MATHEMATIQUES

EXERCICES

SUJETS DE BAC

Rédigé par

SANGARE SOULEYMANE

Elève Ingenieur en Informtique de Gestion

Au Centre Universitaire Professionnalise (ABIDJAN –COCODY)

sangsoulinter@yahoo.fr
sangsoulci@hotmail.com

(00225)08281648
(00225)21246891

LES COMPLEXES

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 64$.
a. Calculer P(4)
b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
$P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$
c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation P(z) = 0
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 4$.
a. Etablir que :
$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$
Ecrire z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θun nombre réel compris entre - π et π.
b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
c. Déterminer la nature du triangle ABC.
4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$, et on appelle z_D l'affixe du point D.
a. Déterminer le module et un argument de z_D .
b. En déduire la forme algébrique de z_D.
c. Placer le point D sur le graphique précédent.

Correction

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 64 = -48 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4 - \sqrt{48}i}{2} = \frac{-4 - \sqrt{16 \times 3}i}{2} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 64$.
a. $P(4) = 4^3 - 64 = 64 - 64 = 0$ donc est une racine de P(z) donc
b. P(z) peut s'écrire sous la forme $P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$
$= az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = az^3 + (b - 4a)z^2 + (c - 4b)z - 4c$
Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ -4c = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 16 \end{cases}$$

$P(z) = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$

c. P(z) = 0 équivaut à : $(z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0$ soit
$z - 4= 0$ ou $z^2 + 4z + 16 = 0$ donc
$z = 4$ ou $z = - 2 - 2i\sqrt{3}$ ou $z = - 2 + 2i\sqrt{3}$
donc $S = \{ 4 ; - 2 - 2i\sqrt{3} ; - 2 + 2i\sqrt{3} \}$
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 4$.
a.

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_A = \frac{2\pi}{3} = Arg(z_A)$$

$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

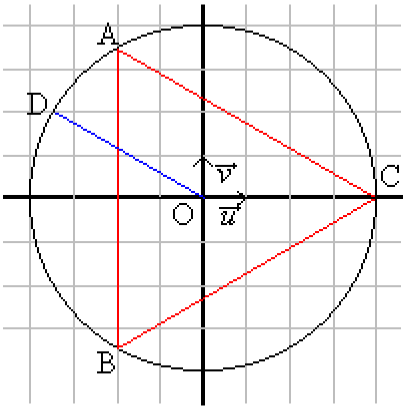
$z_B = -2 - 2i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_B = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_B = \frac{-2\pi}{3} = Arg(z_B)$$

$z_B = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

b.



c.

$AB = |z_B - z_A| = \left|-2 - 2i\sqrt{3} - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|-4i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = \left|4 - \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12}$

$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = \left|4 - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$

conclusion : AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral.

4. a.

$z_D = z_A e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{4\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\Rightarrow |z_D| = 4, Arg(z_D) = \dfrac{5\pi}{6}$

b.

$z_D = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

c. voir **3.b.**

Exercice 2

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.
En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$(unité 2 cm), on consi dère les points A d'affixe $z_A = 2$, B d'affixe $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.
a. Placer les points A, B et C
b. Déterminer la nature du triangle ABC.
Justifier la réponse.
3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/6$ et on appelle A', B' et C' les images respectives de A, B et C par R.
a. Déterminer les formes exponentielles de z_A, z_B, et z_C puis de $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$.
b. Placer A', B' et C' sur la figure précédente.
c. Vérifier que $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

Correction

1. $z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c =$
$az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$
Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.
$z^3 - 8 = 0$ équivaut à
$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$ équivaut à
$z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$
$z = 2$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

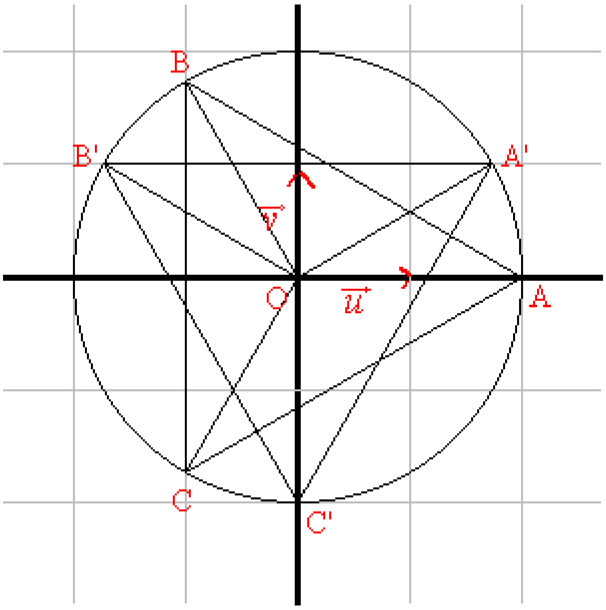
$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

Les solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$ sont donc 2 ; $-1 - i\sqrt{3}$; $-1 + i\sqrt{3}$
2. a. Pour placer correctement et précisément les points B et C on peut calculer les modules des nombres complexes $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$:

$$OB = |z_B| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$OC = |z_C| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

OB = OC = 2 donc les points et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b.

$$AB = |z_B - z_A| = |-1+i\sqrt{3}-2| = |-3+i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-1-i\sqrt{3}-2| = |-3-i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-1-i\sqrt{3}-(-1+i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{0^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral .

3. L'écriture complexe de R est :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$$

a.

$$z_A = 2 = 2\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = \boxed{2e^{i0}}$$

$$z_B = -1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$z_C = -1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{-2\pi}{3}}}$$

$$z_A' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i0} = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_B' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_C' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{-\pi}{2}}}$$

b. voir **2.a.**

c.

$$z_{A'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{B'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{5\pi}{2}} = 8(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{C'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{-\pi}{2}}\right)^3 = 8e^{i\frac{-3\pi}{2}} = 8(\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{A'}{}^3 = z_{B'}{}^3 = z_{C'}{}^3 = 8i$$

$z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

__Correction__

1. $z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c =$
$az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.
$z^3 - 8 = 0$ équivaut à
$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$ équivaut à
$z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$
$z = 2$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

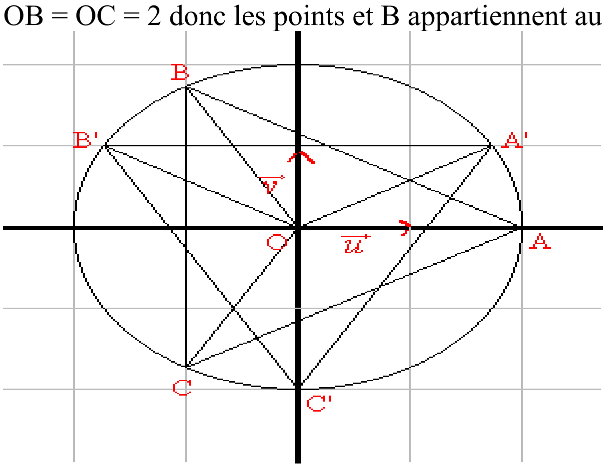
Les solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$ sont donc 2 ; $-1 - i\sqrt{3}$; $-1 + i\sqrt{3}$

2. a. Pour placer correctement et précisément les points B et C on peut calculer les modules des nombres complexes $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$:

$$OB = |z_B| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$OC = |z_C| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

OB = OC = 2 donc les points et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b.

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - 2| = |-3 + i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1 - i\sqrt{3} - 2| = |-3 - i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-1 - i\sqrt{3} - (-1 + i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{0^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral.

3. L'écriture complexe de R est :

$z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z$

a.

$z_A = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = \boxed{2e^{i0}}$

$z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$z_C = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{-2\pi}{3}}}$

$z_A' = e^{i\frac{\pi}{6}} z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} 2e^{i0} = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$z_B' = e^{i\frac{\pi}{6}} z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$z_C' = e^{i\frac{\pi}{6}} z_C = e^{i\frac{\pi}{6}} 2e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{-\pi}{2}}}$

b. voir **2.a.**

c.

$z_{A'}^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$

$z_{B'}^3 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{5\pi}{2}} = 8(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$

$z_{C'}^3 = \left(2e^{i\frac{-\pi}{2}}\right)^3 = 8e^{i\frac{-3\pi}{2}} = 8(\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$

$z_{A'}^3 = z_{B'}^3 = z_{C'}^3 = 8i$

$z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm. On note *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

a) Calculer $P(-2\sqrt{2}) =$

b) Déterminer une factorisation de P(z) sous la forme :

$P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + \alpha z + \beta)$ où α et β sont deux nombres réels que l' on déterminera.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : P(z) = 0.

2) On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.
b) Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
En déduire une mesure en radian de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}$)
c) Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$
d) Démontrer qu'une mesure de l'angle ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est $3\pi/8$
e) En déduire l'égalité :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$$

__Correction__

1) Pour tout nombre complexe z, on pose :
$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$
a) $P(-2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} + 8(2\sqrt{2} - 4) + (8 - 8\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2}$
$= -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 32 - 16\sqrt{2} + 32 + 16\sqrt{2} = 0$ donc $-2\sqrt{2}$ est une racine de P(z)
b)

$$P(z) = \left(z+2\sqrt{2}\right)(z^2+\alpha z+\beta)$$
$$= z^3+\alpha z^2+\beta z+2\sqrt{2}z^2+2\alpha\sqrt{2}z+2\sqrt{2}\beta$$
$$= z^3+(\alpha+2\sqrt{2})z^2+(\beta+2\alpha\sqrt{2})z+2\sqrt{2}\beta$$

par identification :

$$\begin{cases}\alpha+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4\\ \beta+2\alpha\sqrt{2}=8-8\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\beta=16\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=8\end{cases}$$

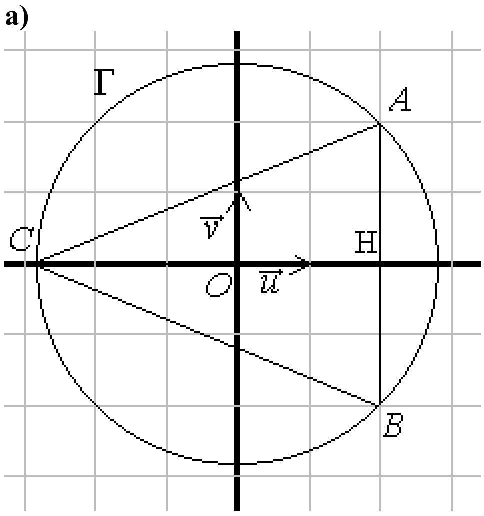
$P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8)$
c)

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \left(z+2\sqrt{2}\right)(z^2-4z+8)=0$$
$$z+2\sqrt{2}=0 \text{ ou } z^2-4z+8=0$$
$$z=-2\sqrt{2} \text{ ou } z^2-4z+8=0$$
$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16<0$$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i,\quad z_2=\frac{4+4i}{2}=2+2i$$

2) On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$
a)



$$OA = |a| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$OB = |b| = |2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$OC = |c| = \left|-2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$$

OA = OB = OC donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 $\sqrt{2}$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_a = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_a = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_a = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_b = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_b = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_b = \arg(b) = \frac{-\pi}{4}$$

$(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA})$ = arg(a) - arg(b) [modulo 2 π] = π/2 [modulo 2 π]

c) Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$.

L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre donc :

$\widehat{ACB}$ = (1/2) $\widehat{AOB}$ = π/4

$(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})$ = π/4 [modulo 2 π]

d) L'affixe de C est réel donc C appartient à l'axe des réels , il est son propre symétrique par rapport à l'axe des réels.

Les affixes de A et B sont conjugués donc A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Le triangle ABC est donc isocèle en C :

2 $\widehat{BAC}$ + $\widehat{ACB}$ = π

2 $\widehat{BAC}$ = π - π/4 = 3 π/4 soit $\widehat{BAC}$ = 3 π/8

on a donc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ = 3 π/8

e)

Soit H le point d'affixe 2 ,

c'est à dire le projeté orthogonal des points A et B sur l'axe des réels ,on a :

$$CH = |z_H - z_C| = \left|2 + 2\sqrt{2}\right| = 2 + 2\sqrt{2}$$
$$AH = |z_H - z_A| = |2 - (2+2i)| = |-2i| = 2$$

dans le triangle CAH rectangle en H on a :

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \tan(CAH) = \frac{CH}{AH} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Exercice sur les nombres complexes (série GM 1994)

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = 8 \quad z_B = 8i \quad z_C = z_A e^{\frac{-i\pi}{3}} \quad z_D = z_B e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme trigonométrique. Donner le module et un argument de z_C et z_D et écrire ces nombres sous la forme algébrique.

2) Montrer que les points A, B, C, D sont situés sur le même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3) Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points A, B, C, D.

4) a) On note Z_1 et Z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$. Montrer que $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$.
b) On note Z_3 et Z_4 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Calculer $|Z_3|$ et $|Z_4|$.
c) Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze isocèle.

Correction :
1)

$$|z_A| = |8| = \sqrt{8^2} = 8$$

$$|z_B| = |8i| = \sqrt{8^2} = 8$$

Les deux nombres complexes z_A et z_B ont pour module 8.
soient θ_A, θ_B des arguments respectifs de z_A et z_B

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = \dfrac{8}{8} = 1\\ \sin\theta_A = \dfrac{0}{8} = 0\end{array}\right\}\theta_A = 0 \qquad \left.\begin{array}{l}\cos\theta_B = \dfrac{0}{8} = 0\\ \sin\theta_B = \dfrac{8}{8} = 1\end{array}\right\}\theta_B = \dfrac{\pi}{2}$$

on en déduit la forme trigonométrique des nombres complexes z_A et z_B (et du même coup leurs formes exponentielle) :

$$z_A = 8\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 8e^{i0}$$

$$z_B = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

on peut en déduire les formes exponentielles des nombres complexes z_C et z_D :

$$z_C = z_A e^{\frac{-i\pi}{3}} = 8e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

$$z_D = 8e^{i\frac{\pi}{2}}e^{2i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-5\pi}{6}}$$

on a donc :

$$|z_D| = 8 \quad |z_C| = 8 \quad Arg(z_C) = \frac{-\pi}{3} \quad Arg(z_D) = \frac{-5\pi}{6}$$

on en déduit leur forme algébrique :

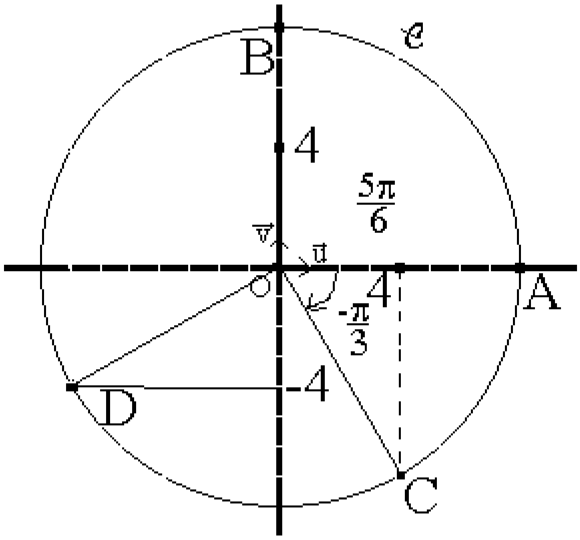
$$z_C = 8e^{\frac{-i\pi}{3}} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{4 - 4\sqrt{3}i}$$

$$z_D = 8e^{i\frac{-5\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{-4\sqrt{3} - 4i}$$

(ce n'est pas la seule façon de déterminer les formes algébriques de ces deux nombres complexes)
2) on a :

$$\left.\begin{array}{l}OA = |z_A| = 8\\ OB = |z_B| = 8\\ OD = |z_D| = 8\\ OC = |z_C| = 8\end{array}\right\} OA = OB = OC = OD = 8$$

les points A, B, C, D appartiennent par conséquent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 8.



4) a)

$Z_2 = z_D - z_B = -4\sqrt{3} - 4i - 8i = -4\sqrt{3} - 12i$

$Z_1 = z_C - z_A = 4 - 4\sqrt{3}i - 8 = -4 - 4\sqrt{3}i$

$\sqrt{3}Z_1 = \sqrt{3}(-4 - 4\sqrt{3}i) = -4\sqrt{3} - 12i = Z_2$

une propriété sur les affixes se répercute sur une propriété vectorielle : de $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$ on en déduit : $\overrightarrow{BD} = \sqrt{3}\ \overrightarrow{AC}$

on en conclu au passage que les droites (BD) et (AC) sont parallèles puisque les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

4) b)

$|Z_3| = |z_B - z_A| = |8i - 8| = |-8 + 8i| =$

$\sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{2 \times 64} = \boxed{8\sqrt{2}}$

$|Z_4| = |z_C - z_D| = \left|4 - 4\sqrt{3}i - (-4\sqrt{3} - 4i)\right| =$

$\left|4 - 4\sqrt{3}i + 4\sqrt{3} + 4i\right| = \left|(4 + 4\sqrt{3}) + (4 - 4\sqrt{3})i\right| =$

$\sqrt{(4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 - 4\sqrt{3})^2} =$

$\sqrt{16 + \cancel{32\sqrt{3}} + 48 + 16 \cancel{- 32\sqrt{3}} + 48} =$

$\sqrt{2 \times 64} = \boxed{8\sqrt{2}}$

$|Z_3| = |Z_4|$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même norme $8\sqrt{2}$: AB = DC.

4) c) d'après ce qui précède le quadrilatère ABDC est tel que AB = DC et (AC) // (BD) donc c'est un trapèze isocèle.

Exercice sur les nombres complexes STI GM,GC, GEN session 1996

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$

1)a) Mettre z_1^3 sous forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable).

b) Mettre Z sous forme algébrique.

2)a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1 , puis le module et un argument du nombre complexe z_1^3.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2 .

c) Déduire des questions précédentes un écriture trigonométrique de Z.

3) En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de Z, déterminer les valeurs exactes de cos ($11\pi/12$) et sin ($11\pi/12$).

Correction

1) a)

$$z_1^3 = (1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 =$$

$$(1+i)(1+2i+i^2) = (1+i)(2i) = 2i+2i^2 = -2+2i$$

$$Z = z_1^3 z_2 = (-2+2i)(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3} - 2i + 2i\sqrt{3} + 2i^2$$

b) $= (-2\sqrt{3}-2) + (-2+2\sqrt{3})i$

2) a)

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

soit θ_1 un argument de z_1 on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_1)^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

donc $3\pi/4$ est un argument de z_1^3 et $\sqrt{2}$ son module.

2) b)

$$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

soit θ_2 un argument de z_2 on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

on en déduit la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre z_1

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2) c) des formes exponentielle de z_1^3 et z_2 on en déduit la forme exponentielle du nombre complexe Z ainsi que sa forme trigonométrique :

$$Z = z_1^3 z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}+i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}+i\frac{2\pi}{12}}$$

$$Z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

3) On sait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont les même parties réelles et les même parties imaginaires :

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = (-2\sqrt{3}-2) + (-2+2\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice sur les nombres complexes bac sti génie mécanique session 1997

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

z_1 le nombre complexe $-1 - i\sqrt{3}$.

1. On pose $z_2 = iz_1$, montrer que $z_2 = \sqrt{3} - i$

2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.
2.b. Placer dans le plan P le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2.
3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :
$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$
3.a. Montrer que $z_A = 2\, z_1$ et que $z_B = -\, z_A$
3.b. Placer les points A,B et C dans le plan P.
3.c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3.d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle. **Correction :**

1.

$$z_2 = iz_1 = i\ (-1 - i\sqrt{3}) = -i - i^2\sqrt{3} = -i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - i$$

2.a . Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

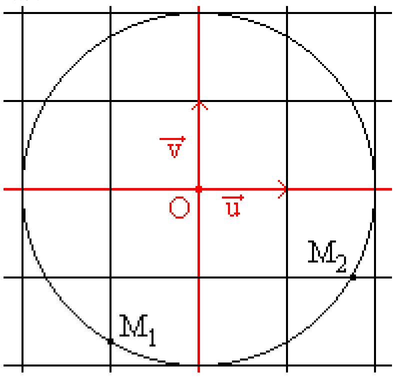
On peut aussi utiliser les propriétés du module d'un nombre complexe :

$$|z_2| = |iz_1| = |i| \cdot |z_1| = 1 \times 2 = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \text{donc } \theta_1 = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \text{donc } \theta_2 = \frac{-\pi}{6}$$

2.b.

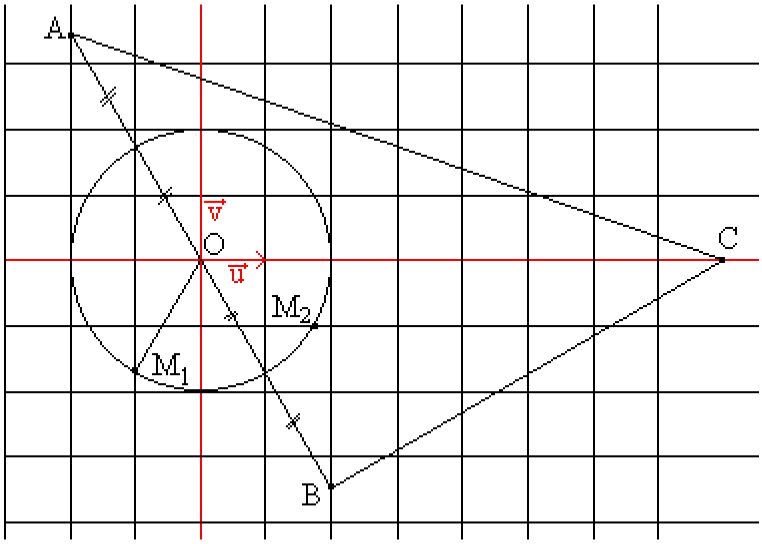


3.a.

$$2\overline{z_1} = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = z_A$$

$$-z_A = -(-2 + 2i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3} = z_B$$

3. b.



3. c.

$$AB = |z_B - z_A| = \left|2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$\left|4 - 4i\sqrt{3}\right| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|8 - 2 + 2i\sqrt{3}\right| = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$= \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|8 + 2 - 2i\sqrt{3}\right| = \left|10 - 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$\sqrt{10^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100+12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + BC^2 = 64 + 48 = 112 \\ AC^2 = 112 \end{array}\right\} \text{donc } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.
3.d. Pour que ABCD soit un rectangle il suffit que ABCD soit un parallélogramme puisque ABC est un triangle rectangle.

Pour que ABCD soit un rectangle il suffit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Soient z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectifs de A,B, C, D
de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ on en déduit : $z_B - z_A = z_C - z_D$ soit $z_D = z_A - z_B + z_C$
$z_D = -2 + 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 8 = 4 + 4i\sqrt{3}$ est donc l'affixe du point D.

Exercice sur les nombres complexes bac sti génie mécanique session 1997

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$;
z_1 le nombre complexe $-1 - i\sqrt{3}$.
1. On pose $z_2 = iz_1$, montrer que $z_2 = \sqrt{3} - i$
2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .
2.b. Placer dans le plan P le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2 .
3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :
$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$
3.a. Montrer que $z_A = 2z_1$ et que $z_B = -z_A$
3.b. Placer les points A,B et C dans le plan P.
3.c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3.d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle. **Correction :**
1.

$$z_2 = iz_1 = i\ (-1 - i\sqrt{3}) = -i - i^2\sqrt{3} = -i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - i$$

2.a . Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

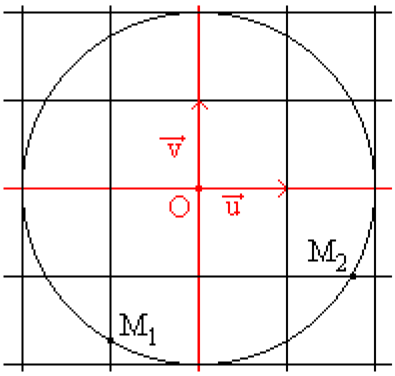
On peut aussi utiliser les propriétés du module d'un nombre complexe :

$$|z_2| = |iz_1| = |i| \cdot |z_1| = 1 \times 2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \theta_1 = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \theta_2 = \frac{-\pi}{6}$$

2.b.

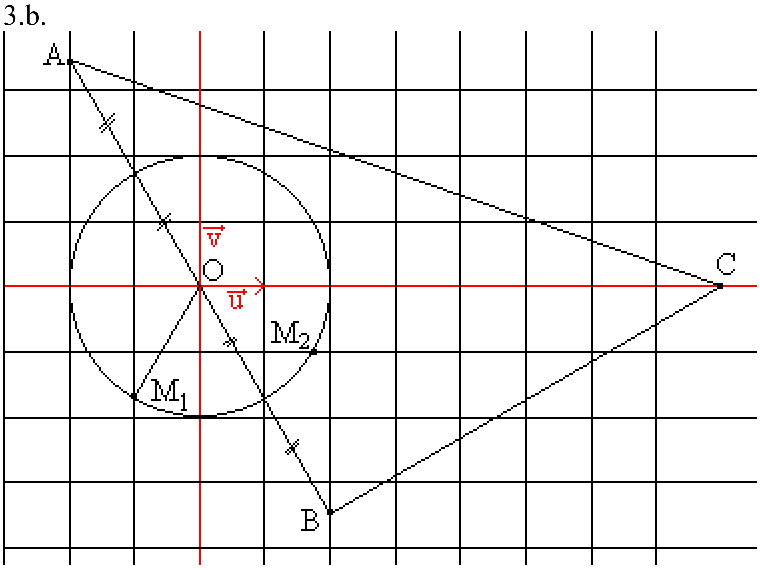


3.a.

$$2\overline{z_1} = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = z_A$$

$$-z_A = -(-2 + 2i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3} = z_B$$

3.b.



3. c.

$$AB = |z_B - z_A| = \left|2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$\left|4 - 4i\sqrt{3}\right| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|8 - 2 + 2i\sqrt{3}\right| = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$= \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|8 + 2 - 2i\sqrt{3}\right| = \left|10 - 2i\sqrt{3}\right| =$$

$$\sqrt{10^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + BC^2 = 64 + 48 = 112 \\ AC^2 = 112 \end{array}\right\} \text{donc } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.
3.d. Pour que ABCD soit un rectangle il suffit que ABCD soit un parallélogramme puisque ABC est un triangle rectangle.
Pour que ABCD soit un rectangle il suffit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Soient z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectifs de A,B, C, D
de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ on en déduit : $z_B - z_A = z_C - z_D$ soit $z_D = z_A - z_B + z_C$
$z_D = -2 + 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 8 = 4 + 4i\sqrt{3}$ est donc l'affixe du point D.

Exercice sur les nombres complexes génie mécanique, génie matériaux session 2001

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :
$z^2 - 6z + 13 = 0$
2. a. Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$
(unité : 2 cm)
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}, z_F = 3.$$

a. Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).
b. Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.
c. Quelle est la nature du triangle ABE ?

Correction :
1.

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 \quad (= 16i^2)$$

$\Delta < 0$ donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \qquad z_2 = 3 + 2i$$

$$S = \{3 - 2i\,; 3 + 2i\}$$

2.a.

$$(z - 3)(z^2 + bz + c) =$$

$$z^3 + bz^2 + cz - 3z^2 - 3bz - 3c =$$

$$z^3 + (b - 3)z^2 + (c - 3b)z - 3c$$

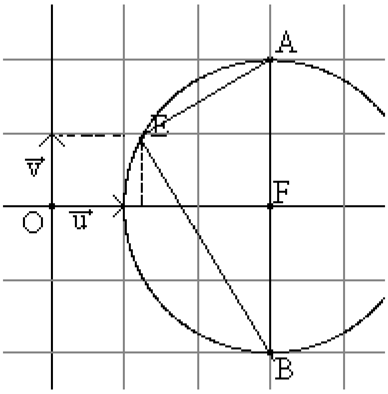
par identification (avec le polynôme $z^3 - 9z^2 + 31z - 39$) on en déduit :

$$\begin{cases} b-3=-9 \\ c-3b=31 \\ -3c=-39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-6 \\ c=13 \end{cases}$$

donc on peut en conclure que :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 - 6z + 13)$

2.b.
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$ équivaut à
$(z - 3)(z^2 - 6z + 13) = 0$ équivaut à
$z - 3 + 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$ équivaut à
$z = 3$ ou $z = 3 - 2i$ ou $z = 3 + 2i$
$S = \{ 3 ; 3 - 2i ; 3 + 2i \}$

3. a



3.b.

$$AF = |z_F - z_A| = |3-(3+2i)| = |-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BF = |z_F - z_B| = |3-(3-2i)| = |2i| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$EF = |z_F - z_E| = \left|3 - \left(\frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right| = \left|\frac{7}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}\right|$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16}+\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$$

AF = BF = EF = 2 donc A, B, E appartiennent au cercle (Γ) de centre F et de rayon 2.

3.c.

$$\left.\begin{array}{l} z_F = 3 \\ \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{3+2i+3-2i}{2} = 3 \end{array}\right\} z_F = \frac{z_A+z_B}{2}$$

donc F milieu de [AB] or F est le centre du cercle (Γ) , [AB] diamètre du cercle (Γ), E appartient au cercle (Γ) or un triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés est un triangle rectangle donc ABE est rectangle en E.
Autre méthode : calculer les distances AB, AE, BE et appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.
1) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

2) b) Quelle est la limite de la suite (u_n).
3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Correction :

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ pour tout entier naturel n donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2) a) soit la propriété P_n : $u_n > n^2$ où n est un entier naturel n.
Démontrons par récurrence que la propriété P_n : $u_n > n^2$ est vrai pour tout entier naturel n.
$u_0 = 1 > 0^2$ donc la propriété P_0 est vraie.
Supposons vraie la propriété P_n, c'est à dire supposons que
$u_n > n^2$ on a donc
$u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$
$u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 = (n^2 + 2n + 1) + 2 = (n + 1)^2 + 2 > (n + 1)^2$
donc la propriété P_{n+1} reste encore vrai.
Par conséquent pour tout entier naturel n on a : $u_n > n^2$
2) b)
$u_n > n^2$
$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3) Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :
$u_0 = 1$
$u_1 = u_0 + 2\times0 + 3 = 1 + 3 = 4$
$u_2 = u1 + 2\times1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$
$u_3 = u2 + 2\times2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$
on peut donc conjecturer que $u_n = (n + 1)^2$ pour tout entier naturel n.
démontrons cette propriété par récurrence :
$u_0 = 1 = (0 + 1)^2$ donc la propriété est vraie au rang 0.
supposons vraie la propriété vrai au rang n, c'est à dire supposons que
$u_n = (n+ 1)^2$ on a donc
$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+ 1)^2 + 2n + 3$
$= (n+ 1)^2 + 2n + 2 + 1 = (n+ 1)^2 + 2(n + 1) + 1$
$= (n+ 1+ 1)^2 = (n+ 2)^2$
donc la propriété reste encore vrai au rang $n + 1$
Par conséquent pour tout entier naturel n on a : $u_n = (n + 1)^2$

Bac série Get-Gel 1994

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n= 2n - 1$
a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.
b) Calculer en fonction de n, la somme :
$S_n = u_0 + u_1+ ......+u_n$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = e^{u_n}$
a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison q.
b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$ en fonction de n

Correction

1.
a) $u_0 = 2(0) - 1 = -1$
$u_{n+1} - u_n = 2(n +1) - 1 - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$

Pour tout entier naturel n on a donc $u_{n+1} = u_n + 2$, de plus $u_0 = - 1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r = 2 et de premier terme $u_0 = - 1$

b)

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n-2)}{2} = (n+1)(n-1)$$

2.

a)

$$v_0 = e^{u_0} = e^{-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1}-u_n} = e^2$$

Pour tout entier naturel n on a donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^2$$

de plus $v_0 = e^{-1}$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{-1}$

b)

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n =$$

$$e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n} =$$

$$e^{u_0+u_1+\dots+u_n} = e^{S_n} = e^{(n+1)(n-1)}$$

Bac série Get-Gel 1996

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n) = 4e^{-\frac{1}{2}n}$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

2. Soit n un nombre entier naturel.

On pose :

$S_n = 4(u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n)$ et $T_n = 4(u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{n+1})$

Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

3. Déterminer les limites S et T de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

1. $u_0 = f(0) = 4e^0 = 4$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{4e^{-\frac{1}{2}(n+1)}}{4e^{-\frac{1}{2}n}} = e^{-\frac{1}{2}(n+1-n)} = e^{\frac{-1}{2}}$$

Pour tout entier naturel n on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\frac{-1}{2}}$, de plus $u_0 = 4$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $u_0 = 4$

2. Ses deux sommes ont chacune n + 1 termes

$$u_1 = 4e^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = 4 \times u_0 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = 16 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$T_n = 4 \times u_1 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = 16e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$

3. $0 < e^{-\frac{1}{2}} < e^0 = 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{16}{1-e^{-\frac{1}{2}}} \qquad \lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{16e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$

Exercice sur les nombres complexe (d'après bac)

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right); \quad z_2 = 4; \quad z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$$

On appelle M_1, M_2, M_3 leurs images respectives dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$(unité graphique : 1 cm) .

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.

2) Placer les points M_1, M_2, M_3 dans le plan (P)

3) a) Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_1 - 2$; $z_2 - 2$; $z_3 - 2$

b) En déduire que les trois points M_1, M_2, M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle.

Correction :

1) Mettons les nombres complexes z_1 et z_3 sous la forme algébrique

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boxed{3 + \left(\sqrt{3}\right)i}$$

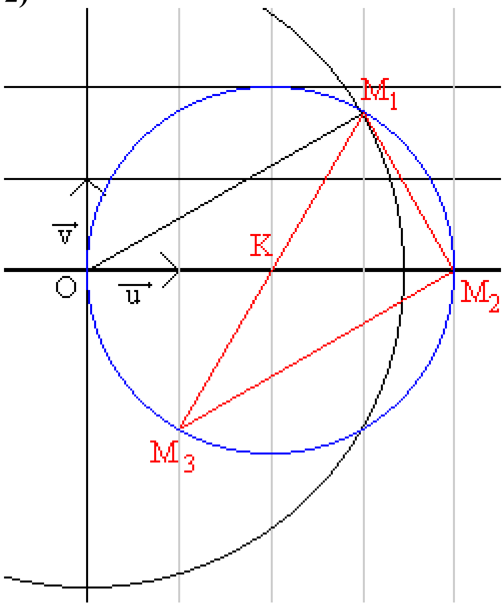
$$z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right) = 2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$2\left(1 + \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{1 - \left(\sqrt{3}\right)i}$$

On en déduit les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_3 :

$$\boxed{\mathrm{Re}(z_1) = 3 \quad \mathrm{Im}(z_1) = \sqrt{3} \quad \mathrm{Re}(z_3) = 1 \quad \mathrm{Im}(z_3) = -\sqrt{3}}$$

2)



3) a)

$$z_1 = 3+\left(\sqrt{3}\right)i \Rightarrow z_1 - 2 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_2 - 2 = 4-2 = 2 = \boxed{2\left(\cos 0 + i\sin 0\right)}$$

$$z_3 - 2 = 2\left(1+e^{4i\frac{\pi}{3}}\right) - 2 = 2e^{4i\frac{\pi}{3}} = \boxed{2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

b) on a par conséquent :

$$|z_1-2| = |z_2-2| = |z_3-2| = 2$$

Soit K le point d'affixe 2, on a donc :

$KM_1 = KM_2 = KM_3$ il en résulte que les points M_1, M_2, M_3 appartiennent au cercle de centre K et de rayon 2.

4)

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2-3-\left(\sqrt{3}\right)i\right| = \left|-1-i\sqrt{3}\right| =$$

$$\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|1-\left(\sqrt{3}\right)i - 2\right| = \left|-3-i\sqrt{3}\right| =$$

$$\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$M_1M_3 = |z_3 - z_1| = \left|1-\left(\sqrt{3}\right)i - 3-\left(\sqrt{3}\right)i\right| =$$

$$\left|-2-2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} M_1M_3^{\,2} = 16 \\ M_1M_2^{\,2} + M_2M_3^{\,2} = 4+12 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1M_3^{\,2} = M_1M_2^{\,2} + M_2M_3^{\,2}$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_2.

Autre méthode : montrer que le point K est le milieu du segment $[M_1M_3]$

$$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{3+\left(\sqrt{3}\right)i+1-\left(\sqrt{3}\right)i}{2} = \frac{4}{2} = 2 = z_K$$

K est donc le milieu du segment $[M_1M_3]$, par conséquent le triangle $M_1M_2M_3$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[M_1M_3]$, d'ou $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_2

Baccalauréat sti , génie mécanique A et F,génie énergétique, génie civil

Soit f la fonction définie sur]-1 ; + ∞[par
$f(x) = -x + \ln(2x + 2) - \ln(x + 2)$.
On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1. Montrer que sur]-1 ; + ∞[, $(2x + 2) > 0$ et $(x + 2) > 0$

2. Etudier le signe de $x^2 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur l'intervalle]-1 ; + ∞[,
$x^2 + 3x + 1$ s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur exacte.

Partie A : Limites et asymptotes

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2.

2.a. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

2.b. Déterminer alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

2.c. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \ln(2)$
est une asymptote oblique à (C) en + ∞.

2.d. Déterminer la position de (C) par rapport à la droite D sur]-1 ; + ∞[

Partie B : Etude des variations

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que :

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x+2)}$$

2. A l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires,
étudier le signe de f' sur]-1 ; + ∞[.

3. Construire le tableau de variation de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f)

Partie C : Représentation graphique

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle [-0,8 ; -0,4], une solution unique notée β. Donner une encadrement à 10^{-2} près de β.

2. Déterminer une équation de la droite T tangente à (C) au point d'abscisse 0.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près).

x	-0,8	$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et (C) dans le repère donné.

Correction :

Préliminaires :

1.
sur]-1 ; + ∞[, $x > -1$ donc $2x > -2$ par conséquent $2x + 2 > 0$
sur]-1 ; + ∞[, $x > -1$ donc $x + 2 > 1 > 0$

2. $\Delta = 3^2 - 4\times1\times1 = 9 - 4 = 5 > 0$ donc le trinôme $x^2 + 3x + 1$ admet 2 racines réelles disctintes :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

et il est positif à l'extérieur de ses racines :

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2+3x+1	+	0	-	0	+

$$4<5<9 \Rightarrow 2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow -1<-3+\sqrt{5}<0 \Rightarrow -1<\frac{-1}{2}<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<0$$

$$2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow -2>-\sqrt{5}>-3 \Rightarrow -1>\frac{-5}{2}>\frac{-3-\sqrt{5}}{2}>-3$$

$$donc\ \boxed{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<-1<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$$

sur]-1 ; + ∞[, $x^2 + 3x + 1$ s'annule pour :

$$\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha \simeq -0{,}38$.

sur]-1 ; + ∞[, $x^2 + 3x + 1 > 0$ si et seulement si $x > \alpha$.

Partie A : Limites et asymptotes

1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1}(-x)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(2x+2)=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}\ln(2x+2)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1}\ln(x+2)=\ln 1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$$

on en déduit que la droite d'équation x = -1 est asymptote à la courbe (C)

2.

2. a.

$$f(x) = -x+\ln(2x+2)-\ln(x+2)$$
$$= -x+\ln 2(x+1)-\ln(x+2)$$
$$= -x+\ln 2+\ln(x+1)-\ln(x+2)$$
$$= -x+\ln 2+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

2. b.

$$\text{pour } x\neq 0,\ \frac{x+1}{x+2}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 1+\frac{1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1+\frac{2}{x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\ln 1=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -x+\ln 2=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

2.c.

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0 \Rightarrow$$

donc la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est une asymptote à la courbe (C) en + ∞.

2.d.
Sur]-1 ; + ∞[, $0 < x + 1 < x + 2$ donc :
$$0 < \frac{x+1}{x+2} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < \ln 1 = 0$$
par conséquent $f(x) - (-x + \ln 2) < 0$ sur]-1 ; + ∞[, par conséquent la courbe (C) est en dessous de la droite D sur l'intervalle]-1 ; + ∞[.

Partie B : Etude des variations .

1. f est dérivable sur]-1 ; + ∞[et pour tout réel x de l'intervalle]-1 ; + ∞[on a :
$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x+2)+(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{-(x^2+2x+x+2)+x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-(x^2+3x+2)+1}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{-x^2-3x-2+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-x^2-3x-1}{(x+1)(x+2)} = -\frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$$
2. d'après les préliminaire $(x + 1)$ et $(x + 2)$ sont strictement positifs sur]-1 ; + ∞[,
donc $f'(x)$ est du signe de $-(x^2 + 3x + 1)$.
3.
Valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$.
$f(\alpha) \simeq 0{,}1$
Si vous tenez à calculer vraiment la valeur exacte ...
$$f(\alpha) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + 2\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + 2\ln\left(\sqrt{5}-1\right) - 2\ln 2$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \ln 2 + 2\ln\left(\sqrt{5}-1\right)$$
Tableau de variation de la fonction f

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha) \simeq 0{,}1$	$\searrow$	$-\infty$

Partie C : Représentation graphique

1.
$f(-0{,}8) \simeq -0{,}30 < 0$
$f(-0{,}4) \simeq 0{,}11 > 0$
f est dérivable sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [donc la fonction f est strictement croissante sur]-0.8 ; -0,4 [de plus $f(-0,8) \simeq -0,30 < 0$ et $f(-0,4) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [.

$f(-0,64) > 0$ et $f(-0,65) < 0$ donc $-0,65 < \beta < -0,64$

2.

Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = 1/2$

Ordonnée du point d'abscisse 0 :

$f(0) = \ln 2 - \ln 2 = 0$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par la formule :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

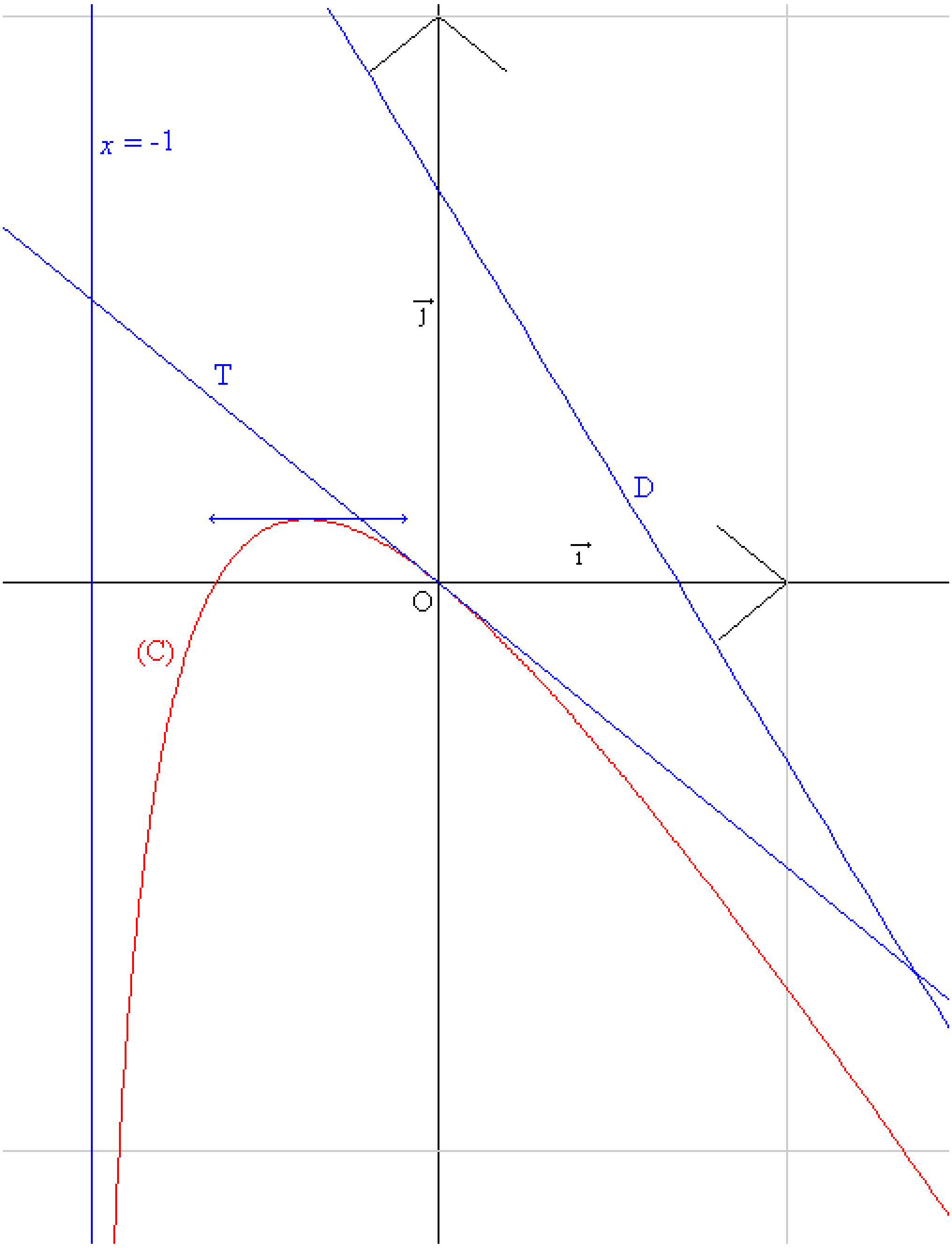
$y = x/2$

T : $y = x/2$

3.

x	-0,8	$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$	-0,3	0,1	0	-0,3	-0,7	-1,6

4.



Problème bac génie mécanique, génie des matériaux session 2001

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = -x + x \ln x$.
(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$.

2. Résoudre dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).

1. Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 0} f(x)$$

2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la partie A pour établir le tableau de variations de f.

3. Calculer $f(e^{\frac{3}{2}})$. On fera apparaître le détail des calculs.

4. Soit A le point d'abscisse 1 de (Γ).
Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe (Γ).

5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente T ainsi que la partie de la courbe (Γ) , relative à l'intervalle [0 ; 6] .

6. Soit la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

b. Calculer en cm² l'aire du domaine limité dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e . On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Partie A

1. $g(x)=0$

$-x + x \ln x = 0$

$x(-1 + \ln x) = 0$

$-1 + \ln x = 0$

(x ne peut pas être égal à 0 puisque la fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$)

$\ln x = 1$

$\ln x = \ln e$

$x = e$

$S =\{e \}$

2. $g(x) > 0$

$x(-1 + \ln x) > 0$

x est toujours strictement positif puisque la fonction est définie sur $]0 ; +\infty[$.

$-1 + \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x > 1$

si et seulement si $\ln x > \ln e$

si et seulement $si\ x > e$

Signe de $x(-1 + \ln x)$:

x	0		e		$+\infty$
x	0	+		+	
$-1+\ln x$		-	0	+	
$x(-1+\ln x)$		-	0	+	

$S =]e ; +\infty[$

Partie B

1. en $+\infty$

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = x^2\left[\frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

en 0

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} x = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{-3}{4}x^2 = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

2. *f* est dérivable sur *]0 ; + ∞[* et pour tout réel x de *]0 ; + ∞[* on a :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \ln x}_{uv}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4}(2x) + \underbrace{\frac{1}{2}(2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}}_{u'v+uv'}$$

$$= \frac{-3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = -x + x\ln x = g(x)$$

en utilisant les résultats de la partie A on en déduit les variations de *f*

x	0		e		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ 0	↘	$-e^2/4$	↗	$+\infty$

$$f(e) = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \ln e = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{-1}{4}e^2$$

3.

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3 \times \frac{3}{2} = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$$

4.

$$f(1) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{-3}{4}$$

donc le point A d'abscisse 1 a pour ordonnée -3/4.

$$f'(1) = g(1) = -1 + 1\ln 1 = -1$$

Le cœfficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est *f '(1) = -1*, on en une l'équation de la tangente au point d'abscisse A :

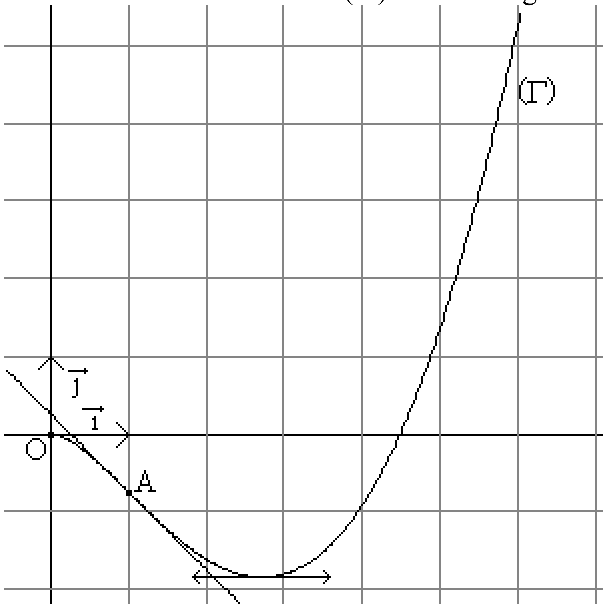
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -1(x-1) - \frac{3}{4}$

$y = -x + 1 - \frac{3}{4}$

$\boxed{y = -x + \frac{1}{4}}$

5. Construction de la courbe (Γ) et de la tangente en A sur [0 ; 6]



6.a. F est une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[si F est dérivable et *F'(x) = f(x)*
F est dérivable et

$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$

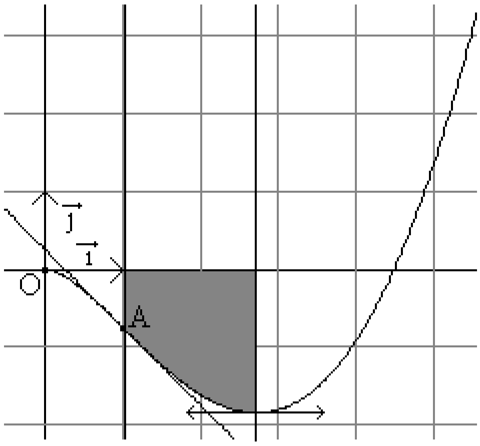
$F'(x) = \frac{1}{6}3x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{11}{36}3x^2$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{2}{12}x^2 - \frac{11}{12}x^2$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{9}{12}x^2 = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

On retrouve bien *F'(x) = f(x)* donc *F* est bien une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[

b.



L'unité d'aire est de 4 cm²
sur l'intervalle [1 ; e], la courbe (Γ) est en dessous de l'axe des abscisses
en unités d'aire l'aire du domaine est :

$$\int_1^e -f(x)dx = -\left[\frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3\right]_1^e$$
$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3\ln e - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{11}{36}\right)\right]$$
$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(-\frac{11}{36}\right)\right]$$
$$= -\left[\frac{6}{36}e^3 - \frac{11}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right]$$
$$= -\left[-\frac{5}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right] = \left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)ua$$
en cm² :
$$\left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)\times 4 = \frac{5e^3 - 11}{9}cm^2 \approx 9{,}94\ \text{cm}^2$$

Problème

Partie A : Etude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
(ln x désigne le logarithme népérien de x)
1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
(Les limites ne sont pas demandées).
3. Calculer $g(1)$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :
$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$
On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
(Unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. a Déterminé
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1. b Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C).
Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

1. c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

1. d En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

1. e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C). Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

1. f Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D).

2. a Montrer que la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{-1}{x}(1 + \ln x)$$

est une primitive de la fonction *h* définie sur]0 ; + ∞[par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

2. b Soit Δ le domaine plan limité par (*D*), (*C*) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. Hachurer Δ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ; en donner une valeur approchée au mm^2

Correction

Partie A : Etude du signe de x^3 - 1 + 2 ln *x*

1. La fonction g est dérivable sur]0 ; + ∞[:

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0 \text{ pour tout réel } x \in \left]0;+\infty\right[$$

donc la fonction g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.

2. Tableau de variation de la fonction *g*.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	

3. $g(1) = 1 - 1 + 2 \ln 1 = 0$

4.

Si $x \leq 1$, alors $g(x) \leq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \leq 0$

Si $x \geq 1$, alors $g(x) \geq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \geq 0$

conclusion : sur]0 ; 1] , $g(x) \leq 0$ et sur [1 ; + ∞[, $g(x) \geq 0$

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle (*C*) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(Unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \quad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x - 1 = -1 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale

à la courbe (C).
(*) voir formulaire
1.b

$$f(x) - (x-1) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x^2} = 0$$

donc la droite (*D*) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (*C*).
Il y a une autre asymptote à la courbe (C) (voir **1.a.**) , c'est la droite d'équation $x = 0$.
1. c

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

.

1. d $f'(x)$ est du signe de g(x) car $x^3 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et le signe de g(x) a déja été trouvé à la partie A :

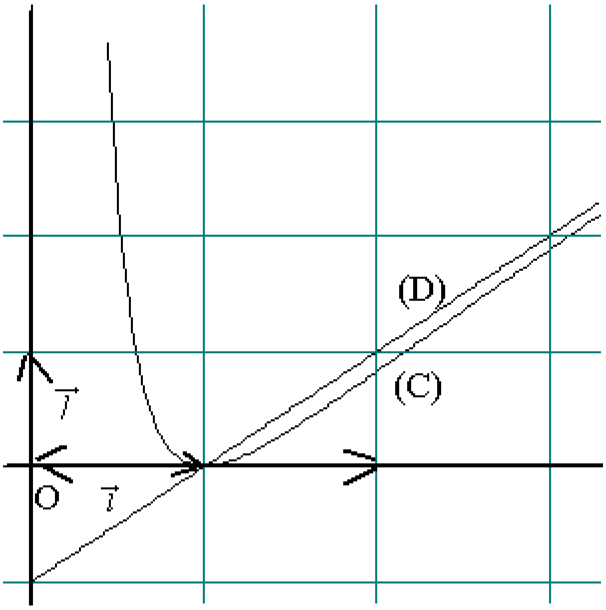
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 0$

1. e Soit x l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (*D*) et de la courbe (*C*) , on a :

$f(x) = x - 1$ soit $\ln x = 0$, par conséquent $x = 1$.
L'ordonnée de ce point est $f(1) = 0$.
La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées (1 ; 0)
$f(x) - \ln x$ est du signe de $-\ln x$ (voir **Partie B 1 .b**)
<u>Etudions le signe de - ln *x* :</u>
$-\ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 0$ soit $\ln x \leq \ln 1$ d'où $x \leq 1$
sur $]0 ; 1]$, $-\ln x \geq 0$ donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D)
sur $[1 ;+\infty[$, $-\ln x \leq 0$ donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)

1.f



2.a

Pour tout réel x on a :

$$H'(x) = \frac{1}{x^2}(1+\ln x) + \frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$$

donc H est une primitive de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$

2.b Soit Δ le domaine plan limité par (D), (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

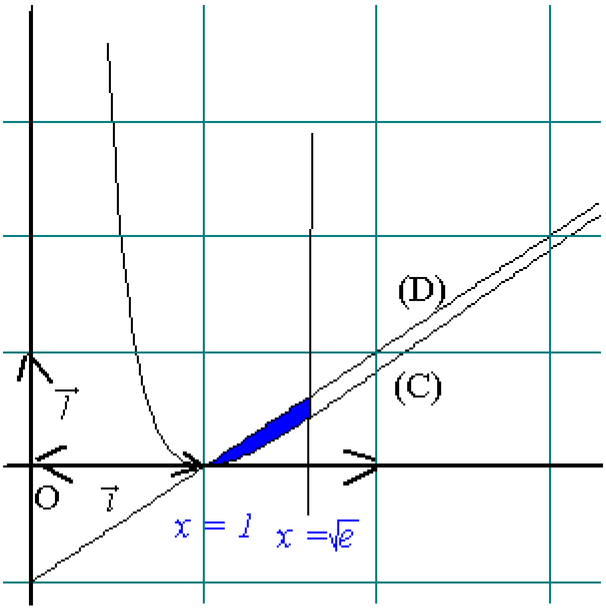
Sur $[1\,;\sqrt{e}\,]$ la courbe (C) est au dessous de (D) donc l'aire du domaine Δ limité par (D), (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$ est en unité d'aire :

$$\int_1^{\sqrt{e}} (x-1) - f(x)dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx = [H(x)]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left[\frac{-1}{\sqrt{e}}(1+\ln\sqrt{e}) + (1+\ln 1)\right] = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\ln e\right)+1 = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\right)+1 =$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\,u.a = \left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)\times 6cm^2 = 6 - \frac{9}{\sqrt{e}}cm^2$$

on trouve en arrondissant au mm^2 : $0{,}54\ cm^2$.



Problème bac session 2000 STI série génie mécanique et génie des matériaux

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle
$I =]\,0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de I)
2) En déduire que pour tout réel strictement positif :
$g(x) > 0$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2cm.
1) a) Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C)
b) En remarquant que f(x) peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

étudier la limite de f en $+\infty$.
2) a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b) Déduire de la partie A, le signe de f '(x), puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I
c) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit (D) la droite d'équation

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

a)Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe
(C).
b) Déterminer par le calculs les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D)
c) Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D)
4) Construire avec soin, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C)

Partie C

On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$

1) En remarquant que h(x) est de la forme u'(x) u(x) , déterminer une primitive de la fonction h.
2. On considère la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équation : $x = 1/e$ et $x = e^2$ Hachurer cette partie de plan, puis calculer son aire en cm^2 .

Correction

Partie A

1) g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ et pour tout réel x appartenant à $]\,0\,;+\infty[$ on a :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $2(x + 1)$ et x sont strictement positif donc g'(x) est du signe de $(x - 1)$ on en déduit les variations de g :

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$g(x)$	$\searrow$ 1 $\nearrow$

2) g(1) = 1 - 2ln 1 = 1 > 0

g admet un minimum absolu en x = 1 qui est g(1) = 1

donc pour tout réel x appartenant à] 0 ; +∞[

g(x) > 0.

Partie B

1) a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$donc \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

interprétation graphique la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation *x = 0.*

b)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) a) f est dérivable sur I et pour tout réel x appartenant à I on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x} =$$

$$\frac{x^2}{2x^2} - \frac{2x\ln x}{2x^2} = \frac{x^2 - 2x\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b) g(x) et 2x² sont strictement positif sur I par conséquent

f '(x) est strictement positif on en conclu que f est croissante sur I.

c)

x	0 $\quad$ $+\infty$
f'(x)	$+$
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) a)

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1+\ln x}{x}$$

or $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\ln x}{x} = 0$

(limite calculée partie A question 1) a))

donc la droite (D) est asymptote à la courbe (C)

b) soit x l'abscisse du point recherché on :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -1 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

1/e est l'abscisse du point recherché , il suffit de reporter cette valeur dans l'équation de (D) pour avoir l'ordonnée de ce point :

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{e} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2e} - \frac{3}{2} = \frac{1-3e}{2e}$$

C'est donc le point de coordonnées :

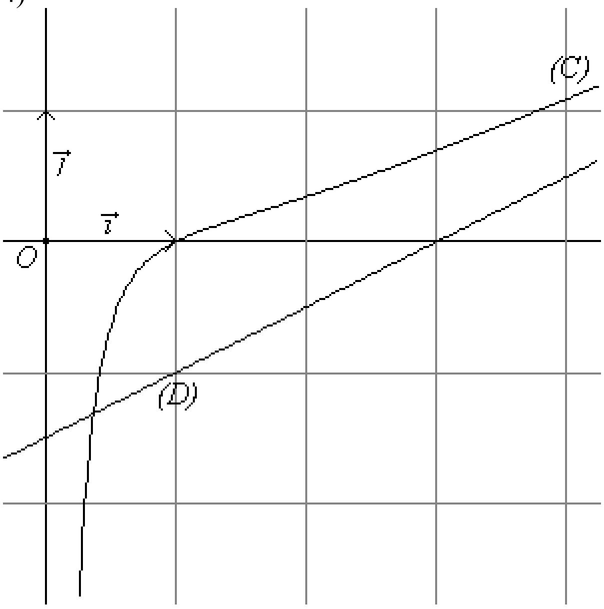
$$\left(\frac{1}{e} ; \frac{1-3e}{2e}\right)$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$1+\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

sur l'intervalle $]0 ; e^{-1}[$, 1+ lnx < 0 donc la courbe (C) est strictement en dessous de la droite (D)
sur l'intervalle $]e^{-1} ; +\infty[$ la courbe (C) est strictement au dessus de la droite (D)

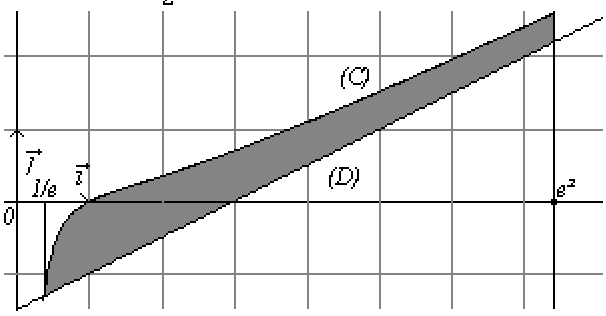
4)



Partie C :

1) h est dérivable sur I , soit H une primitive de h sur I
posons u(x) = ln x on a u'(x) = 1/x et par conséquent h est de la forme u'u on en déduit : H = u²/2

$$H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$



$$\int_{1/e}^{e^2} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_{1/e}^{e} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\, dx =$$

$$\left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1/e}^{e^2} = \ln e^2 + \frac{(\ln e^2)^2}{2} - \ln\frac{1}{e} - \frac{(\ln \frac{1}{e})^2}{2}$$

$$= 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

L'unité d'aire est de 4 cm²
L'aire de la partie hachurée est donc 4 x 9/2 = 18 cm²

Problème du bac sti (GET- GEL) 1998

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle]0 ; + ∞[

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :
g(x) = x ln x - 2x + 3
1.a. Déterminer la limite de g en 0.
(on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$)
b. Déterminer la limite de g en + ∞
(on pourra mettre x en facteur).
2. Déterminer à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de la fonction g.
Dresser le tableau de variations de g.
3. Calculer g(e). En déduire que pour tout x appartenant à]0 ; + ∞[, g(x) > 0

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :
f(x) = 2x² ln x - 5x² + 12 x
On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ayant pour unités graphiques :

- 2 cm en abscisse,
- 1 cm en ordonnée.

1. Soit x appartenant à]0 ; + ∞[. Montrer que f '(x) = 4g(x).
   2. a. Déterminer la limite de f en 0.
   b. Déterminer la limite de f en + ∞.
   3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   4. a. Déterminer une équation de la tangente T_1 à C en son point I d'abscisse 1.
   b. Déterminer une équation de la tangente T_2 à C en son point K d'abscisse e.
   5. Tracer T_1 , T_2 et C .

Partie C
1. Soit la fonction définie sur]0 ; + ∞[par

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

et h la fonction définie sur]0 ; + ∞[par h(x) = x² lnx.
Vérifier que H est une primitive de h sur]0 ; + ∞[.
2. Soit D la partie du plan limitée par les droites d'équation x = 1 et x = e, l'axe des abscisses et la courbe C.
Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, de la partie D. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Correction

Partie A

1.a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}(-2x+3) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$$

1.b.

$$g(x) = x\ln x - 2x + 3 = x\left[\ln x - 2 + \frac{3}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln x - 2 + \dfrac{3}{x}\right] = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

2. g est dérivable comme somme de fonction dérivable sur]0 ; + ∞[, calculons g'(x) :

$$g'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

Étudions le signe de g'(x) :

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

donc g est décroissante sur [0 ; e] et elle est croissante sur [e ; + ∞ [

On en déduit le tableau de variation de la fonction g :

x	0		e		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	3	↘	3 - e	↗	$+\infty$

3. g(e) = e ln e - 2e + 3 = e - 2e + 3 = 3 - e

g admet sur l'intervalle]0 ; + ∞[un minimum absolu en e qui est 3 -e , donc pour tout réel x de l'intervalle]0 ; + ∞[

g(x) > 3 - e > 0.

Partie B.

1.

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur]0 ; + ∞[

$$f(x) = 2x^2\ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 4x\ln x + 2x^2\cdot\frac{1}{x} - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x + 2x - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x - 8x + 12$$

$$= 4(x\ln x - 2x + 3) = 4g(x)$$

2. a.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \left(2x^2 \ln x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \left(-5x^2 + 12x\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

b.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f(x) = x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -5 + \frac{12}{x} = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = +\infty \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. $f'(x) = 4\,g(x)$ donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ d'ou f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

4. a.

Tangente T_1 à C en son point I d'abscisse 1.

$f'(1) = 4(1\ln 1 - 2 + 3) = 4$

Le coefficient directeur de T_1 est 4.

$f(1) = 2\ln 1 - 5 + 12 = 7.$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 7 = 4(x - 1)$

$T_1 : y = 4x + 3$

b.

$f'(e) = 4g(e) = 4(3 - e) = 12 - 4e$ est le coefficient directeur de la tangente en e.

$f(e) = 2e^2\ln e - 5e^2 + 12\,e = 2e^2 - 5e^2 + 12e = -3e^2 + 12\,e$

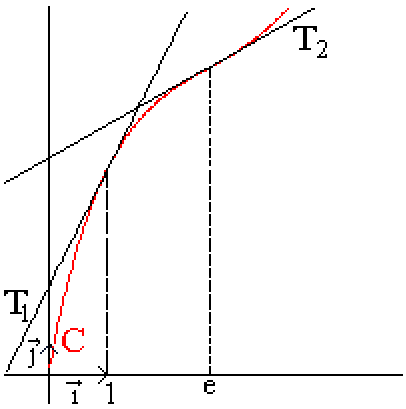
Équation de T_2

$y = -3e^2 + 12e + (12 - 4e)(x - e)$

$y = (12 - 4e)x - 3e^2 + 12e - 12e + 4e^2$

$T_2 : y = (12 - 4e)x + e^2$

5.



Partie C

1.

La fonction H est dérivable sur]0 ; + ∞[et on a :

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

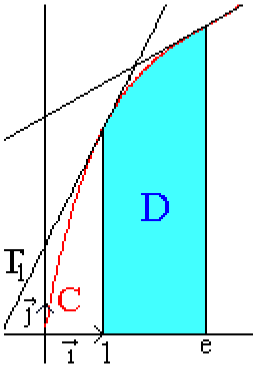
$$H'(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = h(x)$$

(forme (uv)' = u'v + uv')

On en déduit que H est une primitive de la fonction h sur]0 ; + ∞[.

2.



Sur l'intervalle [1; e] , la courbe C est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire A de la partie D est égale en unité d'aire à :

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x)dx$$

$$= \left[2H(x) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}e^3\left(\ln e - \frac{1}{3}\right) - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \left(\frac{-2}{9} - \frac{5}{3} + 6\right)\right]$$

$$= \left[\frac{4e^3}{9} - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \frac{37}{9}\right]$$

$$= -\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9}$$

$$A = 2\left(-\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9}\right)cm^2$$

(vérifiez quand même !)

Soit environ A ≈ 31,35 cm²

Problème du bac sti (GET- GEL) 1999

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle] 0 ; + ∞[

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par :

$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$
1.a. On note g' la dérivée de la de fonction g ; calculer g'(x) et étudier son signe, pour x appartenant à l'intervalle I.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
Les limites de la fonction g en 0 et en + ∞ ne sont pas demandées.
2. Calculer g(1), en déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle I.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.
1. a. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.
b. Étudier la limite de f en + ∞.
2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b. Déduire de la partie A le signe de f′(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.
c. Établir le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle I.

3. Soit D la droite d'équation y = ½ x dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
a. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C.
b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe C et de la droite D.
c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe C par rapport à la droite D.
4. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D et la courbe C.

Partie C

1. On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

En remarquant que

$$\frac{\ln x}{x}$$

est de la forme u'(x).u(x), déterminer une primitive de la fonction h sur l'intervalle I.
2. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe C, la droite et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{1/2}$
Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de cette partie hachurée.

Correction

Partie A
1.a. La fonction g est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

(x + 1) et x sont strictement positifs sur l'intervalle I donc g'(x) est du signe de x - 1.
1.b. On en déduit le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	4	$\nearrow$	

2. a. g(1) = 1² + 3 - 2 ln 1 = 4

donc g admet sur un minimum absolu en 1 qui est 4, donc pour tout réel x de l'intervalle I, g(x) > 0.

Partie B

1.a.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2}x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{2x} = -\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

Par conséquent la droite d'équation x = 0 est asymptote à C (asymptote verticale)

1.b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. a.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+1+2-2\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2+3-2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

2. b.

f '(x) est du signe de g(x) puisque 2x² > 0 sur I.

Or g(x) > 0 sur I , il en résulte f est strictement croissante sur I.

2.c.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a.

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0}_{\text{d'après partie B 1.b.}}$$

Donc la droite D d'équation y = ½ x est bien asymptote à la courbe C. (asymptote oblique)

3. b.

Soit (x ; y) les coordonnées de E , E est le point d'intersection de D et de C, donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

résolvons l'équation

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

sur I pour trouver l'abscisse du point E :

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\frac{-1+2\ln x}{x} = 0$$

$$-1+2\ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

l'abscisse du point E est $\sqrt{e}$, son ordonnée est donc

y = $\sqrt{e}$ / 2

E($\sqrt{e}$; $\sqrt{e}$ / 2)

c. pour étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D, il suffit d'étudier le signe de l'expression f(x) - x/2 =

$$\frac{-1+2\ln x}{x}$$

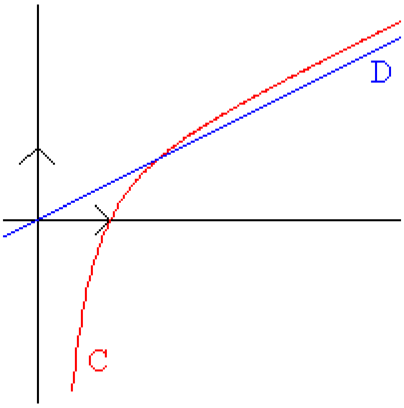
Cette expression est du signe de -1 + 2lnx puisque x > 0 sur I.

-1 + 2lnx > 0 ⇔ 2lnx > 1 ⇔ ln x >1/2 ⇔ x > $\sqrt{e}$

C est au dessous de la droite D sur l'intervalle [0 ; $\sqrt{e}$]

C est au dessus de la droite D sur l'intervalle [$\sqrt{e}$; + ∞ [

4.



<u>Partie C</u>

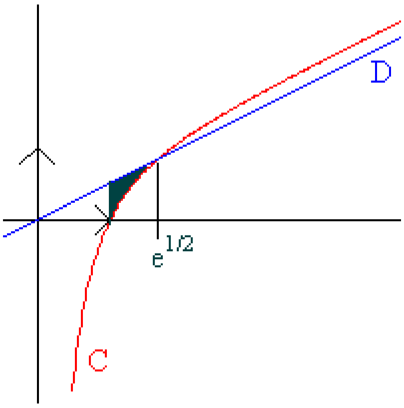
1.

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$$

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

2.



La droite D étant au dessus de la courbe C sur l'intervalle $[1; e^{1/2}]$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{x}{2} - f(x) \right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} h(x)dx \text{ unités d'aire}$$

$$\mathrm{A} = \int_1^{e^{1/2}} h(x)dx \times 4\,\mathrm{cm}^2$$

$$\int_1^{e^{1/2}} h(x)dx = H(e^{1/2}) - H(1)$$

$$\frac{1}{2}\ln e^{1/2} - \frac{(\ln e^{1/2})^2}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} u.a.$$

$$\frac{1}{2} cm^2$$

Problème du bac série STI (GET, GE), 1997

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par :
$g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x$
On admet que le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)		↘		↗	

1. calculer $g(\sqrt{2})$.
2. En déduire que g est une fonction positive sur l'intervalle I.

Partie B

Soit la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm.
1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$
b. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.
c. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$$

d. Déduire de la **partie A**, le signe de f'(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.
e. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

2. Soit (D) la droite d'équation y = x/4 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
a. Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe (C)
b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D)
c. Déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

3. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C)
4. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

a. En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme u'(x).u(x), déterminer une primitive de la fonction h.
b. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation x = $\sqrt{e}$ et x = e. Correction

Partie A

1 et 2.

$$g(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 6 - 4\ln\sqrt{2}$$
$$= 2 + 6 - 2\ln 2 = 8 - 2\ln 2 > 0$$

g atteint son minimum en $\sqrt{2}$ sur I et g($\sqrt{2}$)> 0 donc g(x) > 0 pour tout réel x appartenant à I.

Partie B

1. a

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

1.b

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x} = -\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation x = 0.
c.

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - x\ln x}{x^2} =$$

$$\frac{x^2}{4x^2} + \frac{2}{4x^2} + \frac{4(1 - x\ln x)}{4x^2} =$$

$$\frac{x^2 + 6 - 4x\ln x}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2}$$

d. $4x^2 > 0$ sur I donc f'(x) est du signe de g(x) or g(x) > 0 sur I d'ou f est strictement croissante sur I.

e.

x	0		+∞
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2. a.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \frac{x}{4}\right] = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right]}_{\text{d'après 1.a}} = 0$$

donc la droite d'équation y = x/4 est asymptote à la courbe (C) (c'est une asymptote oblique).

b. Soit M(x ; y) le point d'intersection de (D) et (C) alors le couple (x ; y) est solution du système :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{4} \\ f(x) = \dfrac{x}{4} \end{cases}$$

Résolvons sur I l'équation f(x) = x/4

$$-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\frac{-1 + 2\ln x}{2x} = 0$$

$$2\ln x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

d'ou

$$y = \frac{\sqrt{e}}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (C) sont

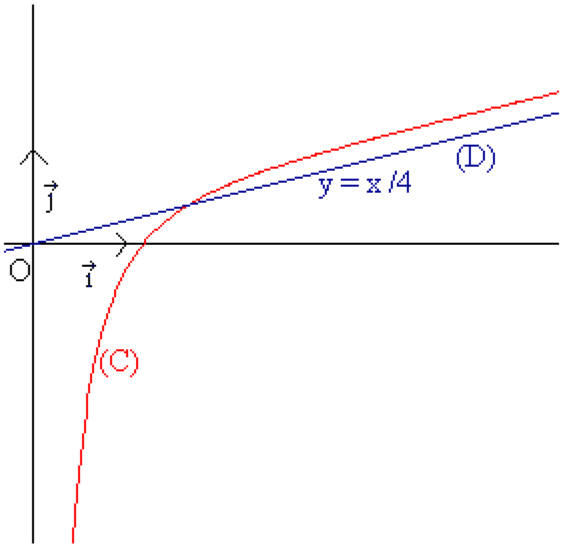
$(\sqrt{e}\ ;\ \sqrt{e}/4)$

c. Pour étudier la position de (C) par rapport à (D) il faut étudier le signe de f(x) - x/4, le signe de f(x) - x/4 dépend de -1 + 2 ln x

$-1 + 2\ln x > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 1/2 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$

Autrement dit la courbe (C) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]0\ ;\ \sqrt{e}]$ et (C) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[\sqrt{e}\ ;\ +\infty[$

3.



4.a. Soit H une primitive de h sur I :

$$h(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$H(x) = \frac{-1}{2} \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}$$

b. Soit A l'aire du domaine, (C) étant au dessus de (D)
on a :

$$A = \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) dx \text{ u.a.} = \int_{\sqrt{e}}^{e} h(x) dx \text{ u.a.}$$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} h(x) dx =$$

$$[H(x)]_{\sqrt{e}}^{e} =$$

$$H(e) - H(\sqrt{e}) =$$

$$\frac{-1}{2} \ln e + \frac{(\ln e)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{\left(\ln(\sqrt{e})\right)^2}{2} =$$

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$A = \frac{1}{8} u.a. = \frac{1}{2} cm^2$$

Problème du bac sti (GE, GET) 1996

Partie A - Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I=]0 ; +∞[par :
f(x) = ln(2x) - ln(x+1)
1. Vérifier que pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I
b. calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition I.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité de longueur est 2 cm.

a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe (O ; $\vec{i}$).

b. déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
c. tracer la courbe (C) et la tangente (T)
4. Déterminer le nombre α tel que la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse α soit parallèle à la droite d'équation y = x.

Partie B - Étude d'une fonction primitive

Soit la fonction g définie sur I=]0 ; +∞[par :
g(x) = x ln(2x) - (x + 1) ln(x + 1)
1. Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur I.
2.a.
Étudier le signe de f(x) d'après les résultats de la **partie A.**
b. En déduire les variations de g sur l'intervalle I
3. Calculer en cm² la valeur exacte de l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$
Préciser une valeur décimale approchée à 0,01cm² près. **Correction**
1. pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

donc pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2.a. la fonction f est dérivable sur I comme somme de 2 fonctions dérivables sur I et

$$f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1} =$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

f'(x) > 0 sur I donc f est strictement croissante sur I.
b.

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

on en déduit que la courbe représentative (C) de la fonction f admet la droite x = 0 comme asymptote (asymptote verticale)

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

or ln(1) = 0 donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

On en déduit donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$
La droite d'équation y = ln 2 est asymptote à la courbe représentative (C) de f (asymptote horizontale)

c.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$

3.a. Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses a une ordonnée nulle donc son abscisse x vérifie l'équation f(x) = 0

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln(2x) - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln(2x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow$$
$$2x = x + 1 \Leftrightarrow$$
$$x = 1$$

C'est donc le point d'abscisse 1.

b. Calculons le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$f'(1) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

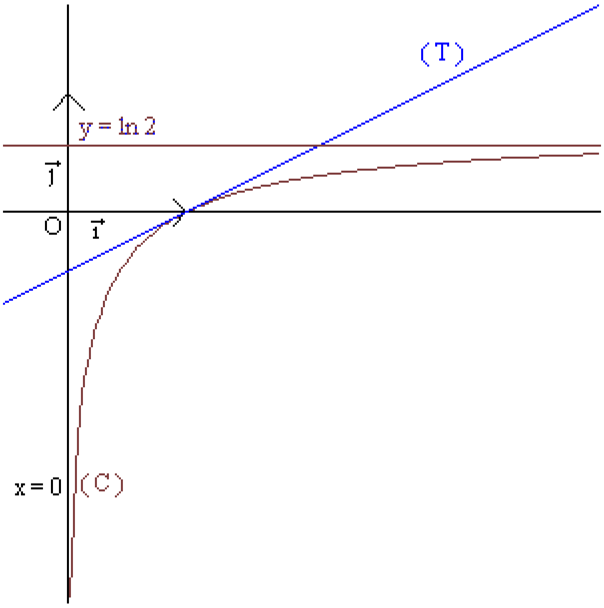
On sait de plus que f(1) = 0 d'après la question 3.a

L'équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe est : y - f(a) = f'(a) (x - a)

Donc l'équation de (T) est y - 0 = 0,5(x - 1)

$$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

c.



4. Pour (Δ) soit parallèle à la droite d'équation y = x il faut que ces deux droites aient le même coefficient directeur c'est à dire 1.

Par conséquent α doit vérifier l'équation f'(x)=1

$$\frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ donc 2 solutions pour l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ convient}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ne convient pas}$$

donc $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Partie B.

1. La fonction g est dérivable sur I, calculons sa dérivée :

$$g(x) = x\ln(2x) - (x+1)\ln(x+1)$$

$$g'(x) = 1\cdot\ln(2x) + x\cdot\frac{2}{2x} - 1\cdot\ln(x+1) - (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$= \ln(2x) + 1 - \ln(x+1) - 1$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1)$$

$$= f(x)$$

g'(x) = f(x) donc g est bien une primitive de f sur I.

2.a on sait que f(1) = 0 on en déduit donc le signe de f(x) :

x	0		1		+∞
f(x)	-∞	↗	0	↗	ln 2
f(x)		-	0	+	

2.b

x	0		1		+∞
f(x)		-	0	+	
g(x)		↗	-ln2	↘	

$$g(1) = \ln 2 - 2\ln 2 = -\ln 2$$

3.La courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle [1; 2] donc l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est égale à :

$$\left(\int_1^2 f(x)dx\right)u.a$$

(u.a unités d'aire)

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x)dx = [g(x)]_1^2 = g(2) - g(1)$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 4 - 3\ln 3 + \ln 2$$

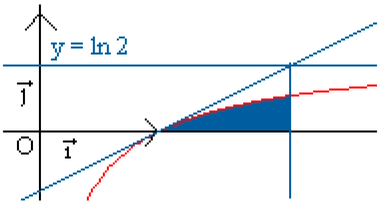
$$= 2\ln 2^2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 4\ln 2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 5\ln 2 - 3\ln 3 = \ln 2^5 - \ln 3^3 = \ln \frac{32}{27}$$

L'unité d'aire étant de 4 cm² ,
L'aire du domaine demandé est donc de :

$$\ln \frac{32}{27}\,\text{u.a.} = 4\ln\frac{32}{27}\,cm^2 \approx 0.680\ cm^2$$



Problème Bac STI GET,GEL 1996

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$
(pour cette dernière on pourra remarquer que : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$
b. En déduire le sens de variation de f .
c. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.
2. Soit $x_2 = 1/\sqrt{e}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2.
a. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2.
b. vérifier que Δ_2 passe par O.
3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.
4. Soit f'' la fonction dérivée de f' : calculer f''(x) pour
x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
Déterminer le réel x_4 qui annule f''(x) .
On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4.
5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2, M_3 , M_4 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$g(x) = (\ln x)^2$$

Calculer la dérivée de g. En déduire une primitive de f sur]0 ; + ∞[,après avoir remarqué que :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1/e et x = 2.
Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².
Correction :
A 1.

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation y = 0 est asymptote en + ∞
2. a.
f est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout réel x de]0 ; + ∞[on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - 1(\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

2.b.
f '(x) est du signe de - ln x car x² > 0 sur]0 ; + ∞[
- lnx > 0 si et seulement si lnx < 0 si et seulement si 0 < x < 1
on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f'(x) ≥0 donc f croissante
sur l'intervalle [1 ; + ∞[, f'(x) ≤0 donc f décroissante .
2. c .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$$

Partie B :

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad M_1\left(\frac{1}{e}; 0\right)$$

2. a.
coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 :

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{\ln\sqrt{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}\ln e}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2}\times\frac{e}{1} = \frac{e}{2}$$

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{e}}{1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

équation de la tangente Δ_2 au point M_2 :

$$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$y = \frac{e}{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{e}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x$$

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3) = 0$ on en déduit $x_3 = 1$ et M_3 (1 ; 1)

4.

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{x-2x\ln x}{x^4} = -\frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

$$x_4 = \sqrt{e}$$

5.

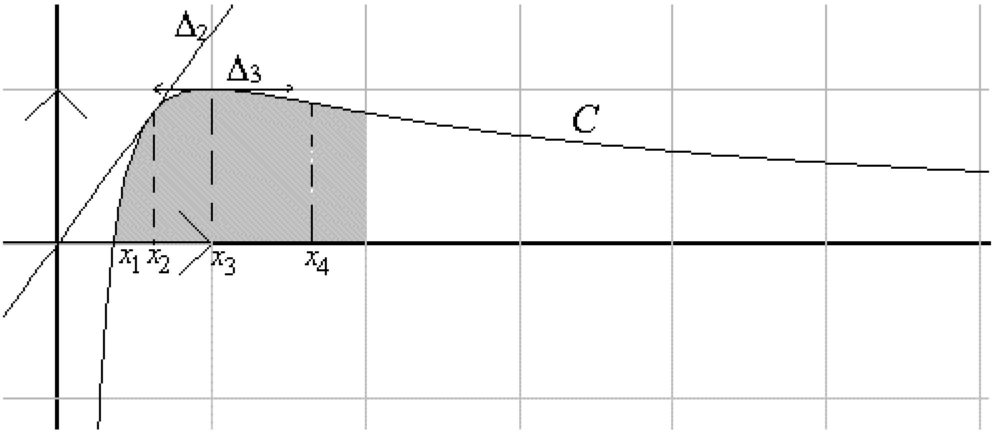
$$x_1 = \frac{1}{e}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \times e = \sqrt{e} \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \quad \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$

donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$

6.



Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout réel x de]0 ; + ∞[on a :

$$g(x) = (\ln x)^2$$

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x}(\ln x)^1 = 2\frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$F(x) = \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2.

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{2} =$$

$$\left[\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(\ln\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2\right)\right] =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2} \simeq 1{,}43\, u.a \simeq 35{,}8\, cm^2$$

Problème du bac série STI (GET, GE), 1995

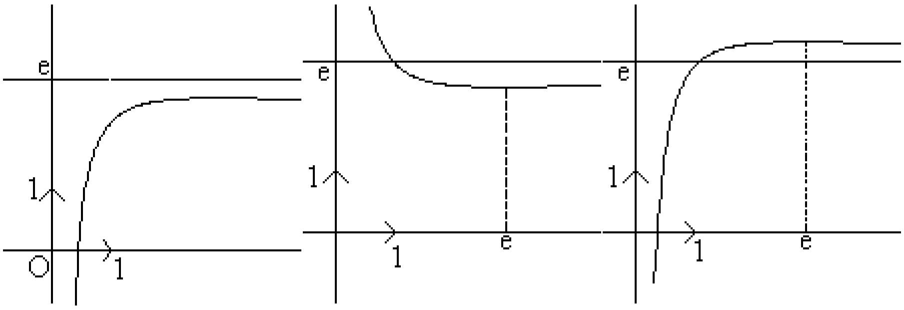
Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de g en 0 et en + ∞. Que peut-on en déduire pour C_g ?
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.
3.



courbe 1

courbe 2

courbe 3

L'une des courbes précédentes est la courbe C_g. Indiquer le numéro correspondant à C_g , en précisant la raison de votre choix .

4. Calculer g(1/e) . En déduire, pour tout x appartenant à]0 ; +∞[, le signe de g(x).

Partie B - Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).
1. Soit x appartenant à]0 ; +∞[. Vérifier que f '(x) = g(x).
2. Déterminer les limites de f en 0 et en + ∞
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f en son point I d'abscisse 1. Préciser la position de C_f par rapport à (T).
5. Tracer (T) et C_f

Partie C -Calcul d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur]0 ; +∞[par :
$H(x) = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = (\ln x)^2$.
Vérifier que H est une primitive de h sur]0 ; +∞[.
2. Soit (D) la partie du plan limitée par les droites d'équations x = 1 et x = e, la tangente (T) et la courbe C_f.
Calculer l'aire A, exprimée en cm² de (D) . On donnera la valeur exacte, puis l'approximation décimale par défaut à 10^{-2} près.

Correction

Partie A

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + e\right) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

Par conséquent la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C_g (asymptote verticale)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + e\right) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = e$$

on peut donc en déduire que la droite d'équation y = e est asymptote à la courbe C_g (asymptote horizontale)

2.

La fonction g est dérivable sur]0 ; +∞[et :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

g'(x) est du signe de 1 - lnx puisque x^2 est strictement positif sur]0 ; +∞[, étudions donc le signe de 1 - ln x

1 - ln x > 0 ⇔ 1 > ln x ⇔ e > x

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} + e = \frac{1}{e} + e$$

x	0		e		+∞
g'(x)		+	0	-	
g(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}+e$	↘	e

3.

- La courbe n°1 est en dessous de la droite d'équation y = e ce qui est en contradiction avec la fonction g, puisque la fonction g est telle que g(e) > e.
- La courbe n°2 est la courbe représentative d'une fonction décroissante, puis croissante, ce qui est en contradiction avec la fonction g qui est croissante sur [0 ; e] et décroissante sur [e ; + ∞[.
- La courbe n°3 est la courbe qui correspond à la fonction g, g admet bien un maximum en e et ce maximum est bien strictement supérieur à e.

4.

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} + e = -e\ln e + e = -e + e = 0$$

x	0	1/e		e		+∞
g'(x)			+	0	-	
g(x)	$-\infty$	0	↗	$\frac{1}{e}+e$	↘	e

On en déduit le signe de g(x) sur]0 ; +∞[

x	0		1/e		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

Partie B

1. f est dérivable sur]0 ; $+\infty$[et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1 + e = \frac{\ln x}{x} + e = g(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (ex - e) = -e\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

2.

On peut en conclure que la courbe C_f admet un asymptote horizontale d'équation x = 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (ex - e) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. f'(x) = g(x) on en déduit les variations de f

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 + e \cdot \frac{1}{e} - e = \frac{1}{2}(-\ln e)^2 + 1 - e = \frac{3}{2} - e$$

x	0		1/e		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	3/2 - e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Calcul du coefficient directeur de cette tangente

$$f'(1) = g(1) = \frac{\ln 1}{1} + e = e$$

e est le coefficient directeur de cette tangente.

$$f(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + e - e = 0$$

y - f(1)= f'(1) (x - 1)

y - 0 = e(x - 1)

Équation de la tangente

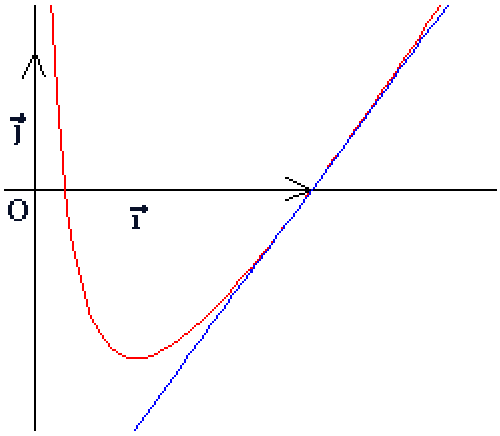
(T) : y =ex - e

Pour étudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente (T) d'équation y = ex - e il suffit d'étudier le signe de f(x) - (ex - e)

$$f(x) - (ex - e) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \geq 0$$

On en déduit que C_f est au dessus de sa tangente (T) au point d'abscisse 1.

5.



Partie C.

1. La fonction H est dérivable sur]0 ; +∞[:

$$H'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x - 2\ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2$$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2$$

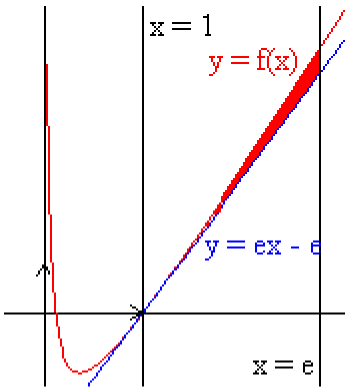
$$= (\ln x)^2 = h(x)$$

donc H est bien une primitive de h sur]0 ; +∞[

2.

$$A = \int_1^e \left[f(x) - (ex - e)\right] dx \ u.a.$$

$$\int_1^e \left[f(x) - (ex - e)\right] dx$$



$$= \int_1^e \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^e h(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[H(x)\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\left[e(\ln e)^2 - 2e\ln e + 2e - 1(\ln 1)^2 + 2\ln 1 - 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e - 2e + 2e - 2\right] = \frac{e-2}{2}$$

$$A = \frac{e-2}{2} u.a. =$$

$$\frac{e-2}{2} \times 4 \times 2\text{cm}^2 = 4(e-2)\text{cm}^2 \approx 2.87\,\text{cm}^2$$

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Problème du bac STI GC-GEN-GM Session 2001

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Soit la f fonction définie sur]- ∞ ; + ∞[par :

$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

Partie A - Construction de la courbe représentative de f

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Vérifier que *$f(x) = e^{-x} (3 + 2xe^{x} - 4 e^{x})$*
Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.
c. Soit C la courbe représentative de f et soit D la droite d'équation :
y = 2x - 4.
Montrer que D est asymptote à C en $+\infty$ et étudier la position relative de la droite D par rapport à courbe C.
2. a Calculer la dérivée de f. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x :
$-3e^{-x} + 2 \geq 0$.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 5]
3. Tracer C, D et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur $]-\infty ; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur]1 ; 2[une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.
b. Préciser, en le justifiant, le signe de f(x) sur l'intervalle $] \alpha ; +\infty [$.
c. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = α€ et x = 4.
En donner une valeur approchée, en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.

Correction

Partie A :
1. a.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 4 = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

1. b.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4 = e^{-x}\left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

1.c.

$$f(x) - (2x - 4) = e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x - 4) = 0$$

donc la droite d'équation y = 2x - 4 est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
f(x) - (2x - 4) > 0 donc la courbe C est au dessus de la droite D.
2. a .

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$f'(x) = -3e^{-x} + 2$$

$$-3e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow -3e^{-x} > -2 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x < \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\frac{3}{2}$$

2. b.

x	$-\infty$		$\ln(3/2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(3/2)-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\ln\frac{3}{2}) = 3e^{-\ln\frac{3}{2}} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 3e^{\ln\frac{2}{3}} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 3\times\frac{2}{3} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 2\ln\frac{3}{2} - 2$$

2. c.

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = -3 + 2 = -1$

$f(0) = 3 - 4 = -1$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = -x - 1$

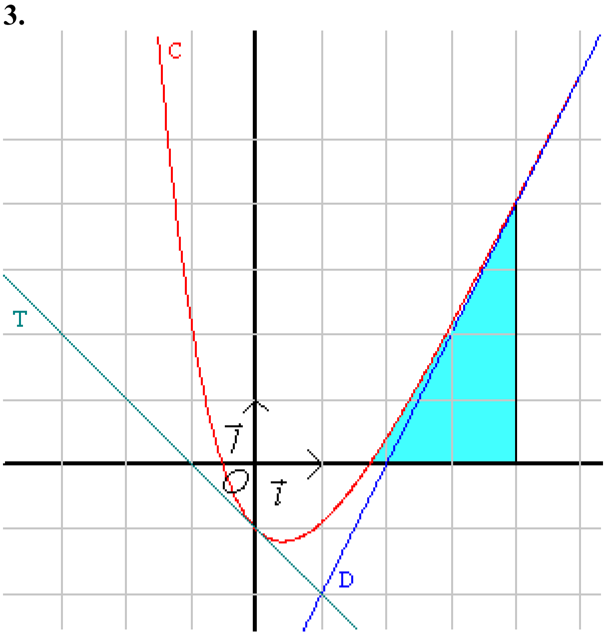
2.d.

$f(-2) = 3e^{2} + 2\times(-2) - 4 = 3e^{2} - 8 \approx 14$ est le maximum sur $[-2;5]$

$f(5) = 3e^{-5} + 2\times 5 - 4 = 3e^{-5} + 6 \approx 6$

$f(\ln\frac{3}{2}) = 2\ln\frac{3}{2} - 2 \approx -1,19$ est le minimum sur $[-2;5]$

3.



Partie B :

1.

$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

$F(x) = -3e^{-x} + x^2 - 4x$

2. a

f'(x) > 0 sur]1 ; 2[donc :
sur l'intervalle [1 ; 2] f est strictement croissante, de plus

$f(1) = 3e^{-1} + 2 - 4 = \frac{3}{e} - 2 < 0$

$f(2) = 3e^{-2} + 4 - 4 = 3e^{-2} > 0$

$donc \quad 0 \in [f(1); f(2)]$

par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α telle que :
$1 < \alpha < 2$.

f(1,7) < 0 et f(1,8) > 0 donc 1,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près par défaut.
2 b. sur l'intervalle] α ; $+\infty$ [la fonction f est strictement croissante, donc pour tout réel x > α on a f(x) > f(α) donc f(x) > 0.
2. c.

$$\int_\alpha^4 f(x)dx = \left[F(x)\right]_\alpha^4 = \left[-3e^{-x} + x^2 - 4x\right]_\alpha^4$$
$$= \left[\left(-3e^{-4} + 16 - 16\right) - \left(-3e^{-\alpha} + \alpha^2 - 4\alpha\right)\right]$$
$$= -3e^{-4} + 3e^{-\alpha} - \alpha^2 + 4\alpha = 4,4 \text{ u.a} = 4,4 \times 2cm^2 = 8,8 \text{ cm}^2$$

Problème du bac sti (GET- GEL- GO) 2000

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle]0 ; $+\infty$[
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle]0 ; $+\infty$[, par :
  $$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$
- f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f;
- C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unité graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :
$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$
b. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, et la limite quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f
2. a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle I :
$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$$
b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de f'(x) .
En déduire le sens de variation de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, f(x) > 0.
3. a. Résoudre, dans l'intervalle I,
l'équation d'inconnue x, f(x) = 9/2.
b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe C_f et de la droite dont une équation est y = 9/2.
(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

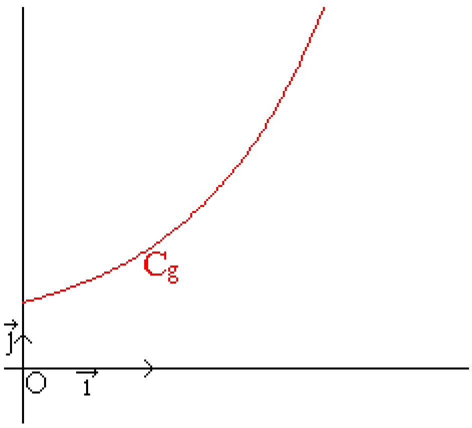
Partie B

Soit la fonction g définie pour tout x de l'intervalle I, par :
g(x) = e^x + 1.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy).
C_g est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie , pour tout x de l'intervalle I, par:
h(x) = f(x) - g(x).
1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de h(x) ; en déduire la position de C_f par rapport à la courbe C_g.
b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation h(x) $\leq$0,05.

On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables.
c. Tracer, avec soin, la courbe C_f sur le graphique ci-après.
2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

en déduire une fonction primitive de h sur I.



3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, la courbe C_g et les droite d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$. (Exprimer le résultat en cm²)

Correction :

Partie A

1.a. Cela correspond à démontrer une égalité.
Pour tout x de l'intervalle I :

$$e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x + 1}{1} + \frac{1}{e^x - 1} =$$

$$\frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x - 1)} + \frac{1}{e^x - 1} =$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{2x}}{e^x - 1} = f(x)$$

donc

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

1.b

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Si $x > 0$ alors $e^x > 1$, d'ou $e^x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \to 0^+} (e^x - 1) = 0^+$$

on en déduit :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+1\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^x+1+\dfrac{1}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

par définition la droite d'équation x = 0 (axe des ordonnées) est asymptote à la courbe C_f(asymptote verticale)

2.a. f est dérivable sur I et :

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-1}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-1)-e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=$$

$$\frac{e^{2x}(2e^x-2-e^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

Remarque : on a utiliser la formule suivante pour dérivée

$$f=\frac{u}{v}$$

$$f'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

b. Le signe de f'(x) ne dépend que du signe de $e^x - 2$, puisque les expression e^{2x} et $(e^x - 1)$ sont toujours strictement positives sur I.

Étudions le signe de $e^x - 2$

$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 2$ (car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow x > \ln 2$

donc f est décroissante sur]0 ; ln2] et elle est croissante sur

[ln2 ; + ∞ [.

$$f(\ln 2)=\frac{e^{2\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}=\frac{2^2}{2-1}=4$$

f admet sur I un minimum absolu en ln 2 , ce minimum est 4, donc pour tout x de l'intervalle I, $f(x) \geq 4 > 0$.

3.a.

$$f(x)=\frac{9}{2}$$

$$\frac{e^{2x}}{e^x-1}=\frac{9}{2}$$

$$2e^{2x}=9e^x-9$$

$$2e^{2x}-9e^x+9=0$$

Pour résoudre cette dernière équation, posons $X = e^x$

on a $X^2 = e^{2x}$ et X est un nombre strictement positif puisque

$e^x > 0$.

$2X^2 - 9X + 9 = 0$

$$\Delta=(-9)^2-4\times 2\times 9=81-72=9>0$$

donc 2 solutions réelles distinctes

pour l'équation $2X^2-9X+9=0$

$$X_1=\frac{9-\sqrt{9}}{4}=\frac{9-3}{4}=\frac{3}{2}$$

$$X_2=\frac{9+\sqrt{9}}{4}=\frac{9+3}{4}=3$$

Ces deux solutions pour X sont acceptable puisque strictement positives

en reprenant $X = e^x$

on a donc $e^x = 3$ ou $e^x = 3/2$

d'ou x = ln3 ou x = ln(3/2)
S = {ln3; ln(3/2)}
3. b. Il s'agit d'interprétation graphique les solutions de l'équation f(x) = 9/2 sont les abscisses des points d'intersections de C_f avec la droite d'équation réduite y = 9/2, on a trouvé ln (3/2) et ln3 comme solution pour l'équation f(x) = 9/2, donc A et B sont les points
A(ln(3/2) ; 9/2) , B(ln3 ; 9/2).µ

Partie B

1.a

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} - (e^x + 1) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Étudions le signe de h(x) sur I :
sur I, e^x - 1> 0, donc h(x) > 0.
On en déduit que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g.

1.b.

$$h(x) \leq 0,05$$

$$0 < \frac{1}{e^x - 1} \leq 0,05$$

$$e^x - 1 \geq \frac{1}{0,05}$$

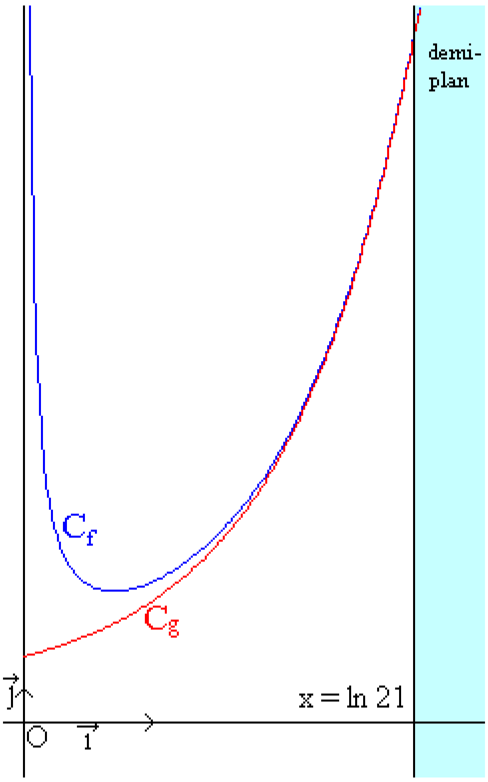
$$e^x - 1 \geq 20$$

$$e^x \geq 21$$

$$x \geq \ln 21$$

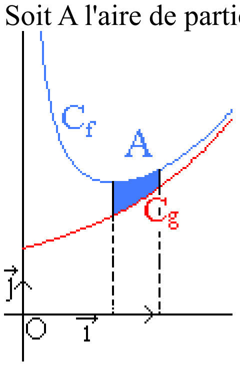
(Pour résoudre cette inéquation, on utilise le théorème de rangement des inverses et des logarithmes.)
Le demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables est le demi-plan caractérisé par l'inéquation x ≥ln 21.

c.



2. Pour tout réel x de I on a :

$$\frac{e^x}{e^x-1}-1=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x-1}{e^x-1}$$
$$=\frac{e^x-e^x+1}{e^x-1}=\frac{1}{e^x-1}=h(x)$$
(voir comment démontrer une égalité)
L'expression qui suit est de la forme u'/u avec *$u(x) = e^x - 1$* et *$u'(x) = e^x$ avec $u > 0$ sur I*
$$\frac{e^x}{e^x-1}$$
On sait que une primitive d'une telle fonction est ln |u|
Soit H une primitive de h sur I , on a alors :
$$h(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-1$$
$$H(x)=\ln(e^x-1)-x$$
3. On sait que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g sur I
donc l'aire de la partie du plan est égale en unité d'aire à :
$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}[f(x)-g(x)]dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}h(x)dx=[H(x)]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$=H(\ln 3)-H(\ln 2)$$
$$=\ln(e^{\ln 3}-1)-\ln 3-\ln(e^{\ln 2}-1)+\ln 2$$
$$=\ln(3-1)-\ln 3-\ln(2-1)+\ln 2$$
$$=\ln 2-\ln 3-\ln 1+\ln 2$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$
Soit A l'aire de partie du plan définie dans l'énoncé, l'unité d'aire étant 4 cm² , A = 4 ln(4/3) cm²



Problème du bac sti (GET- GEL- GO) 2000

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle]0 ; +∞[
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle]0 ; +∞[, par :
$$f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-1}$$
- f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f;
- C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unité graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1.a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f(x) = e^{x} + 1 + \frac{1}{e^{x} - 1}$$

b. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, et la limite quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f
2. a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle I :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^{x} - 2)}{(e^{x} - 1)^2}$$

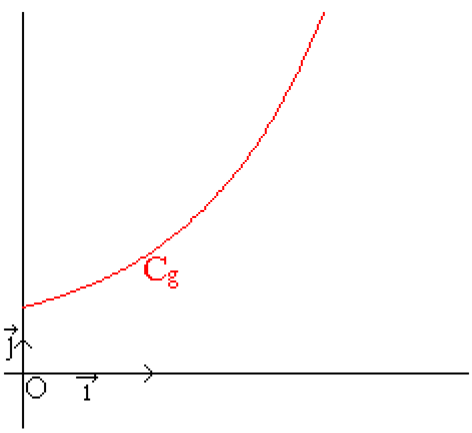
b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de f'(x) .
En déduire le sens de variation de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x) > 0$.
3. a. Résoudre, dans l'intervalle I,
l'équation d'inconnue x, $f(x) = 9/2$.
b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe C_f et de la droite dont une équation est $y = 9/2$.
(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petit.)

Partie B

Soit la fonction g définie pour tout x de l'intervalle I, par :
$g(x) = e^x + 1$.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy).
C_g est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie, pour tout x de l'intervalle I, par:
$h(x) = f(x) - g(x)$.
1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de h(x) ; en déduire la position de C_f par rapport à la courbe C_g.
b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation $h(x) \leq 0{,}05$.
On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables.
c. Tracer, avec soin, la courbe C_f sur le graphique ci-après.
2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{e^{x}}{e^{x} - 1} - 1$$

en déduire une fonction primitive de h sur I.



3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, la courbe C_g et les droite d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$. (Exprimer le résultat en cm²)

Correction :

Partie A

1.a. Cela correspond à démontrer une égalité.
Pour tout x de l'intervalle I :

$$e^x+1+\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x+1}{1}+\frac{1}{e^x-1}=$$

$$\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x-1)}+\frac{1}{e^x-1}=$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^{2x}}{e^x-1}=f(x)$$

donc

$$f(x)=e^x+1+\frac{1}{e^x-1}$$

1.b

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[e^x+1+\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Si x > 0 alors $e^x > 1$, d'ou $e^x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to0^+}(e^x-1)=0^+$$

on en déduit :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+1\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\left[e^x+1+\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$$

par définition la droite d'équation x = 0 (axe des ordonnées) est asymptote à la courbe C_f(asymptote verticale)

2.a. f est dérivable sur I et :

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-1}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-1)-e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=$$

$$\frac{e^{2x}(2e^x-2-e^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

Remarque : on a utiliser la formule suivante pour dérivée

$$f=\frac{u}{v}$$

$$f'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

b. Le signe de f'(x) ne dépend que du signe de $e^x - 2$, puisque les expression e^{2x} et $(e^x - 1)$ sont toujours strictement positives sur I.
Étudions le signe de $e^x - 2$
$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 2$ (car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur]0;+∞[ )

$\Leftrightarrow$ x > ln 2
donc f est décroissante sur]0 ; ln2] et elle est croissante sur
[ln2 ; + ∞ [.

$$f(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

f admet sur I un minimum absolu en ln 2 , ce minimum est 4, donc pour tout x de l'intervalle I, f(x) ≥4 > 0.
3.a.

$$f(x) = \frac{9}{2}$$

$$\frac{e^{2x}}{e^x - 1} = \frac{9}{2}$$

$$2e^{2x} = 9e^x - 9$$

$$2e^{2x} - 9e^x + 9 = 0$$

Pour résoudre cette dernière équation, posons X = e^x
on a X² = e^{2x} et X est un nombre strictement positif puisque
e^x> 0.
2X² - 9X + 9 = 0

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 81 - 72 = 9 > 0$$

donc 2 solutions réelles distinctes

pour l'équation $2X^2 - 9X + 9 = 0$

$$X_1 = \frac{9-\sqrt{9}}{4} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{9+\sqrt{9}}{4} = \frac{9+3}{4} = 3$$

Ces deux solutions pour X sont acceptable puisque strictement positives
en reprenant X = e^x
on a donc e^x = 3 ou e^x =3/2
d'ou x = ln3 ou x = ln(3/2)
S = {ln3; ln(3/2)}
3. b. Il s'agit d'interprétation graphique les solutions de l'équation f(x) = 9/2 sont les abscisses des points d'intersections de C_f avec la droite d'équation réduite y = 9/2, on a trouvé ln (3/2) et ln3 comme solution pour l'équation f(x) = 9/2, donc A et B sont les points
A(ln(3/2) ; 9/2) , B(ln3 ; 9/2).µ

Partie B
1.a

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} - (e^x + 1) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Étudions le signe de h(x) sur I :
sur I, e^x - 1> 0, donc h(x) > 0.
On en déduit que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g.

1.b.

$h(x) \le 0,05$

$$0 < \frac{1}{e^x - 1} \le 0,05$$

$$e^x - 1 \ge \frac{1}{0,05}$$

$e^x - 1 \ge 20$

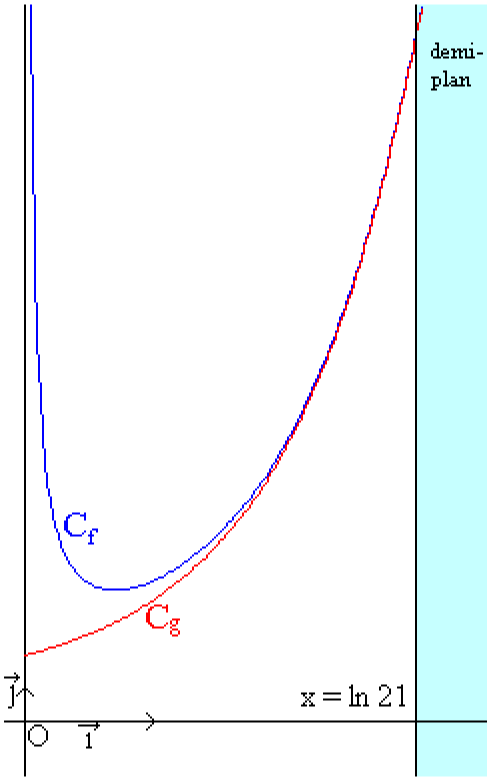
$e^x \ge 21$

$x \ge \ln 21$

(Pour résoudre cette inéquation, on utilise le théorème de rangement des inverses et des logarithmes.)

Le demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables est le demi-plan caractérisé par l'inéquation $x \ge \ln 21$.

c.



2. Pour tout réel x de I on a :

$$\frac{e^x}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1} = h(x)$$

(voir comment démontrer une égalité)

L'expression qui suit est de la forme u'/u avec *$u(x) = e^x - 1$* et *$u'(x) = e^x$ avec $u > 0$ sur I*

$$\frac{e^x}{e^x - 1}$$

On sait que une primitive d'une telle fonction est ln |u|

Soit H une primitive de h sur I , on a alors :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

$H(x) = \ln(e^x - 1) - x$

3. On sait que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g sur I

donc l'aire de la partie du plan est égale en unité d'aire à :

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}[f(x)-g(x)]dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}h(x)dx=[H(x)]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= H(\ln 3) - H(\ln 2)$$

$$= \ln(e^{\ln 3}-1) - \ln 3 - \ln(e^{\ln 2}-1) + \ln 2$$

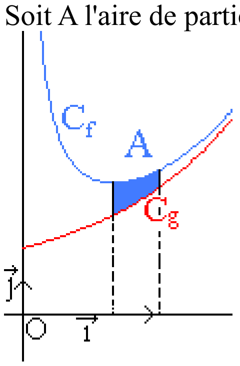
$$= \ln(3-1) - \ln 3 - \ln(2-1) + \ln 2$$

$$= \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{4}{3}$$

Soit A l'aire de partie du plan définie dans l'énoncé, l'unité d'aire étant 4 cm² , A = 4 ln(4/3) cm²



Problème du bac STI GC, GE,GM session 2000

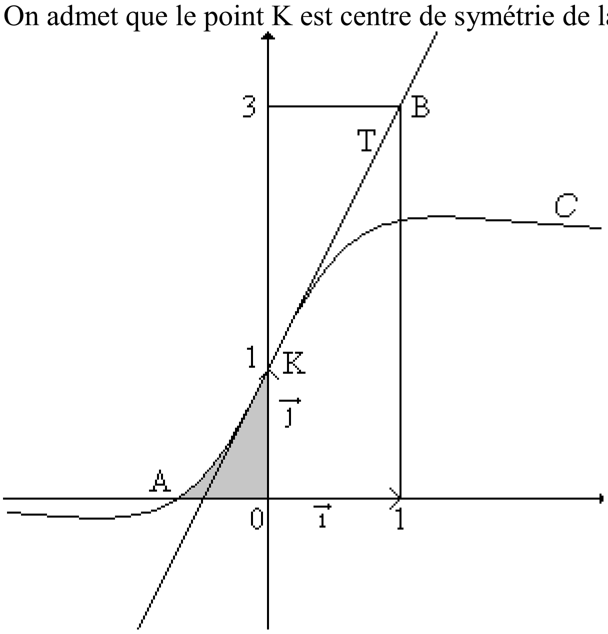
Partie A - Etude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur]-∞; +∞[par :

$$f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe C représentative de f et le tracé de la tangente à la courbe C au point K(0 ; 1) , dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe C et que le point B(1; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe C.

a. Etudier la limite de f en - ∞et préciser l'asymptote à C correspondante

b. On admet que pour tout réel x, f(x) peut se mettre sous la forme :

$$f(x)=\frac{2-e^{-x}}{1-e^{-x}+e^{-2x}}.$$

En déduire la limite en + ∞ et préciser l'asymptote à C correspondante.
c. Vérifier par le calcul, que le point A(-ln2, 0) est un point de la courbe C.
2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.
a. Déterminer la valeur de $f'(0)$
b . Donner le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

Partie B - Etude d'une primitive de f sur]-∞; +∞[

Soit F la fonction définie sur]-∞; +∞[par :
$F(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$
et (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé
$(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier la limite de F en - ∞. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).
2. a. vérifier que pour tout réel x , F(x) peut s'écrire :
$F(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.
b. Calculer la limite de F en +∞, puis la limite de F(x) - (2x) en +∞
c. En déduire que la courbe (Γ) admet une asymptote.
3. a. Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur]-∞; +∞[
b. Vérifier que F(-ln2) = ln (3/4)
c. Déduire de la **partie A** le tableau de variation de la fonction F.
4. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près :

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
F(x)									

5. Sur la feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm, les droites d'équations respectives y = 2x et y = 0, puis la courbe (Γ).

Partie C - Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx$.
2. En déduire la valeur exacte en cm² de l'aire du domaine AOK (grisé sur la courbe jointe) et en donner une valeur approchée à un millimétré carré près par excès.

Problème du bac STI GC-GEN-GM Session 2001

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
Soit la f fonction définie sur]- ∞ ; + ∞[par :
$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$
Partie A - Construction de la courbe représentative de f

1. a. Déterminer la limite de f en + ∞ .
b. Vérifier que $f(x) = e^{-x}(3 + 2xe^{x} - 4e^{x})$
Déterminer alors la limite de f en -∞ .
c.Soit C la courbe représentative de f et soit D la droite d'équation :
y = 2x - 4.
Montrer que D est asymptote à C en + ∞ et étudier la position relative de la droite D par rapport à courbe C.
2. a Calculer la dérivée de f. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x :
$-3e^{-x} + 2 \geq 0$.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 5]
3. Tracer C, D et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur]- ∞ ; + ∞[.
2. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur]1 ; 2[une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.
b. Préciser, en le justifiant, le signe de f(x) sur l'intervalle] α ; +∞ [.
c. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = α€ et x = 4.
En donner une valeur approchée, en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.

Correction

Partie A :
1. a.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 4 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

1. b.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4 = e^{-x}\left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

1.c.

$$f(x) - (2x - 4) = e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x - 4) = 0$$

donc la droite d'équation y = 2x - 4 est asymptote à la courbe C en +∞.
f(x) - (2x - 4) > 0 donc la courbe C est au dessus de la droite D.
2. a .

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$f'(x) = -3e^{-x} + 2$$

$$-3e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow -3e^{-x} > -2 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x < \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\frac{3}{2}$$

2. b.

x	$-\infty$		$\ln(3/2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(3/2)-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\ln\frac{3}{2}) = 3e^{-\ln\frac{3}{2}} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 3e^{\ln\frac{2}{3}} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 3\times\frac{2}{3} + 2\ln\frac{3}{2} - 4 = 2\ln\frac{3}{2} - 2$$

2. c.
Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = -3 + 2 = -1$

$f(0) = 3 - 4 = -1$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = -x - 1$

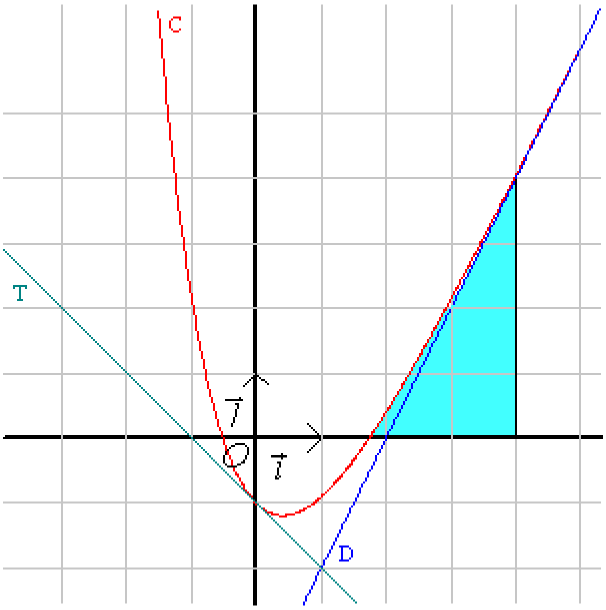
2.d.

$f(-2) = 3e^{2} + 2 \times (-2) - 4 = 3e^{2} - 8 \approx 14$ est le maximum sur $[-2;5]$

$f(5) = 3e^{-5} + 2 \times 5 - 4 = 3e^{-5} + 6 \approx 6$

$f(\ln \frac{3}{2}) = 2\ln \frac{3}{2} - 2 \approx -1,19$ est le minimum sur $[-2;5]$

3.



Partie B :

1.

$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

$F(x) = -3e^{-x} + x^2 - 4x$

2. a

f'(x) > 0 sur]1 ; 2[donc :
sur l'intervalle [1 ; 2] f est strictement croissante, de plus

$f(1) = 3e^{-1} + 2 - 4 = \frac{3}{e} - 2 < 0$

$f(2) = 3e^{-2} + 4 - 4 = 3e^{-2} > 0$

$donc \quad 0 \in [f(1); f(2)]$

par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α telle que :
1 < α < 2 .
f(1,7) < 0 et f(1,8) > 0 donc 1,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près par défaut.
2 b. sur l'intervalle] α ; +∞ [la fonction f est strictement croissante, donc pour tout réel x > α on a f(x) > f(α) donc f(x) > 0.
2. c.

$$\int_{\alpha}^{4} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{4} = \left[-3e^{-x} + x^2 - 4x\right]_{\alpha}^{4}$$

$$= \left[\left(-3e^{-4} + 16 - 16\right) - \left(-3e^{-\alpha} + \alpha^2 - 4\alpha\right)\right]$$

$$= -3e^{-4} + 3e^{-\alpha} - \alpha^2 + 4\alpha \approx 4,4 \text{ u.a} = 4,4 \times 2cm^2 = 8,8 \text{ cm}^2$$

Problème du bac sti (GET, GEL, GO) session 2002

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(x + 3) - 1$
1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]-4 ; 0[$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.

Partie B: Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x + 2)e^x$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à courbe (C_f) en $-\infty$.

c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et C_f

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3. Vérifier que pour tout réel, on a *f'(x) = g(x)*

4. Dresser le tableau de variation de *f*.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$? La courbe (C_f), la tangente (T) et l'asymptote (D).
(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (x + 1)e^x$. Calculer H'(x) puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer en cm², l'aire A comprise entre la courbe (C_f) , l'axe des abscisses , la droite d'équation $y = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie A :

1.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+3) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x+3) = +\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = -1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g(x) = e^x(x+3) - 1 = xe^x + 3e^x - 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-1) = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

Remarque : la courbe représentative de g

admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = e^x(x+3) + e^x$$
$$= e^x(x+3+1)$$
$$= e^x(x+4)$$
$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x)$ est du signe de $x + 4$
On en déduit les variations de g

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-4) = e^{-4}(-4+3) - 1 = -e^{-4} - 1$

3.
$g(0) = e^0(0+3) - 1 = 3 - 1 = 2$

- La fonction g est dérivable sur $[-4 ; 0]$
- $g'(x) > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]-4 ; 0[$
- $0 \in [g(-4) ; g(0)] = [-e^{-4} - 1 ; 2]$

Donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α sur l'intervalle $[-4 ; 0]$ (théorème de la bijection)
4.

x	$-\infty$		-4		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $x \in]-\infty ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$
pour $x \in [\alpha ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

<u>Partie B.</u>
1.a
$$f(x) = -x + (x+2)e^x = -x + xe^x + 2e^x$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
1.b
$$f(x) - (-x) = -x + xe^x + 2e^x + x$$
$$= xe^x + 2e^x$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (-x)\right] = 0$$
donc la droite d'équation y = -x est asymptote à courbe (C_f) en $-\infty$.
1.c.
$f(x) - (-x) = (x+2)e^x$ est du signe de $(x + 2)$

- si x $\leq$-2 , la courbe C_f est au dessous de la droite d'équation D : y = - x .
- si x $\geq$-2 , la courbe C_f est au dessus de la droite d'équation D : y = - x .

(voir position relative de 2 courbes)

2. L'expression

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

est obtenue en mettant e^x en facteur dans $f(x)$.

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right] = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x}{e^x} + (x+2)\right] = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + e^x + (x+2)e^x \\ &= -1 + (x+2+1)e^x \\ &= -1 + (x+3)e^x \\ &= (x+3)e^x - 1 = g(x) \end{aligned}$$

4. On a déterminer le signe de g(x) à la question 4 de la partie A, on peut donc en déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

- sur]- ∞; α] f'(x) < 0 et f est décroissante
- sur [α ; +∞ [f'(x) > 0 et f est croissante

f atteint son minimum en α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		$\searrow$	f(α)	$\nearrow$	

5. f '(0) = g(0) = 2 d'après la question 3 de la partie A

f(0) = - 0 + (0 + 2)e^0 = 2

l'équation de la tangente au point A d'abscisse 0 :

y - f(0) = f '(0) (x - 0)

y - 2 = 2x

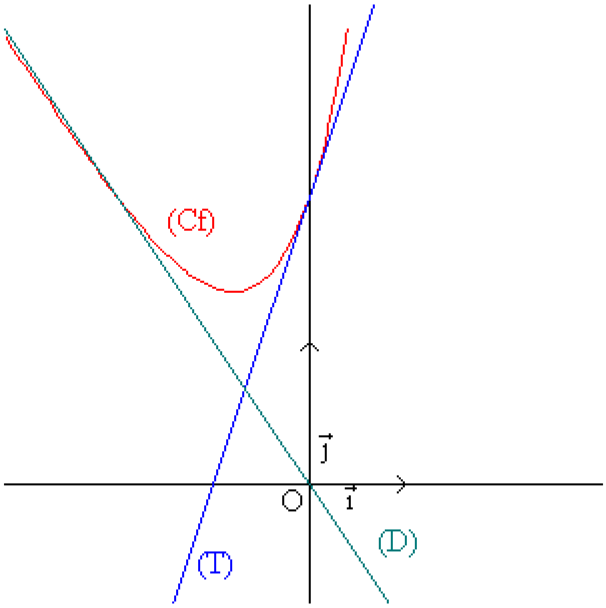
y = 2x + 2.

6. On peut utiliser la méthode de dichotomie que l'on peut programmer sur calculatrice graphique. On trouve ainsi

f(-0,80) < 0 et f(-0,79) > 0 donc une valeur approchée de α à 10^{-2} près est α ≈€ -0,79.

Valeur approchée de f(α) ≈1,34 (pour trouver cette valeur sur la calculatrice on est obliger de laisser les deux fonctions f et g dans le même tableau).

7.



Partie C.

1. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$H'(x) = e^x + (x + 1)e^x = e^x (x + 1 + 1) = e^x(x + 2)$
donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x(x + 2)$ admet H comme primitive sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = -x + e^x(x + 2)$
$F(x) = -x^2/2 + (x + 1)e^x$

2. L'unité d'aire en cm² est de 6 cm².
Sur l'intervalle [-2 ; 0] , C_f est au dessus de l'axe des abscisses (minimum > 0) donc l'aire est égale en unité d'aire à :

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + (x+1)e^x \right]_{-2}^{0}$$

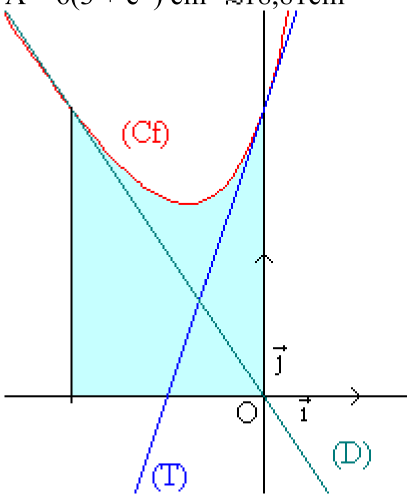
$$= \left(-\frac{0^2}{2} + (0+1)e^0 \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} + (-2+1)e^{-2} \right)$$

$$= 1 - \left(-2 - 1e^{-2} \right)$$

$$= 1 + 2 + e^{-2}$$

$$= 3 + e^{-2}$$

$A = 6(3 + e^{-2})$ cm² $\approx 18{,}81$ cm²



Problème du bac sti (GM, GC, GEN) 1997

On appelle *f* la fonction numérique de la variable réelle définie sur]-2 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{2(x + 2)}$$

On note C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A - Etude de la fonction f

1. Etudier la limite de *f(x)* lorsque x tend vers -2.
En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C.
Donner une équation de cette asymptote.
2. a. Etudier la limite de *f(x)* lorsque x tend vers + ∞.
b. Déterminer trois nombres a, b, c tels que, pour tout x élément de]-2 ; +∞[, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

c. Montrer que la droite Δ d'équation

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

est asymptote à la courbe C.
Etudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ .
3. a. Montrer que la dérivée *f'* de la fonction *f*
peut s'écrire de la façon suivante :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x + 2)^2}$$

b. En déduire les variations de la fonction *f* et dresser le tableau de variations de cette fonction sur sur]-2 ; +∞[.
4. Représenter sur un même graphique les asymptotes D et Δ et la courbe C.
Partie B

Correction :

1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} 2(x + 2) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -2} x^2 + 4x + 2 = 4 - 8 + 2 = -2 \end{array}\right\}$$

$$\text{donc } \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

donc la droite d'équation x = -2 est asymptote à la courbe (asymptote verticale)

2.a.

$$f(x) = \frac{x^2+4x+2}{2(x+2)} =$$

$$\frac{x^2+4x+2}{2x+4} = \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{4}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{4}{x}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{4}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{4}{x}\right)} = +\infty$$

2.b.

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$

$$= \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{2ax^2+2(2a+b)x+2(2b+c)}{2(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+4x+2}{2(x+2)}$$

$$\text{On a} : \begin{cases}2a=1\\2(2a+b)=4\\2(2b+c)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\2a+b=2\\2b+c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=1\\c=-1\end{cases}$$

On en déduit que f(x) peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{x}{2}+1-\frac{1}{x+2}$$

c.

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right) = -\frac{1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+2} = 0$$

donc la droite d'équation

$$y = \frac{x}{2}+1$$

est asymptote à C.

Pour étudier la position relative de C par rapport à la droite Δ
il faut étudier le signe de la différence :

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right) = -\frac{1}{x+2}$$

si $x + 2 > 0$ c'est à dire si $x > -2$ cette différence est négative donc C est en dessous de la droite Δ sur l'intervalle *]-2 ; +∞[*.

3. a. f est dérivable sur]-2 ; + ∞[.

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2} + 1 \text{ a pour dérivée } x \mapsto \frac{1}{2}$$

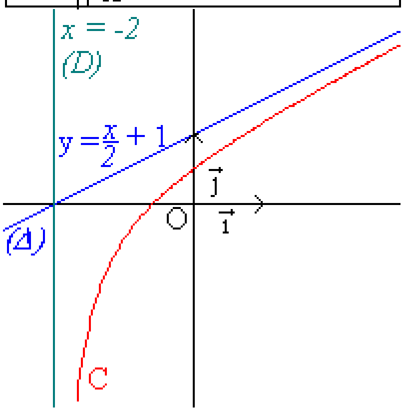
$$x \mapsto \frac{-1}{x+2} \text{ a pour dérivée } x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$$

donc on a bien pour tout réel x de]-2 ; + ∞[

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

f'(x) > 0 sur]-2 ; + ∞[donc f est strictement croissante sur]-2 ; + ∞[:

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Devoir surveillé des terminales GM (2004)

Etude d'une fonction avec logarithme népérien (ref sujet du bac sti)

Partie I : Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $g(x) = -x + x\ln x$
(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle] 0 ; + ∞[l'équation $g(x) = 0$
2. Résoudre dans l'intervalle]0 ; + ∞[l'équation $g(x) > 0$

Partie II :
Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités 2 cm) .
1. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la partie I pour établir le tableau de variation de f .
3. Calculer $f(e^{3/2})$. On fera apparaître le détail des calculs.
4. Soit A le point d'abscisse 1 de (Γ). Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (Γ).

5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente (T) ainsi que la partie de la courbe (Γ) relative à l'intervalle] 0 ; 6].

6. Soit F la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$$

6.a. Montrer que F est une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[.

6.b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droite d'équations $x = 1$ et $x = $ e. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction :

Partie I :

1.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$-x + x\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$x(-1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow$

$-1 + \ln x = 0$ (puisque $x \neq 0$ sur]0 ; + ∞[, on peut diviser par x) $\Leftrightarrow$

$\ln x = 1 \Leftrightarrow$

$\ln x = \ln e \Leftrightarrow$

$x = e$

S = $\{e\}$

2.

$g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$-x + x\ln x > 0 \Leftrightarrow$

$x(-1 + \ln x) > 0 \Leftrightarrow$

$-1 + \ln x > 0$ (puisque $x > 0$) $\Leftrightarrow$

$\ln x > 1 \Leftrightarrow$

$\ln x > \ln e \Leftrightarrow$

$x > e$

S = $]e ; +\infty[$

Partie II :

1.

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = x^2\left[-\frac{3}{4} + \ln x\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{4} + \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{3}{4}x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

2.

$$f'(x) = -\frac{3}{4}(2x) + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}\right) = \frac{-3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = -x + x\ln x = g(x)$$

or d'après la partie I, on sait que g(x) > 0 si et seulement si x > e et g(x) = 0 si et seulement si x = e, on en déduit donc les variations de *f* :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e) = -\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \ln e = -\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{-e^2}{4}$$

3.

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{4}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3\,\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$$

4.

$$\text{coefficient directeur : } f'(1) = -1 + 1\ln 1 = -1$$

$$\text{ordonnée du point A : } f(1) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}1^2 \ln 1 = \frac{-3}{4}$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

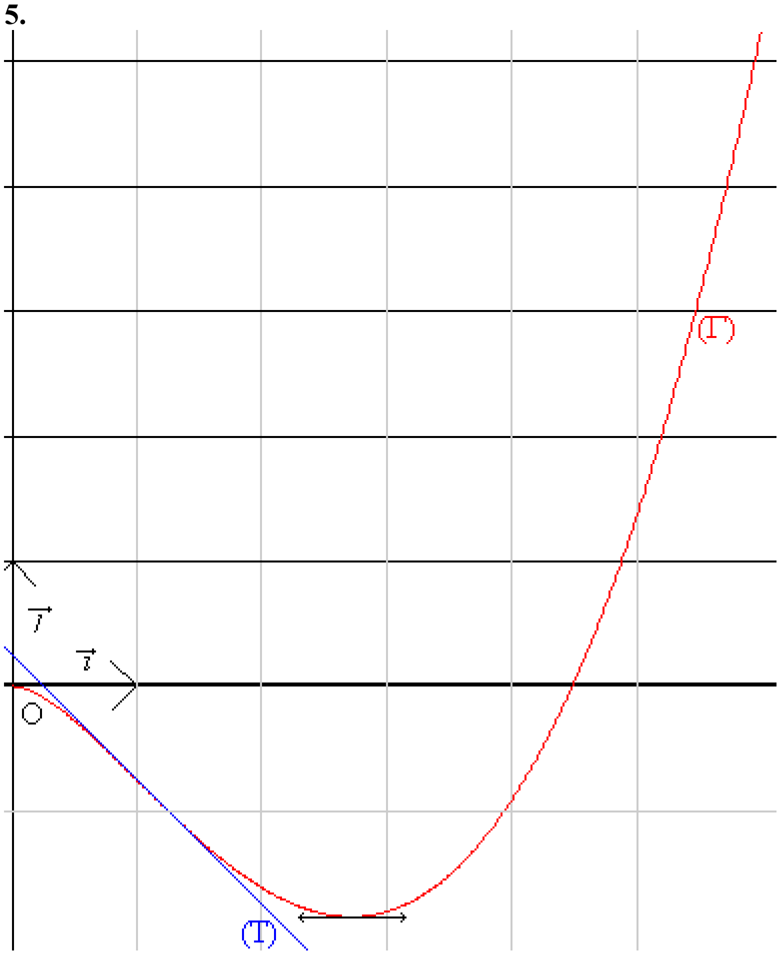
$$y = -(x-1) - \frac{3}{4}$$

$$y = -x + 1 - \frac{3}{4}$$

$$y = -x + \frac{1}{4}$$

l'équation de la tangente (T) au point A d'abscisse 1 est : $y = -x + 1/4$

5.



6.a.

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$$

$$F'(x) = \frac{1}{6}3x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^3 \frac{1}{x} - \frac{11}{36}(3x^2) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{2}{12}x^2 - \frac{11}{12}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{9}{12}x^2 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = f(x)$$

$F'(x) = f(x)$

donc F est bien une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$

6.b.

Sur l'intervalle [1 ; e] la courbe (Γ) est en dessous de l'axe des abscisses donc l'aire du domaine limité est en unité d'aire :

$$-\int_1^e f(x)dx$$

$$\int_1^e f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^e = \left[\frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3\right]_1^e = \left[\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right] = \left[\frac{-5}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right]$$

l'unité d'aire graphique est 4 cm² donc la valeur exacte de l'aire est :

$$4\left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right) = \frac{5}{9}e^3 - \frac{11}{9}$$

et une valeur approchée 10^{-2} près de cette aire est : 9,94 cm²

EXERCICE 3 (4 points)
Commun à tous les candidats
L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Partie A : Étude d'une fonction
On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par :
$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}$$
1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a :
$$f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$
.
2. En déduire le tableau de variations de *f* sur]0 ; +∞[(les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout *x* de]0 ; +∞[,on a :
$$\ln x \leq \sqrt{x}$$
Partie B: Utilisation des théorèmes de comparaisons
1. Démontrer que, pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, on a :
$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$
2. Déterminer :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
En déduire
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$
On rappelle que la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{est } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
.

Correction :

Partie A :
1. La fonction f est dérivable sur]0 ; +∞[et
pour tout réel x strictement positif on a :
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$
2.
$f'(x)$ est du signe de $2 - \sqrt{x}$, car $x > 0$ sur]0 ; +∞[
étudions le signe de $2 - \sqrt{x}$
$2 - \sqrt{x} > 0$ si
$2 > \sqrt{x}$ si
$4 > x \geq 0$
on en déduit les variations de *f* sur]0 ; +∞[
$f(4) = \ln 4 - 2 < 0$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	+	0	-	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$\ln 4 - 2$	$\searrow$	

f admet un maximum absolue sur $]0\,;+\infty[$ qui est égal à $\ln 4 - 2 < 0$ pour $x = 4$ donc pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :
$f(x) \leq 0$ par conséquent : $\ln x - \sqrt{x} \leq 0$ d'où $\ln x \leq \sqrt{x}$

Partie B :

1. en divisant par $x > 0$ les 2 membres de l'inégalité $\ln x \leq \sqrt{x}$ on obtient :

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$$

c'est à dire encore :

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

si de plus $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et $x > 0$ par conséquent :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x}$$

conclusion pour tout réel $x > 1$ on a :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

le théorème de comparaison des " gendarmes " permet de conclure

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$