COLLÈGE F.X. VOGT	VOGT ORA ET LABORA	Année scolaire 2022-2023
Second cycle Département de Mathématiques	**PROBATOIRE BLANC**	Date : Mai 2023 Série : D Durée : 3h ; Coeff : 4

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 :(2,5 points)

Soit le polynôme P défni par $P(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$.

1. Vérifier que $(2\sqrt{3} - 2)^2 + 16\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2)^2$. **0,25pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. **0,75pt**
3. En déduire les solutions dans $[0; 2\pi[$ de l'équation trigonométrique ci-dessous et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique: $-4cos^2x + (2\sqrt{3} - 2)cosx + \sqrt{3} = 0$. **1,5pt**

Exercice 2 :(6 points)

I- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Justifier que f est impaire. **0,25pt**
2. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à (C). **0,5pt**
3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2}$, puis en déduire les variations de f. **1pt**

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$. **0,5pt**
4. a) Préciser l'élément de symétrie de la courbe (C). **0,25pt**

   b) Tracer avec soin (Δ) et (C). **1pt**

II- Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{3U_n}{2U_n+3}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n > 0$ et on désigne par $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $V_n = \frac{1}{U_n}$.

1. Calculer U_2 et U_3. **0,5pt**
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ dont on déterminera le premier terme V_1. **1pt**
3. En déduire l'expression de V_n, puis celle de U_n en fonction de n. **1pt**

Exercice 3: (3 points)

Dans une ferme, une observation des poids d'un certain nombre de lapins a donné les résultats consignés dans le tableau ci-après :

Poids (en Kg)	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$
Effectifs	10	14	20	6

1. Déterminer le poids moyen de ces lapins. **0,5pt**
2. Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants pour cette série statistique (prendre en abscisses 1 cm pour 1 Kg et en ordonnées 1 cm pour 10 lapins). **1pt**
3. Déterminer graphiquement la médiane de cette série. **0,5pt**
4. On choisit au hasard et successivement sans remise deux lapins dans cette ferme parmi ceux dont le poids est inférieur à 2 Kg pour les faire vacciner.

a) Déterminer le nombre de choix possibles que l'on peut faire. **0,5pt**

b) Déterminer le nombre de choix pour lesquels au moins un lapin ait un poids inférieur à 1 Kg. **0,5pt**

Exercice 4: (3,5 points)

I- ABC est un triangle rectangle en A et de sens direct tel que : AB =6 cm ; AC =8 cm ; et BC =10 cm. Soit I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [AC].

1. Faire la figure et placer le point H barycentre des points pondérés (A ; 1) ; (B ; 1) et (C ; 2). **0,5pt**
2. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $MI^2 + MC^2 = \frac{89}{2}$.
   a) Montrer que $MI^2 + MC^2 = 2MH^2 + \frac{IC^2}{2}$. **0,5pt**
   b) En déduire la nature exacte de l'ensemble (E) et construire cet ensemble. **0,75pt**
3. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et par r la rotation de centre A qui transforme I en J. On considère la transformation affine $s = h \circ r$.
   a) Donner l'angle de r, puis préciser la nature et les éléments caractéristiques de s. **0,75pt**
   b) Déterminer sur la figure précédente, l'image du point I par s. **0,25pt**

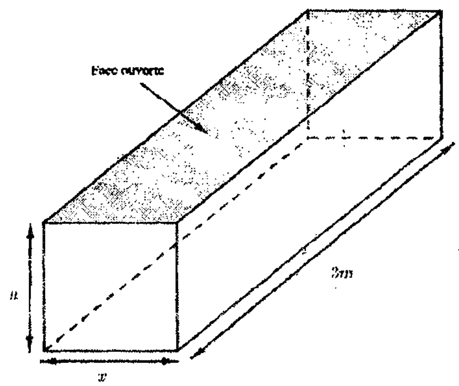
II- $EFGH$ est un tétraèdre régulier. Le point I est le milieu de l'arête $[GH]$.

1. Démontrer que la droite (GH) est orthogonale au plan (EFI). **0,5pt**
2. Justifier que les plans (EFI) et (EGH) sont perpendiculaires. **0,25pt**

Partie B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Afin de garantir une réserve d'eau pendant la saison sèche, le jardinier Mr. ABOUDI a fait la commande au mois de décembre dernier d'une citerne métallique ouverte chez un chaudronnier. Cette citerne avait la forme d'un pavé droit ouvert sur une face, et dont le volume est de 12 m^3. Le chaudronnier lui a proposé la maquette ci-contre, où l'un des côtés de la base mesure $3m$ tandis que l'autrecôté (x) et la hauteur (h) en mètres sont inconnues (voir figure ci-contre). Il a recommandé au chaudronnier de choisir la valeur de x (avec $0 < x < 3$) rendant minimale l'aire totale de la surface externe de cette citerne, afin d'utiliser le moins de peinture pour la protéger contre la rouille. Pour obtenir un résultat impeccable, 1 Kg de cette peinture sera appliquée sur 2 m^2 de surface.



Après qu'il ait reçu sa citerne, Mr. ABOUDI l'a remplie d'eau aux deux-tiers et l'a ensuite installée à l'air libre sur la cour de son jardin. En période de sécheresse, cette citerne perd d'un jour à l'autre 0,25% du contenu qu'elle avait au début du jour. Après 10 jours de sécheresse, il décide d'arroser ses 75 arbustes avec sa réserve d'eau restante dans la citerne. Il a besoin de 100 L d'eau par arbuste.

Pour acheter cette citerne, Mr. ABOUDI a pris pour une durée de 2 mois, un crédit de 400 000 FCFA dans la coopérative des jardiniers de sa localité à un taux d'intérêt mensuel composé inscrit dans le registre du commissaire aux comptes de cette coopérative. Un mois après, la coopérative a rencontré des difficultés financières dues à l'augmentation de certaines taxes. Elle a alors décidé d'augmenter de 2% ce taux d'intérêt pour le deuxième mois. Mr. ABOUDI a remboursé sa dette s'élevant à 449 400 FCFA à la fin du 2ème mois du crédit.

Tâches :

1. Quelle est, au dixième près, la quantité de peinture en Kg nécessaire pour protéger la surface totale externe de cette citerne ? **1,5pt**
2. La réserve d'eau restante dans la citerne sera-t-elle suffisante pour arroser les 75 arbustes? **1,5pt**
3. À quel taux la coopérative a-t-elle prêté au départ la somme empruntée par Mr. ABOUDI ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt