ÉPREUVE HARMONISÉE RÉGIONALE DE MATHÉMATIQUES 2023

EXAMEN : **BACCALAURÉAT** SÉRIE : **C** DURÉE : **4 heures** COEF : **7**

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère l'application f de P dans P, qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ telle que :$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\ln a - \boldsymbol{y}\ln b \\ \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}\ln b + \boldsymbol{y}\ln a \end{cases}$ a et b étant deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que l'écriture complexe de f est $z' = (\ln a + i\ln b)z$. **0,5 pt**
2. En déduire l'ensemble des points $N(a;b)$ du plan pour lesquels $f$est une homothétie distincte de l'application identique. **0,5 pt**
3. On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont deux de ses faces portent le numéro 0, une face porte le numéro 1, une face porte le numéro 2, une face porte le numéro -1, et la dernière face porte le numéro -2. On considère m, un entier relatif ne pouvant prendre que les valeurs figurant sur les faces de ce dé. On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E_m): 9x-(m+2)y = 2,$ l'ensemble $(T_m): mx^2+y^2-4x = 0,$ la sphère (S) d'équation : $(x-2)^2+y^2+z^2 = \sqrt{3}$ et le plan (P_m): $x+y+z+m^2 = 0$.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé, associe le résultat obtenu.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. **0,5 pt**
   b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X. **0,5 pt**
   c) Déterminer la probabilité pour que (E_m) admette au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$. **0,5 pt**
   d) Déterminer la probabilité pour que (T_m) soit une ellipse ou une hyperbole. **0,5 pt**
   e) Déterminer la probabilité pour que (S) et (P_m) soient tangents. **0,5 pt**

B-Soit E l'espace vectoriel dont une base est $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On note φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x';y';z')$ tels que :
$3x' = -x+2y-2z$, $3y' = 2x+2y+z$ et $3z' = -2x+y+2z$. On pose $\psi = \frac{1}{2}(Id_E+\varphi)$.

a) Démontrer que $\psi \circ \psi = \psi$. **0,5 pt**
b) Déterminer une base et la dimension de $Ker(\psi)$ et $Im(\psi)$. **1 pt**

Exercice 2 : 5 points

I) On considère dans $\mathbb{Z}^2$l'équation suivante : (E) :$1113x+547y = 1$

1. Montrer à l'aide de l'algorithme d'Euclide que 1113 et 547 sont premiers entre eux. **0,25 pt**

2. Montrer que le couple (144 ;-293) est une solution de (E). **0,25 pt**

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$. **0,5 pt**

4. Déterminer les couples d'entiers (x ;y) solution de (E) et vérifiant $1238 \leq x \leq 2879$. **0,75 pt**

II) On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $u_n = 2^{n+1}+(-3)^n$ et on pose $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \equiv 3 \times 2^n (5)$. **0,75 pt**

2. Déduire le reste de la division euclidienne du terme u_n par 5. **0,25 pt**
3. Démontrer que $S_n \equiv -3 + 3 \times 2^{n+1}(5)$. **0,5 pt**
4. Déduire le reste de la division euclidienne de S_{2023} par 5. **0,25 pt**
5. Montrer que $P_{2023} \equiv 1(5)$. **0,5 pt**

III) Soit n un entier naturel quelconque.

1. **a)** Montrer que l'entier $n^4 + 4$ est le produit de deux entiers naturels qui dépendent de n. **0,25 pt**
   b) En déduire que l'entier 5 est le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4$. **0,25 pt**
2. Démontrer que n n'est pas un multiple de 5, alors $n^4 + 4$ est un multiple de 5. **0,5 pt**

Exercice 3 : 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f. **0,5 pt**
2. **a)** Démontrer que pour tout $x \in]0; 1]$, $f(x) \leq \ln x$. **0,5 pt**
   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+. **0,25 pt**
3. **a)** Montrer que pour tout réel x non nul positif, $x \geq 2\ln x$ et en déduire que $e^x \geq x^2$. **0,75 pt**
   b) Démontrer que pour tout réel $x \geq e, \int_e^x \frac{e^t}{t} dt \ \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$. **0,5 pt**
   c) En déduire que pour tout réel $x \geq e, f(x) \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$. **0,25 pt**
   d) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **0,25 pt**
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. **0,5 pt**
5. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Préciser les branches infinies de la représentation graphique de la fonction f. **0,5 pt**
6. Donner avec soin l'allure de (C). **1 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Situation :

MOUSSA a passé les congés derniers chez son oncle qui est géographe. Un jour, il trouve sur une carte pour $\boldsymbol{x}$ dans **[0 ; π]**, cette quantité $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x+\pi} - \cos(x)}$ que son oncle dit :
(A) être décroissante en x, et (B) comprise entre -1 et 1,5.

Pendant son séjour chez son oncle, MOUSSA veut acquérir un terrain pour y pratiquer l'élevage de la volaille plus tard. Son oncle, titulaire de plusieurs parcelles lui propose de choisir parmi les deux suivantes pour son projet :

La parcelle 1 est délimitée par la courbe (C_f) de la fonction f qu'il a vue sur la carte, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

La parcelle 2 est délimitée par la courbe (C_g) de la fonction g définie par $g(x) = 10 \times \frac{(-2+x^2\ln x)}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Dans cette zone, le prix du mètre carré est fixé à 3000 FCFA et le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10 mètres sur chaque axe.

MOUSSA est embarrassé et voudrait d'abord estimer l'aire de chaque parcelle avant de faire son choix.

Tâches :

1. Aide MOUSSA à évaluer la somme à verser pour l'acquisition de la parcelle1. **1.5 pt**
2. Aide MOUSSA à évaluer la somme à verser pour l'acquisition de la parcelle 2. **1.5 pt**
3. Expliquer à MOUSSA pourquoi l'affirmation (A) est fausse et (B) vraie. **1.5 pt**

Présentation : 0.5 pt