MINESEC
Lycée Bilingue de Kolléré-Garoua
Département de mathématiques

Année scolaire 2022/2023
Épreuve : Mathématiques
Classe : T^{le}D
Durée : 4h   coef :4

Évaluation N^{o}1 du trimestre 2

PARTIE A : *ÉVALUATIONS DES RESSOURCES* [15 points]

Exercice 1 : **[4,5pts]**

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\ \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})$. Unité de longueur sur les axes $2cm$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$. **0,5pt**
2. Soient A et B deux points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} + 2i$ et $b = 2\sqrt{3} - 2i$.
   (a) Écrire a et b sous forme exponentielle. **0,5pt**
   (b) Justifier que le triangle ABO est équilatéral. **0,5pt**
   (c) Construire le triangle ABO dans le repère. **0,5pt**
   (d) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A;\ 3)$; $(B;\ -2)$; $(O;\ 2)$. **0,5pt**
3. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivantes :
   $Z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha$; $Z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ **1pt**
4. Linéariser l'expression $\cos^3 x \sin^3 x$. **0,75pt**
5. En utilisant d'une part la formule de Moivre et d'autre part le développement usuel, développer $(\cos x + i\sin x)^4$ et en déduire ensuite les expressions de $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. **0,75pt**

Exercice 2 : **[5,5pts]**

1. On considère l'expression suivante $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Démontrer que par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$. **0,5pt**
   (b) Donner la valeur exacte de $A = \dfrac{1}{9\times 10} + \dfrac{1}{10\times 11} + \dfrac{1}{11‘\times 12} + ... + \dfrac{1}{29\times 30}$. **0,5pt**
2. Pour tout entier naturel nn nul n, on pose $T_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$
   (a) Démontrer que par récurrence que $T_n = 2n^4 - n^2$. **0,5pt**
   (b) Déterminer l'entier naturel n, tel que $T_n = 29161$. **0,5pt**
3. On donne la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} - 1$, puis la fonction f définie sur $[1;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$.
   (a) i. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
   ii. Démontrer que pour tout $x \in [0;\ 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. **0,25pt**
   (b) i. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. **0,5pt**
   ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$ et en déduire que (U_n) est convergente. **0,75pt**
   (c) i. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$. **0,5pt**
   ii. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **0,5pt**
   iii. Justifier que (U_n) converge vers 0. **0,25pt**

Exercice 3 : **[5pts]**

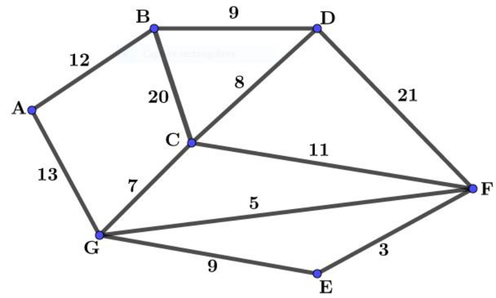
I- Une entreprise achète, utilise et revend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de $FCFA$	150	125	90	75	50	45

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (On prendra $1cm$ pour une année en abscisse, et $1cm$ pour $20000FCFA$ en ordonnée). **1pt**
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i,\ y_i)$ ainsi définie. **0,5pt**
3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique. **1,25pt**
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation. **0,25pt**

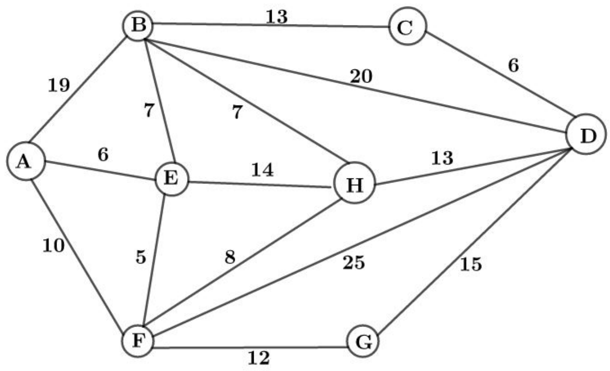
II- On considère le graphe ci-dessous.

1. Déterminer l'ordre de ce graphe. **0,25pt**
2. Déterminer la taille de ce graphe. **0,25pt**
3. Ce graphe est-il connexe, justifier votre réponse. **0,5pt**
4. A l'aide de l'algorithme de Prim ou de Kruskal, déterminer un arbre couvrant de poids minimal de ce graphe et préciser son poids . **0,5pt**
5. A l'aide de l'algorithme de Djikstra, déterminer le plus court chemin de A à E. **0,5pt**



PARTIE B : ***ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES*** **[5pts]**

La coopérative la LAITIÈRE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représenté par le graphe ci-contre. La siège de la coopérative est situé au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations, les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations. Les arêtes sont pondérés par les distances entre les exploitations exprimées en kilomètres. Les membres de la coopérative doivent quitter du siège pour collecter du lait provenant de l'exploitation D.



Le tableau suivant indique les variations du chiffres d'affaires y_i de cette coopérative selon les frais du publicité x_i au cours de 8 années. (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs). La coopérative estime mettre $4,7$ millions de frais de publicité en 2024.

année en x_i	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
x_i	2	$2,3$	$2,6$	$2,9$	$3,2$	$3,5$	$3,8$	$4,1$
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

M. Abbé, membre de la coopérative a un jardin de forme triangulaire dont les affixes des sommets sont les solutions de l'équation $z^3 + (3-8i)z + 16 - 2i = 0$. Un sommet est repère par son affixe $2+3i$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coute $1500F$. l'unité de longueur est le décamètre.

1. Quelle serait l'estimation du chiffres d'affaires de cette coopérative en 2024. **1,5pt**
2. Quelle somme va dépenser M. Abbé pour clôturer son jardin. **1,5pt**
3. Quel est le plus court trajet que les membres de la coopérative peuvent emprunter pour aller à l'exploitation D. **1,5pt**

Présentation **[0,5pt]**