

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE ZÉRO DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT SÉRIE D

Par M. Nathanaël ANONO MESSI
PLEG Maths

Partie B: ÉVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1 Déterminons les dimensions de la caisse permettant de minimiser le coût de fabrication de chaque caisse.

• Coût de fabrication de chaque caisse,

- Aire de base et du couvercle: $B = x^2 + x^2 = 2x^2$ (en dm^2)

- Aire latérale d'une caisse:

$$A_L = x \times h \times 4$$

or $V = x^2 \times h$, donc $h = \frac{V}{x^2} = \frac{128}{x^2}$

Ainsi, $A_L = 4x \times \frac{128}{x^2} = \frac{512}{x}$ (en dm^2)

Le coût de fabrication de chaque caisse est donc:

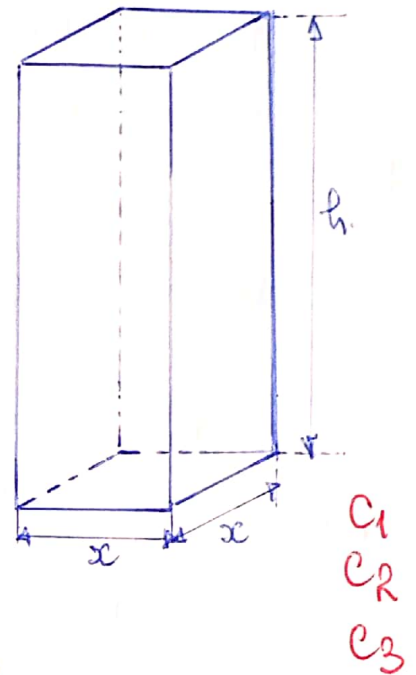
$$M \times B + H \times A_L = 50 \times 2x^2 + 25 \times \frac{512}{x} = 100x^2 + \frac{12800}{x} = 100 \left(x^2 + \frac{128}{x} \right)$$

• Considérons la fonction f définie sur $[3;5]$ par $f(x) = 100 \left(x^2 + \frac{128}{x} \right)$
 f est dérivable sur $[3;5]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[3;5]$ et pour tout $x \in [3;5]$, $f'(x) = 100 \left(2x - \frac{128}{x^2} \right) = \frac{100}{x^2} (2x^3 - 128)$
pour tout $x \in [3;5]$, $\frac{100}{x^2} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^3 - 128$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = 128 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4.$$

x	3	4	5
$f'(x)$	-	0	+



Ainsi, f est strictement décroissante sur $[3, 4[$ et strictement croissante sur $]4, 5]$

x	3	4	5
$f'(x)$		-	+
f	$\frac{15500}{3}$	$\Delta 4800$	$\nabla 5060$

L'étude des variations de f ci-dessus montre que f admet un minimum sur $[3, 5]$ pour $x=4$.

Pour $x=4$, on a: $h = \frac{128}{4^2} = 8$.

~~1.5pt~~

les dimensions de la caisse permettant de minimiser le coût de fabrication de chaque caisse sont: côté de la base: 4dm; hauteur de la caisse: 8dm.

Tâche 2. Masse moyenne des différentes caisses vides.

- Masse de chaque base.

$$e = 1\text{mm} = 0,01\text{dm}.$$

$$P_H = \frac{m}{V} \Rightarrow m = P_H \times V = 1,2 \times x^2 \times e = 1,2 \times x^2 \times 0,01 = 0,012x^2.$$

C_1
 C_2
 C_3

la masse des bases est $m_b = 2 \times 0,012x^2 = 0,024x^2$ (en kg)

- Masse d'une face latérale.

$$P_{H'} = \frac{m'}{V'} \Rightarrow m' = P_{H'} \times V' = x \times h \times e = x \times \frac{128}{x^2} \times 0,01 = \frac{1,28}{x}$$

la masse des faces latérales est $m_f = 4 \times \frac{1,28}{x} = \frac{5,12}{x}$ (en kg)

- la masse d'une caisse vide est donc $m(x) = m_b + m_f = 0,024x^2 + \frac{5,12}{x}$ (en kg)

- la masse moyenne des différentes caisses vides est

$$\mu = \frac{1}{5-3} \int_3^5 m(x) dx = \frac{1}{2} \int_3^5 \left(0,024x^2 + \frac{5,12}{x} \right) dx.$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left[0,008x^3 + 5,12 \ln x \right]_3^5 = \frac{1}{2} (1 + 5,12 \ln 5 - 0,216 - 5,12 \ln 3) = 1,7. \quad 1,5 \text{ pt}$$

la masse moyenne des différentes caisses vides est de 1,7 kg.

Tâche 3. Déterminons le nombre de minutes de séjour de la caisse dans la salle au bout duquel on peut l'enlever pour son utilisation.

- Déterminons la température $\theta(t)$ de la caisse à chaque instant t .
La vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ aux dates $t \geq 0$ est proportionnelle à la température $\theta(t)$ signifie que $\theta'(t) = a\theta(t)$ où $a \in \mathbb{R}$.

$$\theta'(t) = a\theta(t) \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = a \Leftrightarrow \ln|\theta(t)| = at + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \theta(t) = ke^{at}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (\text{en } ^\circ\text{C})$$

$$\theta(t=0) = 70 \Leftrightarrow ke^{a(0)} = 70 \Leftrightarrow k = 70. \quad C_1$$

$$\theta(t=5) = 60 \Leftrightarrow ke^{5a} = 60 \Leftrightarrow e^{5a} = \frac{60}{70} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow 5a = \ln\left(\frac{6}{7}\right) \quad C_2 \\ \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{6}{7}\right) \quad C_3$$

$$\text{Ainsi, } \theta(t) = 70 e^{\frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{7}\right)} \quad (\text{en } ^\circ\text{C}).$$

- la caisse est prête à l'utilisation lorsque $\theta(t) < 30^\circ\text{C}$.

$$\theta(t) < 30 \Leftrightarrow 70 e^{\frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{7}\right)} < 30 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{7}\right)} < \frac{30}{70} \quad 1,5 \text{ pt} \\ \Leftrightarrow \frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{7}\right) < \ln\left(\frac{3}{7}\right) \\ \Leftrightarrow t \ln\left(\frac{6}{7}\right) < 5 \ln\left(\frac{3}{7}\right) \Leftrightarrow t > \frac{5 \ln\left(\frac{3}{7}\right)}{\ln\left(\frac{6}{7}\right)} \approx 27,5 \text{ (en min).}$$

On peut enlever la caisse dans la salle pour son utilisation après 27,5 minutes.