COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	BAC BLANC	Date : Du 17 au 21 Avril 2023
	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	
Niveau : **Tle C**	Durée : **04 heures**	Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1 : 03,5 Points

On considère une urne contenant deux boules identiques numérotées 1 et 2. Trois tirages successifs et avec remise sont effectués, et l'on appelle a, b et c les trois numéros ainsi obtenus dans l'ordre ; tous les tirages sont équiprobables. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme $a+b+c$.

1- Calculer la probabilité que l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x admette au moins une solution. ***0,5pt***

2- **a)** Déterminer la loi de probabilité de X. ***1pt***

b) En tirant trois boules de l'urne, quelle somme espèrerons nous avoir ? ***0,5pt***

3- On désigne par E l'ensemble des triplets possibles $x=(a,b,c)$ obtenus à la fin des trois tirages et par $X(x)$ la somme de tout élément x de E. On considère l'application P de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $P(A)=\sum_{x_i\in A}[pX(x_i)+q]$.

a) Démontrer que P est une probabilité sur E si et seulement si $36p+8q=1$. ***0,75pt***

b) Soient B la partie de E formée des triplets de la forme $(1;b;c)$ et C la partie de E formée des triplets de la forme $(2,2,c)$. Déterminer p et q pour que $P(B)=P(C)$. ***0,75pt***

Exercice 2 : 06,00 Points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les plans (P) et (P') d'équations respectives $x+y+1=0$ et $x+y+z=0$.

1- Montrer que les plans (P) et (P') sont sécants en une droite (D) dont on donnera un vecteur directeur. ***0,75pt***

2- Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D). ***0,75pt***

Partie B : Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm. M est le point du plan d'affixe z, (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{|z-1-i|}{|z-i\bar{z}+8(1+i)|}=\frac{1}{4}$, (D) est la droite d'équation $x+y-8=0$ et F est le point de coordonnées $(1;1)$.

1- Soit M' le projeté orthogonal de M sur (D).

Montrer que l'affixe z' de M' est : $z'=\frac{1}{2}(z-i\bar{z}+8(1+i))$. ***0,5pt***

2- Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $MM'=2MF$. ***0,5pt***

3- **a)** En déduire que (Γ) est une conique dont on précisera la nature, le foyer et la directrice. ***0,75pt***

b) Déterminer l'axe focal. ***0,5pt***

c) Vérifier que les points $A(2;2)$ et $A'(-2;\ -2)$ sont deux sommets de (Γ). ***0,75pt***

4- **a)** Construire dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ la droite (D), l'axe focal et les points A, A', F. ***0,5pt***

b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de (Γ). ***0,5pt***

c) Donner l'allure de (Γ). ***0,5pt***

Exercice 3 : 06,00 Points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unités graphique 2 cm sur les axes.

1- **a)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. ***0,5pt***

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x - 2y = 0$ est asymptote à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en $-\infty$. ***0,5pt***

c) Etudier la position de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ par rapport à la droite (Δ). ***0,5pt***

2- Soit u la fonction définie par $u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$ et $(\mathcal{C}_u)$ sa courbe représentative.

a) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation. ***0,75pt***

b) Montrer que $(\mathcal{C}_u)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point $\alpha \in]0{,}63; 0{,}64[$. ***0,5pt***

3- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. ***0,5pt***

4- Construire la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ dans le repère défini plus haut. ***0,75pt***

5- Construire dans le même repère de la partie B, et en pointillés, la courbe (Γ) d'équation $y = e^x$ et la droite (D): $y = x$. ***0,5pt***

6- Soit t un nombre réel ; on désigne par M_t le point de (Γ) d'abscisse t. La tangente à (Γ) au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t. P_t est le point de (D) d'abscisse t et G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t.

a) Déterminer en fonction de t les coordonnées des points N_t, M_t et P_t. ***0,75pt***

b) Montrer que le point G_t a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}t; \frac{1}{4}(t + (2 - t)e^t)\right)$. ***0,5pt***

c) Déterminer l'ensemble des points G_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$. ***0,5pt***

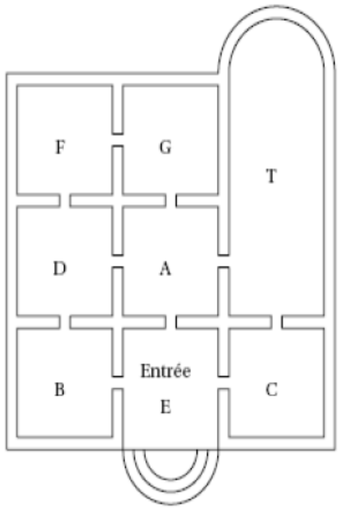
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 04,5 POINTS

Situation :

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-contre, organise une exposition. Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe au hasard d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.
- Les œuvres les plus intéressantes sont installées dans la salle T.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci.



Pour le weekend prochain, le directeur sait qu'il aura 10 visiteurs et chacun devra effectuer un trajet de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. M. Tanga un des employés du musée, pense qu'en obligeant les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, ils pourront ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins sur les dix, passent par la salle T.

Dans la salle T, Alex un des visiteurs a trouvé un lot de petits carreaux identiques. Il en prend un certain nombre N inférieure à 3000 et avec ces carreaux forme sur le sol une surface carrée. Puis il en rajoute 2023 pour former, avec les premiers, une surface plus grande.

La piscine de ce musée a une profondeur moyenne de 2,5 mètres et sa surface supérieur a une forme qui se ramène dans le plan (repère orthonormé) à l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x = f(t)$ et $y = g(t)$ où f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ avec $f(0) = 6$; $g(0) = 0$; $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 24$, t est un nombre réel. Cette piscine est remplie à l'aide de quatre pompes qui ont chacune un débit de 35 litres par minute. On rappelle que le volume d'une piscine ovale est : $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \left[\frac{\boldsymbol{Longueur \times largeur \times \pi}}{\boldsymbol{4}}\right] \times \boldsymbol{Profondeur\ moyenne.}$ Prendre $\pi = 3{,}14$.

Tâches

1- M. Tanga a-t-il raison ? ***1,5pt***

2- De combien de carreaux Alex s'est-il servi pour former son premier carré ? ***1,5pt***

3- Combien faut-il d'heures pour remplir cette piscine si elle entièrement vide ? ***1,5pt***