ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES :[15 pts]

Exercice 1 :(4,5 points).

1. On muni le plan complexe d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points A, B et I d'affixes respectives $4+i$, $3i$ et 1.
   (a) Démontrer que IAB est un triangle rectangle isocèle de sens direct. [$1pt$]
   (b) On donne le point J d'affixe i. Calculer $\dfrac{Z_B - Z_J}{Z_A - Z_J}$ et donner la nature du triangle ABJ. [$0,5pt$]
   (c) Démontrer que les points I, A, B et J appartiennent à un même cercle dont on donnera l'affixe du centre et le rayon. [$1pt$]
2. Soit s la similitude directe du plan de centre A qui transforme I en B.
   (a) Démontrer que l'écriture complexe de s est $z' = (1-i)z - 1 + 4i$. [$0,75pt$]
   (b) Donner l'angle et le rapport de s. [$0,75pt$]
   (c) En déduire l'image par s du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. [$0,5pt$]

Exercice 2 :(4,5 points).

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unités : $5cm$ sur les axes.

1. Etudier le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$. [$1pt$]
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$. [$0,5pt$]
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$; puis l'existence d'une asymptote dont une équation est à préciser. [$0,5pt$]
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$. [$1pt$]
4. (a) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) en 0. [$0,5pt$]
   (b) Tracer (D) et (C). [$1,25pt$]

Exercice 3 :(4 points).

1. Le réseau férroviaire d'un pays compte cinq gares A, B, C, D et E, reliées de la façon suivante :

Allant de	A	A	A	B	C	C	D
à	B	C	D	C	D	E	E
Distance en centaines de km	2	6	5	3	1	3	4

   (a) Construire un graphe pondéré associé à ce réseau sur lequel $ABCD$ est un quadrilatère extérieur au triangle CDE. [$1pt$]
   (b) Déterminer par l'algorithme de DIJKSTRA, le plus court chemin de A à E. [$1pt$]
   (c) Calcule les coordonnées du point moyen de cette série statistique. [$0,5pt$]

2. Les droites de régressions de x en y et de y en x d'une serie statistique double sont respectivement données par : $x = 0,135y + 6,65$ et $y = 6x - 38$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage de cette série. $[0,5pt]$
   (b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, puis l'interpréter. $[1pt]$
3. Une boîte contient 3 boules vertes, 2 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de l'une et on considère que tous les tirages sont équiprobables.
   Calculer la probabilité d'obtenir :
   (a) deux boules de la même couleur; $[0,5pt]$
   (b) deux boules de couleurs différentes. $[0,5pt]$

Exercice 4 :(2,5 points).

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x)$.
   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. $[0,5pt]$
   (b) Calculer $f(0)$. $[0,25pt]$
   (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. $[0,5pt]$
   (d) Monter que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. $[0,75pt]$
2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. $[0,5pt]$

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPETENCES :[4,5 pts]

Situation :

Les experts chinois en énergie solaire qui ont installé les lampadaires solaires dans la localité de Sakdje(Région du Nord; Departement du Mayo-Rey; Arrondissement de Tchollire.) ont révélé au Maire de cette localité que la quantité d'énergie solaire en kWh absorbée par ces lampadaires pendant la journée en fonction du temps t en heure est donnée par la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 6; \\ -54 + 12t - \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 6 \leq t \leq 18; \\ 0 & \text{si } 18 \leq t \leq 24. \end{cases}$$

M. le Maire se pose un certain nombre de questions légitimes concernant la capacité de ces plaques solaires à stocker effectivement l'énergie solaire. En répondant aux questions posées ci-après, donne des éléments de réponse à certaines questions que le Maire se pose.

Tâches :

1. Déterminer l'heure où l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires est maximale et donner cette quantité. $[1,5pts]$
2. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires augmente. $[1,5pts]$
3. Est-il vrai qu'il existe deux temps distincts dans la journée où la quantité d'énergie solaire absorbée vaut 6 kWh? $[1,5pts]$

Présentation : $[0,5pt]$