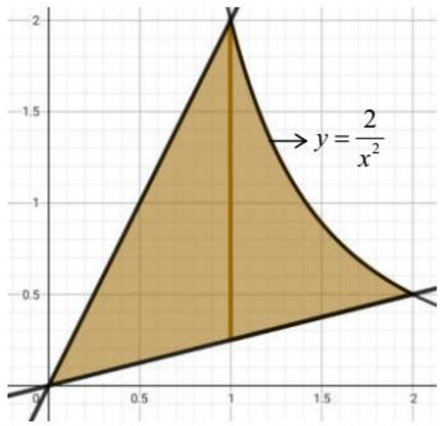
LYCEE TECHNIQUE DE NDOM

Examen	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Evaluation 4	Mathématiques	03	3h00	Tle Ind	2022/2023

La présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 : Calcul intégral –Equations différentielles / 5,75pts

1. Définis : intégrale d'une fonction continue f sur l'intervalle réel $[2;7]$; unité d'aire. 0,75pt
2. Calcule la valeur moyenne de la fonction f definie par $f(x) = 3x^2$ sur l'intervalle $[0;4]$. 0,75pt
3. Une particule se déplace le long de l'axe (Ox) à la vitesse $v(t) = 4t + 3$. $t = 0$, la particule se trouve au point d'abscisse 2. Détermine la position $x(t)$ de la particule à un instant t. 0,75pt
4. Monsieur L , riche homme d'affaire, dispose d'une parcelle dont la représentation graphique est donnée ci-contre
   Il compte cultiver le haricot sur cette parcelle. Un mètre carré de semence de haricot coûte 650 frs.
   Prendre : une unité de longueur égal à $10m$.
   Quel budget doit prévoir monsieur L pour la culture du haricot ? 1,5pt



Parcelle

5. On considère des équations différentielles suivantes
   $(E_1) : y'' - 6y' + 9y = 0$ et $(E_2) : y'' - 4y' + 13y = 0$.
   a. Donne l'équation caractéristique de chacune de ces équations. 0,5pt
   b. En déduire dans $\mathbb{R}$, la résolution de chacune de ces équations. 1.5pt

Exercice 2 : Equations – inéquations & systèmes - transformations du plan / 5,75pts

1. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(z-2)^3 - 1 = 0$.
   a. Montre qu'en posant $X = z - 2$, resoudre cette équation revient à détermine les racines cubiques de l'unité. 0,75pt
   b. En déduis les solutions de (E). 0,5pt
2. Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations : $\begin{cases} 4e^x + e^{2y} = 8 \\ e^x - 3e^{2y} = -11 \end{cases}$. 1 ,25pt
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation et inéquation suivantes : 1,75pt
   a) $\ln(x-1) = \ln(x+2) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ b) $(2x-10)(lnx-4)(lnx+3) > 0$
   c) $2^{2x+6} = 8^x \times 3^{x+2}$
6. Dans le plan muni du repère orthonormé (o, I, J), on donne les ensembles (ϕ) et (Π) , d'équations $(\Pi) : y^2 - 8x = 0$ et $(\phi) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.
   a- Donne la nature et les éléments caractéristiques de (Π) 0,75pt
   b- Donne la nature et les éléments caractéristiques de (ϕ) . 0,75pt

Problème : Calcul intégral-fonctions logarithme et exponentielle-suites numériques/8,5pts

I/ 1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ln(2x) + 1 - x$

a- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;\,+\infty[$ une unique solution notée α. 1pt
b- Démontre que $ln(2\alpha) + 1 = \alpha$. 0,5pt

c- Etudie et trace dans un repère orthonormé, (Γ) la courbe représentative de la fonction numérique $h: x \longmapsto \ln(2x) + 1$. 1,5pt

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = ln(2u_n) + 1$.

a- En utilisant la courbe (Γ), construis sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n). 1pt

b- Démontre que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. 0,5pt

c- Démontre que la suite (u_n) converge vers α. 0,5pt

II/ On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Etudie et trace (C) la courbe représentative de la fonction numérique f . 1,5pt
2. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}dt.$$

a- Démontre que la fonction F est dérivable et croissante sur $[1\,;+\infty[$. 0,5pt

b- Montre à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x) = -xe^{1-x} + 1$. 1pt

c- Démontre que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $ln(2x) + 1 = x$. 0,5pt

LPK a dit « *Pour échouer, on n'a besoin de rien ! Pour réussir, il faut travailler sans découragement* »