Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Partie A : Evaluation des ressources EXERCICE 1: / 3,75pts

I. On lance deux fois de suite un dé tétraédrique parfaitement équilibré dont deux faces portent le numéro 2 et les deux autres les numéros 5 et 4, et on note a le numéro de la face cachée à l'issue du premier lancer et b le numéro de la face cachée à l'issue du deuxième lancer. P_i est la probabilité qu'au cours d'un lancer, la face numérotée $i(i \in \{2;4;5\})$ soit cachée. On considère l'équation différentielle (E):$y'' - ay' + by = 0$; la fonction g:$x \mapsto e^x$ et l'hyperbole d'équation réduite (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Justifier que $P_1 = \frac{1}{2}\ et\ \ P_4 = P_5 = \frac{1}{4}$. **0,5pt**

2. Déterminer $P(A)$ avec A: « La fonction $x \mapsto e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ». **0,5pt**

3. Déterminer $P(B)$ avec B: « Une équation de (H) dans un repère dont les axes sont ses asymptotes est : $Y = \frac{1}{X}$ ». **0,5pt**

4. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque éventualité $(a;b)$ associe le réel $|a - b|$.

a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X. **0,25pt**

b) Déterminer la loi de probabilité de X. **0,5pt**

II. (E) : $y' + 2y = 2cosxe^{3x}$; (E') : $y' + 2y = 0$.

1. $P(x) = (acosx + bsinx)e^{3x}$. Trouver les réels $a\ et\ b$ tels que P soit solution de (E). **0,5pt**

2. Résoudre (E'). Prouver que f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E'). **0,5pt**

3. Résoudre alors (E). **0,5pt**

EXERCICE 2: / 4,25pts

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; f_λ la fonction de variable réelle définie par : $f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Démontrer que f_λ admet deux extréma locaux en deux réels $a\ et\ b\ (a < b)$. **0,5pt**

2. On pose m_λ le au minimum de f_λ sur $\mathbb{R}$ et M_λ le maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$.

Justifier que $m_\lambda = \frac{1}{2a}$ et $M_\lambda = \frac{1}{2b}$. **0,5pt**

3. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} m_\lambda$; $\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda$; $\lim_{\lambda\to-\infty} m_\lambda$ et $\lim_{\lambda\to-\infty} M_\lambda$. **1pt**

4. On pose λ=1. Tracer la courbe (C_1) de f_1. Unité :2cm. **1pt**

5. En posant $x = tan\alpha$, calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. En déduire $\int_0^1 f_1(x)dx$. **0,75pt**

6. Soit (Δ)={M(x ;y) tels que $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le f_1(x)$}. On fait tourner (Δ) autour de l'axe des abscisses ce qui engendre le solide (S). Calculer le volume de (S). **0,5pt**

EXERCICE 3: / 7,5pts

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{lnt}dt, & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f. **0,25pt**

2. Justifier que f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$. (on poura introduire la fonction h : t $\mapsto \frac{1}{lnt}$). Calculer $f'(x)$. **0,75pt**

3. Démontrer que $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$; $\frac{x}{\ln(2x)} \le f(x) \le \frac{x}{lnx}$. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. **0,75pt**

4. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+. **0,5pt**

5. Soit la fonction φ définie par $\varphi(t) = 2 - 2t + lnt$, avec $t \in]0;1]$.

a) Etudier les variations de φ sur $]0;1]$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. **1pt**

b) Justifier que $\forall t \in [\alpha;1[$; $lnt \ge 2t - 2$. **0,25pt**

c) Montrer que $\forall x \in \left[\alpha;\frac{1}{2}\right[$; $f(x) \le \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{1}{t-1}dt$. **0,5pt**

d) Trouver alors $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$. **0,5pt**

6. a) Justifier que $0 < lnt < t - 1$. **0,25pt**

b) En déduire $\lim_{x\to1^+} f(x)$. **0,5pt**

7. Déterminer le tableau de variation de f. **0,75pt**

8. Par la méthode des rectangles (en subdivisant l'intervalle en 5 parties) donner une valeur approchée de $f(2)$ et $f(4)$. **0,75pt**

9. Donner une esquisse de (Cf). On pensera à étudier les branches infinies. **0,75pt**

<u>Partie B :</u> Evaluation des compétences

M. NANA est invité à la base navale de la ville de Douala. Il fait des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit à l'hébergement A coûte 12 000f et une nuit à l'hébergement B coûte 22 500f. Il se rappelle que le coût total de sa réservation dans les deux types d'hébergement est de 219 000f et qu'il aurait passé au maximum 13 nuits à l'hébergement A.

La base navale possède une piste d'athlétisme qui est un terrain délimité par les cercles (C_1) et (C_2) tels que (C_1) est le cercle de centre I d'affixe $z_I = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$. (C_2) est l'image de (C_1) par la similitude directe S d'écriture complexe $z' = (-1+i)z + 2i$.

M. NANA voudrait estimer la superficie de cette piste d'athlétisme. Le camp d'armement peut être assimilé à un plan (ABC) de sorte que si on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit un repère du plan ; alors $A(1\,;2\,;3)$; $B(-1\,;3\,;1)$ et $C(2\,;-1\,;2)$. Une caméra y est fixée en un point K, point d'intersection du plan (ABC) et la droite dont un système d'équation cartésienne est $\begin{cases} -4x+7y=4 \\ 5x+7y=9 \end{cases}$.
Intrigué, **M. NANA** voudrait savoir en quel point K est fixée cette caméra.

Tâches :

1. Déterminer le nombre d'hébergements passés dans chacun des deux types d'hébergement. **1,5pt**

2. Aider **M. NANA** à estimer la superficie de la piste d'athlétisme. **1,5pt**

3. Aider **M. NANA** à déterminer les coordonnées du point K. **1,5pt**