COLLEGE PRIVE LAIC YMELE

Examen	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Séquence 2	Mathématiques	07	4h00	TleC	2022/2023

présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

PARTIE A : Utilisation des ressources (15,5 points)

Exercice 1 : 3.25pts (Arithmétique-Nombres complexes)

I- 1. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (distinct de lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ? 0,25pt

2. Détermine tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que :
 i) $ppcm(a\,;b)+pgcd(a\,;b)=a+9$ ii) $2\times 18^{b}=3\times 6^{a}$. 0,75 pt + 0,5 pt

3. Détermine les valeurs possibles de l'entier naturel a tel que $ppcm(a\,;\,6)=72$. 0,5 pt

II-On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$. 0,5 pt
2. Ecris les solutions de cette équation sous la forme exponentielle. 0,5 pt
3. En déduis que le point O et les images ponctuelles des solutions de l'équation ci-dessus forment un triangle équilatéral. 0,25 pt

Exercice 2: 3.5pts (Espaces vectoriels)

On définit dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y=0\ et\ z=0\}$;
$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, -y+z=0\ et\ x=0\}$ et $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2-y=0\}$.

1. H est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? 0,25pt
2. Montre que F et G sont chacun une droite vectorielle dont on précisera une base. 1pt
3. La somme $F+G$ est-elle directe ? Peut-on dire que les sous espaces vectoriels F et G sont supplémentaires ? 0,5pt
4. Détermine $F+G$ puis donner sa dimension , une base et une équation. 1pt
5. On considère les vecteurs $u_1=(0,1,1)$ et $u_2=(1,10)$ de $\mathbb{R}^3$.
 a) Justifie qu'ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$. 0,25pt
 b) Détermine u_3 pour que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. 0,5pt

Exercice 3: 4,75pts (Applications linéaires-Calcul vectoriel)

I- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B}=(\vec{\imath};\,\vec{\jmath};\,\vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ de E associe le vecteur $f(\vec{u})=(-x+3y+2z)\vec{\imath}+\ (-x++z)\vec{\jmath}+\ (-x+3y+2z)\vec{k}$.

1.a)Montre $f$est une application linéaire . 0,5 pt

Détermine le noyau $Ker\,f$ de f (on précisera une base de $Ker\,f$). 0,5 pt

 b) Détermine l'image Imf de f (on précisera une base de Imf). 0,5 pt

 c) f est-elle bijective ?Justifie ta réponse.

 d) A-t-on $Imf\oplus kerf=E$? 0,5 pt

2. Détermine la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'=(\vec{e_1}\,;\vec{e_2};\vec{e_3})$ où $\vec{e_1}=-\vec{\imath}$; $\vec{e_2}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{e_3}=-\vec{\imath}+\vec{k}$ sont des vecteurs de E. 1 pt

II- Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les points $A(1;\ 1;\ 0)$; $B(2;\ 0;\ -1)$ et $C(1;\ -2;\ 1)$.

1.Définis le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace puis donne 3 applications du produit vectoriel. 1 pt

2.Calcule $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis en déduire l'aire du parallélogramme ABCD, où D est un point de l'espace. 0,75 pt

Exercice 4: 4pts (Fonctions continues et strictement monotones-Etude de fonctions)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - sinx$.

1. Montre que $f$est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. 0,5 pt
2. Dresse le tableau de variation de f et celui de sa fonction réciproque. 0,75 pt
3. Justifie que sa dérivée réciproque $(f^{-1})'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. 0,25 pt
4. Montre que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans $]2{,}2\,;2{,}4[$. 0,5 pt
5. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + \frac{1}{2}sinx$. 0,5 pt

   a-Vérifie que $g(\alpha) = \alpha$. 0,5 pt

   b- Montre que pour tout réel x,on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0,5 pt

   c- En déduire que pour tout réel x, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0,5 pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux statistiques, aux nombres complexes et à l'arithmétique pour évaluer ou faire des prévisions d'un budget.

M.TENKEU est un sponsor du club de Mathématiques de l'université des Montagnes.

Le tableau ci-dessous donne la liste des adhérents à ce club jusqu'en 2022.

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'adhérents y_i	95	195	240	280	305	320	340	420

Il souhaite octroyer une aide financière à ce club si le nombre d'adhérents dépasse 800 étudiants au cours d'une année.

Michel, l'un des étudiants de ce club est chaudronnier. Il a été sollicité pour participer à la construction d'un gazoduc. Son travail consiste à souder des têtes de tuyau de gazoducs (voir figures) dont les extrémités des tuyaux sont caractérisées dans le plan par le lieu des points M d'affixe z tels que $|4i\bar{z} + 16 - 12i| = |\overline{6 + 8i}|$.

La soudure d'une dimension d'un mètre coûte $20000fcfa$.

Michel a soudé 29 têtes de gazoduc. Après ce chantier, il souhaite se servir de l'argent qu'il y a gagné pour acheter une voiture de $1\,500\,000fcfa$ pour le travail.

Pour construire une mini cité jouxtant le campus de l'université des montagnes, M. TENKEU souhaite acheter une parcelle de terre ayant la forme d'un trapèze isocèle de hauteur 20 mètres dont les autres dimensions en mètres sont deux entiers naturels a et b vérifiant le système $\begin{cases} ppcm(a;b) = 440 \\ a^2 + b^2 = 4625. \end{cases}$

Le mètre carré de ce terrain coûte 7500 fcfa.

Sur cette parcelle, il souhaite construire une ferme, cependant il dispose d'un montant de $7\,130\,000\ fcfa$ pour l'achat de ce terrain.

Tâches :

1. A partir de quelle année M. TENKEU pourra-t-il octroyer une aide financière à ce club? 1,5 pt
2. Michel pourra-t-il acheter cette voiture ? 1,5 pt
3. M . TENKEU pourra-t-il acheter ce terrain ? 1,5 pt

Jean Rostand a dit « Attendre d'en savoir assez pour agir en toute lumière, c'est se condamner à l'inaction. »