Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun
Lycée Classique d'Édéa

Examen : PROBATOIRE BLANC
Série : C/E Session : MAI 2023
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h Coefficient : 6

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(3,1,-1)$ et $B(1,2,0)$; le plan (P) d'équation cartésienne $x+y-2z-6=0$; (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-1=0$ et (Q) le plan tangent à (S) au point A.

1. Détermine les coordonnées du point B' projeté orthogonal du point B sur le plan (P). **0,75pt**
2. Détermine la nature et les éléments géométriques de (S). **0,5pt**
3. Montre que $(P)\cap(S)$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. **0,5pt**
4. **(a)** Ecris une équation cartésienne du plan (Q). **0,5pt**
   (b) Vérifie que les plans (P) et (Q) sont sécants. **0,25pt**
   (c) Donne une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, intersection de (P) et (Q). **0,5pt**
5. On définit dans le plan vectoriel E de base $\mathscr{B}=\left(\vec{j},\vec{k}\right)$ l'endomorphisme f par :
   $f\left(\vec{j}\right)=\vec{j}-2\vec{k}$ et $f\left(\vec{k}\right)=-2\vec{j}+4\vec{k}$.
   (a) Donne la matrice de f, puis justifie que f n'est pas un automorphisme. **0,5pt**
   (b) Détermine le noyau $\ker f$ et l'image $\operatorname{Im} f$ de f ; donne une base de chacun d'eux. **1pt**
   (c) Démontre que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\ker f$ et d'un élément de $\operatorname{Im} f$. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3,5 points)

I) ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O et de sens direct. On désigne par I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[BI]$. (Δ) est la droite parallèle à (AC) passant par J.

1. Fais une figure. **0,5pt**
2. **(a)** Caractérise la transformation $S_{(\Delta)}\circ S_{(AC)}$. **0,5pt**
   (b) Montre que $t_{\overrightarrow{AB}}=t_{\overrightarrow{AI}}\circ S_{(\Delta)}\circ S_{(AC)}$. **0,5pt**

II) On considère la suite (W_n) définie par $W_{n+1}=b(c)^n+bn+a$ où (a,b,c) est le triplet $(1,2,4)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=b(c)^n$ et $V_n=bn+a$.

1. Montre que (U_n) est une suite géométrique et (V_n) une suite arithmétique. **1pt**
2. Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}, W_{n+1}=2^{2n+1}+2n+1$. **0,25pt**
3. Exprime $S_n=W_0+W_1+W_2+\cdots+W_n$ en fonction de n. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (3 points)

Soit les fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x^3$ et $g(x)=x^3-3x^2+3x+1$.
($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montre que ($\mathscr{C}$') est l'image de ($\mathscr{C}$) par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$. **0,5pt**

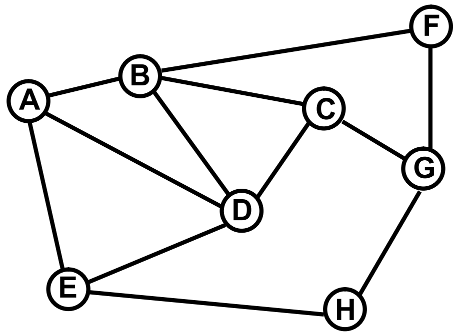
2. **(a)** Ecris une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$') au point O. **0,5pt**

   (b) Détermine la position de ($\mathscr{C}$') par rapport à (T). **0,75pt**

3. Construis soigneusement (T), ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$'). **1,25pt**

EXERCICE 4 : (3,5 points)

I) Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe $\mathscr{G}$ ci-contre :



1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il complet ? Justifie. **0,5pt**
2. Donne l'ordre du graphe $\mathscr{G}$ puis le degré de chacun des sommets. *(On présentera le résultat sous forme d'un tableau)*. **1pt**
3. Détermine le nombre minimal de vols qu'un voyageur doit prendre pour aller de B à H. **0,5pt**

II) Soit θ un nombre réel.

1. Démontre que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2 2\theta\right)$. **0,5pt**
2. Résous dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $(E): \cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{5}{8}$. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION :</u>

M. BELL a travaillé pendant 30 ans comme agent de liaison dans une entreprise des biens et services de la ville d'Edéa. Il raconte avec beaucoup d'ironie que son premier salaire mensuel était insignifiant et qu'il a fini par l'appeler S_0. Dans les accords que M. BELL a eus avec son patron, il devait obtenir une augmentation fixe sur son salaire mensuel chaque année. Dans ses souvenirs, M. BELL sait que son salaire à la dixième année était de 53.000 FCFA et avant son départ à la retraite, le comptable de l'entreprise lui a présenté le cumul de tous ses salaires pendant les trente années, soit un montant total de $23.040.000$ FCFA.

Une fois la retraite actée, M. BELL a reçu une prime de bonne séparation d'un montant de $1,5$ millions de FCFA qu'il a immédiatement placé dans une banque à un taux annuel connu de tous les épargnants. Après 2 ans, M. BELL sait qu'il a un capital de $1.749.600$ FCFA dans cette banque.

Afin de regagner son domicile personnel qu'il vient de construire, M. BELL loue un camion à 8.000 FCFA par heure (camion et chauffeur compris) et recrute un certain nombre de manœuvres qu'il paie à 2.000 FCFA chacun par heure pendant toute la durée de son déménagement. La durée des opérations de charge et de décharge (avant et après le voyage) est inversement proportionnelle au nombre de manœuvres recrutés. Un seul manœuvre mettrait $2h$ pour les opérations de charge et de décharge ; le camion chargé met $2h$ pour rejoindre le domicile de M. BELL.

<u>Tâches</u> :

1. Détermine le montant de l'épargne de M. BELL après la première année. **1,5pt**
2. Détermine le montant du premier salaire de M. BELL. **1,5pt**
3. Détermine la dépense minimale que fera M. BELL pour aménager dans son domicile. **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt

CORRIGÉ DE L'EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PROBATOIRE BLANC SÉRIE C. MAI 2023

Par M. Nathanaël AWONO MESSI
PLEG Maths

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1

1. Déterminons les coordonnées du point B', projeté orthogonal de B sur le plan (P).

- un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1;1;-2)$
- B' étant le projeté orthogonal sur le plan (P) du point B, alors on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BB'} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \\ B' \in (P). \end{cases}$$

- $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{BB'} = t\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{B'}-1 \\ y_{B'}-2 \\ z_{B'} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 1+t \\ y_{B'} = 2+t \\ z_{B'} = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- $B' \in (P) \Leftrightarrow x_{B'} + y_{B'} - 2z_{B'} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 1+t+2+t-2(-2t)-6=0 \quad \Leftrightarrow 6t-3=0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $x_{B'} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $y_{B'} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $z_{B'} = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

d'où $B'\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-1\right)$. 0,75pt

2. Déterminons la nature et les éléments géométriques de (S).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M \in (S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+z^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+z^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+z^2 = 6 = (\sqrt{6})^2.$$

$\boxed{(S) \text{ est une sphère de centre } B \text{ et de rayon } R=\sqrt{6}.}$ 0,5pt

3. Montrons que $(P) \cap (S)$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

On a : $d(B;(P)) = \dfrac{|x_B + y_B - 2z_B - 6|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{|1+2-2\times 0-6|}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Comme $d(B';(P)) < \sqrt{6}$, alors $(P) \cap (S)$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre B' et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(B;(P))} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

0,5pt

$\boxed{(P) \cap (S) \text{ est un cercle } \mathcal{C} \text{ de centre } B' \text{ et de rayon } r = \frac{3\sqrt{2}}{2}.}$

4. (a) Ecrivons une équation cartésienne du plan (Q).

(Q) étant le plan tangent à (S) au point A, alors un vecteur normal au plan (Q) est $\overrightarrow{AB}(-2;1;1)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$M \in (Q) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff -2(x-3) + y - 1 + z + 1 = 0$

$\iff -2x + y + z + 6 = 0$.

0,5pt

$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (Q) \text{ est } -2x+y+z+6=0.}$

(b) Vérifions que les plans (P) et (Q) sont sécants.

(Q) est le plan tangent à (S) au point A, donc $A \in (Q)$

De plus, $x_A + y_A - 2z_A - 6 = 3 + 1 - 2(-1) - 6 = 0$, donc $A \in (P)$

Ainsi, (P) et (Q) sont sécants 0,25pt

(c) Donnons une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de (P) et (Q).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$M \in (P) \cap (Q) \iff \begin{cases} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z - 6 = 0 \\ -2x + y + z + 6 = 0 \end{cases}$

En posant $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, le système précédent devient

$$\begin{cases} x+y=2\lambda+6 \\ -2x+y=-\lambda-6 \\ z=\lambda \end{cases} \text{ ; C'est-à-dire } \begin{cases} 3x=3\lambda+12 \\ 3y=3\lambda+6 \\ z=\lambda. \end{cases} \text{ Soit encore } \begin{cases} x=\lambda+4 \\ y=\lambda+2 \\ z=\lambda. \end{cases}$$

0,5pt

Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de (P) et (Q) est : $\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

5.(a) Donnons la matrice de f.

0,25pt

On a : $f(\vec{j})=\vec{j}-2\vec{k}$ et $f(\vec{k})=-2\vec{j}+4\vec{k}$, donc $M_f=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Justifions que f n'est pas un automorphisme.

$\det(M_f)=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=4-4=0$

0,25pt

Comme $\det(M_f)=0$, alors f n'est pas un automorphisme.

(b) Déterminons le noyau Ker$f$ et l'image Imf de f ; donnons une base de chacun d'eux.

- $\mathrm{Ker}f=\{\vec{u}\in E \mid f(\vec{u})=\vec{0}_E\}$.

Soit $\vec{u}=x\vec{j}+y\vec{k}\in E$. $\vec{u}\in \mathrm{Ker}f \iff f(\vec{u})=\vec{0}_E$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases} \iff x-2y=0$$

0,5pt

Ker$f$ est une droite vectorielle d'équation $x-2y=0$ dont une base est $\vec{e}_1=2\vec{j}+\vec{k}$.

- $\mathrm{Im}f=\{\vec{v}\in E \mid \exists\, \vec{u}\in E,\ f(\vec{u})=\vec{v}\}$.

Soit $\vec{v} = x'\vec{j} + y'\vec{k}$ un vecteur de E.

$\vec{v} \in \mathrm{Im}f \iff \exists\, \vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} \mid f(\vec{u}) = \vec{v}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 2y = x' \\ -2x + 4y = y' \end{cases} \iff 2x' + y' = 0.$

0,5pt

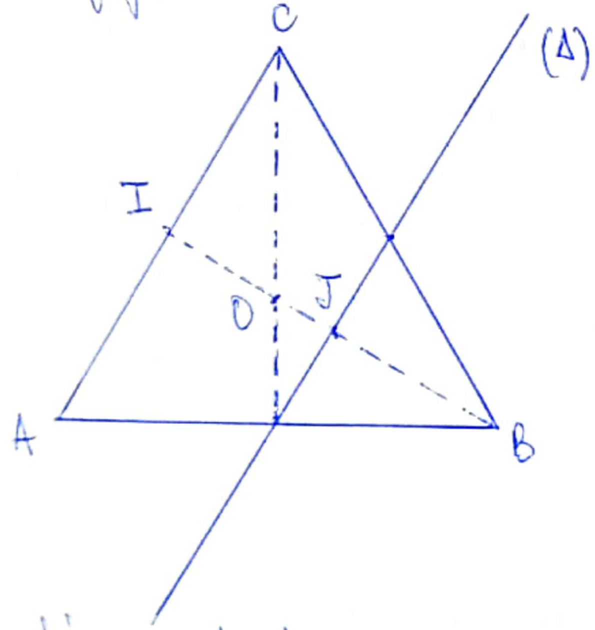
$\boxed{\mathrm{Im}f \text{ est la droite vectorielle d'équation } 2x' + y' = 0 \text{ dont une base est } \vec{e_2} = \vec{j} - 2\vec{k}.}$

(c) Démontrons que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}f$ et d'un élément de $\mathrm{Im}f$.

puisque $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, alors $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E par conséquent, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e_1} \in \mathrm{Ker}f$ et $\vec{e_2} \in \mathrm{Im}f$. 0,5pt

Exercice 2.

1) 1. Faisons une figure.



0,5pt

2. (a) Caractérisons la transformation $S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$.

0,5pt

$(\Delta) \parallel (AC)$; J est le projeté orthogonal de I sur la droite (Δ) donc $S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)} = t_{2\vec{IJ}} = t_{\vec{IB}}$. (Translation de vecteur $\vec{IB}$)

(b) Montrons que $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$

$$t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{IB}} = t_{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}} = t_{\overrightarrow{AB}}.$$ 0,5pt

II) 1. Montrons que (U_n) est une suite géométrique.

$$U_n = b(c)^n = 2(4)^n$$

On a: $U_{n+1} = 2(4)^{n+1} = 2\times(4)^n\times 4 = 4\left[2\times(4)^n\right] = 4U_n$ 0,5pt

donc (U_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $U_0=2$

Montrons que (V_n) est une suite arithmétique.

$$V_n = bn+a = 2n+1$$

On a: $V_{n+1}-V_n = 2(n+1)+1-(2n+1) = 2n+2+1-2n-1 = 2$ 0,5pt

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $V_0=1$

2. Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_{n+1} = 2^{2n+1}+2n+1$

$$W_{n+1} = b(c)^n + bn + a = 2(4)^n+2n+1 = 2(2^2)^n+2n+1$$ 0,25pt
$$= 2\times 2^{2n}+2n+1 = 2^{2n+1}+2n+1$$

3. Exprimons $S_n = W_0+W_1+W_2+\dots+W_n$ en fonction de n.

$$S_n = W_0+W_1+W_2+\dots+W_n = (U_0+V_0)+(U_1+V_1)+(U_2+V_2)+\dots+(U_n+V_n)$$
$$= (U_0+U_1+U_2+\dots+U_n)+(V_0+V_1+V_2+\dots+V_n)$$
$$= U_0\times\frac{1-(4)^{n+1}}{1-4} + \frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2}$$
$$= \frac{2}{3}\left[(4)^{n+1}-1\right] + \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2}$$
$$= \frac{2}{3}\left[(4)^{n+1}-1\right] + (n+1)^2.$$ 0,75pt

Exercice 3.

1. Montrons que $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i}+2\vec{j}$.

Nous avons : $f(x-1)+2 = (x-1)^3+2$
$= x^3-3x^2+3x-1+2$
$= x^3-3x^2+3x+1$
$= g(x)$

0,5pt

donc $(\mathscr{C}')$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

2.(a) <u>Ecrivons une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}')$ au point O.</u>

$(T): y = g'(0)x + g(0)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$g'(x) = 3x^2-6x+3$; ainsi, $g'(0)=3$ et comme $g(0)=1$, alors
$(T): y = 3x+1$.

0,5pt

une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}')$ au point O est $y=3x+1$

(b) <u>Déterminons la position de $(\mathscr{C}')$ par rapport à (T).</u>

Etudions le signe de $g(x)-(3x+1)$.

$g(x)-(3x+1) = x^3-3x^2+3x+1-(3x+1) = x^3-3x^2$

$x^3-3x^2=0 \iff x^2(x-3)=0 \iff x=0$ ou $x=3$.

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc le signe de x^3-3x^2 est celui de $x-3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g(x)-(3x+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

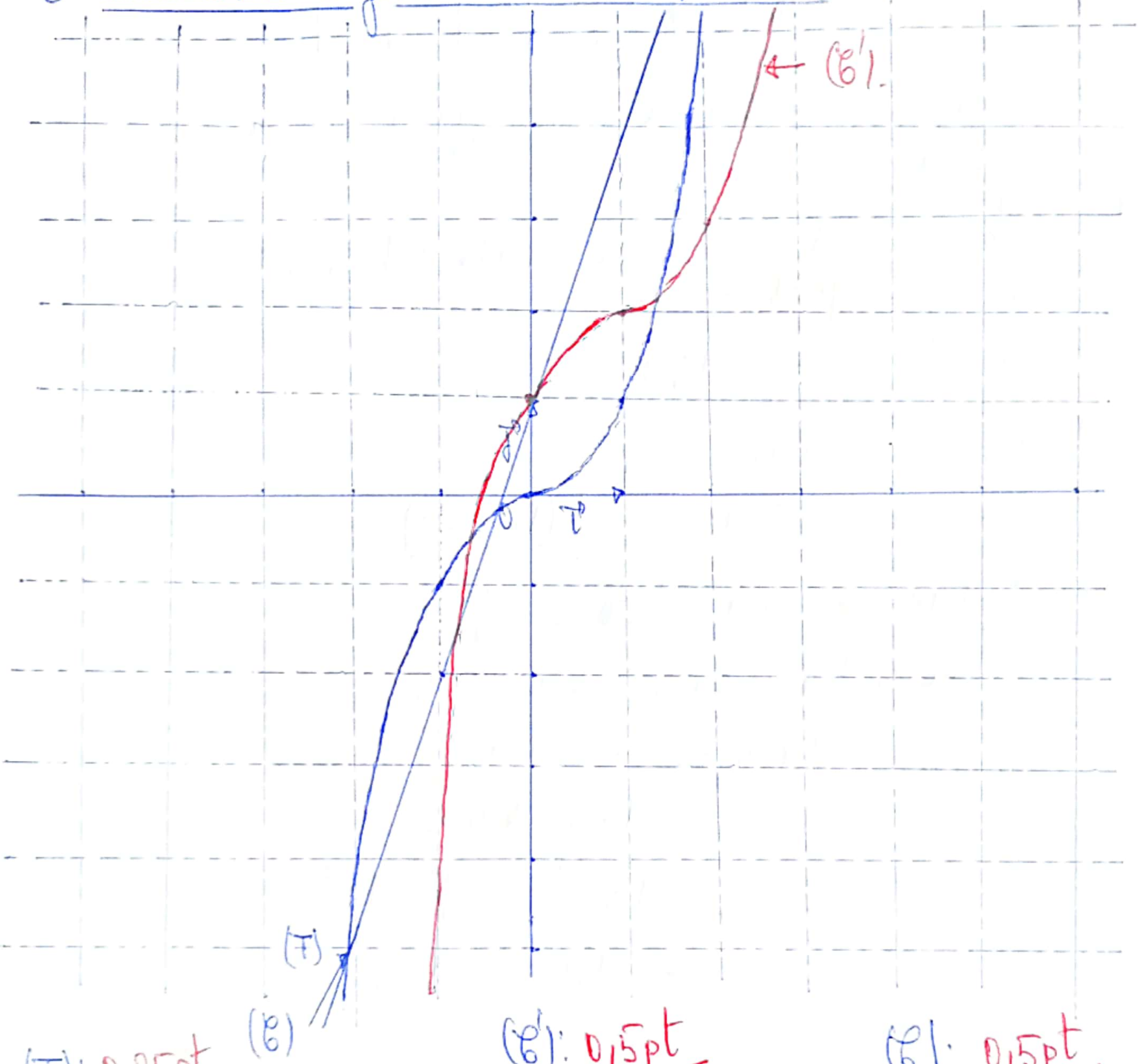
- Pour $x \in]-\infty;0[\cup]0;3[$, $g(x)-(3x+1)<0$ ie $g(x)<3x+1$
  $(\mathscr{C}')$ est au-dessous de (T).
- Pour $x\in]3;+\infty[$, $g(x)-(3x+1)>0$, ie $g(x)>3x+1$
  $(\mathscr{C}')$ est au-dessus de (T).

0,5pt

• Pour $x=0$ ou $x=3$, $g(x)-(3x+1)=0$ ie $g(x)=3x+1$ 0,25pt

$(\mathcal{C}')$ et (T) se rencontrent.

3. Construisons soigneusement (T), $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.



(T): 0,25pt $(\mathcal{C}')$: 0,5pt $(\mathcal{C})$: 0,5pt

Exercice 4.

1. le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet, car les sommets D et H ne sont pas adjacents. 0,5pt

2. Donnons l'ordre du graphe $\mathcal{G}$.

le graphe $\mathcal{G}$ a 8 sommets, donc il est d'ordre 8. 0,25pt

Donnons le degré de chacun des sommets du graphe. 0,75pt

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	
Degré du sommet	3	4	3	4	3	2	3	2	

3. Déterminons le nombre minimal de vols qu'un voyageur doit prendre pour aller de B à H.

Le nombre minimal de vols pour se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H est 3. 0,5pt

Trajets possibles : B–A–E–H ; B–D–E–H ; B–C–G–H ; B–F–G–H.

II) Soit θ un nombre réel.

1. Démontrons que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$

Pour tout réel θ, on a : $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = 1$

donc $\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta = 1$

Ceci étant : $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$= 1 - 2(\cos\theta\sin\theta)^2$

$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$= 1 - \frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2\theta$

$= \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$ 0,5pt

2. Résolvons dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{5}{8}$.

(E) : $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{5}{8} \iff \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta) = \frac{5}{8}$

$\iff 1 + \cos^2 2\theta = \frac{5}{4} \iff \cos^2 2\theta = \frac{5}{4} - 1$

$\iff \cos^2 2\theta = \frac{1}{4} \iff \cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ ou $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$.

- $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} \iff \cos 2\theta = \cos \frac{2\pi}{3}$.

$$\iff \begin{cases} 2\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \qquad \iff \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ \text{ou} \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

- $\cos 2\theta = \frac{1}{2} \iff \cos 2\theta = \cos \frac{\pi}{3}$.

$$\iff \begin{cases} 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \qquad \iff \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

θ \ k	-1	0	1	2
$-\frac{\pi}{3}+k\pi$		$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{3}+k\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$		
$-\frac{\pi}{6}+k\pi$		$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{6}+k\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$		

Ainsi, $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\}$ 1pt

Partie B ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

Tâche 1 Déterminons le montant de l'épargne de M. BELL après la première année.

Soit x le taux d'intérêt annuel dans cette banque.

- le montant de l'épargne de M. BELL après la première année est de :

$$1.500.000\left(1+\frac{x}{100}\right) = 1.500.000 + 15000x.$$

- le montant de l'épargne de M. BELL après la deuxième année est de :

$$(1.500.000 + 15000x)\left(1+\frac{x}{100}\right) = 150x^2 + 30.000x + 1.500.000.$$

Après 2 ans, M. BELL a un capital de 1.749.600 FCFA signifie que

$150x^2 + 30.000x + 1.500.000 = 1.749.600$

Ce qui donne $150x^2 + 30.000x - 249600 = 0$

Soit encore $x^2 + 200x - 1664 = 0$.

C1
C2
C3.

$\Delta = (200)^2 - 4(1)(-1664) = 46656$; $\sqrt{\Delta} = 216$.

$x_1 = \dfrac{-200+216}{2} = 8$; $x_2 = \dfrac{-200-216}{2} = -208$

Comme $x > 0$, alors $x = 8$.

Le taux d'intérêt annuel dans cette banque est de 8%. 1,5pt

$\boxed{\text{Le montant de l'épargne de M. BELL après la première année est de } 1.500.000 + 15000 \times 8 \text{ soit } 1.620.000 \text{ FCFA.}}$

Tâche 2. Déterminons le montant du premier salaire de M. BELL.

Désignons par S_0 le montant du premier salaire de M. BELL et par r l'augmentation fixe sur son salaire mensuel chaque année.

- À la 2ème année, son salaire mensuel est $S_1 = S_0 + r$.
- À la 3ème année, son salaire mensuel est $S_2 = S_1 + r = S_0 + r + r = S_0 + 2r$

⋮

- À la 10ème année, son salaire mensuel est $S_9 = S_0 + 9r$.
- À la 30ème année, son salaire mensuel est $S_{29} = S_0 + 29r$.

• Le salaire de M. BELL à la dixième année était de 53.000 FCFA signifie que $S_0 + 9r = 53.000$.

• Le cumul de tous les salaires de M. BELL pendant les trente années donne un montant total de 23.040 000 FCFA signifie que

$12S_0 + 12S_1 + 12S_2 + \cdots + 12S_{29} = 23.040.000$

$$12S_0 + 12S_1 + 12S_2 + \cdots + 12S_{29} = 23.040.000$$

$$\Leftrightarrow 12(S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{29}) = 23.040.000$$

or $S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{29} = \dfrac{30(S_0 + S_{29})}{2} = 15(S_0 + S_{29})$

$= 15(S_0 + S_0 + 29r)$

$= 15(2S_0 + 29r)$ C1

donc $12 \times 15(2S_0 + 29r) = 23.040.000$ C2

c'est-à-dire $2S_0 + 29r = 128.000$ C3

On obtient le système : $\begin{cases} S_0 + 9r = 53.000 \\ 2S_0 + 29r = 128.000 \end{cases}$

Après résolution de ce système, on trouve $r = 2000$ 1,5pt

On en déduit aisément que $S_0 = 53.000 - 9 \times 2000 = 35.000$

Ainsi, $\boxed{\text{le montant du premier salaire de M. BELL était de 35000 FCFA.}}$

<u>Tâche 3</u> : <u>Déterminons la dépense minimale que fera M. BELL pour aménager dans son domicile.</u>

Désignons par x le nombre de manœuvres recrutés. $(x > 0)$

t la durée (en h) du déménagement.

t_C et t_D les durées respectives (en h) des opérations de charge et de décharge.

- la durée du déménagement (en h) est $t = t_C + 2 + t_D$.
- la durée des opérations de charge et de décharge est inversement proportionnelle au nombre de manœuvres recrutés signifie que :

$\dfrac{t_C + t_D}{\frac{1}{x}} = \dfrac{2}{\frac{1}{1}}$, c'est-à-dire $t_C + t_D = \dfrac{2}{x}$.

Ceci étant : $t = 2 + \dfrac{2}{x}$.

- La dépense effectuée par M. BELL est donc :

$$D(x) = 8000t + 2000xt = 8000\left(2+\frac{2}{x}\right) + 2000x\left(2+\frac{2}{x}\right)$$
$$= 16\,000 + \frac{16000}{x} + 4000x + 4000$$
$$= \frac{16000}{x} + 4000x + 20.000.$$

C1

Considérons la fonction D définie sur $]0;+\infty[$ par

C2

$$D(x) = \frac{16000}{x} + 4000x + 20.000.$$

C3

$\lim\limits_{x \to 0^+} D(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = +\infty$.

D est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $D'(x) = \frac{-16000}{x^2} + 4000$

$$= \frac{4000(x^2-4)}{x^2}.$$

pour tout $x>0$, $\frac{4000}{x^2} > 0$, donc le signe de $D'(x)$ est celui de x^2-4.

x	0		2		$+\infty$
$D'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, D est strictement décroissante sur $]0;2[$ et strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$D'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
D	‖ $+\infty$	$\searrow$	36.000	$\nearrow$	$+\infty$

1,5pt

La dépense est minimale lorsque M. BELL recrute 2 manoeuvres, cette dépense minimale correspond à 36.000 FCFA.

$\boxed{\text{La dépense minimale que fera M. BELL pour aménager dans son domicile est de 36.000 FCFA}}$