Ministère des Enseignements Secondaires
Inspection Générale des Enseignements
Inspection de Pédagogie/Sciences
Section Mathématiques

Examen : Probatoire BLANC ESG
Session : 2023
Spécialité : C/E
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h **Coefficient** : 6/5

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 5 points

A/ L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. L'unité graphique est 1cm. On considère les points $A(2;1;2)$, $B(3;1;0)$, $C(2;2;4)$, $D(5;1;2)$ et le vecteur $\vec{u}(4;\ -4;\ 2)$. On note (Δ) la droite passant par le point D, de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. **0,5 pt**

2. a) Justifier que $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC). **0,5 pt**

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5 pt**

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ). **0,5 pt**

3. a) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). **0,5 pt**

b) Soit $K\left(\frac{11}{3}\ ;\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$. Calculer KD et Justifier que la distance d du point D au plan (ABC) est $2\ cm$. **0,75 pt**

4. On admet que l'aire du triangle ABC est $\frac{3}{2}\ cm^2$.
Calculer le volume v du tétraèdre ABCD. **0,25 pt**

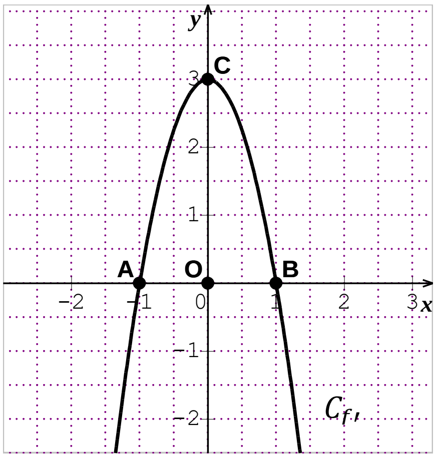
B/ Soit E un plan vectoriel dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E défini pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par $f(\vec{u}) = (x-2y)\vec{\imath} + (-2x+4y)\vec{\jmath}$.

1. Déterminer $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ puis la matrice $\mathcal{M}$ de f dans la base $\mathcal{B}$. **0,75 pt**

2. Déterminer le noyau $Ker(f)$ de f et un élément $\overrightarrow{e_1}$ de $Ker(f)$ de la forme $\overrightarrow{e_1} = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. **0,75 pt**

Exercice 2 : 5 pts

La courbe ci-contre est celle de la fonction dérivée d'une fonction numérique f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle passe par les points $A(-1;0), B(1;0), C(0;3)$.



1. Déterminer : **a)** Les variations de f. **1 pt**

b) Le nombre d'extrémums de f. **0,5 pt**

2. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx + c$.
Sachant que $f(0) = 1$, déterminer les réels $a, b\ et\ c$. **1 pt**

3. Soit g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 3x + 1$

a) Etudier les variations de g et construire son tableau de variation. **1pt**

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1;0]$ **0,5pt**

4. Soit h, l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Reproduire la figure ci-dessus et construire les images des points A, B et C par $t \circ h$. **1 pt**

Exercice 3 5 points

I. Dans le plan orienté , on considère un carré direct ABCD de côté $3cm$; E est le point tel que D est le milieu du segment [AE] ; (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = -9$.

1.a) Faire une figure où on retrouve les points A, B, C, D et E. **0,5pt**

b) Démontrer que E est le barycentre des points pondéré $(A; 1), (B; -2)$ et $(C; 2)$. **0,5pt**

2. a) Soit M un point du plan.

Montrer que $AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = EM^2 - 18$. **0,75pt**

b) En déduire que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0,5pt**

II. Une urne contient 12 boules dont 4 vertes, x rouges et y jaunes (où x et y sont des entiers naturels non nuls). On tire au hasard et simultanément trois boules de cette urne.

1. a) Déterminer le nombre de tirages possibles. **0,5pt**

b) Justifier que $y = 8 - x$. **0,5pt**

2. On désigne par $P(x)$ le nombre de façons d'obtenir exactement 1 boule jaune à la fin du tirage. Montrer que $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 22x + 48$. **0,75pt**

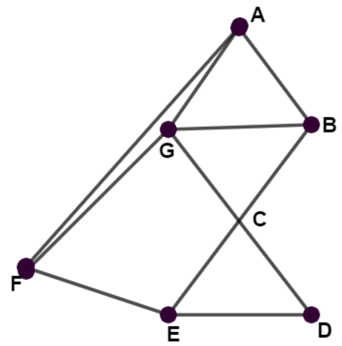
III. Soit le graphe représenté ci-contre :

1. Quel sommet est de degré 1 ? **0,25 pt**

2. Combien de sommets sont adjacents au sommet A ? **0,25 pt**

3. Ce graphe est-il complet ? **0,25 pt**

4. Quel est l'ordre de ce graphe ? **0,25 pt**



PARTIE B : **Évaluation des compétences : 5 points**

Situation :

TOBI possède un jardin et un grand champ où il emploie les ouvriers.

Le jardin a la forme d'un triangle rectangle dont l'aire est égale à $3000m^2$ et la longueur du plus long coté est $130m$.

Le champ a la forme rectangulaire dont les quatre sommets sont les images des solutions de l'équation $4(cosx)^2 - 1 = 0$ sur un cercle trigonométrique d'unités sur les axes $2km$.

Il a oublié les dimensions de son jardin et celles de son champ.

Il désire entourer tout son jardin par une ligne de fil barbelé et planter les rejetons de plantains sur tout le champ en mettant 3 rejetons sur $20m^2$.

Il propose deux types de rémunération à ses ouvriers :

Type I : Salaire hebdomadaire 20000F avec une augmentation de 550F toutes les semaines.

Type II : Salaire hebdomadaire de 18000F avec une augmentation de 4% (par rapport au salaire précèdent) toutes les semaines.

Un ouvrier ne dispose que de douze semaines de travails.

Tâches :

1. Détermine le type de rémunération qui est le plus avantageux à l'ouvrier ? **1,5 pt**

2. Déterminer la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin. **1,5 pt**

3. Déterminer le nombre minimal de rejetons que Paul doit acheter. **1,5 pt**

Présentation : **0,5 pt**