

ÉPREUVE HARMONISEE RÉGIONALE DE MATHÉMATIQUES 2023

Examen : Probatoire Série : C/E Durée : 3 heures Coef : 6/5

I-) EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (5points)

1-) E est un plan vectoriel muni de la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$. f est un endomorphisme de E de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, g \text{ un endomorphisme de E tel que } g(\vec{i}) = \frac{1}{12}(\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ et } g(\vec{j}) = \frac{1}{12}(5\vec{i} + \vec{j}).$$

1- a) Démontrer que $f \circ g = \text{Id}_E$.

[0,75pt]

b-) En déduire que f est un automorphisme de E et déterminer la matrice inverse A^{-1} de A. [0,5pt]

2-) Pour tout réel α , on considère l'ensemble $E_\alpha = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}\}$

a-) Montrer que le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ appartient à E_α si et

$$\text{seulement si } \begin{cases} (-1 - 2\alpha)x + 5y = 0 \\ 5x - (1 + 2\alpha)y = 0 \end{cases}$$

[0,5pt]

b-) En déduire que E_{-3} et E_2 sont des droites vectorielles dont on précisera des bases respectives $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

[0,75pt]

3-a) Montrer que le système $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base du plan vectoriel E.

[0,5pt]

b-) En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

[0,25pt]

II-) On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par a et b les numéros respectifs apparus lors du premier et du deuxième lancer. Un résultat de cette épreuve est donc un couple (a, b) avec $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'espace E est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (S) est la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 2by + a^2 + b^2 - 9 = 0$ et (Q) le plan d'équation :

$$x - y + \sqrt{2}z + 3 = 0$$

1-) Déterminer les éléments caractéristiques de (S)

[0,75pt]

2-) Déterminer le nombre de couples $(a; b)$ pour que (Q) et (S) soient tangents.

[1pt]

EXERCICE 2: (3points)

Une étude menée sur la population d'une grande localité du Cameroun entre 2005 et 2017 a montré que :

- Au cours d'une année, la population augmente de 5% par rapport à la population de l'année précédente ;
- Le nombre de décès par année est relativement constant et s'élève à 5000 décès par an.

1-) Soit n un nombre entier naturel, on désigne par U_n la population de cette localité du Cameroun au terme de l'année $(2005 + n)$. Trouver une relation entre U_n et U_{n+1} [0,5pt]

2-) Au terme de l'année 2005, on constate que cette population est de 1.700.000 habitants et on pose $U_0 = 1.700.000$. Déterminer la population à la fin de l'année 2007. [0,5pt]

3-) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 100.000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a-) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. [0,75pt]

b-) Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n. [0,75pt]

c-) Donner une estimation de la population de cette localité au terme de l'année 2018. [0,5pt]

EXERCICE 3: (3,25points)

L'unité de longueur est le cm. Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle et isocèle en B de sens direct tel que $AB = BC = 4$. Le point I est milieu de $[AC]$.

1-) Déterminer et construire le point G barycentre des points $(A; 1)$, $(B; -1)$ et $(C; 1)$ [0,75pt]

2-) Soit (C) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 36$

a-) Montrer que pour tout point M du plan $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MG^2$ [0,75pt]

b-) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C) . [1pt]

3-) Soit h l'homothétie de centre I et rapport $\frac{3}{2}$; r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $g = h \circ r$. Déterminer la nature et les caractéristiques de g . [0,75pt]

EXERCICE 4: (3,75points)

ABCD est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon a ($a > 0$). On pose $AB = x$ avec $x > 0$.

1-) Démontrer que l'aire $h(x)$ du rectangle ABCD

en fonction de x est donnée par $h(x) = x\sqrt{4a^2 - x^2}$ [0,75pt]

2-) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction h est

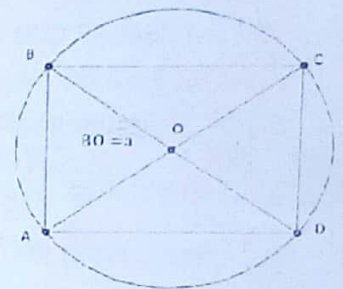
$D_h =]0; 2a[$ [0,5pt]

3-) Etudier la dérivabilité de h aux bornes de D_h [1pt]

4-) Montrer que $\forall x \in]0; 2a[, h'(x) = \frac{-2x^2 + 4a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$ puis dresser le

tableau de variation de h . [1pt]

5-) Déterminer la valeur maximale de l'aire du rectangle ABCD en fonction de a . [0,5pt]



II-) EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

Situation

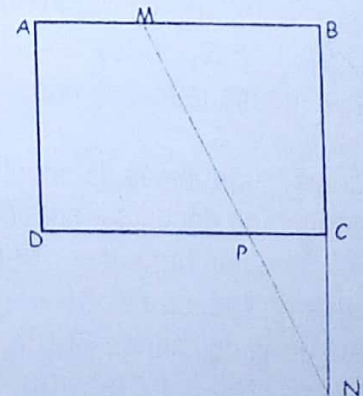
Une terre cultivable a la forme d'un carré ABCD de côté 1 Km. On tend une ficelle du point M au point N. M étant un poteau planté sur le côté $[AB]$ à une distance x de A et N un poteau planté sur la demi-droite d'origine C et ne contenant pas B. Le propriétaire place le poteau en N tel que $CN = AM$. La ficelle ainsi tendue est soutenue par un poteau en P. On cultive effectivement sur le domaine AMPD. Le propriétaire décide d'entourer la parcelle triangulaire MBN avec du grillage, mais ne dispose que de 3457m de grillage.

Tâches :

1-) Déterminer la position du point M pour que la distance PC soit maximale. [1,5pt]

2-) Déterminer la position du point M pour que le grillage dont il dispose lui permette de faire le tour de la parcelle MBN. [1,5pt]

3-) Déterminer la position du point N pour que la superficie de MBN soit le tiers de celle de ABCD. [1,5pt]



Présentation

[0,5pt]