

| MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES |                          |                           | REGION DU CENTRE |       |
|-----------------------------------------|--------------------------|---------------------------|------------------|-------|
| Classe                                  | Epreuve de Mathématiques | COLLEGE LE CHAMPS DES LYS | Coef             | Durée |
| Tc                                      | Année 2022/2023          | BACC BLANC n° 1           | 7                | 4H    |

### PARTIE A : Evaluation des ressources

#### Exercice 1 : 3,75pts

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  puis étudier les variations de  $f$  puis tracer (C). 1,5pt
- Pour  $\alpha$  réel non nul, on pose  $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$ 
  - Donner le signe et une interprétation graphique de  $I_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ . 0,5pt
  - Exprimer  $I_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ . 0,25pt
  - Déterminer la limite de  $I_\alpha$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ . 0,25pt
- On définit sur  $\mathbb{N}^*$  la suite  $(u_n)$  par  $u_n = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}} dx$  ou  $f$  est la fonction définie ci-dessus. On ne cherchera pas à calculer  $u_n$ .
  - Donner, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , le signe de  $u_n$ . 0,25pt
  - Donner le sens de variation de la suite  $(u_n)$ . 0,25pt
  - La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? 0,25pt
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$ . 0,25pt
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ . Donner sa valeur exacte. 0,25pt

#### Exercice 2 : 3,25 points

**A/** Soit  $E$  un espace vectoriel rapporté à une base  $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{n}$  deux vecteurs de  $E$

tels que :  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . À tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  de  $E$ , on associe l'application  $f$  définie de  $E$  dans lui-même par :  $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$ .

- Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer sa matrice  $M$  dans la base  $B$ . 0,5pt
- Montrer que  $\text{Ker}(f)$  est une droite vectorielle dont on donnera une base  $\vec{e}_1$ . 0,5pt
- Montrer que  $\text{Im}(f)$  est un plan vectoriel  $P$  de vecteur normal  $\vec{n}$ . Donner une base  $(\vec{e}_2; \vec{e}_3)$ . 0,5pt

**B/** On considère l'équation différentielle (E) :  $y' - 3y = \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$

On donne une fonction  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-3x} \varphi(x)$

- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel, exprimer  $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$  en fonction de  $f'(x)$ . 0,5pt
- Déterminer  $f$  de sorte que  $\varphi$  soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  et vérifie  $\varphi(0) = \frac{e}{2}$ . 0,5pt
- Résoudre l'équation différentielle (F) :  $y' - 3y = 0$ . 0,25pt
- Soit  $h$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\varphi - h$  est solution de (F) si et seulement si  $h$  est solution de (E) 0,25pt
- En déduire la forme générale des solutions de (E). 0,25pt

#### Exercice 3 : 2,75 pts

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique 2cm. Soit  $f$  la transformation du plan qui

à tout point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tel que : 
$$\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

- Déterminer l'écriture complexe de  $f$ . 0,25pt
- En déduire que  $f$  est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0,75pt
- Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$  et  $(\Gamma')$  son image par  $f$ .
  - Déterminer une équation de  $(\Gamma')$ . 0,5pt
  - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\Gamma')$  et en déduire la nature de  $(\Gamma)$ . 0,75pt
  - Construire  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$ . 0,5pt

**Exercice 4 : 5,25 pts**

I/Le plan P est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 3 cm. On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives  $a, b, c$  et  $d$  telles que :

$$a = 3, \quad b = 1 + \frac{2}{3}i, \quad c = 3i \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{3}i.$$

1. Déterminer l'angle  $\vartheta$  et le rapport  $k$  de la similitude directe  $S$  transformant A en B et C en D. 0,5pt
2. Donner l'écriture complexe de  $S$ . En déduire l'abscisse du centre  $I$  de  $S$ . 0,5pt
3. Soit  $M(x; y)$  et  $M'(x'; y')$  son image par  $S$ . Montrer que : 
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$
 0,25pt
4. On construit une suite  $(M_n)$  de points du plan en posant  $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = s(M_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $z_n$  l'abscisse du point  $M_n$  et on pose  $r_n = |z_n - 1|$ .

- 5.1 Montrer que  $(r_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,5pt
- 5.2 Déterminer le plus petit entier naturel  $k$  tel que  $IM_k \leq 10^{-3}$ . 0,25pt

II/ On appelle  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

- 1) Etudier les variations de  $f$  et de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ . 1pt
- 2) En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ . 0,5pt

III/ On se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  de nombres réels définie par  $u_1 = \frac{3}{2}$  et  $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. Montrer par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ . 0,25pt
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  0,25pt

$$3. \text{ On pose } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

A l'aide de II/, montrer que  $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$  0,5pt

4. Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ . 0,5pt

**5. Etude de la convergence de la suite  $(u_n)$**

- a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante. 0,25pt
- b) En déduire que  $(u_n)$  est convergente. Soit  $l$  sa limite. 0,25pt
- c) Montrer alors que  $e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$ . 0,25pt

**PARTIE B : Evaluation des compétences**

**04,5 points**

**Situation :**

Pour évaluer la puissance d'un séisme, les scientifiques ont défini une quantité appelée magnitude  $M$ , liée à la quantité d'énergie  $E$  développée par le foyer du séisme. L'échelle de RICHTER permet de comparer l'énergie développée par différents séismes ; On a :  $\ln E = 11,4 + 1,5M$ . Les sismologues considèrent qu'un séisme est cataclysmique lorsque sa magnitude est supérieure ou égale à 7,5. En 1963, le séisme de Skopje a libéré une énergie 1000 fois supérieure à celle libérée par un séisme de magnitude 4. Lors de ce séisme les éboulements de terrain ont fait remonter à la surface un fossile et des archéologues ont alors décidé d'évaluer son âge par la datation au carbone 14. Le principe est le suivant : la période radioactive  $T$  (ou demi-vie) d'un élément correspond au temps nécessaire pour que la moitié des nucléides initialement présent dans cet élément se désintègre ( $N(t) = N(0)e^{\frac{-t \ln 2}{T}}$  où  $N(t)$  est le nombre de noyaux à l'instant  $t$ ). Celle du carbone 14 est de 5568 ans. Ces archéologues découvrent que ce fossile n'a plus qu'une proportion de 5% de carbone 14. D'un autre côté ce séisme avait causé une panne électrique dans toute la ville et les yaourts conservés dans les boulangeries allaient vite devenir avariés. On considère qu'avant la panne électrique, chaque yaourt contenait 10.000 bactéries et qu'en l'absence d'énergie électrique la quantité de bactéries quadruple tous les deux heures. On sait qu'un yaourt n'est plus comestible lorsque le nombre de bactéries atteint 640.000.

**Tâche 1 :** Le séisme de Skopje était-il cataclysmique ? 1,5pt

**Tâche 2 :** Estimer l'âge de ce fossile 1,5pt

**Tâche 3 :** Combien de temps après la panne ces yaourts ne sont plus comestibles ? 1,5pt