Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun
Lycée Classique d'Edéa

Examen : BACCALAUREAT BLANC
Série : C/E Session : MAI 2023
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4h Coefficient : 7

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,25 points)

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher parmi lesquelles deux portent le numéro 4, trois le numéro -1 et deux le numéro 2. Une épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note a le numéro de la 1ère boule tirée et b celui de la 2ème : On définit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): ax+by=3$. On pose $N=\overline{a3b}$ un entier naturel en base 5. On désigne par f l'endomorphisme du plan vectoriel de base $(\vec{i},\vec{j})$ dont la matrice est $M=\begin{pmatrix}1 & 4\\ a & b\end{pmatrix}$

1. Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « L'équation (E) n'a pas de solution ». **0,5pt**

   B : « Le couple $(1;-1)$ est solution de l'équation (E) ». **0,5pt**

   C : « L'entier N est un multiple de 4 ». **0,5pt**

   D : « f n'est pas un automorphisme ». **0,5pt**

2. Pour tout entier naturel n, on pose $A_n=5^{4n+2}-11^{2n+2}$.

   (a) Montre par récurrence sur n que A_n est divisible par 4. **0,75pt**

   (b) Montre par congruence que A_n est divisible par 3. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $\mathscr{W}$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$. On considère les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{W}$ qui, à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, associe $\varphi(\vec{u})=(2x+2y)\vec{i}-(x+y)\vec{j}+z\vec{k}$.

1. Donne une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5pt**
2. Détermine l'expression analytique du demi-tour d'axe (AC). **1pt**
3. **(a)** Ecris la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. **0,5pt**

   (b) Détermine $\ker\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$; donne une base de chacun d'eux. **1pt**
4. On pose $\vec{e_1}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{e_2}=2\vec{i}-\vec{j}$. Montre que $\mathscr{B}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{k})$ est une base de $\mathscr{W}$. **0,5pt**
5. Détermine la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (3,5 points)

A) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $x^4-16(y^2-2y)^2=0$.

1. Montre que (Γ) est la réunion de 2 coniques. Précise leurs équations réduites. **1pt**
2. Construis soigneusement (Γ).(*On précisera les éléments caractéristiques*). **1pt**

B) 1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E): y''-6y'+8y=0$. **0,5pt**

2. Détermine la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(0,-1)$ et admet en ce point une tangente horizontale. **0,5pt**

C) Soit z un nombre complexe non nul. Détermine le lieu géométrique du plan complexe tel que les points d'affixes respectives z, iz et i soient alignés. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (4,25 points)

Soit g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **(a)** Etudie les variations de g_n. **0,75pt**
   (b) Déduis-en l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. **0,5pt**
   (c) Montre que $1 < \alpha_n < e^2$ et que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. **0,5pt**
   (d) Exprime $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. Déduis-en que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. **0,5pt**
2. **(a)** Montre que la suite de terme général α_n est convergente. On note l sa limite. **0,5pt**
   (b) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduis-en l. **0,5pt**
3. A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$. **0,5pt**
4. Montre que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

M. TCHIO, professeur titulaire d'une classe de TC dans un Lycée distribue à ses élèves des cahiers : certains reçoivent 3 cahiers de 2000 FCFA l'un et d'autres 5 cahiers de 1500 FCFA l'un pour un nombre total de 97 cahiers ; le nombre d'élèves de cette classe est un multiple de 5.

A côté du domicile de M. TCHIO, son épouse produit de l'huile de palme qu'elle vend dans un marché de la place. Dans ce marché, on vend x litres d'huile de palme à 4800 FCFA où x est l'unique solution de l'équation $(E): \ln(x-5) + \ln(x+2) = \ln(2x-4)$. Elle a conservé toute sa production dans une cuve ayant la forme d'un tétraèdre $ABCD$ où A, B, C et D sont quatre points de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. l'unité étant le mètre. Les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(2;4;0), (-3;0;5), (0;6;-3)$ et $(4;5;-6)$.

M. TCHIO demande à son jardinier de lui aménager un coin dans l'enceinte de son domicile pour son sport matinal ; il doit y semer du gazon dont le m^2 coûte 5.000 FCFA la semence. Ce coin est l'image d'un carré de $4m$ de côté par la transformation S du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z lui associe le point M' d'affixe z' tels que : $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 2 \\ y' = 2x + 2y + 3 \end{cases}$.

Tâches :

1. Détermine la dépense effectuée par M. TCHIO pour la distribution des cahiers. **1,5pt**
2. Détermine la somme obtenue par Mme TCHIO après la vente de sa production d'huile. **1,5pt**
3. Détermine la dépense effectuée par M.TCHIO pour l'aménagement du coin de sport. **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt