CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE ZÉRO DE MATHÉMATIQUES PROBATOIRE C MAI 2023

Par M. Nathanaël AWONO MESSI
PLEG Maths

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1

A) 1. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Nous avons : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas proportionnelles deux à deux : Exple $\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{2}$; $\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{2}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

0,5pt

Remarque on peut également montrer qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

2. (a) Justifions que $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

Nous avons : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 4\times1+(-4)\times0+2\times(-2) = 4-4=0$

donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$.

De même, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 4\times0+(-4)\times1+2\times2 = -4+4=0$

donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$

0,5pt

Comme $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

(b) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$M\in(ABC) \iff \overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$

$\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

$\iff \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}=0 \iff 4(x-2)-4(y-1)+2(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)-2(y-1)+z-2=0$

$\Leftrightarrow 2x-4-2y+2+z-2=0 \quad \Leftrightarrow 2x-2y+z-4=0.$ 0,5pt

$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x-2y+z-4=0.}$

(c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{DM} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4t \\ y-1=-4t \\ z-2=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+4t \\ y=1-4t \\ z=2+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$ 0,5pt

une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x=5+4t \\ y=1-4t \\ z=2+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

3 (a) Déterminons les coordonnées du point H d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)

$H \in (\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} H\in(\Delta) \\ H\in(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=5+4t \\ y_H=1-4t \\ z_H=2+2t \\ 2x_H-2y_H+z_H-4=0. \end{cases}$

$2x_H-2y_H+z_H-4=0 \Leftrightarrow 2(5+4t)-2(1-4t)+2+2t-4=0$

$\Leftrightarrow 18t+6=0 \quad \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}.$

Ainsi, $x_H=5+4\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}$; $y_H=1-4\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$; $z_H=2+2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$

donc $H\left(\frac{11}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ 0,5pt

(b) Calculons KD.

$KD=\sqrt{(x_D-x_K)^2+(y_D-y_K)^2+(z_D-z_K)^2}=\sqrt{\left(5-\frac{11}{3}\right)^2+\left(1-\frac{7}{3}\right)^2+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$ 0,5pt

Justifions que la distance d du point D au plan (ABC) est 2cm.

$d = d(D,(ABC)) = KD = 2\text{cm}$, car $K=H$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). 0,25pt

4. Calculons le volume du tétraèdre ABCD.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times KD \quad (\text{en cm}^3)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 1\text{cm}^3.$$ 0,25pt

B) 1. Déterminons $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ puis la matrice M de f dans la base B.

On a: $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

donc $f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. 0,25pt×3

Ainsi, $M = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

2. Déterminons le noyau Ker(f) de f et un élément $\vec{e_1}$ de Kerf de la forme $\vec{e_1} = \alpha\vec{i} + \vec{j}$.

$$\text{Ker}f = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_E\}$$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de E.

$$\vec{u} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ -2x+4y=0\end{cases} \Leftrightarrow x-2y=0$$ 0,5pt

$\boxed{\text{Kerf est une droite vectorielle dont une équation cartésienne est } x-2y=0}$

$\vec{e_1} = x\vec{i} + y\vec{j} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y.$

$(x;y) = (2y;y) = y(2;1) = y\vec{e_1}$ où $\vec{e_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$. 0,25pt

Exercice 2.

1. (a) Déterminons les variations de f.

Par lecture graphique de la courbe $\mathcal{C}_{f'}$, le tableau de signe de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ 1pt
f est strictement croissante sur $]-1;1[$.

(b) Déterminons le nombre d'extréma de f.

La fonction f admet un minimum au point d'abscisse -1 et un maximum au point d'abscisse 1, donc f a deux extréma. 0,5pt

2. Déterminons les réels a, b et c.

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

- $f(0) = 1 \iff a(0)^3 + b(0) + c = 1 \iff c = 1$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3ax^2 + b$.

$f'(-1) = 0 \iff 3a(-1)^2 + b = 0$
$\iff 3a + b = 0$.

$f'(0) = 3 \iff 3a(0)^2 + b = 3 \iff b = 3$. 1pt

$3a + b = 0 \iff 3a + 3 = 0 \iff 3a = -3$
$\iff a = -1$

Ainsi, $\boxed{a = -1,\ b = 3 \text{ et } c = 1}$

3. (a) Etudions les variations de g et construisons son tableau de variations.

$D_g = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.
- g est Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x^2) = 3(1-x)(1+x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, g est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$; g est strictement croissante sur $]-1 ; 1[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

1pt

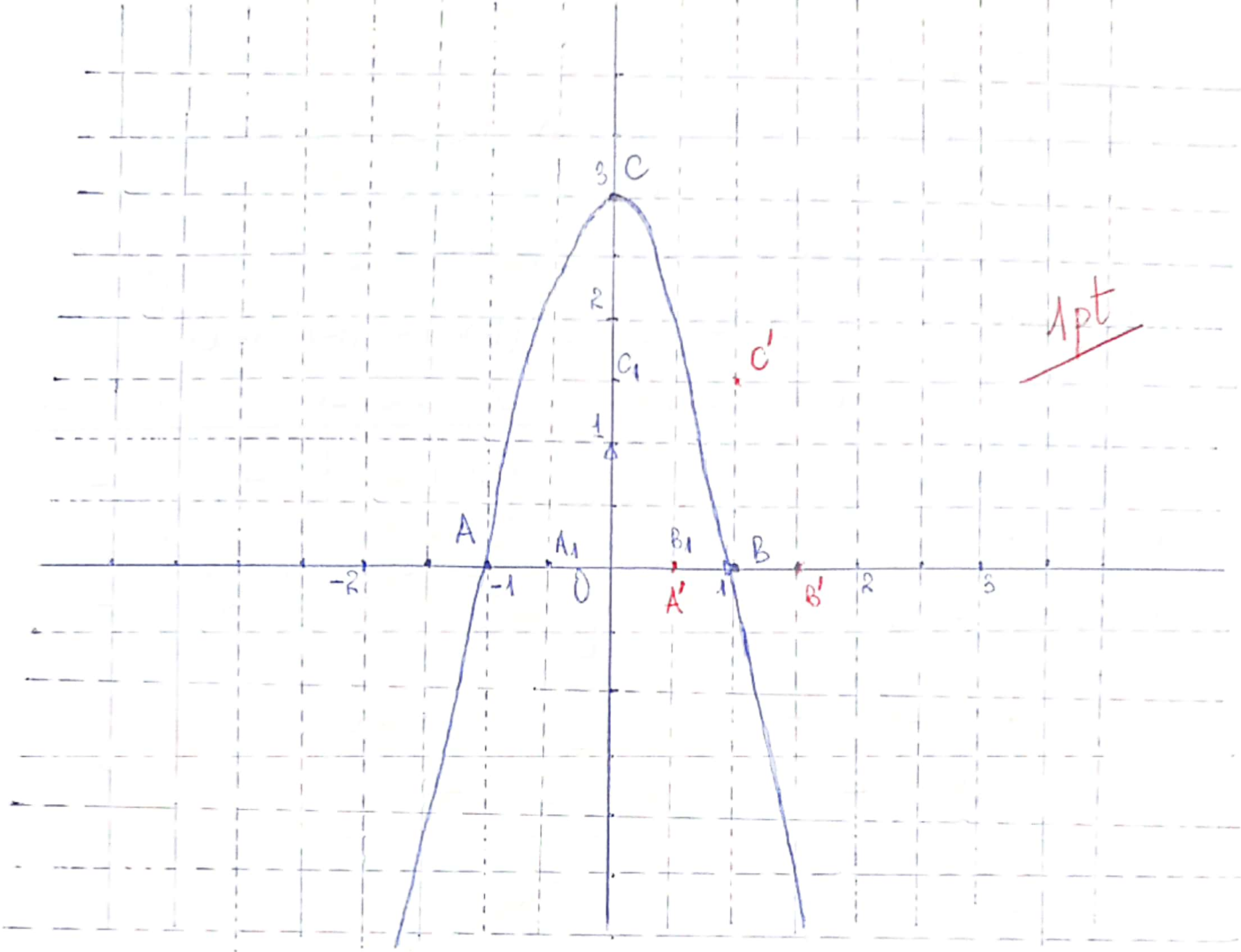
(b) Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

- g est une fonction Continue sur l'intervalle $[-1 ; 0]$
- $g(-1) = -1$; $g(0) = 1$.
- Comme $g(-1) \times g(0) < 0$, alors l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

0,5pt

4. Reproduisons la figure ci-dessus et Construisons les images des points A, B et C par $t \circ h$.

(Voir figure au verso).



1pt

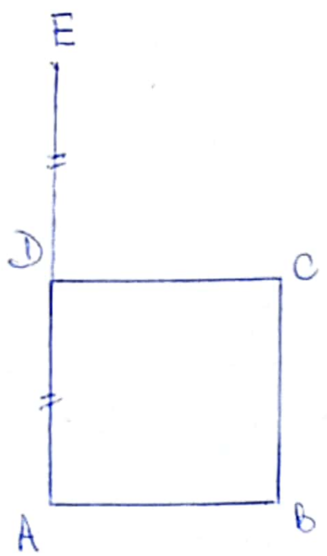
<u>Explications</u>. On construit le point A_1, image de A par h, puis le point A', image du point A_1 par t.
(Faire de même pour les points B' et C')

$h(A) = A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$t(A_1) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A'} = \overrightarrow{AO}$

<u>Exercice 3</u>.

1) 1. <u>Faisons une figure</u>



0,5pt

(b) Démontrons que $E = \text{bar}\{(A;1);(B;-2);(C;2)\}$

Nous avons : $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{EC}$

$= \overrightarrow{EA} + 2(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{BC}$ 0,5pt

$= \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AD}$, Car ABCD est un parallélogramme

$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AE}$, Car D est le milieu de $[AE]$

$= \vec{0}$

donc E est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-2)$ et $(C;2)$

2.(a). Montrons que $AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = EM^2 - 18$.

Soit M un point du plan, on a :

$AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = \overrightarrow{AM}^2 - 2\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{CM}^2$

$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM})^2 - 2(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EM})^2 + 2(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EM})^2$

$= AE^2 + 2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EM} + EM^2 - 2(BE^2 + 2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EM} + EM^2) + 2(CE^2 + 2\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EM} + EM^2)$

$= EM^2 + AE^2 - 2BE^2 + 2CE^2 + 2\overrightarrow{EM}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{CE})}_{\vec{0}}$

$= EM^2 + AE^2 - 2BE^2 + 2CE^2$.

. le triangle BAE étant rectangle en A, alors d'après la propriété de Pythagore,
$BE^2 = BA^2 + AE^2 = 3^2 + 6^2 = 45$.

. De même, $CE^2 = CD^2 + DE^2 = 3^2 + 3^2 = 18$; $AE^2 = 6^2 = 36$

Ceci étant : $AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = EM^2 + 36 - 2\times 45 + 2\times 18$ 0,75pt

$= EM^2 - 18$

(b) Déduisons-en que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Soit M un point du plan.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow AM^2 - 2BM^2 + 2CM^2 = -9$

$\Leftrightarrow EM^2 - 18 = -9 \Leftrightarrow EM^2 = 9 \Leftrightarrow EM = 3$.

$\boxed{(\Gamma) \text{ est un Cercle de centre } E \text{ et de rayon } 3.}$ 0,5pt

II) 1. (a) Déterminons le nombre de tirages possibles.

Soit Ω l'ensemble des 12 boules.

Un tirage possible est une combinaison de 3 éléments de E, donc le nombre de tirages possibles est C_{12}^{3} soit 220. 0,5pt

(b) Justifions que $y = 8 - x$.

L'urne contient 12 boules dont 4 vertes, x rouges et y jaunes signifie que $4 + x + y = 12$, donc $y = 12 - 4 - x$
$= 8 - x$. 0,5pt

2. Montrons que $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 22x + 48$.

Obtenir exactement 1 boule jaune à la fin du tirage, c'est tirer une boule jaune parmi les $(y = 8 - x)$ boules jaunes et 2 boules non jaunes parmi les $(4 + x)$ boules restantes dans l'urne.

Le nombre de façons d'obtenir un tel tirage est donc

$$P(x) = C_{8-x}^{1} \times C_{4+x}^{2}.$$

Comme $C_{8-x}^{1} = 8 - x$ et $C_{4+x}^{2} = \frac{(4+x)!}{2!(2+x)!} = \frac{(4+x)(3+x)(2+x)!}{2(2+x)!}$

$$= \frac{(4+x)(3+x)}{2}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}x\right)(3+x)$$

alors $P(x) = (8-x)\left(6 + 2x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)$

$$= (8-x)\left(6 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= 48 + 28x + 4x^2 - 6x - \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 22x + 48.$$ 0,75pt

III) 1. Aucun sommet dans ce graphe est de degré 1 0,25pt

2. les sommets adjacents au sommet A sont les sommets B, G et F soit 3.

3. Ce graphe n'est pas complet, car on a par exemple les sommets A et C qui ne sont pas adjacents.

0,25pt x 3

4. Ce graphe a 7 sommets, donc il est d'ordre 7.

Partie B. ÉVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1 Déterminons le type de rémunération qui est le plus avantageux à l'ouvrier.

Désignons par : U_n le salaire d'un ouvrier à la $n^{ième}$ semaine de travail avec la rémunération de type I

V_n le salaire d'un ouvrier à la $n^{ième}$ semaine de travail avec la rémunération de type II

- On a : $U_1 = 20.000$; $U_2 = 20.000 + 550$; .... $U_{n+1} = U_n + 550$

donc (U_n) est une suite arithmétique de raison 550 et de premier terme $U_1 = 20.000$; ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 20.000 + 550(n-1)$

le cumul de salaire d'un ouvrier ne disposant que de 12 semaines de travail avec la rémunération de type I est :

C1 C2 C3

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_{12} = \frac{12(U_1 + U_{12})}{2} = 6(U_1 + U_{12})$$
$$= 6(20.000 + 26050)$$
$$= 276300$$

- On a aussi $V_1 = 18.000$; $V_2 = 18000 + \frac{4}{100} \times 18.000$, ..., $V_{n+1} = V_n + \frac{4}{100} V_n$
$$= 1{,}04 V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $V_1 = 18.000$; ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 18.000 (1{,}04)^{n-1}$.

le Cumul de salaire d'un ouvrier ne disposant que de 12 semaines de travail avec la rémunération de type II est :

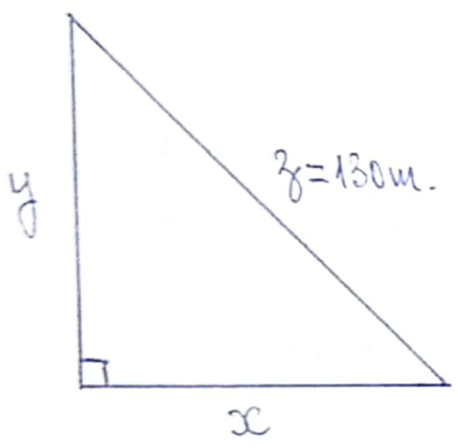
$$S' = V_1 + V_2 + \cdots + V_{12} = V_1 \times \frac{1-(1{,}04)^{12}}{1-1{,}04} = 18.000 \times \frac{(1{,}04)^{12}-1}{0{,}04}$$

1,5pt

$$= 270464{,}5 \simeq 270465$$

- Comme 270 465 FCFA < 276 300 FCFA, alors c'est la rémunération de type I qui est la plus avantageuse à l'ouvrier.

Tâche 2. Déterminons la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin.



Désignons par x et y les autres côtés (leurs longueurs) du jardin. $x>0$, $y>0$

la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin est $P = x+y+130$ (en m).

C_1
C_2
C_3

Aspect du jardin.

- L'aire du jardin est égale à $3000\,m^2$ signifie que $\frac{xy}{2} = 3000$ c'est-à-dire $xy = 6000$.
- Par la propriété de Pythagore, on a : $x^2+y^2 = 130^2 = 16900$.

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 16900 + 2\times 6000 = 28900$$

et comme $x+y>0$, alors $x+y = 170$ (en m)

Ceci étant $P = x+y+130 = 170\,m + 130\,m = 300\,m$.

1,5pt

$\boxed{\text{la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin est de } 300\,m.}$

Tâche 3. **Déterminons le nombre minimal de rejetons que TOBI doit acheter.**

- **Dimensions du champ.**

$4(\cos x)^2 - 1 = 0 \iff 4\cos^2 x = 1$

$\iff \cos^2 x = \frac{1}{4} \iff \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$.

- $\cos x = -\frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

- $\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

x \ k	0	1
$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$		$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$	$\frac{2\pi}{3}$	
$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$		$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$\frac{\pi}{3}$	

C_1

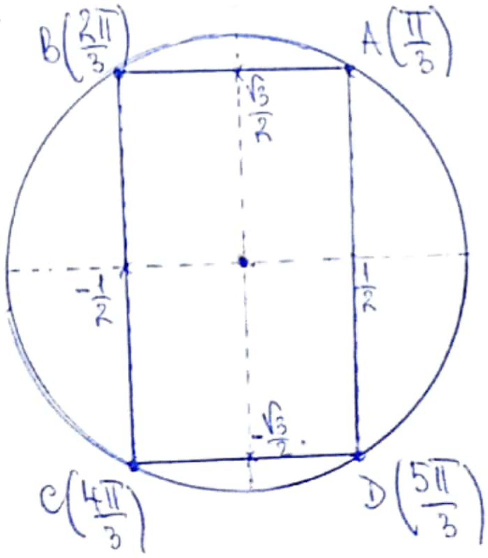
C_2

C_3

Dans $[0; 2\pi[$, les solutions de cette équation sont :

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Aspect du champ.



- la longueur de ce champ est $AD = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ u.l $= \sqrt{3}$ u.l

$= \sqrt{3} \times 2000$ m

$= 1{,}73 \times 2000$ m

$= 3460$ m.

- la largeur de ce champ est $AB = 2 \times \frac{1}{2}$ u.l $= 1$ u.l

$= 2000$ m.

- Aire du champ. $\mathcal{A} = AD \times AB = 3460\,m \times 2000\,m = 6.920.000\,m^2$.

- Nombre minimal de rejetons que TOBi doit acheter. 1,5pt

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ rejetons} \longrightarrow 20\,m^2. \\ x \longrightarrow 6.920.000\,m^2 \end{array}\right\} \quad x = \frac{6.920.000\,m^2 \times 3 \text{ rejetons}}{20\,m^2}$$

$= 1.038\,000$ rejetons.

$\boxed{\text{le nombre minimal de rejetons que TOBi doit acheter est de } 1.038.000 \text{ rejetons}}$

ouf! c'est énorme...