Lycée Ahmed Mangué Scientifique **Année scolaire : 2022/2023**

Département de Mathématiques **Durée : 04h**

Série : C **Coefficient : 05**

BAC BLANC

SESSION DE MAI 2023

Exercice N°1

Le polynôme complexe P est défini par : $P(z) = z^3 + (-8+2i)z^2 + (24-13i)z - 27 + 21i$. On considère l'équation (E) : $z^2 + (-5+2i)z + 9 - 7i = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
2) On désigne par $a, b\ et\ c$ les racines de P.
   a. Sans calculer les valeurs de a, b et c montrer que :
   $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 8 + 2i$; $ab + bc + ca = 24 - 13i$ et $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 27 + 21i$.
   b. Vérifier que : $a = 3$ est une racine de P.
   c. En déduire que : $b + c = 5 - 2i$ et $bc = 9 - 7i$.
   d. Montrer alors que b et c sont les solutions de (E).
   e. En déduire toutes les racines de P.

Exercice N°2

I. Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.
Pour tout réel $m \neq \frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :
$$\{(A;1),(B;m),(C,2m)\}$$
Pour tout point M du plan, on note : $V_n = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
1) Montrer que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.a
2) Montrer que les points G_1, J et C sont alignés.
3) Montrer que Pour tout point M du plan, $V_m = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.
4) Montrer que Pour tout réel $m \neq -\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.
5) Montrer que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

II. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par :
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$
1) Démontrer que f est une isométrie.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) Caractériser géométriquement l'application f.

Problème

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2cm.

Partie A :

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe de (C) en $-\infty$ et préciser la position de (C) et (D).
3) Déterminer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f.
4) Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
5) Calculer : $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.
6) Dresser le tableau de variation de f.
7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions a et b tels que : $1{,}9 \leq a \leq 2$ et $-0{,}6 \leq b \leq -0{,}5$.
8) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis tracer (C) et (D).

Partie B :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.
2) Etudier les variations de g.
3) Soit $I = [1{,}9;2]$
   a. Montrer que pour tout $x \in I;\ g(x) \in I$.
   b. Montrer que pour tout $x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
4) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{9}|u_n - a|$ puis, que : $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \left(\frac{1}{10}\right)$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C :

1) En intégrant par parties, calculer : $J = \int_1^a xe^{x-1}dx$
2) Calculer en unité d'aire ua l'aire A de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = a$
3) Montrer que : $A = (a-1)\left(a - \frac{1}{a}\right)$.

   Données :$e \approx 2{,}71; e^{0,9} \approx 2{,}46;\ e^{-1,5} \approx 0{,}22$; $e^{-1,6} \approx 0{,}20; ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0{,}92; ln\left(\frac{48}{19}\right) \approx 0{,}93$