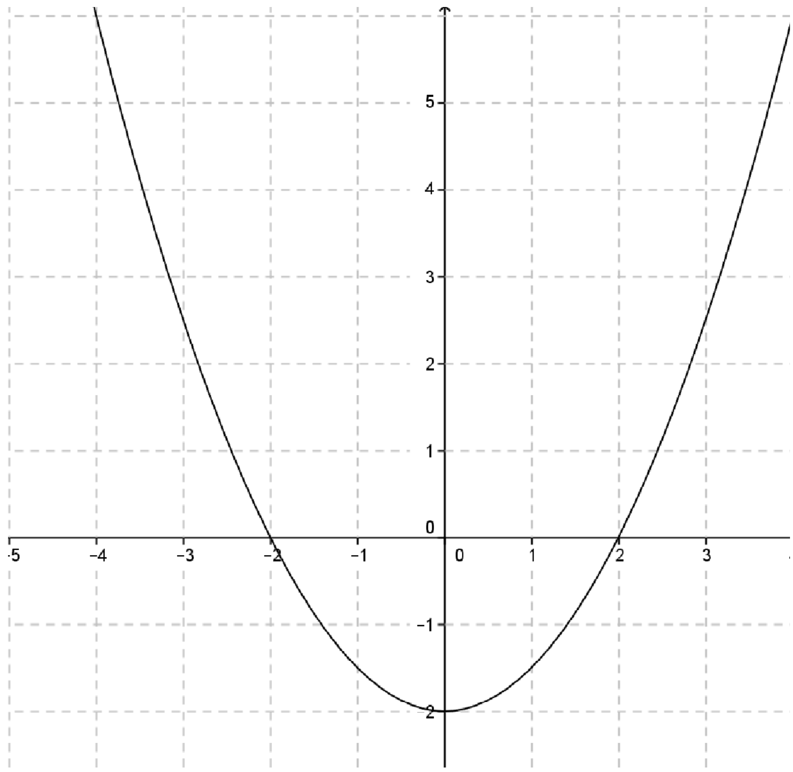
2) Développer le produit $(x+1)(ax^2+bx+c)$ et déduisez – en que les nombres a, b et c vérifient le système $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=-7 \\ c=-6 \end{cases}$

Montrer que $p(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

3) Résolvez l'équation $x^2-x-6=0$. Ecrivez alors p(x) sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

EXERCICE 32

Résoudre graphiquement $\frac{1}{2}x^2-2\leq 0$



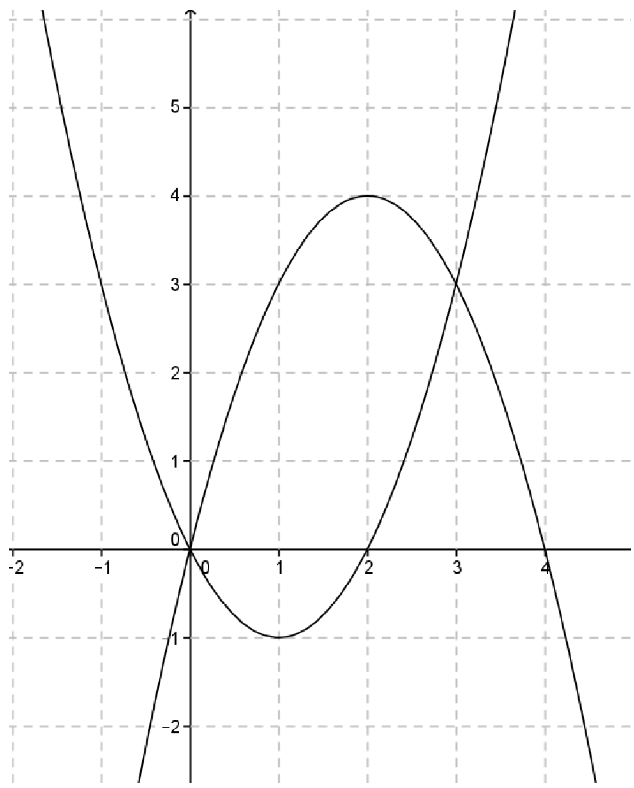
EXERCICE 33

Résoudre graphiquement

1) $x^2-2x\leq 0$

2) $-x^2+4x>0$

3) $x^2-2x\leq -x^2+4x$



EXERCICE 34

Dans chaque cas, donner le signe de l'expression donnée, selon la valeur de x, après avoir factorisé si nécessaire.

1) $(x-2)(x+3)$
2) $(2x-5)(x-6)$
3) $(x^2-1)(x^2-4)$
4) $(-x+2)(3x+18)$
5) $(7x-1)(2x-5)+(2x+1)(7x-1)$
6) $(5x-2)(x-2)+(x-2)(9x-2)-8(x-2)$
7) $5x(x-4)(x+2)+(x-4)(3x-5)-13(x-4)$

VECTEURS ET BASES

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED}$

EXERCICE 2

Soient A, B, C et D quatre points.

Construire les points E, F et G tels que

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$

EXERCICE 3

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construire les points E, F, G et H tels que :

a) $\overrightarrow{DE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$ b) $\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CH}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que EFGH est un parallélogramme.

EXERCICE 4

1) Construire les points A, B, C, D, E et F tels que
   $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$

EXERCICE 5

Soit un triangle ABC et M le milieu de [AC].

1°) Construire le point D symétrique de A par rapport à B.

2°) Construire le point E, image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

3°) Montrer que E est le milieu de [DC]

EXERCICE 6

Soit un triangle ABC. Construire les points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

EXERCICE 7

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ puis le point G tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{GF} = 3\overrightarrow{DB}$

EXERCICE 8

Soient A et B deux points distincts.

A partir de chacune des relations vectorielles suivantes, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis placer le point M sur la droite (AB).

1) $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$
2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
3) $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$
4) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

EXERCICE 9

Soit ABC un triangle.
I, J et K les milieux respectifs des segments [BC],
[AC] et [AB].
On appelle centre de gravit´e du triangle ABC, le
point G vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$

a) Montrer que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$$

b) Placer le point G.

c) Soit M un point quelconque du plan.

Montrer que

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MG}$

d) Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK.

EXERCICE 10

On considère un triangle ABC rectangle en A.

On donne AB=5 ; AC=12 et G tel que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer $\left\|\overrightarrow{AG}\right\|$

b) Soit I le point défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{O}$ Construire I.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$

EXERCICE 11

Soit A, B et C trois points non alignés.

1°) Construire le point M tel que :

$5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CA}$

2°) Construire le point N tel que :

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

3°) Montrer que M, N et B sont alignés.

EXERCICE 12

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(2 ; 5), B(4 ; −2), C(−5 ; 1) et D(−1 ; 6).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}$ et de la longueur AB.
2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?
3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Déterminer les coordonnées du point K.

4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].
5. Démontrer que les points I, K et A sont alignes.

EXERCICE 13

O et A sont deux points distincts :

1. Placer les points M, N, P tels que :

a) $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$ **b)** $\overrightarrow{ON} = -3,5\overrightarrow{OA}$ **c)** $\overrightarrow{OP} = -7\overrightarrow{OA}$

2. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.

EXERCICE 14

A et B sont deux points distincts.

Placer les points M, N, P, Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{AQ}$.

EXERCICE 15

A, B, C, D sont quatre points. Démontrer que :

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{DA}$

2. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 16

ABC est un triangle. Les points N et P sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

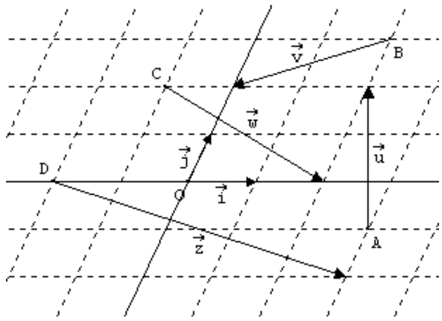
1. Placer les points N et P.

2. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AP}$.

EXERCICE 17

Lire les coordonnées des points A, B, C, D et celles des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$



EXERCICE 18

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Placer les points A(4 ;2), B(-2 ; 1), C(-3 ; 5).

2. Représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$; déterminer alors les coordonnées du point M.

EXERCICE 19

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, placer les points suivants :

A(5 ; 1), B(-4 ; 4), C(-3 ; -2) et D(0 ; -3).

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

EXERCICE 20

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soient les points $A\left(-\frac{7}{2};2\right)$; $B(-2;5)$; $C\left(5;\frac{13}{2}\right)$; $D\left(3;\frac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$

Montrer que les coordonnées de I sont $\left(-23;\frac{1}{2}\right)$

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?

5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K. Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 21

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

3. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire un réel *k* tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

c) Que peut-on alors conclure ?

4. **a)** Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

EXERCICE 22

ABC est un triangle

1. Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :

$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

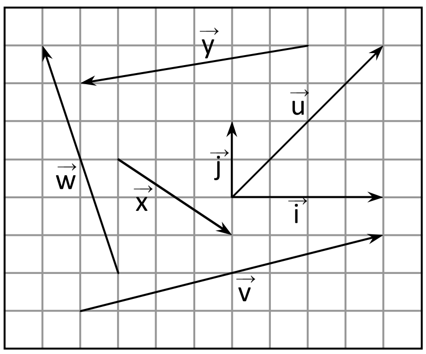
2. On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.

3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

EXERCICE 23



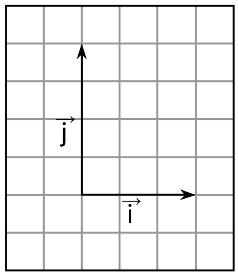
1/ Donner les coordonnées dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, et $\vec{y}$ représentés ci-contre.

2/ Exprimer chacun de ces vecteurs en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

EXERCICE 24

1/ Reproduire la figure ci-contre.

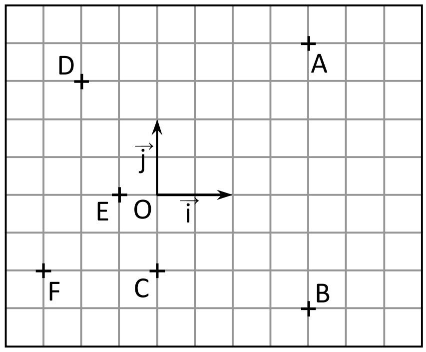
2/ Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants :



$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{x}\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

EXERCICE 25



1/ Donner les coordonnées dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

2/ Exprimer $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

EXERCICE 26

1/ Tracer un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2/ Placer dans ce repère les points suivants : A(2 ; 3), B(3 ; –1), C(0 ; –4), D(–1 ; 2), E(–2 ; 0) et F(–3 ; –1).

EXERCICE 27

On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ une base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

$\vec{u} = -3\vec{a}$; $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{w} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$; $\vec{x} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$; $\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{d}$.

Dans les exercices suivants, on se place dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

EXERCICE 28

On considère les points A(2 ; 3), B(1 ; –2), C(–3 ; –3) et D(0 ; 2).

1/ Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2/ Calculer les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$ et $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 29

Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

a) A(–1 ; 3) ; B(–3 ; –2) ; C(1 ; –1) ; D(3 ; 4)

b) A(–3 ; 2) ; B(3 ; 0) ; C(2 ; –4) ; D(–5 ; –2)

EXERCICE 30

1/ On considère les points A(1 ; 3), B(2 ; 1), C(3 ; 5).

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

2/ Même question avec A(6 ; 3), B(–5 ; –7), C(4 ; 5).

EXERCICE 31

On considère les points A(2 ; 1), B(–2 ; 3) et C(–1 ; –1).

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

EXERCICE 32

Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB] dans les cas suivants :

a) A(1 ; 4) et B(3 ; 2)　　　b) A(–1 ; 3) et B(5 ; 2)

c) A(–2 ; –3) et B(–3 ; 3).

EXERCICE 33

On considère les points A(–3 ; 4) et I(2 ; –4)

Déterminer les coordonnées de B tel que I soit le milieu de [AB].

EXERCICE 34

ABCD est un quadrilatère convexe ; I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD] et L celui de [DA].

1. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

2. En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

EXERCICE 35

ABC est un triangle. Les points N , P et Q sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

1. Placer les points N ,P et Q sur la figure1 de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

2. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Déterminez un réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AN}$

4. Que peut on dire des points A, N *et* P ? Justifiez votre réponse

5. Montrer que les droites (NQ) et (AB) sont parallèles. (On pourra exprimer $\overrightarrow{NQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis établir que $\overrightarrow{NQ} = \frac{17}{12}\overrightarrow{AB}$)

EXERCICE 36

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions Placer les points $A\left(-2\,;\,\frac{5}{2}\right)$, $B\left(4\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{7}{2}\,;-\,\frac{3}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ et placer I
2. Après avoir calculé AB^2, AC^2 *et* BC^2, en déduire la nature exacte du triangle ABC

3. Soit le vecteur $\vec{u}(-1;-2)$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u}$
   a) Construire D et déterminer les coordonnées de ce point par le calcul.
   (On pourra exprimer $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{u}$)
   b) Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$; en déduire la position relative des droites *(BC)* et *(AD)* .
   c) Démontrer que *ABCD* est un trapèze.
4. Soit $F(-\frac{3}{2};y)$ où *y* est un nombre réel. Déterminer *y* pour que le point *F* appartienne à la droite (CI). Placer *F* dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère *ACBF* ? Justifier
6. Le point *B* appartient-il au cercle de diamètre [*AC*] ? Justifier la réponse.

EXERCICE 37

En décomposant $\overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$; $\vec{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 38

Propriété du centre de gravité d'un triangle

ABC est un triangle ; A' est le milieu de [BC].

On se propose de démontrer la propriété :

« Dire que G est le centre de gravité de ABC équivaut à dire que G est le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. »

1. Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité ?

2. a) Prouver que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

b) En déduire que : « $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GA'}$ équivaut à : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ».

Conclure.

EXERCICE 39

ABC est un triangle tel que le point A' est le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

1. a) Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

b) De même, exprimer $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ en fonction d'un seul vecteur.

2. En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

EXERCICE 40

ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB].

1. a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2. On note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

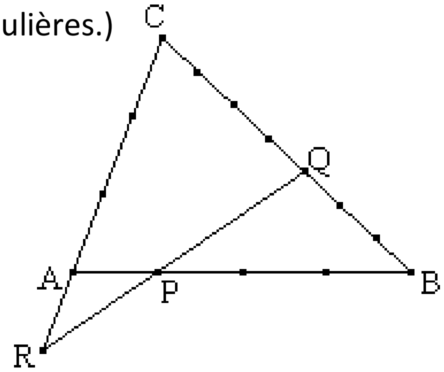
a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Construire K.

b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$.

Que dire alors des points I, J et K ?

EXERCICE 41

ABC est un triangle ; P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC) disposés comme sur le dessin. (Les graduations sur les droites sont régulières.)



1. Donner les valeurs des réels α, β et γ tels que :

$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \beta\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ} = \gamma\,\overrightarrow{BC}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

4. Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}$. Que conclure ?

EXERCICE 42

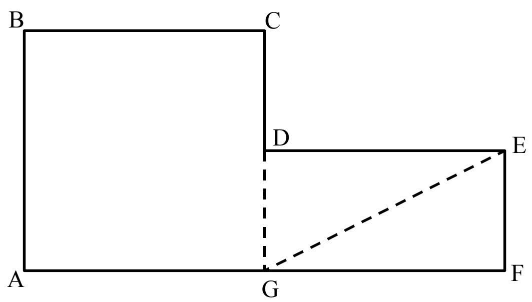
OIJK est un parallélogramme. A, B et G sont trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

EXERCICE 43

Dans le polygone ci-dessous, ABCDG est un carré.

D et G sont respectivement les points milieu des côtés CG et AF. De plus, le côté AB est parallèle au côté EF.



À l'aide des propriétés des vecteurs, montrez que. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE}$