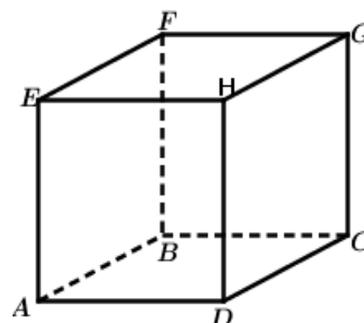


<b>COLLÈGE François-Xavier VOGT</b> <b>B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28</b> <b>e-mail : <a href="mailto:collegevogt@yahoo.fr">collegevogt@yahoo.fr</a></b>		<b>Année scolaire 2022-2023</b>
		<b>Du 27 Avril 2023</b>
<b>CONTRÔLE</b>		<b>Classe : PC</b>
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		<b>Durée : 3H</b>

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

### EXERCICE 1 : (05,50 POINTS)

- I- La figure ci-contre est le cube  $ABCDEFGH$ .
- Montrer que les droites  $(EB)$  et  $(AD)$  sont orthogonales. 0,5pt
  - Montrer que les plans  $(ADH)$  et  $(BCA)$  sont perpendiculaires. 0,5pt
  - Montrer que  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  est un repère orthonormal. 0,5pt
  - Montrer que  $EGBD$  est un tétraèdre régulier. 0,5pt
  - Soit  $a$  l'arête du tétraèdre régulier  $EGBD$ . Montrer que le volume de  $EGBD$  est de  $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ . 1,5pt



II- L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  
On considère la sphère  $(S)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ , le plan

$$(\mathcal{P}): x + y + z - 1 = 0 \text{ et la droite } (D): \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

- Donner le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de  $(S)$ . 0,75pt
- Déterminer les coordonnées de  $H$  projeté orthogonal de  $\Omega$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ . 0,5pt
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de  $(\mathcal{P})$  et  $(S)$ . 0,75pt
- Etudier la position de  $(S)$  et  $(D)$ . 0,5pt

### EXERCICE 2 : (04,75 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité  $2cm$ . Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels non nuls,  $f$  la fonction numérique définie pour tout réel différent de  $-2$ , par  $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ .

- On suppose que la courbe  $(C_f)$ , admet au point d'abscisse  $0$ , une tangente perpendiculaire à la droite  $(D): y = -\frac{4}{3}x + 8$  et que la droite  $(D'): y = 2$  est asymptote horizontale à  $(C_f)$ .  
Justifier que  $a = 2$  et  $b = 1$ . 0,5pt
- Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation. 1pt
- Construire la droites  $(\Delta): y = x$  et la courbe  $(C_f)$ , dans le même repère. 1pt
- Soit  $n$  un entier naturel, on définit les suites  $(u_n), (v_n)$  par les relations  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  et  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ .
  - Représenter les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ . 0,5pt
  - Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique, on déterminera sa raison et son premier terme. 0,75pt
  - Montrer que pour entier naturel  $n$ ,  $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ , puis en déduire l'expression explicite de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$ . 0,5pt
  - Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer la somme,  $S_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{n+5}$  en fonction de  $n$ . 0,5pt

### EXERCICE 3 : (05,25 POINTS)

A- Soit  $E$  un espace vectoriel dont une base est  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  défini pour tout

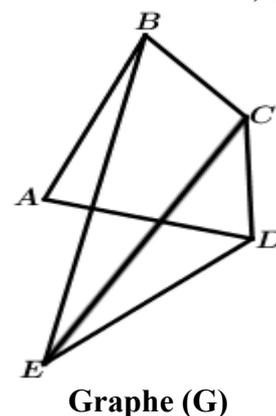
$$\vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}) = \left[ \left( \cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) x + y \right] \vec{i} + \left( x \sin(\theta) + y\sqrt{3} \right) \vec{j} \text{ où } \theta \in ] -\pi, \pi[.$$

- Déterminer la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base  $B$ . 0,5pt
- Résoudre dans  $] -\pi; \pi[$  l'équation  $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha + 1 = 0$ . 0,5pt
- En déduire l'ensemble des valeurs de  $\theta$  pour lesquelles  $\varphi$  n'est pas un automorphisme. 0,25pt
- Pour la suite, on suppose que :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
  - Montrer que  $\ker \varphi$  et  $Im \varphi$  sont des droites vectorielles dont on déterminera des bases. 1pt

b) On pose  $\vec{e}_1 = -\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Montrer que  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de E puis, écrire la matrice  $M'$  de  $\varphi$  dans la base  $B'$ . 0,5pt

**B-** En projection de la sortie de classe 2023, cinq élèves dont les initiales des prénoms sont A, B, C, D, E souhaitent organiser un jeu. A la réunion préparatoire, ils se saluent. Les différentes poignées de mains sont modélisées par le graphe ci-contre.

1. Déterminer l'ordre et le degré du graphe ( $G$ ). 0,5pt
2. Justifier que le graphe ( $G$ ) n'est pas complet, puis représenter ( $G$ ) en complétant en pointillés. 1pt
3. Justifier que le graphe ( $G$ ) est connexe. 0,25pt
4. Le titulaire de la classe demande à chacun de ces cinq élèves de former une équipe de cinq joueurs constituée des autres élèves de la classe pour un mini tournoi de « **petit goal** ». Peut-on organiser des rencontres telles que chaque équipe joue deux matchs ? 0,75pt



## PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES (04,50 POINTS)

### SITUATION.

M. TAYOU est un chef d'entreprise, dans la production agricole. En 2016 il débute ses activités avec un effectif de 100 employés. Cet effectif croit régulièrement au taux de 3% par an. Pour des besoins de paiement d'impôts, il souhaite réduire son effectif dès l'année où son effectif sera au moins un multiple 1,5 de l'effectif initial.

En Janvier 2023, le nouveau directeur des ressources humaines souhaite avoir une idée réelle sur l'évolution des effectifs de cette entreprise. Sa surprise est de constater que le relevé de la première année a certains manquements comme l'indique le tableau ci-dessous précisant l'effectif des employés par tranche d'âge.

Tranche d'âge	[15; 20[	[20; 25[	[25; 30[	[30; 35[	[35; 40[
Effectifs	30	?	?	?	8

La moyenne d'âge est de 25,65 ans puis l'âge médian est de 26.

La production journalière de cette entreprise augmente de manière constante. Le 15 Février 2020 (année bissextile), cette entreprise a produit 30 milles articles. Il souhaite déterminer le nombre d'articles produits pendant tout ce mois enfin de distribuer aux employés femmes en prélude du 8 Mars.

1. Aider le responsable des ressources humaines à déterminer les données absentes sur le relevé. 1,5pt
2. En quelle année l'effectif des employés initiale aura-t-elle été multipliée par 1,5 ? 1,5pt
3. Déterminer le nombre d'article distribué aux employés femmes. 1,5pt