

	COLLEGE EVANGELIQUE DE NEW BELL			DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES		
	BP : 6022 DOUALA			EVALUATION TRIMESTRIELLE		
	Tel : (237) 6 55 76 27 82			CLASSE : T ^{le} D		
	« Notre référence c'est l'excellence »			Nov. 2022	Coef : 4	Durée : 4 H

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

Exercice 1 :

1,75 points

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 0,5 pt

b) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 0,5 pt

c) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ où $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $f^{(n)}$ désigne la dérivée n^{ième} de f 0,75 pt

Exercice 2 :

3,75 points

Le tableau ci-après donne l'évolution du chiffre d'affaire réalisé à l'exportation d'une entreprise.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157

x_i désigne le rang de l'année, y_i désigne l'indice du chiffre d'affaire à l'exportation rapporté à la base 100 en 2000.

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point $M_0(0, 100)$, pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées. 1 pt

2) Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondi au dixième de l'ordonnée de G) 0,5 pt

3) a- Déterminer la valeur arrondi au centième du coefficient de corrélation de la série double.

b- Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Justifier. 0,25 pt

4) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Donner la valeur arrondie au dixième du coefficient directeur de cette droite). 1 pt

5) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaire se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice de l'an 2022. (On donnera la valeur arrondie à l'unité). 0,5 pt

Exercice 3 :

4 points

1) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ 0,5 pt

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

a- Représenter sur l'axe des abscisses du repère précédent les termes u_1, u_2 et u_3 . 0,75 pt

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5 pt

c- Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$ 0,25 pt

d- Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier. 0,25 pt

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \frac{1+u_n}{2-u_n}$.

- a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. **0,5 pt**
- b- Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . **0,5 pt**
- 4) On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$.
Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. **0,5 pt**

Exercice 4 : 6 points

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a- Montrer que l'ensemble de définition de f est la réunion des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$. **0,25**
b- Etudier les limites de f aux bornes de D . **1 pt**
- 2) sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat. **0,25**
- 3) a- Montrer que pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ **0,5 pt**
b- Dresser le tableau de variation de f . **0,75 pt**
- 4) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\alpha \in]1; 2[$. **0,5 pt**
b- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} . **0,25 pt**
- 5) Calculer limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique du résultat trouvé. **0,5 pt**
- 6) Construire soigneusement (C) . **0,75 pt**
- 7) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
a- Justifier que g est une bijection de l'intervalle $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. **0,5 pt**
b- On note (C') la courbe représentative de la bijection réciproque g^{-1} de g . Construire (C') dans le même repère que (C) . **0,75 pt**

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5 Points

M. Priso possède une entreprise de fabrication et de vente des jouets en bois. Il veut intégrer de nouveaux bureaux et son bailleur lui présente deux contrats à partir du premier janvier 2023.

Contrat 1 : Augmentation annuelle de 10%. On note $U_0 = 100000$ FCFA le loyer annuel de 2023, U_n le loyer annuel pour l'année 2023 + n .

Contrat 2 : Augmentation annuelle de 15000 FCFA. On note $V_0 = 100000$ le loyer annuel de 2023, U_n le loyer annuel pour l'année 2023 + n .

Après cinq années de location, ce monsieur évalue les dépenses qui seront éventuellement faites. Ces bureaux sont sur un terrain de forme triangulaire dont les affixes des sommets sont les solutions de l'équation $z^3 + (3 - 8i)z + 16 - 2i = 0$, un des sommets étant repéré par son affixe $2 + 3i$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le double-mètre coûte 3000 FCFA.

Chaque jour, l'entreprise de M. Priso fabrique n jouets avec $n \in [0 ; 60]$. Le coût total de production de ces objets exprimé en FCFA est donné par $c(n) = 10n^2 - 200n + 2000$. Chaque objet est vendu au prix unitaire de 500 FCFA.

Tâches :

- 1) Calculer le bénéfice maximal de cette entreprise si elle écoule toute sa production journalière.
1) Quelle somme va dépenser M. Priso pour clôturer son terrain ? **1,5 pt**
2) Quel est d'après vous le contrat le plus avantageux pour cette location ? **1,5 pt**