MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
OFFICE DU BACCALAUREAT DU CAMEROUN
Lycée de Djeu

Examen : Evaluation 2
Session : Décembre 2020
Série : Tle C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 04 heures Coefficient : 7

L'épreuve comporte deux parties A et B obligatoires.
L'utilisation de la calculatrice et du matériel usuel de géométrie est autorisée.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15.5 points]

EXERCICE 1 / 05.5 points

I. a et b désignent deux entiers naturels non nuls tels que $pgcd(a+b,\ a\ ) = p,\ p$ premier.

1. Démontrer que p divise a^2 (on pourra remarque que $a^2 = a(a+b) - a$ **[0,25pt]**
2. En déduire que p divise a et aussi que p divise b **[0,5pt]**
3. Application. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système suivant : $\begin{cases} pgcd(a+b, ab) = 5 \\ ppcm(a,b) = 170 \end{cases}$ **[0,75pt]**

II. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
"Si p est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$".
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. **[0,75pt]**
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $3u_n = 10^{n+1} - 7$. **[0,75pt]**
3. En déduire une l'écriture décimale de u_n pour tout entier naturel n. **[0,5pt]**
4. Montrer que u_2 est un nombre premier. **[0,5pt]**
5. On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. **[0,75pt]**
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n[11]$. **[0,25pt]**
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11. **[0,25pt]**
   d. Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1[17]$. **[0,25pt]**

EXERCICE 2 / 3 points

1. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul :
   $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(-1)^{k-1} = n(-1)^{n-1}$ **[1,5pts]**
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$par $f(x) = \frac{2}{x+3}$,

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ **[0,5pts]**

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, $f^{(n)}(x) = 2 \times \frac{n!(-1)^n}{(x+3)^{n+1}}$; où $f^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de f **[1pt]**

EXERCICE 3 / 2 points

1. Trouver les entiers naturels a et b dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifiant : $\begin{cases} m + d = 1 \\ b \leq a \\ m = d^2 \end{cases}$ **[1pt]**
2. On considère un nombre entier $a \geq 2$. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n ($n = dk$).

a. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$ (On pourra remarquer que pour tout entier naturel k non nul et $\forall x \in \mathbb{N} : (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$). **[0,25pt]**

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9. **[0,75pt]**

EXERCICE 5 / 5 points

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (\sin x + i\cos x)z + i\sin x\cos x \quad x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ **[0,75pt]**
2) Calculer $(2+2i)^3$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^3 = -16 + 16i$ **[0,75pt]**
3) Ecrire sous forme exponentielle $z = \frac{1+\cos x + isin}{1 - cosx - isinx}$ $x \in]0; \pi[$ **[0,75pt]**
4) Pour tous $z \neq 2i$. On donne les points A et B d'affixes $z_A = -1 + i$ et $z_B = 2i$. Au point M(z) on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+1-i}{z-2i}$ où $z = x + iy$.

   a-Déterminer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' en fonction de x et y **[0,75pt]**

   b-Déterminer le lieu (E) des points M pour que M' soit un réel. **[0,75pt]**

   c-Déterminer et construire le lieu (Γ) des points M vérifiant $|z'| = 2$. **[1,25pts]**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [4.5 points]

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, donc la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1, le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Tâche1 : Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
Montrer que le couple (u, v) est solution de l'équation (E) : $35 \quad - 27y = 2$. **[1,5pts]**

Tâche2 : Déterminer les solutions de l'équation (E) et puis déterminer le couple (u, v) permettant de déterminer J_1. **[1,5pts]**

Tâche3 : Le jour J_0 était mardi 7 décembre 1999, quelle sera la date exacte du jour J_1. (*Rappelons que l'an 2000 était une année bissextile*) **[1,5pts]**

« *Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen* ». **(ALBERT Einstein)**