PROPOSITION DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU BACCALAUREAT D SESSION MAI 2023 DU CAMEROUN

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURSCES

EXERCICE 1 :

1. **Déterminons les racines cubiques de 8 sous la forme algébrique dans $\mathbb{C}$.**

Si l'on pose $z = 8$, alors un argument est 0 et les racines cubiques de 8 sont sous la forme :
$z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{0+2k\pi}{3})}; k = 0; 1; 2$. Par disjonction des cas, on en déduit que :

$z_0 = 2;\ z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}\ et\ z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. On donne :
   $z_C = 2;\ z_A = -1 + i\sqrt{3}\ et\ z_B = -1 - i\sqrt{3}.$

$a)$ **Montrons que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, puis déduisons la nature exacte du triangle ABC.**

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2+1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{-6i\sqrt{3}+6}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, ainsi le triangle ABC est un triangle équilatéral.

b) **Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.**

ABC étant un triangle équilatéral, le centre du cercle Γ_1 est son centre de gravité G d'affixe $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}+2}{3} = 0$ et donc G = O. Il vient alors que son rayon est $|z_C| = 2$.

c) **Montrons que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifie $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est le cercle de centre Ω, d'affixe -2 et de rayon 2**.

Soit M un point du plan d'affixe $z\ tel\ que\ 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ et $z = x + iy$.

Il est clair que $2(x + iy + x - iy) + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 2^2$.

__Conclusion :__ Γ_2 est le cercle de centre Ω d'affixe -2 et de rayon 2.

d) **Vérifions que A et B sont éléments de Γ_2** .

$$\begin{cases} (x_A + 2)^2 + {y_A}^2 = (-1 + 2)^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \\ (x_B + 2)^2 + {y_B}^2 = (-1 + 2)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \end{cases}.$$

__Conclusion :__ A et B sont éléments de Γ_2 .

e) Déterminons l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω qui transforme A en B.

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*\ et\ b\ \in \mathbb{C}$. D'après les hypothèses, on a :

$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a(-1 + i\sqrt{3}) + b = -1 - i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (-1 - i\sqrt{3})a = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et par conséquent $b = -3 - i\sqrt{3}$.

__Conclusion :__ L'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = \left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 3 - i\sqrt{3}.$

__**EXERCICE 2 :**__

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1-a) **Résolvons l'équation (E) sur** $\mathbb{R}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions numériques f de la variable réelle x telles que $f(x) = ce^{2x}$ où c est une constante réelle.

1-b) **Montrons que la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.**

D'après la question 1-a), il est clair que : $f(0) = 1 \Leftrightarrow ce^0 = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

<u>**Conclusion**</u> **:** La solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.

1-c) **Déterminons en fonction de n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n+1]$.**

Désignons par $S_n$la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n+1]$.

Il est clair que $S_n = \frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}(e^{2n+2} - e^{2n}) = \frac{e^{2n}}{2}(e^2 - 1)$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) **Calculons u_0 et u_1.**

$u_0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) et\ u_1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^2$.

b) **Montrons que (u_n) est une suite géométrique de raison e^2.**

Soit n un nombre entier naturel. Il est clair que : $u_{n=1} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{2n+2} = e^2[\frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{2n}]$, et il s'en suit alors que $u_{n+1} = e^2 u_n$.

<u>**Conclusion :**</u> (u_n) est une suite géométrique de raison e^2.

c) Déterminons la valeur exacte de la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \times \frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1} = \frac{1}{2}(e^{2n+1} - 1)$.

<u>**EXERCICE 3 :**</u>

I) Une urne contient cinq jetons portant respectivement les nombres 1 ; e^2;$\frac{1}{e^2}$; e et $\frac{1}{e}$ tous indiscernables au toucher. On tire successivement au hasard et avec remise deux jetons de cette urne et l'on note par a et b les nombres lus respectivement sur le premier jeton, puis sur le deuxième jeton tiré. A cette expérience aléatoire, on associe le point M d'affixe $z = lna + ilnb$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. **Déterminons la probabilité de l'évènement A :<< M appartient à l'axe des réels>>.**

(Le point M appartient à l'axe des réels) $\Leftrightarrow (lnb = 0) \Leftrightarrow (b = 1)$ et par conséquent nous avons : $(a; b) \in \{(x; 1); x \in \{1\,; e^2; \frac{1}{e^2}; e\,, \frac{1}{e}\}\}\ et\ donc\ P(A) = \frac{5}{5^2} = \frac{5}{25} = 0{,}2$.

2. **Montrons que la probabilité de l'évènement B :<< M appartient à l'axe des imaginaires pures>>, est 0,2.**

(Le point M appartient à l'axe des imaginaires pures)$\Leftrightarrow$ $(lna = 0) \Leftrightarrow (a = 1)$ et par conséquent nous avons : $(a; b) \in \{(1; x); x \in \{1 ; e^2; \frac{1}{e^2}; e , \frac{1}{e}\}\}$ $et\ donc\ P(B) = \frac{5}{5^2} = \frac{5}{25} = 0{,}2$.

II) Un agent publicitaire pour son service a pour base de travail le tableau ci-dessous.

Frais de publicité x	7	7,8	9,2	10,5	11	11,5
Chiffre d'affaire y	237	235	248	250	268	259

$x\ et\ y$ sont en dizaine de millions de francs.

1. Déterminons une équations de la droite de Meyer de $(x; y)$.

x_i	7	7,8	9,2
y_i	237	235	248

$\bar{x}_1 = \frac{7+7{,}8+9{,}2}{3} = 8\ \ et\ \bar{y}_1 = \frac{237+235+248}{3} = 240\ et\ donc\ G_1(8; 240)$.

x_i	10,5	11	11,5
y_i	250	268	259

$\bar{x}_2 = \frac{10{,}5+11+11{,}5}{3} = 11\ \ et\ \bar{y}_1 = \frac{250+268+259}{3} = 259\ et\ donc\ \boldsymbol{G_2(11; 259)}$.

Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) est : $a = \frac{259-240}{11-8} = \frac{19}{3}\ et\ b = 240 - \frac{19}{3} \times 8 = \frac{568}{3}$.

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{(G_1G_2): y = \frac{19}{3}x + \frac{568}{3}}$.

2. **Déduisons une estimation des frais de publicité d'une entreprise dont le chiffre d'affaires est de 3 milliards de francs.**

Il est clair que $300 = \frac{19}{3}x + \frac{568}{3} \Leftrightarrow 19x + 568 = 900 \Leftrightarrow x = \frac{332}{19} \approx 17{,}47$.

<u>**Conclusion**</u> : les frais de publicité d'une telle entreprise sont estimés à environ 174. 700. 000 FCFA.

<u>**EXERCICE 4 :**</u>

1. On considère la fonction g definie sur $]-1; 0[\ par : g(x) = \frac{1}{x^2+x}$.
   a) Calculons les limites de g à droite en -1 et à gauche en 0.
   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} 1 = 1; \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 + x = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + x = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty\ et\ \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty .$$
   b) Etudions les variations de g.
   La fonction g est dérivable sur $]-1; 0[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $]-1; 0[$ et pour tout element $x\ de\ ]-1; 0[\ , g'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$. Et l'on en déduit que : $\forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[, g'(x) > 0, et\ donc\ g$ est strictement croissante sur $]-1; -\frac{1}{2}[$.

$\forall x \in]-\frac{1}{2};0[, g'(x) < 0$ *et donc* g est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};0[$.
Pour $x = -\frac{1}{2}, g'(x) = 0,$ *et donc* g admet un extremum relatif qui est $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	

c) **Déduisons que pour que tout réel x de l'intervalle $]-1;0[; g(x) < 0$.**
D'après le tableau des variations ci-dessus, on en déduit que tout réel x de l'intervalle $]-1;0[; g(x) < 0$.

d) **Montrons que : pour que tout réel x de l'intervalle $]-1;0[; g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.**
Soit $x \in]-1;0[, g(x) = \frac{x-x+1}{x^2+x} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
<u>Conclusion :</u> Pour que tout réel x de l'intervalle $]-1;0[; g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

e) **Déduisons sur $]-1;0[$ la primitive la primitive G *de* g qui s'annule en $-\frac{1}{2}$.**
Sur l'intervalle $]-1;0[, G(x) = \ln(-x) - \ln(1+x) + k; k \in \mathbb{R}$.
$G\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow ln\frac{1}{2} - ln\frac{1}{2} + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.
<u>Conclusion :</u> Sur $]-1;0[$ la primitive la primitive G *de* g qui s'annule en $-\frac{1}{2}$ est telle que $G(x) = \ln\left(\frac{-x}{x+1}\right)$.

2. On considère la fonction f definie sur $]-1;0[$ *par* $f(x) = \ln(\frac{-x}{x+1})$.

a) **Déterminons les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1;0[$.**

$\lim_{x \to -1^+} \frac{-x}{x+1} = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x+1} = 0^+$ et par conséquent $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

b) **Montrons que pour tout réel $x \in]-1;0[, f'(x) = g(x)$.**
La fonction f est derivable $]-1;0[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]-1;0[$ et pour tout réel $x \in]-1;0[, f'(x) = \frac{\left(\frac{-x}{x+1}\right)'}{\frac{-x}{x+1}} = \frac{\frac{-x-1+x}{(x+1)^2}}{\frac{-x}{x+1}} = \frac{-1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{-x} = \frac{1}{x(x+1)}$.
<u>Conclusion :</u> Pour tout réel $x \in]-1;0[, f'(x) = g(x)$.

c) **Déduisons le sens de variation de f sur $]-1;0[$.**
Pour que tout réel x de l'intervalle $]-1;0[; g(x) < 0$, par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1;0[$.

<u>**PARTIE B**</u> **: EVALUATION DES COMPETENCES**

Tache 1 : Déterminons à partir de quel nombre d'années les intérêts produits à la banque permettront à **M. TANG** d'acheter un autre billet d'avion pour son épouse.

Désignons par p_0 le prix du billet d'avion de M.TANG. Puisqu'il place cette somme dans une banque a intérêt composé pour un taux de 5%, si l'on désigne par n ce nombre d'années, il est clair que :

$p_{n+1} = 1{,}05\ p_n\ et\ donc\ p_n \geq 2p_0$ ce qui implique $1{,}05^n \times p_0 \geq 2p_0$ ce qui implique :
$n \geq \left(\frac{ln2}{ln1{,}05}\right) \approx\ 14{,}08163265\ldots$

<u>**Conclusion :**</u> A partir de 15 ans, les intérêts produits à la banque permettront à **M.TANG** d'acheter un autre billet d'avion pour son épouse.

Tache 2 : Nous allons chercher à savoir si **M. TANG** pourra réaliser son projet a partir des loyers de ses maisons.

D'après le troisième paragraphe de notre texte, il est clair que la fonction numérique S de la variable réelle x a pour ensemble de départ $[1; 9]$ et pour ensemble d'arrivée$\mathbb{R}_+{}^*$.

Dans cette tâche, nous chercherons à savoir si l'équation $S(x) = 41$ admet au moins une solution dans $[1; 9]$.

La fonction S est une fonction polynôme donc elle dérivable sur $\mathbb{R}, donc\ sur\ [1; 9]$ et pour tout x élément de $[1; 9], S'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 10x + 21) = \frac{3}{2}(x-3)(x-7)$.

$\forall x \in [1; 3[\cup]7; 9], S'(x) > 0$ et donc S croit strictement sur $\left[1\ ; 3\right[\ et\ sur\ \left]7\ ; 9\right]$.

$\forall x \in]3; 9[, S'(x) < 0$ et donc S décroit strictement sur]3 ; 9[.

$\forall x \in \{3; 7\}, S'(x) = 0$ et donc S admet deux extremums relatifs que sont :
$S(3) = 40{,}5\ et\ S(7) = 24{,}5$.

De plus $S(1) = 24{,}5\ , et\ S(9) = 40{,}5$.

La fonction S est continue sur chacun des intervalles $[1\ ; 3]\ ; [3\ ; 7] et\ [7; 9], et\ S([1; 9]) = [24{,}5; 40{,}5]$. Et puisque $41 \notin\ [24{,}5; 40{,}5]$ alors l'équation $S(x) = 41\ n'$admet pas de solution dans $[1; 9]$.

<u>**Conclusion**</u> **: M. TANG** ne pourra pas réaliser son projet à partir des loyers de ses maisons.

Tache 3 : Dans cette tâche, nous cherchons à savoir si **M. TANG** pourra acheter son sac.

Désignons par t le taux cherché, $P_1(t)\ et\ P_2(t)$ respectivement le premier et deuxième prix de réduction d'une veste qui coutait 140 00 F. Il est clair que :

$P_1(t) = 140000 - 1400t$ et $P_2(t) = 1400000 - 1400t - 1400t + 14t^2 = 126350$ ce qui équivaut à : $t^2 - 200t + 975 = 0$.

$\triangle = 190^2, et\ donc\ t_1 = 5\ et\ \ t_{\ 2} =\ 195 > 100$. On en déduit que le taux est 5.

$20000 - \frac{20000\times5}{100} = 19000 > 17500$.

<u>**Conclusion :**</u> **M TANG** ne pourra pas acheter ce sac.

Ce travail a été élaboré par M. JORIS NGATCHOU enseignant de mathématiques au LYCEE BILINGUE DE LA FERME SUISSE.