

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	<b>BAC BLANC N°2</b>	Date : Mardi 02 Mai 2023
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		
Niveau : Tle C	Durée : 04 heures	Coef: 7

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES**

**15,5 POINTS**

**Exercice 1 : 03,5 Points**

On considère l'équation suivante  $(E): x^3 + px + q = 0$ ,  $p$  et  $q$  étant des réels donnés et  $x$  est une inconnue complexe.

- Soit  $x$  une solution de  $(E)$ , on pose  $u + v = x$  et  $uv = -\frac{p}{3}$ . Montrer que  $u^3$  et  $v^3$  sont les racines de l'équation :  $(E'): X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ . **0,5pt**
- Réciproquement, soit  $X'$  et  $X''$  les racines de  $(E')$ . Montrer que l'on peut trouver une racine cubique  $u$  de  $X'$  et une racine cubique  $v$  de  $X''$  telles que  $uv = -\frac{p}{3}$ . **0,5pt**
- a) Vérifier que  $u + v$  est solution de  $(E)$ . **0,5pt**  
b) Déterminer les racines cubiques de  $X'$  et  $X''$ . **0,5pt**
- En déduire les solutions de  $(E)$  en fonction de  $u$  et  $v$ . **0,75pt**
- Application** : Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $x^3 - 12x - 65 = 0$ . **0,75pt**

**Exercice 2 : 05,5 Points**

**Les parties A et B sont indépendantes**

**Partie A :**  $ABCD$  est un rectangle tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$  et  $AB = k$  où  $k$  est un réel strictement supérieur à 1.  $F$  est un point de  $[AB]$  et  $E$  un point de  $[DC]$  tel que  $AFED$  soit un carré de côté  $AD = 1$ . On désigne par  $s$  la similitude directe telle que  $s(A) = B$  et  $s(B) = C$ .

- Sachant que l'on a aussi  $s(C) = E$  et  $s(D) = F$ , montrer alors que  $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . **0,5pt**
- Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . **0,5pt**
- On désigne par  $\Omega$  le centre de la similitude  $s$ .  
a) Montrer que  $s \circ s$  est une homothétie dont on précisera le rapport. **0,5pt**  
b) Démontrer que  $\Omega$  est le point d'intersection des droites  $(BE)$  et  $(AC)$ . **0,5pt**  
c)  $G$  est le point d'intersection des droites  $(\Omega D)$  et  $(BC)$ ,  $H$  est le point d'intersection des droites  $(AC)$  et  $(EF)$ . Montrer que  $FBGH$  est un rectangle. **0,5pt**
- Le plan est muni d'un repère  $(A; \overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AD})$ . Déterminer l'écriture complexe de  $s$  et en déduire les coordonnées de  $\Omega$ . **1pt**

**Partie B :** On désigne par  $(S)$  la sphère de centre  $N(-8, 11, 16)$  et de rayon 2 et  $(T)$  le plan d'équation  $x - y + z + 1 = 0$ .

- Donner l'expression analytique de la réflexion de plan  $(T)$ . **1pt**
- Montrer que l'intersection de  $(S)$  et  $(T)$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**

**Exercice 3 : 03,25 Points**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$  et  $\varphi$  la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par :  $\varphi(x) = \tan x$ .

- Etudier les variations de  $\varphi$  et dresser son tableau de variation. **0,5pt**

- 2- Montrer que  $\varphi$  admet une bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  et que l'on a pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . **0,75pt**
- 3- Calculer  $u_0$  et  $u_1$ . **1pt**
- 4- a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ . **0,5pt**  
 b) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite. **0,5pt**

#### **Exercice 4 : 03,25 Points**

Soit  $s$  est la similitude d'écriture complexe  $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + i$ . On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe d'équation  $xy = -1$  dans le repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1- Vérifier que l'expression analytique de  $s$  est :  $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y) + 1 \end{cases}$  **0,5pt**
- 2- a) Déterminer une équation de  $(\Gamma')$  image de  $(\Gamma)$  par  $s$ . **0,75pt**  
 b) En déduire que  $(\Gamma')$  est une conique dont on précisera la nature et les éléments remarquables. **1pt**
- 3- Tracer les courbes  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . **1pt**

### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES**

**04,5 POINTS**

#### **Situation :**

L'association des anciens élèves du Lycée de Yaba (de la diaspora) a décidé de faire un don en matériel informatiques au centre informatique de la ville. Le président de l'association est alors descendu sur les lieux pour faire un état des besoins, il a trouvé 250 ordinateurs dont 40 sont considérés comme neufs, 100 sont considérés comme récent et les autres sont anciens. Une étude statistique faite par lui montre que 4% des ordinateurs neufs sont défectueux, 12% des ordinateurs récents sont défectueux et 25% des ordinateurs anciens sont défectueux.

Dans la ville de Yaba, 20% des individus ont une maladie chronique et parmi eux 2,5% sont atteints de choléra. On constate que 99% de ceux qui n'ont pas cette maladie chronique ne sont pas atteints de ce choléra.

Le président de l'association en tant que médecin décide de faire des analyses avec le médecin chef du laboratoire de la ville. Ils commencent par constater que le tiers de la population a été vaccinée contre le choléra ; puis que sur 15 malades, il y a 2 personnes vaccinées et que sur 100 personnes vaccinées, 8 sont malades.

Lorsque le président de l'association est revenu de là avec toutes les informations, le groupe a alors pris certaines décisions :

- Donner encore des ordinateurs au centre informatique si en prenant au hasard un ordinateur dans cette salle, on a plus de 17% de chance qu'il soit défectueux.
- Ils ne pourront se rendre tous (tous les membres de l'association) à Yaba que s'il ya moins de 2% de personnes atteintes du choléra.
- Si le vaccin est efficace alors tous doivent obligatoirement le prendre avant de s'y rendre.

#### **Tâches**

- 1- Le groupe va-t-il encore donner des ordinateurs au centre informatique de Yaba ? **1,5pt**
- 2- Tout le groupe pourra-t-il aller à Yaba pour la remise des dons ? **1,5pt**
- 3- Tous les membres doivent-ils prendre obligatoirement ce vaccin contre le choléra pour se rendre à Yaba ? **1,5pt**