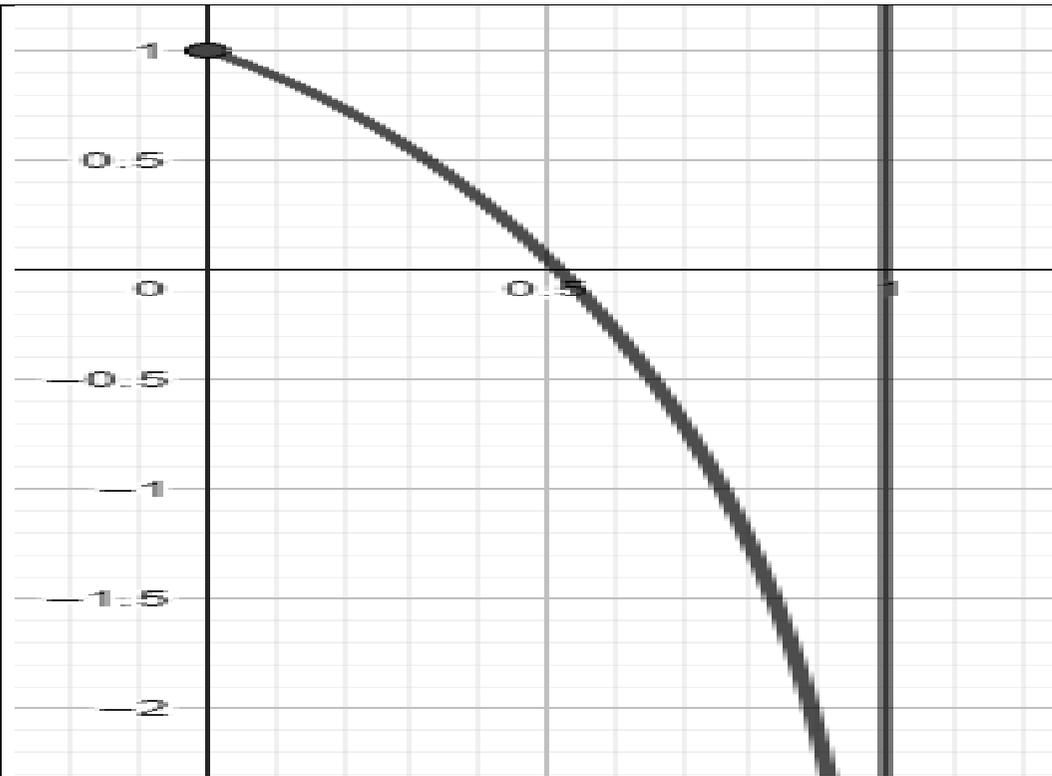


EXAMEN : BACCALAUREAT BLANC REGIONAL  
 REGION : CENTRE  
 EPREUVE : MATHEMATIQUES  
 SERIE : C

SESSION: 2023  
 DUREE: 4H  
 COEFFICIENT: 7

REFERENCES ET SOLUTIONS	BARÈMES	COMMENTAIRES
<b>Partie A : Evaluation des ressources</b>		
<b>EXERCICE 1</b>		
<p><b>1. Justifions que <math>M_{n+1}</math> est l'image de <math>M_n</math> par une transformation <math>S</math>.</b>            Soit <math>S</math>, une transformation d'écriture complexe <math>z' = \frac{1-i}{2}z</math>, alors <math>S</math> est une similitude directe de centre <math>O</math>, d'angle <math>\arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}</math> et de rapport <math>\left \frac{1-i}{2}\right  = \frac{\sqrt{2}}{2}</math>. On a bien <math>M_{n+1} = S(M_n)</math></p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour la nature 0,25 pt pour les éléments caractéristiques.
<p><b>2. Déterminons l'image de la droite (D) d'équation <math>y = x</math> par <math>S</math>.</b>            En effet la droite (D) passe par <math>O</math>, centre de <math>S</math> et <math>Mes(\vec{i}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}</math> où <math>A</math> est un point quelconque de (D).            L'image du point <math>A</math> est sur l'axe des abscisse, dont l'image de (D) est l'axe des abscisses, soit la droite d'équation <math>y = 0</math>.</p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour la méthode 0,25 pt pour la réponse
<p><b>3.a) Donnons la nature de la suite <math>(v_n)</math> et déduisons l'expression de <math> z_n </math> en fonction de <math>n</math>.</b>            On a <math>v_{n+1} =  z_{n+1}  = \left \frac{1-i}{2}z_n\right  = \frac{\sqrt{2}}{2} z_n  = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n</math>. Ainsi, <math>(v_n)</math> est une suite géométrique de raison <math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math> et de premier terme <math>v_0 =  -2  = 2</math>. Donc <math>v_n =  z_n  = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n</math></p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour la nature 0,25 pt pour l'expression en fonction de $n$
<p><b>3.b) Donnons la nature de la suite <math>(u_n)</math> et en déduisons en l'expression de <math>\arg(z_n)</math> en fonction de <math>n</math>.</b>            On a <math>u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg\left(\frac{1-i}{2}z_n\right) = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) + \arg(z_n) = -\frac{\pi}{4} + v_n</math>. Ainsi, <math>(v_n)</math> est une suite arithmétique de raison <math>-\frac{\pi}{4}</math> et de premier terme <math>u_0 = \arg(-2) = \pi</math>. Donc <math>u_n = \arg(z_n) = \pi - n\frac{\pi}{4} = \pi\left(1 - \frac{n}{4}\right)</math></p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour la nature 0,25 pt pour l'expression en fonction de $n$

<p><b>3.c) Déterminer les valeurs de <math>n</math> pour lesquelles <math>M_n</math> appartient à la demi-droite <math>[Ox)</math>.</b>  <math>M_n \in [Ox)</math> équivaut à <math>\arg(z_n) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}</math>, soit <math>\pi \left(1 - \frac{n}{4}\right) = 2k\pi, \left(1 - \frac{n}{4}\right) = 2k</math>, ainsi, <math>n = 4 - 8k, k \in \mathbb{Z}</math>.</p>	<b>0,25pt</b>										
<p><b>4.a) Calculons <math>\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}</math> et en déduisons en la nature exacte du triangle <math>OM_nM_{n+1}</math>.</b>  On a <math>\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{z_n - \left(\frac{1-i}{2}\right)z_n}{\left(\frac{1-i}{2}\right)z_n} = \frac{1+i}{1-i} = i</math>. Ainsi, le triangle <math>OM_nM_{n+1}</math> est rectangle isocèle de sommet principal <math>M_{n+1}</math></p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour i 0,25 pt pour la nature exacte									
<p><b>4.b) Calculons la limite de <math>(L_n)</math>.</b>  On a <math>L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n =  z_1 - z_0  +  z_2 - z_1  + \dots +  z_{n+1} - z_n </math>  <math> z_1  +  z_2  + \dots +  z_{n+1} </math> car <math>\left \frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}\right  =  i  = 1</math> soit <math> z_{n+1} - z_n  =  z_{n+1} </math>  Ainsi, <math>L_n = \sqrt{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)</math>. D'où <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}</math></p>	<b>0,5pt</b>	0,25 pt pour chaque $L_n$  0,25pt pour la limite									
<b>EXERCICE 2</b>											
<p><b>1. Etudions les variations de <math>f</math>, puis construisons son tableau des variations</b>  On a <math>f'(x) = -2x - \frac{1}{1-x} &lt; 0</math>, donc <math>f</math> est strictement décroissante sur <math>[0, 1[</math></p> <table border="1" data-bbox="174 791 593 978" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f'(x)</math></td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x)</math></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> </tr> </table>	$x$	0	1	$f'(x)$	-		$f(x)$	1	$-\infty$	<b>0.5pt</b>	0,25pt pour chaque ligne du tableau
$x$	0	1									
$f'(x)$	-										
$f(x)$	1	$-\infty$									
<p><b>2. Construisons la courbe de <math>f</math></b></p>	<b>0,5pt</b>	Asymptote : 0,25pt Allure : 0,25pt									



**3. Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]$ .**

En effet,  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, 1[$  et réalise ainsi une bijection de  $[0, 1[$  vers  $]-\infty, 1]$  qui contient 0 d'où l'existence et l'unicité de  $\alpha$

De plus  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln 2 > 0$  et  $f\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{2e-1-e^2}{e^2} = -\left(\frac{e-1}{e}\right)^2 < 0$ . D'où le résultat d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

**0.5pt**

Démarche : 0,25pt  
0,25pt pour les calculs

**4. Calculons  $I(t) = \int_{\alpha}^t f(x) dx$**

On a  $I(t) = \int_{\alpha}^t f(x) dx = \int_{\alpha}^t (1 - x^2) dx + \int_{\alpha}^t (\ln(1 - x)) dx$

En posant  $u'(x) = 1$  avec  $u(x) = x - 1$ ,  $v(x) = \ln(1 - x)$  sur la deuxième intégrale, on a :

**0,75pt**

0,5pt pour  $I(t)$   
0,25pt pour la limite

$I(t) = \left[ x - \frac{1}{3}x^3 + (x-1)\ln(1-x) - x \right]_{\alpha}^t = t - \frac{1}{3}t^3 + (t-1)\ln(1-t) - t - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 - (\alpha-1)\ln(1-\alpha) + \alpha$ <p>Or <math>\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1</math> et <math>\lim(t-1)\ln(1-t)</math> lorsque <math>t</math> tend vers 1 est égale à 0</p> <p>Alors, <math>\lim I(t) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - \frac{4}{3}</math> d'où le résultat avec <math>P(X) = -\frac{2}{3}X^3 + X^2 + X - \frac{4}{3}</math>.</p>		
--	--	--

<p><b>5.a Etudions les variations de <math>g</math> et <math>h</math> et dresser leurs tableaux de variations.</b></p> <p>On a <math>h(x) = 2x + \frac{1}{1-x}</math> et <math>g(x) = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}</math>, <math>h'(x) = g(x) &gt; 0</math> et <math>g'(x) = \frac{2}{(1-x)^3} &gt; 0</math> Ainsi les fonctions <math>h</math> et <math>g</math> sont strictement croissante sur <math>[0, 1[</math></p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>1 - \frac{1}{e}</math></td> </tr> <tr> <td><math>h'(x)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td><math>h(x)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;"><math>\frac{e^2+2e-3}{e}</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> </tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>1 - \frac{1}{e}</math></td> </tr> <tr> <td><math>g'(x)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;"><math>2+e^2</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">6</td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{e}$	$h'(x)$	+		$h(x)$	$\frac{e^2+2e-3}{e}$			3		$x$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{e}$	$g'(x)$	+		$g(x)$	$2+e^2$			6		<b>0,75pt</b>	<p>0,25pt pour les expressions des deux fonctions</p> <p>0,25pt pour chaque tableau</p>
$x$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{e}$																								
$h'(x)$	+																									
$h(x)$	$\frac{e^2+2e-3}{e}$																									
	3																									
$x$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{e}$																								
$g'(x)$	+																									
$g(x)$	$2+e^2$																									
	6																									

<p><b>5.b En déduisons en que : pour tout <math>x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]</math>, <math>\frac{ f''(x) }{ f'(y) } \leq \frac{e^2+2}{3}</math></b></p> <p>En effet d'après les tableaux de variations, on a <math>f'(y) \geq 3</math>, soit <math>\frac{1}{f'(y)} \leq \frac{1}{3}</math>, comme <math>f''(x) \leq e^2 + 2</math> et <math>f''(x) &gt; 0</math>, le résultat en découle.</p>	0,25pt	apprécier les autres démarches
---	--------	--------------------------------

<p><b>5.c Etudions la position relative de <math>(C_f)</math> et de la tangente <math>T_0</math> au point d'abscisse 0.</b></p> <p>On a <math>f''(x) = -2 - \frac{1}{(1-x)^2} &lt; 0</math> sur <math>[0, 1[</math>, ainsi, <math>f</math> est une fonction concave et sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier la tangente <math>T_0</math>.</p>	0,5pt	<p>0,25pt pour ceux qui donnent l'équation de la tangente.</p> <p>apprécier les autres démarches</p>
---	-------	--

**EXERCICE 3**

<p><b>1.a Démontrons par contraposée que si <math>a^2</math> est pair, alors <math>a</math> est pair.</b></p> <p>Il suffit de démontrer que si <math>a</math> n'est pas pair, alors <math>a^2</math>, n'est pas pair, soit si <math>a</math> est impair, alors <math>a^2</math> est</p>	0,25pt	
---	--------	--

<p>impair. En effet a pair signifie que <math>a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}</math>, alors <math>a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1</math>. Donc <math>a^2</math> est pair. D'où le résultat.</p>		
<p><b>1.b) Déduisons-en que <math>\sqrt{2}</math> est irrationnel.</b> Supposons par l'absurde que <math>\sqrt{2}</math> est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels non nuls <math>m</math> et <math>n</math> tels que <math>\sqrt{2} = \frac{m}{n}</math> avec <math>\frac{m}{n}</math> irréductible. <math>\sqrt{2} = \frac{m}{n}</math> entraîne <math>m^2 = 2n^2</math>, donc <math>m^2</math> est pair et d'après 1) <math>m</math> est pair, soit <math>m = 2k</math>, et l'égalité <math>m^2 = 2n^2</math> signifie que <math>4k^2 = 2n^2</math>, soit <math>n^2 = 2k^2</math>; par suite <math>n^2</math> et <math>n</math> sont pairs. Ainsi, <math>n</math> et <math>m</math> sont pairs, ce qui contredit le fait que <math>\frac{m}{n}</math> est irréductible.</p>	0,5pt	Apprécier le raisonnement
<p><b>1.c Montrons que si <math>a</math> est premier, alors <math>\sqrt{a}</math> est irrationnel</b> Supposons par l'absurde que <math>\sqrt{a}</math> est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels non nuls <math>m</math> et <math>n</math> tels que <math>\sqrt{a} = \frac{m}{n}</math> avec <math>\frac{m}{n}</math> irréductible. <math>\sqrt{a} = \frac{m}{n}</math> entraîne <math>m^2 = an^2</math>, donc <math>a</math> divise <math>m^2</math> et d'après le théorème de Gauss, <math>a</math> divise <math>m</math> car <math>a</math> est premier. Ainsi, <math>m = ak</math>, et l'égalité <math>m^2 = 2n^2</math> signifie que <math>a^2k^2 = an^2</math>, soit <math>n^2 = ak^2</math>; par suite <math>n^2</math>, puis <math>n</math> sont divisibles par <math>a</math>. Ainsi, <math>n</math> et <math>m</math> sont divisibles par <math>a</math>, ce qui contredit le fait que <math>\frac{m}{n}</math> est irréductible.</p>	0,5pt	Apprécier le raisonnement
<p><b>2.a Démontrons par récurrence que pour tous réels <math>a</math> et <math>b</math> et pour tout entier naturel <math>n</math> non nul, on a <math>(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k</math>.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour <math>n = 1</math>, on a d'une part, <math>(a + b)^1 = a + b</math> et d'autre part <math>\sum_{k=0}^1 C_1^k a^{1-k} b^k = a + b</math>. Ainsi, l'égalité est vraie au premier rang.</li> <li>• Soit <math>n &gt; 1</math>, supposons que <math>(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k</math> et sous cette hypothèse, montrons que <math>(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k</math>. En effet, <math>(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k</math> <math>= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1}</math> <math>= (C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b^1 + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^n a^1 b^n) + (C_n^0 a^n b^1 + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-2} b^3 + \dots + C_n^n b^{n+1})</math>. Or <math>C_n^0 = C_{n+1}^0, C_n^i = C_{n+1}^{i+1}</math> et <math>C_n^i + C_n^{i+1} = C_{n+1}^{i+1}</math> Ainsi, <math>(a + b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_{n+1}^n a^1 b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}</math>. Ce qu'il fallait démontrer.</li> <li>• En conclusion pour tout <math>n \geq 1, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k</math>.</li> </ul>	1pt	0,25pt pour l'initialisation 0,25pt pour la bon énoncé de l'hypothèse de récurrence 0,25pt pour la démonstration de l'étape 2 0,25pt pour la conclusion

<p><b>2.b En déduisons en une écriture simple des nombres <math>A = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n</math> et <math>B = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n</math>.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} 1^k = 2^n</math>, ainsi, <math>A = 2^n</math></li> <li><math>(1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = 0</math>, ainsi, <math>B = 0</math>.</li> </ul>	<b>0,5pt</b>	0,25pt pour chaque bonne valeur
<p><b>3.a Déterminons le plus petit entier naturel <math>n</math>, pour que la probabilité <math>p_n</math> d'obtenir au moins une fois un numéro strictement inférieur à 5 soit supérieur à 0,96.</b></p> <p>Les <math>n</math> répétitions suivent un schéma de Bernoulli dont la probabilité d'obtenir un succès est <math>\frac{2}{3}</math>. Ainsi,</p> <p><math>p_n = 1 - (\frac{1}{3})^n</math>. <math>p_n &gt; 0,96</math> donne <math>1 - (\frac{1}{3})^n &gt; 0,96</math> <math>(\frac{1}{3})^n &lt; 0,04</math></p> <p>Soit <math>n &gt; \frac{\ln(0,04)}{\ln(\frac{1}{3})}</math> donc <math>n \geq 3</math></p>	<b>0,75pt</b>	0,25pt pour l'interprétation 0,25pt pour l'expression de $p_n$ 0,25pt pour la bonne valeur de $n$
<b>EXERCICE 4</b>		
<p><b>1.a Démontrons que les droites <math>(D)</math> et <math>(L)</math> sont perpendiculaires en un point que l'on précisera.</b></p> <p>En effet, en posant <math>x = t</math>, alors une représentation paramétrique de <math>(D)</math> est :</p> $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ <p>Ainsi, les vecteurs <math>\vec{u}(1; 1; -1)</math> et <math>\vec{v}(-1; 2; 1)</math> sont les vecteurs directeurs respectifs de <math>(D)</math> et <math>(L)</math>. On a</p> <p><math>\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + (-1) \times 1 = 0</math>. Donc <math>(D)</math> et <math>(L)</math> sont orthogonales.</p> <p>Soit <math>M(x, y, z)</math> appartenant à <math>(D)</math> et <math>(L)</math> alors, <math>\begin{cases} t + 2t = -3 \\ -t + t - 1 = -1 \end{cases}</math> soit <math>t = -1</math> et par suite</p> <p>Le point <math>I(1; -2; -2) \in (D) \cap (L)</math> et <math>(D)</math> et <math>(L)</math> sont perpendiculaires.</p>	<b>0,75pt</b>	0,25pt pour un vecteur directeur de $(D)$ 0,25pt pour l'orthogonalité 0,25pt pour le point I
<p><b>1.b En déduisons en la nature et l'élément caractéristique de <math>S_{(D)} \circ S_{(L)}</math>.</b></p> <p><math>S_{(D)} \circ S_{(L)}</math> est un demi d'axe <math>(D')</math> où <math>(D')</math> est la droite passant par <math>I</math> et orthogonale à la fois aux droites <math>(D)</math> et <math>(L)</math>. Ainsi <math>(D')</math> est la droite passant par <math>I</math> et de vecteur directeur <math>\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{v}</math>, soit <math>\vec{u}'(3; 0; 3)</math></p>	0,5pt	0,25pt pour la nature 0,25pt pour l'élément caractéristique
<p><b>2. Déterminons l'expression analytique de <math>S_{(P)}</math></b></p> <p>Soit <math>M(x, y, z)</math> et <math>M'(x', y', z')</math>, son image par <math>S_{(P)}</math>, alors <math>\overline{MM'}</math> est colinéaire au vecteur normal <math>\vec{n}(-1; 2; 1)</math> de <math>(P)</math> et</p>	<b>0,75pt</b>	0,5pt pour la démarche 0,25pt pour la

<p>le milieu <math>I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)</math> appartient à <math>(P)</math>.</p> <p>On a donc successivement, <math display="block">\begin{cases} x' - x = -t \\ y' - y = 2t, -\frac{x+x'}{2} + 2\frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} = 0 \\ z' - z = t \end{cases}</math></p> <p><math display="block">-\frac{2x-t}{2} + 2\frac{2y+2t}{2} + \frac{2z+t}{2} = 0, t = -\frac{1}{2}(x + 2y + z), \text{ par suite, } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(3x + 2y + z) \\ y' = -x - y - z \\ z' = \frac{1}{2}(-x - y + z) \end{cases}.</math></p>		bonne expression
<p><b>3.a Déterminons la position relative de <math>(P)</math> et de <math>(L)</math>.</b></p> <p>Un vecteur normal <math>\vec{n}(-1; 2; 1)</math> de <math>(P)</math> est un vecteur directeur de <math>(L)</math>, donc <math>(P)</math> et <math>(L)</math> sont perpendiculaires.</p>	0,25pt	
<p><b>3.b En déduisons en la nature et l'élément caractéristique de <math>S_{(P)} \circ S_{(L)}</math></b></p> <p><math>S_{(P)} \circ S_{(L)}</math> est la symétrie de centre <math>B</math>, point d'intersection de <math>(P)</math> et <math>(L)</math>. Déterminons les coordonnées du point <math>B</math>. On a : <math>t + 4t + t - 1 = 0</math>, soit <math>t = \frac{1}{6}</math>. Ainsi, <math>B\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)</math></p>	0,5pt	0,25pt pour la nature 0,25pt pour les coordonnées du centre
<p><b>4. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de <math>(\Gamma)</math>.</b></p> <p><math>y^2 + 4z^2 - 2y - 24z + 33 = 0</math> équivaut à <math>(y - 1)^2 + 4(z - 3)^2 - 4 = 0</math>.</p> <p>Soit, <math>\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{1} = 1</math>. Ainsi, <math>(\Gamma)</math> est une ellipse de centre <math>C(0; 1; 3)</math>, de grand axe <math>(Oy)</math> et d'excentricité <math>e = \frac{\sqrt{3}}{2}</math></p>	0,75pt	0,25pt pour la méthode 0,25pt pour la nature 0,25pt pour les éléments caractéristiques
<p><b>5.a Ecrire la matrice de l'endomorphisme <math>f</math> dans la base <math>(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})</math></b></p> <p>Les égalités <math>f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}</math>; <math>f(\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}</math></p> <p>et <math>f(\vec{i} - \vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j}</math> conduisent au système <math display="block">\begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{i}) - f(\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} \end{cases}</math> qui se</p> <p>réduit à un système de 2 équations à 3 inconnus : <math display="block">\begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{i}) - f(\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} \end{cases}</math> qui admet une</p> <p>infinité de solutions. On peut donc poser <math>f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}</math>, et on déduit <math>f(\vec{k}) = -2\vec{j} + \vec{k}</math></p>	0,5pt	Le système ayant une infinité de solutions, apprécier la bonne démarche et toute matrice obtenue, car la matrice dans ce cas précis n'est pas unique et

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ \text{Soit } M = & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ <p><b>Remarque : L'endomorphisme <math>f</math> qui vérifie les égalités ci-dessus n'est pas unique car <math>(\vec{i} + \vec{j}; \vec{j} + \vec{k}; \vec{i} - \vec{k})</math> n'est pas une base de l'espace.</b></p>		c'était à dessein.
<p><b>5.b Déterminons le noyau <math>\text{Ker}f</math> de l'endomorphisme <math>f</math></b></p> <p>Soit <math>\vec{u}(x; y; z) \in \text{Ker}f</math>, alors on a : <math display="block">\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - 2z = 0, \text{ soit } x + y = 0 \text{ et } z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}</math></p> <p>Ainsi, <math>\vec{u}(x; -x; 0) \in \text{Ker}f</math> donc <math>\text{Ker}f</math> est la droite vectorielle dirigée par le vecteur <math>\vec{e}(1; -1; 0)</math>.</p>	<b>0,5pt</b>	Apprécier le noyau en fonction de la matrice obtenue
<b>PARTIE B : Evaluation des compétences</b>		
<p><b>1. Déterminons à partir de quelle année on comptera plus de 20 000 champignons</b></p> <p>Désignons par <math>P_n</math> le nombre de champignons après <math>n</math> années. <math>P_0</math> correspond au nombre de champignons en 2022, soit 12000.</p> <p>On a <math>P_{n+1} = P_n + P_n \times \frac{5}{100} = 1,05P_n</math> Ainsi <math>(P_n)</math> est une suite géométrique de raison 1,05, donc <math>P_n = 12000 \times (1,05)^n</math>.</p> <p><math>P_n \geq 20000</math> donne <math>12000 \times (1,05)^n \geq 20000, n \geq \frac{\ln(\frac{5}{3})}{\ln(1,05)}, n &gt; 10,47</math>. Ainsi <math>n = 11</math></p> <p>Donc en 2023 la production dépassera 20000</p>	<b>1,5pt</b>	<p>0,5pt pour l'interprétation correcte ( utilisation de la suite et l'inégalité)</p> <p>0,5pt pour l'utilisation correcte des outils( la valeur approchée et la valeur exacte n</p> <p>0,5pt pour la cohérence ( apprécier la démarche et la conclusion)</p>
<p><b>2. Déterminons l'aire de ce jardin en période des pluies</b></p> <p>L'aire de ce jardin est : <math>\mathcal{A} = \int_0^{20} [(4 + \ln(x + 20))] dx \times 100\text{dam}^2</math></p> <p>En utilisant une intégration par parties sur la recherche d'une primitive de la fonction <math>x</math> associe <math>\ln(x + 20)</math>, et en posant <math>u'(x) = 1</math>, avec <math>u(x) = x + 20</math></p> $v(x) = \ln(x + 20), \text{ avec } v'(x) = \frac{1}{x+20}, \text{ on a}$ <p><math>\mathcal{A} = [4x + (x + 20)\ln(x + 20) - x]_0^{20} = (60 + 20\ln 20) \times 100\text{dam}^2</math>, environ 119,91 ha</p>		<p>0,5pt pour l'interprétation correcte ( énonciation de l'utilisation d'une intégrale )</p> <p>0,5pt pour l'utilisation correcte des outils( calcul s intégrales)</p> <p>0,5pt pour la cohérence ( apprécier la démarche et l'unité d'aire)</p>
<p><b>3. Déterminons le nombre initial de bactéries dans ce laboratoire.</b></p> <p>Notons <math>P(t)</math> le nombre de bactéries à chaque instant <math>t</math>, <math>t</math> en heures.</p> <p>On a <math>P'(t) = kP(t)</math> ( équation différentielle du premier ordre). Ainsi, <math>P(t) = ce^{kt}</math></p>		0,5pt pour l'interprétation correcte (équation différentielle ou proportionnalité)

$\begin{cases} P(3) = 5 \times 10^8 \\ P(5) = 10^{10} \end{cases}$ <p>nous donne successivement <math>\begin{cases} ce^{3k} = 5 \times 10^8 \\ ce^{5k} = 10^{10} \end{cases} e^{2k} = 20,</math></p> $k = \ln\sqrt{20}, c = \frac{5 \times 10^8}{e^{3\sqrt{20}}} = \frac{10^8}{4\sqrt{20}}$ $P(0) = ce^{0 \times k} = c = \frac{10^8}{8\sqrt{5}}, \text{ environ } 5,59 \times 10^6$ <p>On a environ <math>5,59 \times 10^6</math> bactéries initialement dans le laboratoire.</p>		<p>0,5pt pour l'utilisation correcte des outils( résolution et solution de l'équation différentielle)</p> <p>0,5pt pour la cohérence ( apprécier la démarche et la conclusion)</p>
<b>Présentation</b>	<b>0,5pt</b>	Clarté, absences de fautes, de ratures