RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

MINISTRY OF SECONDARY EDUCATION

Mathématiques 1ère C & D

Collection MaxKa

Année scolaire 2023-2024

Mr. Kaka dairou Professeur des Mathématiques

Tél : (+237) 695-76-24-75/681-44-69-17

« Tout le monde est un génie. Mais si vous jugez le poisson sur ses capacités à grimper un arbre, il passera tout sa vie à croire qu'il est stupide » Albert Einstein

$$\begin{cases} \psi_3 = \sin^2(2\omega) \\ \psi_{n+1} = -\frac{\psi_n}{2}\cos(4\omega) + \sin^2(2\omega) \end{cases}$$

$$\psi_4 = \sin^4(2\omega) - \frac{1}{2}\sin^2(2\omega)$$

RÉSOUDRE DANS $]-\pi;\pi]$

$$\psi_4 = \tan^2(2\omega).\cos^4(2\omega)$$

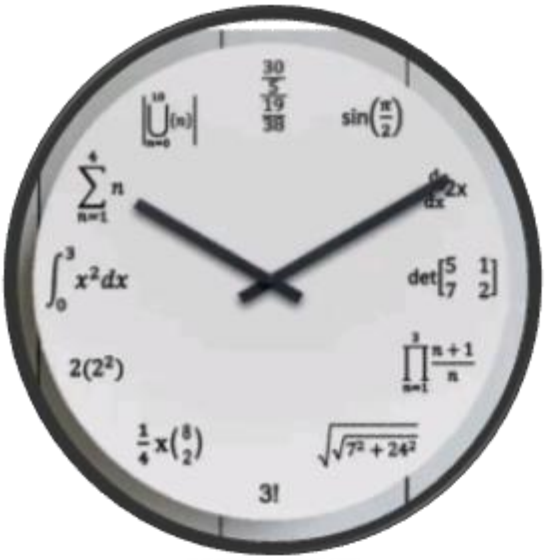

TABLE DE MATIÈRE

CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS, INÉQUATIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ DANS IR

A-SITUATION PROBLÈME

Une élève en classe de première, décide de faire un jardin de tomates dans la grande cour familiale. Pour l'encourager, son père lui offre **20 mètre***s de grillage pour la clôture qu'elle décide d'utiliser entièrement. Elle décide de réaliser son jardin de forme rectangulaire l'indique, laissant sans clôture un de ses côtés dans le sens de la longueur. Elle veut que l'aire du jardin soit de* **48 m²**. *Devant la difficulté à déterminer les dimensions de ce jardin, elle explique sa préoccupation à ses camarades de classe. Ensemble, ils décident de déterminer les dimensions du jardin.*

■ ***Activite d'apprentissage***

En notan **x** *la largeur,* **y** *la longueur* **P** *le perimeter et* **S** *la surface ce jardin,*

- a- *Exprimé* **S** *et* **P(de la partie a cloture)** *en function de* **x** *et* **y**
- b- *Montrer les dimensions de ce jardin vérifie le systeme* $(\Sigma)\begin{cases} 2x+y=20 \\ xy=48 \end{cases}$
- c- *puis l'équation* (Ψ): $z^2-10z+24=0$
- d- *Determiner alors le dimensions de ce jardin*

LECON 1 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

.

1- Discriminant d'un polynôme du second degré

a) Définition

On considère le polynôme du second degré P tel que: $P(x) = ax^2+bx+c$ *où* $a \neq 0$.
On appelle ***discriminant*** *du polynôme P le nombre réel noté* Δ *défini par:* $\Delta = b^2-4\times a\times c$.

Exemple

Soit le polynôme du second degré P tel que: $P(x) = 3x^2+2x-4$.

Dans ce cas on a: $a = 3$; $b = 3$; $c = -4$.

Son discriminant: $\Delta = (2)^2-(4)\times(3)\times(-4) = 52$

b) Propriété

On considère le polynôme du second degré P tel que: $P(x) = ax^2+bx+c$, *où* $a \neq 0$, *et* Δ *son discriminant.*

- *Si* $\Delta > 0$, *P admet deux zéros distincts* x_1 *et* x_2 *tels que:* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  La forme factorisée de $P(x)$ *est:* $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
- *Si* $\Delta = 0$, *P admet un zéro double:* $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
  Dans ce cas la forme factorisée de $P(x)$ *est:* $P(x) = a(x-x_0)^2$
- *Si* $\Delta < 0$, *P n'admet pas de zéro et P n'est pas factorisable.*

Exercice d'application

Calcule les zéros éventuels des polynômes P, Q et R ci-dessous, puis factorise si possible chacun d'eux.
$P(x) = -2x^2 + x - 3$, $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ **et** $R(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Solution

Pour le polynôme P : $\Delta = -23$, $\Delta < 0$ *donc P n'admet pas de zéro. P n'est pas factorisable.*

Pour le polynôme Q : $\Delta = 0$, *donc Q admet un zéro double* x_0 *et on a :* $x_0 = \frac{4}{2\times 1} = 2$

Q est factorisable et on a: $Q(x) = (x-2)^2$

Pour le polynôme R : $\Delta = 49$, $\Delta > 0$ *donc R admet deux zéros distincts* x_1 *et* x_2 *et on a :*

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{5}{2}$ **et** $x_2 = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times 2} = 1$. *R est factorisable et on a :* $R(x) = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$

2-- Equations du second Degré

Définition

On appelle équation du second degré, toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$, **où** $a, b, et\ c$ **sont des nombres réels** *et* $a \neq 0$.

Exemple   *L'équation:* $x \in \mathbb{R}, -3x^2 + x + 4 = 0$ *est une équation du second degré.*

6) Résolution d'une équation du second degré

➢ **Résolution algébrique**

Résoudre l'équation du second degré $x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$ *revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme du second degré P tel que :* $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice d'applications. *Résous dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :* $-x^2 + x + 2 = 0$.

Solution :

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ $\Delta > 0$ *donc l'équation admet deux solutions distinctes.*

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ *et* $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$ *donc* $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 2\}$.

Remarque

Si l'équation du second degré $(E) : x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ *est telle que* a *et* c *sont de signes contraires, (le discriminant est positif dans ce cas), alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.*

3- Inéquations du second degré

a) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P *le polynôme du second degré définie par:* $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b **et** c sont des nombres réels *et* $a \neq 0$ *et* Δ *son discriminant.*

- *Si* $\Delta > 0$, *le polynôme P a deux zéros distincts* x_1 **et** x_2. *(on suppose que* $x_1 < x_2$ *)*

On obtient le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	0	Signe de $-a$	0	**Signe de a**	

- **Si $\Delta = 0$**, *alors le polynôme P admet un* ***zéro double x_0*** *; on obtient le tableau :*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		Signe de a	0	**Signe de a**	

- **Si $\Delta < 0$**, *le polynôme n'admet pas de zéro ; on obtient le tableau suivant :*

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	**Signe de a**

Exercice d'application

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants, connaissant leurs zéros éventuels:

$P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, *les zéros de P sont* ***1 et 3;***

1) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ;
2) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5.

Solution

1) $\boldsymbol{P(x) = 2x^2 - 8x} + 6$, les zéros P sont **1** et **3,** le ***discriminant*** Δ de **P** est ***positif*** **($\Delta > 0$).** Le coefficient de x^2 est $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{a > 0}$. On obtient le tableau de signes suivant :

- Pour $x \in \,]-\infty, \mathbf{1}[\, \cup \,]\mathbf{3}, +\infty[$, $\boldsymbol{P(x) > 0}$,
- Pour $\boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{1}; \mathbf{3}[$, $\boldsymbol{P(x) < 0}$
- Pour $\boldsymbol{x} \in \{\mathbf{1}; \mathbf{3}\}$, $\boldsymbol{P(x) = 0}$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
P		+	0	−	0	+	

2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q ***n'a pas de zéro;*** *car* $\Delta < 0$.

Le coefficient $\boldsymbol{a}$ *de* $\boldsymbol{x^2}$ *est* $\boldsymbol{a = -2}$ *et* $a < 0$.
On obtient le tableau de signes suivant
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Q(x) < 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$Q($		−	

3) $\boldsymbol{R(x) = -x^2 + 10x - 25}$, *le zéro de R est* ***5. Car*** $\Delta = 0$

Le coefficient a *de* x^2 *est* $a = -1$ *et* $a < 0$.
On obtient donc le tableau de signe suivant:
Pour $\boldsymbol{x} \in \,]-\infty, \mathbf{5}[\, \cup \,]\mathbf{5}, +\infty[$, $\boldsymbol{R(x) < 0}$,
Pour $x \in \{\mathbf{5}\}$, $\boldsymbol{R(x) = 0}$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$R(x)$		−	0	−	

b) ***Définition d'une inéquation du second degré***

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in IR^3$ avec $a \neq 0$.
Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.
$\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, P(x) > 0}$; $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0}$; $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, P(x) < 0}$; $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0}$.

Exemple *L'inéquation: $x \in \mathbb{R}$, $-3x^2 + 5x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré.*

c) *Résolution d'une inéquation du second degré*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation de l'un des types ci-dessus revient ***à étudier le signe du polynôme $P(x)$***, *puis trouver* ***l'intervalle ou les intervalles*** *correspondants à l'ensemble des solutions de l'inéquation.*

Exercice d'application

Résous dans $\mathbb{R}$, les inequations suivantes:

1) $2x^2 - 5x + 3 < 0$; 2) $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$; 3) $x^2 + x + 2 > 0$

Solution

1) Résolution de l'inéquation $2x^2 - 5x + 3 < 0$

On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

On calcule le **discriminant** du polynôme P. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$

Le polynôme P admet **deux zéros**: $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	+	0	−	0	+

Pour $x \in \left]1;\frac{3}{2}\right[$, $P(x) < 0$ Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]1;\frac{3}{2}\right[$

2) **Résolution** de l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$;

On considère le polynôme Q tel que: $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$.

On calcule le discriminant du polynôme Q.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$

Le polynôme Q admet un **zéro double** : $x_0 = \frac{4}{-2} = -2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$Q(x)$	−		−

Pour $x \in \{-2\}$, $Q(x) \geq 0$ $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

3) **Résolution** de l'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$;

On considère le polynôme R tel que : $R(x) = x^2 + x + 2$.

On calcule le discriminant du polynôme R. $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$

Le polynôme R **n'admet pas de zéro**. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
$R(x)$	+

Pour $x \in \mathbb{R}$, $R(x) > 0$ $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

d) Équation du type $ax^2 + bx + k = 0$ ou k dépend d'un paramètre

Soit l'équation $ax^2 + bx + k = 0 (a \neq 0)$. d'inconnu x et k est fonction du parametre

Pour résoudre une équation du type: $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + k = 0$ $(a \neq 0)$. On peut procéder de la façon suivante:

- Calcculer le discriminant de $x^2 + bx + k = 0$ en fonction du parametre m.
- Etudier le signe de ce discriminant suivant les valeur du paramètre m.
- Determiner suivant les valeurs du paramètre m l'ensemble solution de l'équation.

Exercice d'application

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'equations paramétrique suivant : $-x^2 - 2x - m = 0$,

- On considère le polynôme Q tel que: $Q(x) = -x^2 - 2x - m$.
- On calcule le discriminant du polynôme Q.
- $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (m) = 4(m + 1)$
- **Racine et signe** de Δ,

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(m + 1) = 0$ ie $m = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$Q(x)$	−		+

- ✓ Si $m < -1$ alors $\Delta < 0$ et l'équation **n'admet pas de solution dans IR**, $S=\emptyset$
- ✓ Si $m = -1$ alors $\Delta = 0$ et l'équation admet **une seule solution dans IR** : $x_0 = -\frac{(-2)}{2X1} = 1$
- ✓ Si $m > 1$ alors $\Delta > 0$ et l'équation admet **deux solutions dans IR**; $x_0 = \frac{2+2\sqrt{m+1}}{2} = 1 + \sqrt{m+1}$ et $x_1 = \frac{2-2\sqrt{m+1}}{2} = 1 - \sqrt{m+1}$ $S = \{1 - \sqrt{m+1}; 1 + \sqrt{m+1}\}$

LECON 2 : SYSTEMES D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES SE RAMENANT AU SECOND DEGRE DANS ℝ

I- Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Tous système de deux equations a deux inconnues réelles (y; z) de la forme $\begin{cases} y + z = S \\ yz = P \end{cases}$ se ramène une equation du type $X^2 + SX + P = 0$ dans ℝ,

- $S^2 - 4P < 0$ alors le système **n'admet pas** de solution dans IR^2.
- Si $S^2 - 4P = 0$, alors le système **admet un seul couple** de solution $\left\{\left(\frac{S}{2}; \frac{S}{2}\right)\right\}$.
- Si $S^2 - 4P > 0$, alors le système **admet deux couples** de solutions $S = \{(X_1; X_2); (X_2; X_1)\}$,

Ou $X_1; X_2$ sont les solutions dans IR de l'eqO $X^2 + SX + P = 0$

Propriété 2

Si l'équation du second degré (E), $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions X_1 et X_2. (distinctes ou non) dans alors:

- La somme des solutions de (E) est $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et la produit est et $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- le discriminant du polynôme $f(x)=ax^2+bx+c$ est $\Delta = (a)^2(S^2 - 4P)$
- **le signe** de S et P des racines (Solutions) permettent de determiner **le signe de c**

Exercice d'application L'équation $(E): x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 4 = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1. Détermine l'autre solution de (E).

Solution

Soit $x_1 = -1$ et x_2 l'autre solution de (E). On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $-1 + x_2 = -\frac{5}{1}$; donc : x_2=-5+1=-4

On peut aussi utiliser la formule suivante : $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. $-1 \times x_2 = \frac{4}{1}$; donc: $x_2 = -4$.

Propriété 3

Soit S et P deux nombres réels.

Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors il existe deux nombres réels dont la somme est **S** et le produit est **P.** Ces deux nombres sont les solutions de l'équation: $x^2 - Sx + P = 0$.

Méthode de resolution:

Pour résoudre une equation de type: $x^2 - Sx + P = 0$, on procède de la manière suivante:

- on vérifie que: $S^2 - 4P \geq 0$;

- on résout l'équation $x^2 - Sx + P = 0$; les nombres réels recherchés sont les solutions de l'équation précédente.

Exercice d'application

Détermine deux nombres réels s'ils existent dont leur somme est -3 *et leur produit est* -4 *et deuire la solution du* **systeme** *(S)* $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$

Solution

Soit $S = -3$ *et* $P = -4$. On a : $S^2 - 4P = 9 + 16 = 25\,;\ S^2 - 4P \geq 0$.
Ces deux nombres existent et sont solutions de l'équation $x^2 + 3x - 4 = 0$. $\Delta = 25$,
donc : $x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1; x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$ Ces deux nombres sont : 1 *et* -4.

D'apres la question qui precede, le système (S) admet comme solution. S=$\{(1;-4);(-4;\ 1)\}$,

II- Equations bicarrées

a) Définition

On appelle *équation bicarrée* une équation du type :, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, où $(a, b, c) \in IR^3$ et $a \neq 0$

Exemple: *L'équation* : $x \in \mathbb{R}, -3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ *est une* ***équation bicarrée.***

b) Résolution d'une équation bicarrée

méthode

Pour résoudre une équation du type: $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0\ (a \neq 0)$. *On peut procéder de la façon suivante:*

- *On pose:* $X = x^2$;
- *On résout l'équation du second degré :* $aX^2 + bX + c = 0$;

On résout, s'il y lieu, les équations d'inconnue x *du type* $x^2 = X$.(X *étant solution de l'équation* $aX^2 + bX + c = 0$)

Exercice d'application. *Résous dans* $\mathbb{R}$, *l'équation suivante*: $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

Solution :

Posons : $X = x^2$. *L'équation devient* : $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$, *les solutions de l'équation* $2X^2 - 3X + 1 = 0$ *sont :*

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1; \qquad X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On obtient : $x^2 = 1$ *ou* $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 1$ *ou* $x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$

$$\boxed{S_{IR} = \{1; -1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}}$$

LECON 3 : POLYNÔMES DU TROISIÈME DEGRÉ

I- POLYNÔMESDU TROISIÈME DEGRÉ

1- Définition

Tout polynôme de la forme **P(x)** = ax^3+bx^2+cx+d ($a \neq 0$,(b, c et d) $\in IR^3$ est appelé polynôme de degré **3.**

2- Racine d'un polynôme:

Le nombre x_0 est une racine du polynôme **P**, signifie que $P(x_0) = 0$

Exemple: on considère le polynôme p *definie par* $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$. Vérifier que -1 est une racine du polynôme P.
Solution : on a $P(1) = -2 + 5 - 4 + 1 = 3 - 3 = 0$, d'où -1 est une racine du polynôme P

$\boxed{\text{P(x) peut s'écrire sous la Forme } (x-1)(ax^2+bx+c) = 0}$

α étant une racine de P, ce polynôme peut donc s'écrire sous la forme

$\boxed{P(x) = (x-\alpha)(ax^2+bx+c).}$ cette forme nous permet de factoriser le polynôme $p(x)$

NB : si une fraction $\frac{a}{b}$ est une racine de P, alors on peut faire la division euclidienne du polynôme P par $(x - \frac{a}{b})$

II- *Résolution d'équations de degré 3 :*

Toute équation de la ***forme*** $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ ***est*** *appelée équation de degré 3. étant racine du polynôme, cette équation est sous la forme* $(x-a)Q(x)$. (x) *étant un polynôme du second degré. La résolution de cette équation se fait à partir de deux méthodes:* ***la méthode paridentification des coefficients ou par division euclidienne***.

a) *Méthode par identification des coefficients*

Exemple: soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3-6x^2+5x+12$ ou X est un réel quelconque.

a- Calculer $p(3)$. Que traduit ce résultat?

b- Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x-3)(x^2+bx+c)$ ou **b** et **c** sont les réels à Déterminer.

c- Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$.

Solution :

a- $P(3) = 3^3-6(3)^2+5(3)+12 = 27 - 54 + 15 + 12 = -27 + 27 = 0$ d'où $p(3) = 0$. Ce résultat traduitque 3 est racine du polynôme P.

b- Mettons $P(x)$ sous la forme $P(x)=(x-3)(x^2+bx+c)$. On a :
$P(x) = x^3+bx^2+cx-3x^2-3bx-3c = x^3+(b-3)x^2+(c-3b)-3c$. Par identification des coefficients, on a $\begin{cases} b-3=-6-b=-3 \\ C-3b=5-c=-4 \\ -3c=12 \end{cases}$. Donc $\boxed{P(x) = (x-3)(x^2-3x-4).}$

c- Résolvons l'équation $P(x) = 0$. On a : $(x-3)(x^2-3x-4) = 0$ signifie que $(x-3) = 0$ *ou* $(x^2-3x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $(x^2-3x-4) = 0$. Calculons le discriminant ; on a :

$\Delta = (-3)^2-4(1)(-4) = 9 + 16 = 25 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ *et* $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

D'où $S = \{-1; 3; 4\}$

b) *Division euclidienne :*

Exemple: Soit le polynôme **P** défini par $P(x) = 2x^3+3x^2-3x-2$

1- Montrez que 1 est racine de **P**

2- Ecrire **P** sous la forme $(x - 1)(x^2+bx+c)$ ou b et c sont des réels à déterminer

Solution:

1- Montrons que -1 est racine de P

On a :$P(1) = 2(1)3 + 3(1)2 - 3(1) - 2 = 2 + 3 - 3 - 2 = 0$. D'où 1 est racine du polynôme P.

2- Ecrivons P sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$

On cherche maintenant à factoriser $P(x) = 2x^3+3x^2-3x-2$ par $(x - 1)$ Utilisons la méthode de la division euclidienne/

$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ | $x - 1$

$2x^3 - 2x^2$ | $2x^2 + 5x + 2$

$5x^2 - 3x$

$5x^2 - 5x$

$2x - 2$

$2x - 2$

0

Donc $\boxed{P(x) = (x-1)(2x^2+5x+2)}$

III- INEQUATIONS DE DEGRE 3

Une **inéquation du troisième degré** est une **inéquation** se ramenant à la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$ ($<$ ou, $>$ et $\leq$)

Méthode de résolution

Pour résoudre ce type d'inéquation on procède de la manière suivante

- On détermine les racines de son polynôme associé,
- On dresse son tableau de signe,
- L'intervalle ou la réunion d'intervalles solution est celle du signe de l'inégalité

Exemple : résolvons l'inéquation (x): $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 < 0$

On sait que 1 est racine du polynôme et on trouve $P(x) = (x-1)(2x^2+5x-2) = (x+2)(2x+1)(x-1)$

a- Dressons le tableau de signe de P(x)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $P(x) < 0, S =]-\infty,-2[\cup]-\frac{1}{2},-1[$. ***pour*** $P(x) = 0$,

LECON 4 : EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR

I- EQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR

1- *Résolution d'une équation irrationnelle du type*: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$

méthode

Pour résoudre une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$ *on peut*

Utiliser l'équivalence suivante : $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice d'application. **Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{x^2-1} = x+2$.**

Solution

$$\sqrt{x^2-1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-1 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;+\infty[\\ x^2-1 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;+\infty[\\ x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;+\infty[\cap \left\{-\frac{5}{4}\right\}. \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{5}{4}\right\} \qquad S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}.$$

II- EQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR

1- Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$.

Méthode de resolution

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$ *on peut utiliser l'équivalence suivante :* $\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système

Exercice d'application. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1$

Solution

$$\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x^2+5x+3 < (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$ **Donc** $S_{\mathbb{R}} =]1; +\infty[$

2- Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ ***on peut utiliser l'équivalence suivante :***

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \right)$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercices commentés

Exercice 0 . **Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :** $\sqrt{2-x} \geq x+4$

Solution

$$\sqrt{2-x} \geq x+4 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq (x+4)^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+4 \leq 0 \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in [-4;+\infty[\\ x \in [-7;-2] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty;2] \\ x \in]-\infty;-4] \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x \in [-4;-2] \text{ ou } x \in]-\infty;2] \cap]-\infty;-4]) \Leftrightarrow x \in [-4;-2] \cup]-\infty;-4]$$

L'ensemble des solutions est : $]-\infty;-2]$.

Exercice.1

Par la méthode du discriminant, résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes:

1) $-2x^2+5x+3=0$ 2) $9x^2+4x+5=0=$ 3) $\sqrt{2}x^2+(1-\sqrt{2})x-1=0$

Corrigé

1) $\Delta=49$ $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-1}{2};3\right\}$

2) $\Delta=-164$ $S_{\mathbb{R}}=\phi$ 3) $\Delta=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$ $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 2: Résous dans IR l' équation suivante $x^2+1=\sqrt{5-x^2}$

Corrigé

$x^2+1=\sqrt{5-x^2} \Leftrightarrow (x^2+1)^2=5-x^2$ car $x^2+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$ posons $X=x^2$ l'équation devient:

$X^2+3X-4=0$;$\Delta=25$; $X_1=-4$;$X_2=1$ on a

$x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ *et* $x=-1$ $S=\{-1,1\}$

Exercice 3 : Déterminer les nombres x et y tels que : $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

Corrigé

$\begin{cases} x+y=2 \ (1) \\ x^2+y^2=34 \ (2) \end{cases}$ **En élevant l'équation (1) au carré on obtient**: $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=4 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $xy=-15$ *on a* $\begin{cases} x+y=2 \ (S) \\ xy=-15 \ (P) \end{cases}$

x et y sont solutions $\boldsymbol{de\ x^2-2x-15=0}$

$\Delta=64$ et donc $X_1=5$ et $X_2=-3$ **On a** $x=5$ *ou* $y=-3$ **ou a** $x=-5$ *ou* $y=3$ **S=$\{(5;-3);\}$**,

Exercice .4

a) Vérifie que : $A=\sqrt{3}+2$ *et* $B=-\sqrt{3}+2$ *sont inverses l'un de l'autre.*

b) Vérifie que $A+B=4$

c) Déduis-en **(sans calcul mais en justifiant**) *les solutions de l'équation* **(E): $x^2=4x-1$**

d)deuire les solution des inequation suivantes $(E)<0$; $(E)\leq 0$; $(E)>0$ **et** $(E)\geq 0$

Corrigé

a- $A \times B=(\sqrt{3}+2)(-\sqrt{3}+2)=-3+4=1$ *alors A et B* ***sont inverses*** *l'un de l'autre*

b- $A+B=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2=4$

c- $A+B=4$ **et** $A \times B=1$ *donc A et B* ***sont solutions*** *de l'équation* $x^2-4x+1=0$.

d- *Dressons le tableau de signe de E*

- Pour $E(x)>0, S=]-\infty,2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3},+\infty[$
- Pour $E(x)<0, S=]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$,

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$E(x)$		+	0	−	0	+	