COLLÈGE François-Xavier VOGT **B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28** **e-mail : collegevogt@yahoo.fr**		**Année scolaire 2022-2023** **Du 05 MAI 2023**
PROBATOIRE BLANC 2023		**Classe : PC**
EPREUVE DE MATHEMATIQUES		**Durée : 3H**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

EXERCICE 1 : (05,00 POINTS)

1. $ABCD$ est un carré direct d'un plan orienté, de côté une unité, O le milieu de $[AC]$, I le milieu de $[OB]$. H le milieu de $[AD]$ et K le milieu de $[DC]$. Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6$ et (D) l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MC^2 = -3$
   a) Montrer que pour tout point M de $(\mathcal{C})$: $MO^2 + MB^2 = \frac{5}{2}$ et pour tout point M de (D): $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$. 1pt
   b) Déterminer les ensembles $(\mathcal{C})$ et (D). 1pt
   c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées suivantes :
   $a = t_{\overrightarrow{AB}} 0 S_{(AD)}$, $\quad b = S_{(HK)} 0 t_{\overrightarrow{AC}}$ et $\quad c = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)} 0 S_{(BC)}$. 1pt
2. Soit t un nombre réel.
   a) Vérifier que $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$ et donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. 0,5pt
   b) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$ l'équation : $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos 2t + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin 2t = 2\sqrt{3}$. 0,75pt
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = \frac{4\pi}{3} \\ \cos x + \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$. 0,75pt

EXERCICE 2 : (05,50 points)

I- L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$. L'unité est le centimètre. On considère les points $A(1; -1; 1), B(0; 0; 1), C(-2; 0; 3)$ et $D(-2; 0; 1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. 0,5pt
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 1 = 0$. 0,5pt
3. Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre. 0,25pt
4. On suppose que l'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{3}\ cm^2$. En déduire la valeur exacte du volume de $ABCD$. 0,75pt
5. Soit (S) l'ensemble des points des coordonnées $(x; y; z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 1 = 0$ et soit (P) le plan d' équation cartésienne $2x + y - z = 0$.
   a) Montrer que (S) est une sphère. Préciser son centre et son rayon. 0,5pt
   b) Soit $E(3; -9; 6), F(9; -6; 3)$ de l'espace montrer que (P) est le plan médiateur du segment $[EF]$. 0,5pt
   c) Déterminer l'intersection de (S) et (P). 0,75pt
   d) Dans le plan (yOz) déterminer le nature et les éléments caractéristiques de (S). 0,5pt

II- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Soit φ une isométrie du plan dans lui-même qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$\begin{cases} x' = \frac{12x+5y+1}{13} \\ y' = \frac{5x-13y-5}{13} \end{cases}$. Soit $(\mathcal{K})$ l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = M$.

2. Montrer que $(\mathcal{K})$ est la droite d'équation : $x - 5y = 1$. 0,5pt
3. Soit M un point n'appartenant à $(\mathcal{K})$ et $M' = \varphi(M)$.
   a) Montrer que les droites (MM') et $(\mathcal{K})$ sont perpendiculaires. 0,25pt
   b) Montrer que pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM']$ appartient à $(\mathcal{K})$. 0,25pt

4. Reconnaitre la transformation φ. 0,25pt

EXERCICE 3 : (05,00 POINTS)

A- Soit f une fonction d'une variable réelle x différent de zéro pas $f(x) = \frac{-x^2+x+1}{x}$. $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

1. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation. 1pt
2. Montrer que pour tout réel, x différent de zéro, $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}$ et vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = -x + 1$. 0,5pt
3. Préciser suivant les valeurs de x, la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D). 0,5pt
4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$. 1pt
5. Soit λ un nombre réel, et (E_λ) l'équation définie par $(E_\lambda): -x^2 + (1-\lambda)x + 1 = 0$. Graphiquement, discuter suivant les valeurs du réel λ, le nombre et signe des solutions de l'équation (E_λ). 0,5pt
6. Soit (u_n) la suite définie par l'expression explicite $u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - f(n)$.
   Calculer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1}$. 0,5pt

B- Une urne contient quatre jetons indiscernables au toucher et numérotés $-3;\ -1;\ 0$ et 5. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X la valeur absolue de la somme des deux numéros tirés.

1. Donner le nombre de tirages possibles. 0,25pt
2. Donner l'ensemble A des valeurs possible de X. 0,25pt
3. Donner le nombre de tirages pour $X = 4$ ou $X = 1$. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES (04,50 POINTS)

Situation : BELINGA et MGBATOU sont deux jeunes des villes d'OVENG et de MALENTOUEN respectivement. Les populations de ces deux villes au 1er janvier 2022 sont respectivement de 100 000 et 50 000 habitants. Des études ultérieures ont montré que la population d'OVENG croît de 1% par an tandis que celle de Malentouen croît de 5% par an. MGBATOU affirme que d'ici 2074, la population de MALENTOUEN sera supérieure à celle d'OVENG.

Les deux jeunes gens sont les seuls candidats à un concours de recrutement direct d'un unique technicien pour une place vacante au ministère de la fonction publique. Le tableau ci-dessous donne la fiche des notes des deux candidats.

	Maths1	Maths2	Physique	Chimie	Info1	Info2	Anglais	Culture Générale	Langue1	Langue2
BELINGA	13	14	12	16	15	11.5	11	08	17	14.5
MGBATOU	14	13	11	17	16.5	10	12	7.5	16	15

Sur l'épreuve de Maths1, les deux candidats doivent résoudre l'équation $x^2 - ax + 2 = 0$ où a désigne le nombre possible de tirages simultanés de 2 boules dont l'une est noire et l'autre portant un numéro impair, d'une urne contenant deux boules noires dont les numéros sont 1 et 2, et trois boules rouges dont les numéros sont 1 ; 2 et 3. BELINGA au terme du concours, dit que pour cette question, la solution était $S = \left\{\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$

Tâches :

1. Dire en justifiant clairement lequel de BELINGA et de MGBATOU sera objectivement retenu. 1,5pt
2. Dire en justifiant si l'affirmation de MGBATOU est exacte. 1,5pt
3. Dire en justifiant clairement si BELINGA aura le point sur la base de cette réponse. 1,5pt